

Министерство образования и науки Украины
Государственное высшее учебное заведение
«Национальный горный университет»

Библиотека иностранного студента

И.П. Гаркуша, В.П. Куринной

Физика

Часть 2. Молекулярная физика и термодинамика

Часть 3.1. Электростатика. Постоянный ток

Учебное пособие для бакалавров отрасли знаний

«Разработка полезных ископаемых»

Днепропетровск

НГУ

2014

ББК 22.3я72

Г43

УДК 53(075.4)

Рекомендовано Ученым советом ДВНЗ НГУ как учебное пособие для бакалавров отрасли знаний 0503 «Разработка полезных ископаемых» (протокол № 10 от 26.10.2011, протокол №5 от 27.05.2014)

Физика. Ч. 2. Молекулярная физика и термодинамика. Ч. 3.1. Электростатика. Постоянный ток. Учебное пособие для бакалавров отрасли знаний 0503 «Разработка полезных ископаемых». /Сост. И.П. Гаркуша, В.П.Куриной. - Днепрпетровск: ДВНЗ «НГУ», 2014. - 174 с.

Пособие составлено в соответствии с программой нормативной дисциплины «Физика» и является изложением второго и третьего из шести содержательных модулей учебной дисциплины, предназначенных для бакалавров отрасли знаний 0503 «Разработка полезных ископаемых». Может быть полезным студентам других технических направлений подготовки, лицам, занимающимся в системе дистанционного образования, а также преподавателям высших технических учебных заведений.

Оглавление

ЧАСТЬ 2

МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

Введение. Предмет молекулярной физики. Динамические и статистические закономерности. Два метода изучения явлений.....	6
Глава 1. Статистический метод	6
§ 1. Молекулярно-кинетические представления о веществе.....	7
§ 2. Уравнение состояния идеального газа.....	11
§ 3. Основное уравнение кинетической теории идеальных газов. Давление.....	12
§ 4. Физический смысл абсолютной температуры.....	15
§ 5. Число степеней свободы молекулы. Средняя энергия молекул.....	16
§ 6. Среднее число столкновений и средняя длина свободного пробега молекул.....	20
§ 7. Распределение Максвелла молекул по скоростям.....	22
§ 8. Барометрическая формула.....	30
§ 9. Распределение Больцмана.....	31
Глава 2. Термодинамический метод	32
§ 10. Внутренняя энергия. Количество теплоты. Работа газа. Первое начало термодинамики ..	32
§ 11. Применение первого начала термодинамики к газовым процессам. Внутренняя энергия и теплоемкость идеального газа.....	37
§ 12. Адиабатный процесс. Уравнение адиабаты идеального газа	42
§ 13. Работа газа в адиабатном процессе.....	45
§ 14. Классическая теория теплоемкости идеального газа.....	46
§ 15. Обратимые и необратимые процессы. Тепловые машины и их КПД. Второе начало термодинамики.	50
§ 16. Цикл Карно.....	56
§ 17. Энтропия.....	59
§ 18. Статистический смысл второго начала термодинамики.....	62
§ 19. Реальные газы. Уравнение Ван-дер-Ваальса.....	66
Глава 3. Явления переноса в газах	70
§ 20. Диффузия.....	71
§ 21. Теплопроводность.....	73
§ 22. Вязкость.....	74
Глава 4. Жидкости	76
§ 23. Строение жидкостей. Поверхностное натяжение.....	76
§ 24. Условия равновесия на границе жидкость – твердое тело. Смачивание.....	80
§ 25. Давление под искривленной поверхностью. Формула Лапласа.....	81
§ 26. Капиллярные явления.....	83
§ 27. Испарение и кипение жидкостей.....	85
§ 28. Понятие о жидких кристаллах.....	87

Глава 5. Элементы физики твердых тел.....	89
§ 29. Особенности кристаллического состояния. Физические типы кристаллов.....	89
§ 30. Краткие сведения об упругих свойствах твердых тел	92
Рекомендованная литература	95

Ч А С Т Ь 3.1

ЭЛЕКТРОСТАТИКА. ПОСТОЯННЫЙ ТОК

Глава 6. Электрическое поле в вакууме.....	97
§ 31. Электрический заряд.....	97
§ 32. Закон Кулона.....	98
§ 33. Электрическое поле. Напряженность электрического поля.....	99
§ 34. Линии вектора напряженности. Поток вектора напряженности.....	103
§ 35. Теорема Гаусса для электростатического поля в вакууме.....	105
§ 36. Применение теоремы Гаусса для нахождения напряженности некоторых полей в вакууме.....	106
§ 37. Работа перемещения заряда в электрическом поле. Потенциал поля.....	111
§ 38. Эквипотенциальные поверхности. Связь между напряженностью и потенциалом.....	115
§ 39. Вычисление разности потенциалов по напряженности поля	118
Глава 7. Электрическое поле в диэлектриках.....	121
§ 40. Диполь во внешнем электрическом поле.....	121
§ 41. Типы диэлектриков. Поляризация диэлектриков.....	122
§ 42. Поляризованность. Диэлектрическая восприимчивость.....	126
§ 43. Электрическое смещение Диэлектрическая проницаемость.....	127
Глава 8. Проводники в электрическом поле.....	130
§ 44. Равновесие зарядов на проводнике.....	130
§ 45. Электрическое поле заряженного проводника.....	132
§ 46. Емкость уединенного проводника.....	133
§ 47. Конденсаторы.....	135
§ 48. Соединение конденсаторов.....	138
Глава 9. Энергия электрического поля.....	141
§ 49. Энергия взаимодействия точечных электрических зарядов.....	141
§ 50. Энергия заряженного проводника и системы проводников. Энергия заряженного конденсатора.....	142
§ 51. Плотность энергии электростатического поля.....	144
Глава 10. Постоянный электрический ток.....	147
§ 52. Постоянный электрический ток, его характеристики и условия существования.....	147
§ 53. Сторонние силы, ЭДС и напряжение.....	149

§ 54. Закон Ома для однородного участка цепи. Электрическое сопротивление проводника.....	152
§ 55. Последовательное и параллельное соединение проводников.....	155
§ 56. Работа, мощность и тепловое действие тока. Закон Джоуля – Ленца.....	157
§ 57. Закон Ома для неоднородного участка цепи	159
§ 58. Закон Ома для замкнутой цепи.....	160
§ 59. Правила Кирхгофа.....	162
§ 60. Элементы классической электронной теории электропроводности металлов.....	165
Рекомендованная литература	174

ЧАСТЬ 2

МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

Введение. Предмет молекулярной физики. Динамические и статистические закономерности. Два метода изучения явлений

Молекулярная физика изучает физические свойства тел в различных агрегатных состояниях в зависимости от их молекулярного строения, сил взаимодействия и характера теплового движения молекул.

В *механике* движение тела однозначно определяется заданными начальными условиями и силами, действующими на тело во время его движения, например, силой тяжести, силами трения и т.д. Зная все эти величины, можно вычислить положение тела в любой последующий момент времени, его скорость и ускорение. Такие явления описываются *динамическими закономерностями*. Типичным примером использования динамических закономерностей является движение тела по наклонной плоскости, расчет полета ракеты, движение планеты вокруг Солнца и т.д.

Однако, такой подход невозможен для описания движения макроскопических систем, состоящих из очень большого числа частиц. Например, в 1 см^3 газа при нормальных условиях содержится колоссальное количество молекул – $2,69 \cdot 10^{19}$. Каждая молекула при этом испытывает примерно миллиард столкновений за одну секунду, в результате чего постоянно изменяется ее скорость, а путь молекулы является очень сложной ломаной линией. Рассчитать такой путь практически невозможно, т.к. для этого потребовалось бы знать пути и скорости всех остальных молекул. Такая задача технически неосуществима. Но если бы даже и удалось провести такие расчеты, то никакой пользы от этого не было бы, т.к. *в физических явлениях, определяемых действием огромного числа частиц, возникают новые качественные особенности – статистические закономерности*. Так, если бы удалось решить уравнения движения всех $2,69 \cdot 10^{19}$ молекул, то из этого нельзя было бы получить даже простейшего закона Бойля-Мариотта.

Законы молекулярной физики нельзя свести к законам механики. Движение каждой частицы строго обусловлено причинами, оно подчиняется законам механики. Но благодаря огромному числу соударений, скорость частицы претерпевает столько изменений, что практически не зависит от начальных условий. Такое беспорядочное хаотическое движение молекул называется *тепловым*. Фундаментальное свойство теплового движения – его способность «заставлять» вещество макроскопических тел «забывать» свое начальное состояние. Так, если в сосуд впустить некоторое количество газа, то в изолированной системе через некоторое время устанавливается состояние, при котором все параметры системы будут оставаться постоянными. Такое состояние называется стационарным. После установления стационарного состояния давление опреде-

лится из уравнения Клапейрона – Менделеева и никак не будет зависеть от того, каковы были начальные скорости молекул, направления их движения и т.д. Наблюдения за отдельными молекулами невозможно. Мы можем наблюдать лишь результаты коллективного действия частиц без учета динамики отдельных частиц.

Существует два метода изучения свойств вещества и физических явлений, происходящих в макроскопических телах, т. е. телах, состоящих из очень большого числа частиц (молекул, атомов, электронов, фотонов и др.) – *статистический и термодинамический*.

Статистический метод для каждого конкретного тела с учетом свойств образующих его частиц и взаимодействий между ними создает модель его молекулярного строения. На основе этих моделей методами математической статистики (ввиду большого числа молекул) объясняются непосредственно наблюдаемые на опыте свойства тел (такие как давление, температура, вязкость, теплопроводность и т.п.) как *суммарный, усредненный результат действия отдельных молекул*.

В отличие от статистического метода **термодинамический метод** не ставит своей задачей выяснение внутреннего механизма явлений, не рассматривает конкретные молекулярные картины. Термодинамика исходит из общих, установленных опытом положений и оперирует непосредственно наблюдаемыми величинами. Такое описание возможно благодаря введению понятия об энергии, способах ее передачи и превращения из одних видов в другие.

Термодинамика опирается на небольшое число фундаментальных законов, справедливых всегда и для всех макроскопических тел. Сведения о конкретном виде тел (например, о данной газе, жидкости или твердом теле) термодинамика берет из опыта (обычно в виде так называемого уравнения состояния или зависимости физических величин от температуры, давления или других параметров).

Статистический и термодинамический методы дополняют друг друга. Статистический метод позволяет определить параметры системы, необходимые в термодинамическом методе для описания происходящих в ней процессов.

Контрольные вопросы

1. По каким причинам неосуществимо динамическое описание системы многих частиц?
2. Чем отличаются статистический и термодинамический методы описания макросистем?

Глава 1. СТАТИСТИЧЕСКИЙ МЕТОД

§ 1. Молекулярно-кинетические представления о веществе

Согласно молекулярно-кинетическим представлениям любое тело (твердое, жидкое или газообразное) состоит из мельчайших обособленных частиц, называемых молекулами.

Молекула – это наименьшая частица вещества, сохраняющая его химические свойства.

Молекулы находятся в непрерывном беспорядочном, хаотическом движении, интенсивность которого зависит от температуры тела. Такое движение молекул называется *тепловым*.

Масса и размеры молекул. Относительная молекулярная масса M_r данного вещества – это безразмерная величина, равная отношению массы молекулы этого вещества к $1/12$ массы атома углерода ^{12}C .

Масса, равная $1/12$ массы атома углерода ^{12}C , называется атомной единицей массы (а.е.м.).

$$1 \text{ а.е.м.} = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ кг.}$$

Таким образом, масса молекулы равна

$$m_0 = M_r \cdot 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ кг.}$$

Одной из основных единиц СИ является единица количества вещества, называемая молем.

Моль – количество вещества, в котором содержится число частиц, равное числу Авогадро N_A :

$$N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ 1/моль.}$$

Этими частицами могут быть атомы, молекулы, электроны, фотоны или другие структурные единицы.

Массу моля обозначают буквой M и называют *молярной массой*. Масса моля, выраженная в граммах, численно равна относительной молекулярной массе M_r . Эти массы приведены в периодической системе элементов Менделеева, где у каждого элемента первое число – порядковый номер, а второе – молярная масса в г/моль. Молярная масса M имеет в СИ размерность кг/моль. Следовательно

$$M = M_r \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль.}$$

Пример 1.1. Определить массу моля углекислого газа CO_2 .

$$M_{\text{CO}_2} = (12 + 2 \cdot 16) \cdot 10^{-3} = 44 \cdot 10^{-3} \text{ (кг/моль).}$$

Оценку линейных размеров (диаметра) молекул можно получить на примере воды. По таблице Менделеева масса моля H_2O

$$M_{\text{H}_2\text{O}} = 18 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль.}$$

Плотность воды в жидком состоянии $\rho_{\text{H}_2\text{O}} = 1 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$. Отсюда объем одного моля воды

$$V_{\text{H}_2\text{O}} = M_{\text{H}_2\text{O}} / \rho_{\text{H}_2\text{O}} = 18 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3/\text{моль.}$$

Один моль любого вещества содержит одно и то же число N_A молекул (число Авогадро). Тогда объем, приходящийся на одну молекулу воды

$$V_1 = V_{\text{H}_2\text{O}} / N_A \approx 3 \cdot 10^{-29} \text{ м}^3.$$

В жидкостях и твердых телах молекулы располагаются почти вплотную друг к другу, т.е. V_1 есть объем молекулы воды. Отсюда следует, что линейные размеры (диаметр) молекулы примерно равен

$$D \approx \sqrt[3]{V_1} \approx 3 \cdot 10^{-10} \text{ м} = 0,3 \text{ нм.}$$

Молекулы других простых веществ имеют размеры того же порядка.

Термодинамические параметры. Физические величины, характеризующие состояние системы, называются *термодинамическими параметрами* или параметрами состояния. Такими величинами являются масса m , молярная масса M , объем V , давление p и температура T .

Простейшим агрегатным состоянием вещества является газообразное, поэтому мы начнем изложение молекулярной физики с рассмотрения свойств газов.

Рассмотрим подробнее основные параметры состояния газов. Не останавливаясь на массе и объеме (объем газа всегда совпадает с объемом сосуда, в котором он находится), определим параметры p и T .

Давление. Благодаря тепловому движению своих частиц газ оказывает давление на стенки заключающего его сосуда. Давление – одно из основных свойств газа. Именно своим давлением газ чаще всего и обнаруживает свое присутствие. Давлением называется физическая величина, численно равная силе, действующей на единицу площади поверхности по нормали к ней: $p = \frac{F_n}{S}$, если силы распределены вдоль поверхности равномерно, или в общем случае

$$p = \frac{dF_n}{dS}.$$

Размерность давления есть размерность силы, деленной на размерность площади. Единица измерения давления в СИ

$$1 \text{ Н/м}^2 = 1 \text{ Па.}$$

Давление столба ртути высотой 760 мм называется нормальным атмосферным давлением (1 атм). Эта внесистемная единица равна

$$760 \text{ мм. рт. ст.} = 1 \text{ атм} = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Па.}$$

Давление обладает следующим важным свойством: в состоянии равновесия в газе, не находящемся во внешнем поле, давление p всегда одинаково во всех участках среды.

Температура. Температура занимает особое место в ряду физических величин. Это понятие не является простым, хотя в обыденной жизни используется очень часто, и к нему мы привыкли. Физический смысл температуры будет изложен в дальнейшем. Здесь же мы остановимся на одном свойстве температуры.

Если поместить кусок нагретого металла на лед, то лед будет плавиться, а металл – охлаждаться. Между двумя телами происходит теплообмен, если при контакте между ними внутренняя энергия одного тела уменьшается, а энергия другого увеличивается. В рассмотренном примере энергия нагретого металла уменьшается, а энергия льда увеличивается. (Мы полагаем, что работа, связанная с изменениями объема этих тел, исчезающе мала и имеет место лишь изменение внутренней энергии тел).

Каждому телу можно приписать некоторую величину, называемую температурой. Энергия передается путем теплообмена от тела с более высокой температурой к телу с более низкой температурой. Такой переход энергии продолжается до тех пор, пока температуры не выровняются и передача энергии не прекратится, наступит состояние теплового равновесия.

Температуры всех частей системы, находящихся в состоянии теплового равновесия, одинаковы и тем больше, чем больше энергия системы. Таким образом, мы подчеркнули *свойство температуры определять направление теплового обмена*.

При нагревании меняются почти все физические свойства тел: длина, объем, давление, упругие свойства, электропроводимость и т.д. Этим пользуются для определения температуры.

При этом выбирается термометрическое тело и градуировка температурной шкалы. Наиболее распространенной в технике и в быту является *стоградусная шкала*. Участок этой шкалы между точками замерзания и кипения воды при нормальном атмосферном давлении делится на 100 одинаковых частей. Такая часть называется *градусом Цельсия* (обозначается t °С). Таким образом, точка замерзания воды соответствует 0 °С, а точка кипения – 100 °С.

В США используют также шкалу Фаренгейта (обозначается t °F). За нуль своей шкалы Г.Фаренгейт принял самую низкую температуру, которую он мог воспроизвести в своей лаборатории – точку плавления смеси соли и льда. Точке замерзания воды в этой шкале соответствует температура 32 °F, а точке кипения – 212 °F. Этот интервал разделен не на сто, а на 180 частей, аналогично угловым градусам. Поэтому градус Фаренгейта меньше градуса Цельсия (множитель $100/180 = 5/9$). Связь температур в этих двух шкалах дается формулой

$$t \text{ } ^\circ\text{F} = 32 + (9/5) t \text{ } ^\circ\text{C}. \quad (1.1)$$

В физике пользуются *абсолютной шкалой температур* T (шкалой Кельвина), которая не зависит от термометрического тела, а устанавливается на основе законов термодинамики. Единица термодинамической температуры – *кельвин* (К) является одной из основных единиц СИ. Величина одного градуса в шкале Кельвина (обозначается К) совпадает с градусом Цельсия, а за нуль взята температура, при которой прекращается тепловое движение молекул. Связь абсолютной температуры T с температурой по стоградусной шкале дается соотношением

$$T \text{ К} = t \text{ } ^\circ\text{C} + 273,15. \quad (1.2)$$

Таким образом, *абсолютному нулю температуры* $T = 0 \text{ К}$ в стоградусной шкале соответствует температура $t = -273,15 \text{ } ^\circ\text{C}$. Это значение было установлено опытным путем.

Пример 1.2. Приведем некоторые температуры, наблюдаемые в природе.

Внутренность горячих звезд	10^9 К	Замерзание воды	273, 15 К
Термоядерная реакция	10^8 К	Сжижение азота	77 К
Внутренность Солнца	10^7 К	Сжижение гелия	4 К
Поверхность Солнца	10^4 К	Температура вселенной (сегодня)	2, 73 К
Газовая турбина	10^3 К	Самая низкая достигнутая температура	$2 \cdot 10^{-8} \text{ К}$.
Кипение воды	373, 15 К		

§ 2. Уравнение состояния идеального газа

Опыт показывает, что в обычных условиях (т.е. при далеких от абсолютного нуля температурах и давлениях, не слишком превышающих атмосферное) газы, в отличие от жидкостей и твердых тел, занимают весь предоставленный им свободный объем и относительно легко сжимаются. Следовательно, силы притяжения между молекулами газа должны быть очень малы, а сами молекулы занимают лишь небольшую часть объема сосуда. Это позволяет с хорошей точностью пользоваться моделью идеального газа.

Газ называется *идеальным*, если:

1) суммарный объем молекул пренебрежимо мал по сравнению с объемом сосуда, в котором он заключен;

2) взаимодействие между молекулами пренебрежимо мало за исключением тех случаев, когда молекулы сближаются на расстояния, сравнимые с их собственными размерами.

При таких допущениях молекулы можно считать материальными точками, которые являются совершенно свободными, т.е. движутся прямолинейно и равномерно, как всегда движутся тела, не подверженные действию каких-либо сил.

Опытным путем установлено, что любая система, предоставленная самой себе, через некоторое время приходит в состояние *равновесия*. При этом выравниваются температуры и давления отдельных частей системы, так что параметры системы принимают определенные и постоянные значения.

В равновесном состоянии между параметрами системы имеется определенная связь: заданные два параметра системы (например, температура и объем) однозначно определяют третий (в данном случае – давление). Математически эту связь можно описать уравнением состояния $F(V, p, T) = 0$. Конкретный вид функции F зависит от свойств системы.

Эксперименты показали, что при обычных условиях, т.е. при комнатной температуре и атмосферном давлении параметры состояния таких газов, как кислород и азот, подчиняются уравнению

$$pV = \frac{m}{M} RT. \quad (2.1)$$

Его называют *уравнением состояния идеального газа* или уравнением Клапейрона – Менделеева. Здесь R – *газовая постоянная*:

$$R = 8,314 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}. \quad (2.2)$$

Особенно хорошо подчиняются этому уравнению гелий и водород.

Умножим и разделим правую часть уравнения (2.1) на постоянную Авогадро N_A :

$$pV = \frac{m}{M} N_A \frac{R}{N_A} T.$$

Число молей $\frac{m}{M}$, умноженное на число Авогадро N_A , даст число молекул N , содержащихся в массе m газа

$$N = \frac{m}{M} N_A. \quad (2.3)$$

Разделив это число на объем V газа, получим число молекул в единице объема (концентрацию), которое обозначают буквой n .

$$n = \frac{N}{V}. \quad (2.4)$$

Отношение двух констант R/N_A дает важную для всех разделов физики новую константу k , называемую *постоянной Больцмана*:

$$k = \frac{R}{N_A} = \frac{8,31 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})}{6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}} = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж}/\text{К}. \quad (2.5)$$

В итоге получим еще одну форму записи уравнения состояния идеального газа:

$$p = nkT. \quad (2.6)$$

Пример 2.1. В сосуде емкостью 20 л при нормальных условиях находится азот. Определить: 1) количество вещества ν ; 2) массу m азота; 3) концентрацию n его молекул в сосуде; 4) плотность азота в этих условиях.

1) Из уравнения состояния идеального газа $pV = \frac{m}{M} RT$ определим число молей (количество вещества):

$$\nu = \frac{m}{M} = \frac{pV}{RT} = \frac{1,013 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-2}}{8,31 \cdot 273,15} = 0,89 (\text{моль}).$$

2) Учитывая, что молярная масса азота $M = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, получим

$$m = \nu M = 0,89 \cdot 28 \cdot 10^{-3} = 24,9 \cdot 10^{-3} (\text{кг}) = 24,9 \text{ г}.$$

3) Из уравнения состояния, записанного в виде $p = nkT$, определим концентрацию

$$n = \frac{p}{kT} = \frac{1,013 \cdot 10^5}{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 273,15} = 2,69 \cdot 10^{25} (\text{м}^{-3}).$$

4) По определению плотность

$$\rho = \frac{m}{V}.$$

Ее можно определить из уравнения состояния идеального газа

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{pM}{RT} = \frac{1,013 \cdot 10^5 \cdot 28 \cdot 10^{-3}}{8,31 \cdot 273,15} = 1,25 \text{ кг}/\text{м}^3.$$

§ 3. Основное уравнение кинетической теории идеальных газов. Давление

Исходя из молекулярно-кинетических представлений, раскроем происхождение и физический смысл такого непосредственно наблюдаемого на опыте параметра как давление.

Молекулы газа ударяют о стенку сосуда, в котором он заключен, и тем самым создают давление газа на стенку.

Давление, испытываемое стенкой сосуда, определяется силами, возникающими при столкновении молекул с этой стенкой.

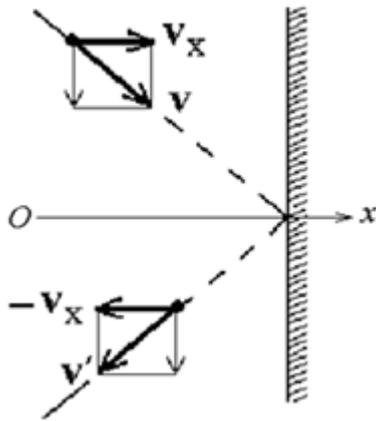


Рис. 3.1.

Пусть некоторая молекула движется в сосуде со скоростью v (рис. 3.1). Скорость можно разложить на три составляющих, одна из которых v_x перпендикулярна стенке сосуда (рис. 3.1). После соударения со стенкой, которое будем полагать абсолютно упругим, молекула изменит только направление составляющей скорости v_x на обратное. Численное значение этой составляющей при этом не изменится. Следовательно, приращение импульса молекулы будет равно

$$-mv_x - (mv_x) = -2mv_x, \quad (3.1)$$

(полезно напомнить, что приращение – это разность между конечным и начальным значениями).

Такой же импульс, но в противоположном направлении ($2mv_x$) получит при ударе стенка согласно закону сохранения импульса.

Пусть теперь на некоторую площадку ΔS стенки (рис. 3.2) в единицу времени попадает N молекул, составляющие скорости которых, перпендикулярные ΔS , равны v_x .

По второму закону Ньютона сила, действующая на материальную точку, равна скорости изменения импульса материальной точки. Применительно к данному случаю сила, действующая на стенку, равна импульсу, сообщаемому стенке в единицу времени: В проекциях на ось Ox :

$$F = 2mv_x N. \quad (3.2)$$

В единицу времени до стенки ΔS дойдут только те молекулы, которые находятся от нее не дальше, чем на расстояние v , т.е. те молекулы, которые заключены в объеме цилиндра с площадью основания ΔS и образующей v . Объем такого цилиндра, очевидно, равен

$$v_x \Delta S.$$

Если в единице объема содержится n молекул, то их число в объеме $v_x \Delta S$ равно $n v_x \Delta S$.

Из них только половина попадает на площадку ΔS . Остальные в силу полной хаотичности движения молекул движутся не к стенке, а от нее. Следовательно, в единицу времени о площадку ΔS ударяется

$$N = \frac{nv_x \Delta S}{2} \quad (3.3)$$

молекул. Сила, испытываемая площадкой ΔS от ударов всех N молекул, согласно (3.2) равна

$$F = nmv_x^2 \Delta S. \quad (3.4)$$

По определению давление p равно отношению численного значения силы, действующей на участок поверхности тела по нормали к нему, к величине площади:

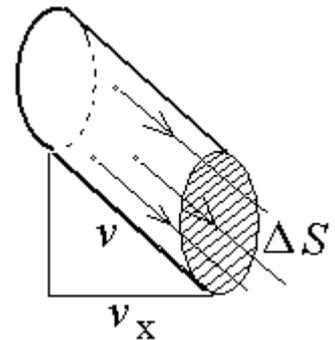


Рис. 3.2.

$$p = \frac{F}{\Delta S}. \quad (3.5)$$

Следовательно, давление газа на стенку равно

$$p = \frac{F}{\Delta S} = nmv_x^2. \quad (3.6)$$

Таково было бы давление газа, если бы все молекулы имели одинаковые составляющие скоростей v_x^2 .

В действительности скорости молекул различны. Разделим молекулы на группы так, чтобы молекулы каждой группы имели приблизительно одинаковые скорости. Пусть из числа n молекул, содержащихся в единице объема, n_1 молекул имеют скорости v_1 , n_2 молекул – скорости v_2 , ..., n_i молекул – скорости v_i и т.д.

Очевидно,

$$\sum n_i = n_1 + n_2 + n_3 + \dots = n. \quad (3.7)$$

Давление p_x газа на какую-нибудь площадку ΔS , перпендикулярную оси Ox , равно сумме давлений, испытываемых площадкой со стороны каждой их групп молекул:

$$p_x = n_1 m v_{x1}^2 + n_2 m v_{x2}^2 + n_3 m v_{x3}^2 + \dots = m \sum n_i v_{xi}^2. \quad (3.8)$$

Аналогично давление на любую площадку, перпендикулярную осям Oy и Oz , определится равенствами

$$p_y = n_1 m v_{y1}^2 + n_2 m v_{y2}^2 + n_3 m v_{y3}^2 + \dots = m \sum n_i v_{yi}^2. \quad (3.8, a)$$

$$p_z = n_1 m v_{z1}^2 + n_2 m v_{z2}^2 + n_3 m v_{z3}^2 + \dots = m \sum n_i v_{zi}^2. \quad (3.8, б)$$

Согласно закону Паскаля, который является следствием беспорядочности молекулярных движений, давление газа в любом направлении должно быть одним и тем же, т.е.

$$p_x = p_y = p_z = p. \quad (3.9)$$

Сложим правые и левые части уравнений (3.8), (3.8, а) и (3.8, б).

$$p_x + p_y + p_z = 3p = m \sum n_i (v_{xi}^2 + v_{yi}^2 + v_{zi}^2).$$

Так как

$$v_{xi}^2 + v_{yi}^2 + v_{zi}^2 = v_i^2,$$

то

$$3p = m \sum n_i v_i^2. \quad (3.10)$$

Величина $\sum n_i v_i^2$ – это сумма квадратов скоростей всех молекул в единице объема.

Введем среднее значение квадрата скорости молекул. По определению среднего

$$\langle v^2 \rangle = \frac{\sum n_i v_i^2}{n}. \quad (3.11)$$

Корень квадратный из среднего значения квадрата скоростей называют *средней квадратичной скоростью* молекул

$$v_{кв} = \sqrt{\langle v^2 \rangle}. \quad (3.12)$$

Окончательно из (3.10) и (3.11) получим

$$p = \frac{1}{3} nm \langle v^2 \rangle. \quad (3.13)$$

Поскольку масса всех молекул полагается одинаковой, в формуле (3.13) m можно внести под знак среднего. Разделив и умножив на 2, получим

$$p = \frac{2}{3} n \langle \frac{mv^2}{2} \rangle = \frac{2}{3} n \langle \varepsilon_{\text{пост}} \rangle. \quad (3.14)$$

Величина $\langle \frac{mv^2}{2} \rangle = \langle \varepsilon_{\text{пост}} \rangle$ представляет собой среднюю кинетическую энергию поступательного движения одной молекулы газа.

Таким образом, ***давление равно двум третям средней кинетической энергии поступательного движения молекул, содержащихся в единице объема газа.***

Уравнение (3.14) называется *основным уравнением кинетической теории газов*. Оно устанавливает связь между молекулярными величинами (масса и скорость молекул) и величиной давления, характеризующей газ как целое, и непосредственно измеряемой на опыте.

§ 4. Физический смысл абсолютной температуры

Из сравнения полученных уравнений (2.6) и (3.14)

$$p = nkT \text{ и } p = \frac{2}{3} n \langle \varepsilon_{\text{пост}} \rangle$$

получим

$$\langle \varepsilon_{\text{пост}} \rangle = \frac{3}{2} kT. \quad (4.1)$$

Эта формула раскрывает физический смысл ***абсолютной температуры T : температура T пропорциональна средней кинетической энергии поступательного движения молекул.*** Т. о. абсолютная температура T является мерой энергии движения молекул и характеризует интенсивность их теплового движения.

Следует отметить, что средняя энергия молекул зависит только от температуры и не зависит от массы молекул. Если, например, смешать несколько газов, например водород H_2 , кислород O_2 и газ с молекулами, в сотни раз более тяжелыми, чем молекулы водорода, то при условии, что смесь будет находиться в состоянии равновесия, средняя кинетическая энергия молекул всех газов будет одинакова. Тяжелые молекулы будут двигаться с малыми скоростями, такими, чтобы их средняя кинетическая энергия как раз равнялась энергии легких молекул.

Если привести в контакт два газа с различными температурами (различными значениями средней кинетической энергии поступательного движения молекул $\langle \varepsilon_{\text{пост}} \rangle$), то через некоторое время значения $\langle \varepsilon_{\text{пост}} \rangle$ станут одинаковыми. Произойдет это выравнивание благодаря тому, что молекулы обоих газов, сталкиваясь друг с другом, обмениваются энергией. При этом быстрые молекулы за-

медляются, а медленные начинают двигаться быстрее. Температуры газов выравниваются.

Абсолютная температура T не может быть отрицательной, т.к. согласно (4.1) она пропорциональна $\langle \epsilon_k \rangle$, которая не может быть отрицательной. Значение $T = 0$ называется абсолютным нулем температуры. При абсолютном нуле прекращается тепловое движение молекул.

Согласно современным представлениям температура нуль кельвин недостижима (третий закон термодинамики).

Из формулы (4.1) видно, что температура так же, как давление, определяется *средней* кинетической энергией молекул идеального газа. Поэтому температура, как и давление, является статистической величиной. Нельзя говорить о температуре одной или немногих молекул.

Пример 4. 1. Определим среднюю кинетическую энергию поступательного движения молекул идеального газа: а) при температуре 1 К; б) при нормальных условиях; в) при температуре 10^3 К. Ответ выразим в единицах энергии, называемых электронвольтами, $1 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Дж.

$$а) \langle \epsilon_{\text{пост}} \rangle = \frac{3}{2} kT = 2,07 \cdot 10^{-23} \text{ Дж} = 1,29 \cdot 10^{-4} \text{ эВ.}$$

$$б) \langle \epsilon_{\text{пост}} \rangle = 5,65 \cdot 10^{-21} \text{ Дж} = 3,53 \cdot 10^{-2} \text{ эВ.}$$

$$в) \langle \epsilon_{\text{пост}} \rangle = 2,07 \cdot 10^{-20} \text{ Дж} \approx 0,13 \text{ эВ.}$$

Как видим, энергии, связанные с хаотическим движением молекул, очень малы.

Пример 4. 2. Как изменится температура газа, если из него удалить самые медленные молекулы?

Чтобы ответить на поставленный вопрос, надо посмотреть, как изменится *средняя* кинетическая энергия движения молекул. Если изъять из газа наиболее медленные молекулы, полная кинетическая энергия всех молекул уменьшится, а температура газа повысится, так как увеличится средняя энергия.

§ 5. Число степеней свободы молекулы. Средняя энергия молекул

Если молекула состоит из одного атома, то ее удобно рассматривать как материальную точку. Но в случаях, когда молекула состоит из двух, трех и более атомов такое описание недостаточно. В связи с этим вводится понятие числа степеней свободы молекул.

Числом i степеней свободы молекулы называется наименьшее число независимых координат, определяющих ее положение и конфигурацию в пространстве.

Поскольку изменение со временем любой координаты соответствует какое-либо движение тела, число степеней свободы молекулы можно определить как *число независимых движений*, которые она может совершать.

При движении точки по прямой линии для оценки ее положения необходимо знать одну координату

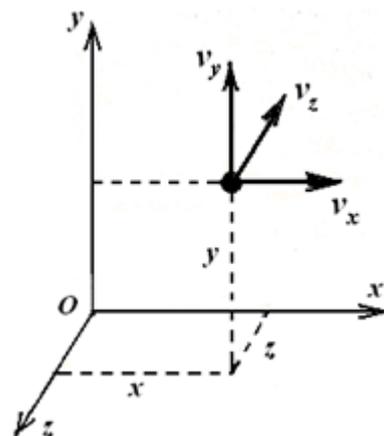


Рис. 5.1.

ту, т.е. точка имеет одну степень свободы. Если точка движется по плоскости, ее положение характеризуется двумя координатами; при этом точка обладает двумя степенями свободы. Положение точки в пространстве определяется тремя координатами.

Молекулы, которые состоят из одного атома и считаются материальными точками, имеют три степени свободы (инертные газы, например, аргон, гелий). Вектор скорости молекулы имеет три компоненты v_x, v_y, v_z , которые статистически равновероятны. (рис. 5.1).

Двухатомную молекулу, например, молекулу водорода H_2 , азота N_2 и др., можно представить в виде системы, состоящей из двух атомов, расположенных на некотором расстоянии друг от друга (рис. 5.2). Если расстояние между атомами не меняется (такие молекулы называются «жесткими»), то такая система

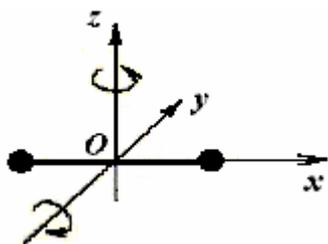


Рис. 5.2.

имеет пять степеней свободы, $i = 5$. Действительно, положение и конфигурация такой молекулы определяется: тремя координатами ее центра масс, которыми определяется поступательное движение молекулы как целого, и двумя координатами (углами поворота), определяющими возможные вращения молекулы вокруг осей Oy и Oz . Описание вращения относительно третьей оси, совпадающей с осью молекулы, не имеет

смысла, т.к. атомы мы представляем материальными точками, вращение которых не происходит.

Принято говорить, что двухатомная молекула имеет три поступательные и две вращательные степени свободы.

Нетрудно видеть, что трехатомные молекулы имеют 6 степеней свободы: три степени свободы поступательного движения и три степени свободы вращения вокруг осей Ox, Oy и Oz (рис. 5.3).

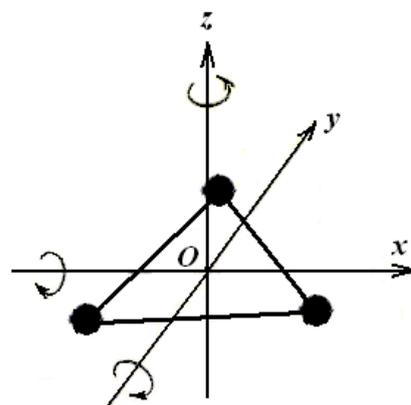


Рис. 5.3

Это число степеней свободы не изменится при переходе к молекулам, состоящим из 4, 5, ..., n атомов.

Согласно молекулярно-кинетической теории газов движение молекул носит беспорядочный характер; эта беспорядочность относится ко всем видам движения молекулы. Ни один из видов движения не имеет преимущества перед другим.

Мы видели, что средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул равна $\frac{3}{2}kT$ и что поступательному движению соответствуют три степени свободы.

Значит, на одну степень свободы приходится энергия $\frac{1}{2}kT$. Но все виды движения равноправны. Молекулы сталкиваются, и при этом может случиться

так, что энергия поступательного движения перейдет в энергию вращательного движения. Поэтому на каждую из вращательных степеней свободы должно приходиться в среднем то же количество энергии $\frac{1}{2}kT$.

Это утверждение известно как **закон Больцмана о равномерном распределении энергии по степеням свободы**.

Если система молекул находится в тепловом равновесии при температуре T , то средняя кинетическая энергия равномерно распределена между всеми степенями свободы и для каждой степени свободы молекулы она равна $\frac{1}{2}kT$.

Если двухатомная молекула упругая, то возможны колебания атомов (рис. 5.4) и необходима еще одна степень свободы (расстояние между атомами). Ее называют колебательной.

Поэтому к трем поступательным (координаты центра масс) и двум вращательным (углы поворота) степеням свободы надо добавить еще одну колебательную степень свободы (расстояние между атомами), так что полное число степеней свободы станет равным шести.

Если молекула состоит из n атомов, нежестко связанных между собой, то она имеет $3n$ степеней свободы т.к. каждый атом имеет три степени свободы. Из этого числа три степени свободы поступательные и три вращательные (за исключением случая, когда атомы расположены на одной прямой).

Таким образом, нелинейная n -атомная молекула имеет в общем случае

$$i_{\text{кол}} = 3n - 6 \quad (5.1)$$

колебательных степеней свободы.

Следовательно, для трехатомной молекулы число колебательных степеней свободы равно $i_{\text{кол}} = 3 \cdot 3 - 6 = 3$, для четырехатомной: $i_{\text{кол}} = 3 \cdot 4 - 6 = 6$ и т.д.

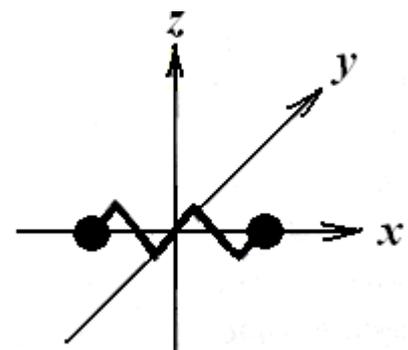


Рис. 5.4.

Столкновение молекул может породить и колебательное движение в них, так что закон равномерного распределения относится также и к колебательным степеням свободы молекул. Но при колебаниях молекула будет обладать как кинетической энергией колебаний, так и потенциальной. В теории колебаний доказывается, что при колебательном движении средние значения кинетической и потенциальной энергий равны между собой. Поэтому *колебательным степеням свободы следует приписывать удвоенную энергию kT*

Тогда средняя энергия молекулы будет равна

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{i}{2} kT, \quad (5.2)$$

где i – сумма числа поступательных ($i_{\text{пост}}$), вращательных ($i_{\text{вращ}}$) и удвоенного числа колебательных ($i_{\text{кол}}$) степеней свободы

$$i = i_{\text{пост}} + i_{\text{вращ}} + 2 i_{\text{кол}}. \quad (5.3)$$

Пример 5.1. Определить среднюю кинетическую энергию вращательного движения молекул оксида углерода CO при температуре $T = 500$ К.

Химическая формула оксида углерода показывает, что молекула этого газа содержит два атома. Число вращательных степеней свободы для двухатомной молекулы равно двум и, поскольку на каждую степень свободы приходится в среднем энергия, равная $\frac{1}{2}kT$, получим

$$\langle \varepsilon_{\text{вращ}} \rangle = 2 \cdot \frac{1}{2} kT = kT = 6,9 \cdot 10^{-21} \text{ Дж}.$$

Пример 5.2. Газ состоит из жестких двухатомных молекул, концентрация которых $n = 3 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$. При некоторой температуре средняя кинетическая энергия молекулы равна $\langle \varepsilon \rangle = 2 \cdot 10^{-20}$ Дж. Каково давление такого газа?

Пример подобран так, чтобы подчеркнуть важную особенность – давление определяется только поступательными степенями свободы. У данных молекул число степеней свободы $i = 5$ (3 пост + 2 вращ), следовательно, на поступательную энергию приходится $\frac{3}{5} \langle \varepsilon \rangle$. Согласно основному уравнению молекулярно-кинетической теории

$$p = \frac{2}{3} n \langle \varepsilon_{\text{пост}} \rangle.$$

Откуда давление

$$p = \frac{2}{3} n \frac{3}{5} \langle \varepsilon \rangle = \frac{2}{5} n \langle \varepsilon \rangle = \frac{2}{5} 3 \cdot 10^{25} \cdot 2 \cdot 10^{-20} \text{ Па} = 2,4 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

Пример 5.3. Чему равны средние кинетические энергии поступательного и вращательного движения всех молекул, которые содержатся в $m = 2$ кг водорода при температуре $T = 400$ К?

Будем считать водород идеальным газом. Молекула водорода двухатомная, связь между атомами полагаем жестким, т.е. колебательных степеней свободы не учитываем. Тогда число степеней свободы молекулы водорода $i = 5$. В среднем на одну степень свободы приходится энергия $\langle \varepsilon_i \rangle = \frac{1}{2} kT$, где k – постоянная Больцмана, T – абсолютная температура.

Поступательному движению приписывается три ($i_n = 3$), а вращательному движению двухатомной молекулы – две ($i_{\text{вращ}} = 2$) степени свободы. Средние энергии

$$\langle \varepsilon_{\text{пост}} \rangle = \frac{3}{2} kT, \quad \langle \varepsilon_{\text{вращ}} \rangle = \frac{2}{2} kT.$$

Число молекул в произвольной массе газа $N = \nu N_A = \frac{m}{M} N_A$, где ν – число молей, N_A – постоянная Авогадро.

Тогда средняя кинетическая энергия поступательного движения всех молекул водорода будет равна

$$\langle \varepsilon_{\text{пост}} \rangle = \frac{3}{2} kT \cdot N = \frac{3m}{2M} RT,$$

где $R = kN_A$ – газовая постоянная.

Аналогично средняя кинетическая энергия вращательного движения молекул водорода

$$\langle \varepsilon_{\text{вращ}} \rangle = \frac{m}{M} RT.$$

Подставляя числовые значения, получим

$$\langle \varepsilon_{\text{ном}} \rangle = 4,99 \cdot 10^6 \text{ Дж. } \langle \varepsilon_{\text{об}} \rangle = 3,32 \cdot 10^6 \text{ Дж.}$$

Закон равномерного распределения получен на основе классических (неквантовых) представлений о характере движения молекул. Поэтому он является приближенным и нарушается в тех случаях, когда становятся существенными квантовые эффекты.

§ 6. Среднее число столкновений и средняя длина свободного пробега молекул

Молекулы газа, находясь в тепловом движении, непрерывно сталкиваются. «Столкновения» не следует понимать буквально – это процесс взаимодействия между молекулами, в результате которого молекулы изменяют направление своего движения и модуль скорости.

Хотя молекулы нельзя рассматривать как жесткие шарики, удобным оказывается понятие эффективного диаметра молекул d . Под ним понимают минимальное расстояние, на которое сближаются при столкновении центры двух молекул (рис. 6.1).

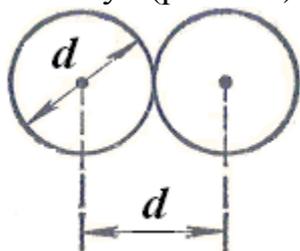


Рис. 6.1.

Величина $\sigma = \pi d^2$ называется эффективным сечением молекулы.

С увеличением энергии движения молекул (с повышением температуры) их эффективный диаметр d уменьшается. Для большинства газов значения d лежат в пределах от 0,2 до 0,5 нм.

Путь молекулы в газе представляет собой ломаную линию, каждый излом траектории отмечает место столкновения. Расстояние, которое молекула проходит между двумя последовательными столкновениями, называется *длиной свободного пробега*. Так как молекул в газе чрезвычайно много, то расстояния между двумя очередными столкновениями меняются случайным образом, и поэтому следует говорить только о *среднем* значении этой величины λ .

Определим среднее число $\langle z \rangle$ столкновений, испытываемых молекулой в единицу времени. Для этого сделаем следующие допущения. Предположим, что все молекулы, кроме одной, застыли неподвижно на местах.

Проследим за движением выделенной нами молекулы. Ударившись об одну из неподвижных молекул, она будет лететь прямолинейно до тех пор, пока не столкнется с какой-либо другой неподвижной молекулой.

Это соударение произойдет в том случае, если центр неподвижной молекулы окажется от

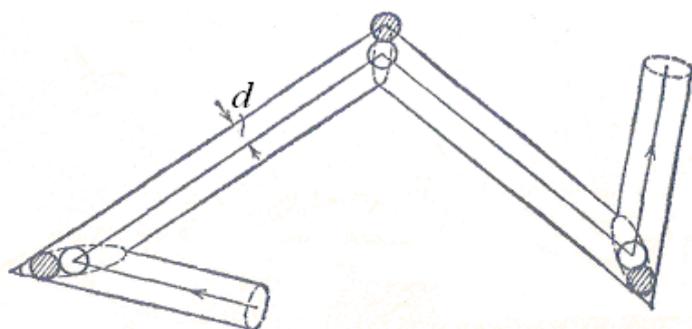


Рис. 6.2.

линии движения на расстоянии меньшем, чем эффективный диаметр d .

В результате столкновения молекула изменит направление своего движения, после чего опять будет двигаться прямолинейно, пока на её пути снова не встретится молекула, центр которой находится в пределах цилиндра радиуса d .

Молекула проходит ломаный путь, как это показано на рис. 6.2. Если мысленно выпрямить ломаный цилиндр, изображенный на рис. 6.2 (это можно сделать, т. к. $\lambda \gg d$), то получим ситуацию, изображенную на рис. 6.3.

За одну секунду движущаяся молекула проходит расстояние, равное ее средней скорости $\langle v \rangle$ и столкнется со всеми теми молекулами, центры которых расположены в объеме цилиндра длиной $\langle v \rangle$ и радиусом, равным эффективному диаметру d .

Если обозначить количество молекул в единице объема n и эту величину умножить на объем упомянутого цилиндра, то число z' столкновений в единицу времени движущейся молекулы с неподвижными равно

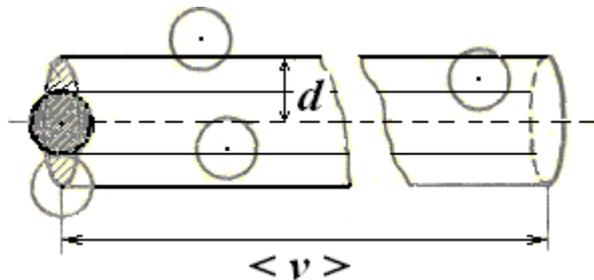


Рис. 6.3.

$$\langle z' \rangle = \pi d^2 \langle v \rangle n. \quad (6.1)$$

На самом деле движется не одна, а все молекулы газа. Это значит, что в выражение для $\langle z' \rangle$ должна входить не абсолютная (относительно стенок сосуда) скорость молекулы, а скорость $v_{отн}$ ее относительно тех молекул, с которыми она сталкивается.

Относительной скоростью двух молекул является векторная разность их абсолютных скоростей:

$$\mathbf{v}_{от} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2.$$

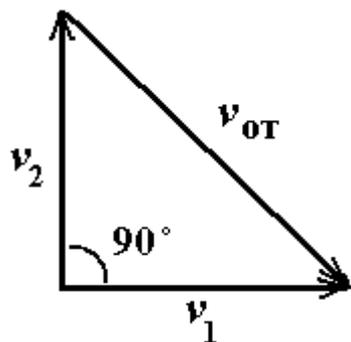


Рис. 6.4

Скорости молекул при их хаотическом движении направлены случайным образом, поэтому можно утверждать, что угол между скоростями двух молекул изменяется в пределах от 0 до 180° . Тогда среднее значение угла между скоростями двух молекул равно 90° .

Отсюда (рис. 6.4) находим

$$v_{от}^2 = v_1^2 + v_2^2 = 2 \langle v \rangle^2.$$

Подставляя в (6.1)

$$v_{от} = \sqrt{2} \langle v \rangle,$$

получим для среднего числа столкновений в единицу времени выражение

$$z = \sqrt{2} \pi d^2 n \langle v \rangle. \quad (6.2)$$

Разделив средний путь, проходимый молекулой за секунду, т.е. $\langle v \rangle$, на число столкновений z , получим среднюю длину свободного пробега молекул

$$\lambda = \frac{\langle v \rangle}{z} = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n}. \quad (6.3)$$

Пример 6.1. Пользуясь формулой (6.3), можно найти численные значения для λ и z . Проведем расчет для азота при нормальных условиях (давление $\approx 10^5$ Па, температура ≈ 273

К). Эффективный диаметр молекулы азота $d \approx 0,3$ нм, число частиц в единице объема при нормальных условиях $n \approx 2,7 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$, средняя скорость $\langle v \rangle \approx 500$ м/с. Отсюда

$$z = 1,41 \cdot 3,14 \cdot (0,3 \cdot 10^{-9})^2 \cdot 2,7 \cdot 10^{25} \cdot 500 = 4,8 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}.$$

Таким образом, при нормальных условиях молекула азота испытывает в среднем несколько миллиардов столкновений в секунду.

Средняя длина свободного пробега молекулы в тех же условиях $\lambda \approx 100$ нм.

Согласно уравнению состояния идеального газа $p = nkT$ при постоянной температуре концентрация молекул n пропорциональна давлению газа. Следовательно, длина свободного пробега обратно пропорциональна давлению газа:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{p_2}{p_1}. \quad (6.4)$$

Приведем значения длины свободного пробега молекул воздуха при разных давлениях (табл. 6.1).

Таблица 6.1

Давление, Па	Средняя длина свободного пробега λ , м
10^5	$7 \cdot 10^{-8}$
10^2	$5 \cdot 10^{-5}$
1	$5 \cdot 10^{-3}$
10^{-2}	$5 \cdot 10^{-1}$
10^{-4}	$5 \cdot 10$

Из таблицы видно, что при значительном разрежении газа длина свободного пробега молекул может превосходить размеры сосуда. При таких условиях молекула может пролетать через весь сосуд и отражаться от стенок прежде, чем произойдет столкновение с другой молекулой. Такое разрежение называют *вакуумом*.

§ 7. Распределение Максвелла молекул по скоростям

При выводе основного уравнения молекулярно-кинетической теории мы считали, что молекулы имеют различные скорости. Следующее рассуждение подтверждает это предположение.

Представим себе, что все молекулы, находящиеся у поверхности Земли имеют одинаковые скорости, вертикальная составляющая которых равна u . Эти молекулы поднялись бы до высоты x , определяемой условием:

$$\frac{mu^2}{2} = mgx, \quad \text{т.е. до высоты} \quad x = \frac{u^2}{2g},$$

после чего они вернулись бы к Земле с первоначальной кинетической энергией, т.е. они вели себя так, как ведет себя любое брошенное вверх тело.

При таких условиях атмосфера имела бы на высоте x резкую границу, за пределами которой её не было бы. Опыт же показывает, что атмосфера резкой границы не имеет. Ее плотность убывает с высотой по экспоненциальному закону. Предположение о равенстве скоростей всех молекул противоречит, таким образом, опыту.

Ввиду грандиозности числа молекул в молекулярных системах мы не можем, пользуясь законами механики, провести динамическое описание системы.

Для решения задач молекулярной физики необходимо пользоваться статистическими закономерностями, основанными на теории вероятностей.

К термину вероятности, в отличие от достоверности, мы прибегаем в тех случаях, когда речь идет о случайных событиях, т.е. таких, которые нельзя предугадать. Вероятностью данного случайного события называют предел, к которому стремится отношение числа опытов, приводящих к его осуществлению, к общему числу опытов

$$P_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_i}{N}, \quad (7.1)$$

где i – событие происходит N_i раз в N случаях. Так как на практике N всегда конечно, то для вычисления вероятностей стараются, чтобы N и N_i были достаточно большими. Тогда можно считать, что

$$P_i \approx \frac{N_i}{N}. \quad (7.2)$$

Пример 7.1. Покупая билет в трамвае, мы обычно заранее не знаем, будет ли его номер четным или нечетным. Поэтому такое событие можно считать случайным. Если повторять опыт (покупать билет) достаточно большое число раз, то приблизительно в половине случаев билет будет иметь четный номер. Говорят, что вероятность этого события равна $\frac{1}{2}$.

Бросая много раз монету, мы убедимся, что в половине случаев она упадет обращенной вверх стороной с гербом («орлом»). Это будет тем вернее, чем больше будет число бросаний.

При бросании игрального кубика вероятность того, что выпадет 2, равна $\frac{1}{6}$, а вероятность того, что не выпадет 2, равна $\frac{5}{6}$.

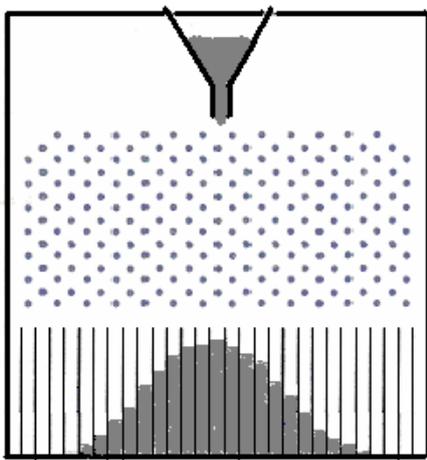


Рис. 7.1

В частности, скорость молекул вследствие огромного числа соударений с другими молекулами (миллиарды в секунду) является случайной величиной.

В мире случайностей есть свои так называемые статистические закономерности. Чтобы проиллюстрировать это, обратимся к следующему опыту.

Прямоугольный ящик со стеклянной передней стенкой представляет собой вертикальную панель, в которую равномерно в шахматном по-

рядке вбиты гвоздики. Внизу ящик разделен перегородками на узкие одинаковые вертикальные ячейки. Вверху над гвоздиками помещена воронка (рис. 7.1).

Через воронку на гвоздики сыплются мелкие частицы (пшено, песок). Ударяясь о гвоздики, частицы отклоняются в стороны и в силу *случайного характера ударов* могут попадать в различные ячейки.

Если бросить в ячейку одно зернышко, то из-за множества случайных факторов невозможно предсказать, в какую именно ячейку оно попадет.

Если многократно повторять опыт, можно обнаружить, что в различных опытах частица попадает в различные отсеки.

При очень большом числе зернышек возникает вполне определенная статистическая закономерность распределения их по ячейкам (рис. 7.1) – наибольшее количество частиц всегда попадает в средние отсеки, наименьшее в крайние. Мы получили статистическую кривую распределения.

Такое статистическое распределение описывается т.н. законом нормального распределения (законом Гаусса). Этот закон проявляется в случаях, когда случайная величина является результатом действия большого числа различных факторов, способных вносить с равной погрешностью положительные и отрицательные отклонения. Распределение вероятностей в данном примере описывается функцией

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (7.3)$$

Уровни крупы во всех отсеках образуют кривую Гаусса $f(x)$ (рис. 7.2).

Функция распределения $f(x)$ случайной величины x (вероятности попадания в ячейку с координатой x) определяет вероятность этой величины оказаться в единичном интервале вблизи значения x .

Из кривой Гаусса следует, что попадание в центральные ячейки более вероятно, чем в крайние, вероятность падает с удалением ячейки от центра и, наконец, вероятности для положительных и отрицательных значений x симметричны.

Другим примером распределения Гаусса может служить распределение случайных ошибок при измерении любой физической величины.

Благодаря беспорядочным движениям молекул и благодаря их взаимным столкновениям, при которых скорость молекул изменяется случайным образом, молекулы газа каким-то образом распределяются по скоростям, так что среди них имеются как очень быстрые, так и очень медленные.

Прежде, чем сформулировать закон распределения молекул по скоростям, выясним *сущность задачи о распределении*.

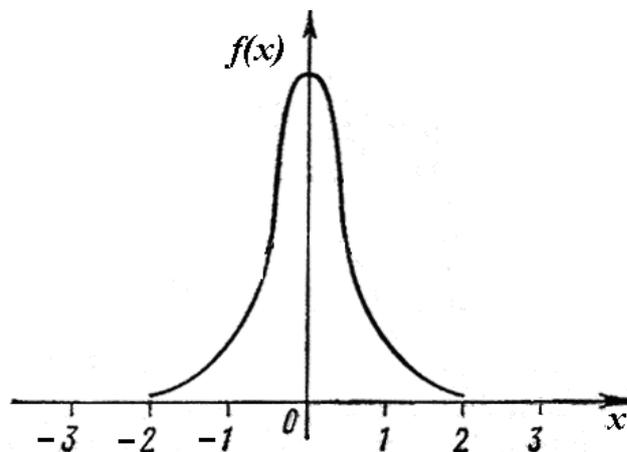


Рис. 7.2.

Определить распределение молекул по скоростям означает, как будто бы, определить число молекул, обладающих той или иной заданной скоростью.

Однако в такой постановке вопрос не имеет смысла, т.к. вероятное число молекул, имеющих точно (математически точно) заданную скорость, равно нулю. Ведь число различных значений скорости бесконечно большое. Число же молекул конечно. Поэтому число молекул, приходящихся на долю каждого произвольно заданного значения скорости, равно нулю. Вследствие этого вопрос должен быть сформулирован иначе: сколько молекул, или какая часть молекул из общего числа N обладает скоростями, лежащими в некотором *интервале* вблизи заданной скорости. Именно так всегда и ставятся статистические задачи.

Изучая распределение молекул по скоростям, мы будем искать число молекул, скорости которых лежат в определенном интервале значений скорости. Очевидно, что число dN молекул, скорости которых лежат в некотором интервале от v до $v + dv$ тем больше, чем больше интервал

$$dN \sim dv.$$

Ясно также, что dN зависит от самой скорости, т.к. в одинаковых по величине интервалах, но при разных абсолютных значениях скорости, число молекул будет различным. Это значит, что коэффициент пропорциональности должен быть функцией $f(v)$. Наконец, число dN должно быть пропорционально полному числу молекул N . Поэтому формула для величины dN должна иметь вид:

$$dN = N f(v) dv.$$

Эту формулу обычно записывают в таком виде:

$$\frac{dN}{N} = f(v) dv. \quad (7.4)$$

Величина $\frac{dN}{N}$ представляет собой долю молекул, абсолютные значения скоростей которых лежат в интервале от v до $v + dv$. Функция $f(v)$ называется функцией распределения. Смысл функции распределения ясен из формулы (7.4). В самом деле, при $dv = 1$

$$f(v) = \frac{dN}{N}.$$

Это значит, что $f(v)$ численно равна доле частиц, скорости которых лежат в единичном интервале скоростей вблизи скорости v .

Пример 7.2. Чтобы лучше представить себе функцию распределения рассмотрим аналогию с другим процессом, в котором главную роль играют законы случайности – производится стрельба в мишень, цель – точка в центре. Как бы ни был искусен стрелок и совершенно оружие, пули ложатся вблизи цели. Это объясняется различными факторами, которые нельзя учесть (не вполне одинаковые заряды, порывы ветра, дрожание руки стрелка и т.д.). При достаточном числе выстрелов распределение пуль вокруг цели, т.е. распределение по расстояниям от центра подчиняется определенному закону. А именно Δn – число попаданий в кольцевой полосе, т.е. число попаданий, приходящихся на данное расстояние r в интервале $r, r + \Delta r$ – с увеличением расстояния вначале растет от нуля (в достаточно малый кружок, в

точку попасть нельзя), достигая максимума, после чего убывает и на удалении стремится к нулю.

Английский физик Д. Максвелл теоретически решил задачу о распределении молекул идеального газа по скоростям. Он вывел аналитическое выражение $f(v)$, применив к тепловому хаотическому движению законы теории вероятностей. Закон Максвелла распределения молекул по скоростям имеет следующий вид

$$dN = \frac{4}{\sqrt{\pi}} N \left(\frac{m_0}{2kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} v^2 dv, \quad (7.5)$$

где N – полное число молекул, v – скорость молекулы, m_0 – ее масса, T – абсолютная температура, k – постоянная Больцмана.

Это уравнение и отвечает на вопрос – какая часть молекул газа обладает скоростями в интервале от v до $v+dv$. В формуле (7.5) величина

$$\frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m_0}{2kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} v^2 = f(v) \quad (7.6)$$

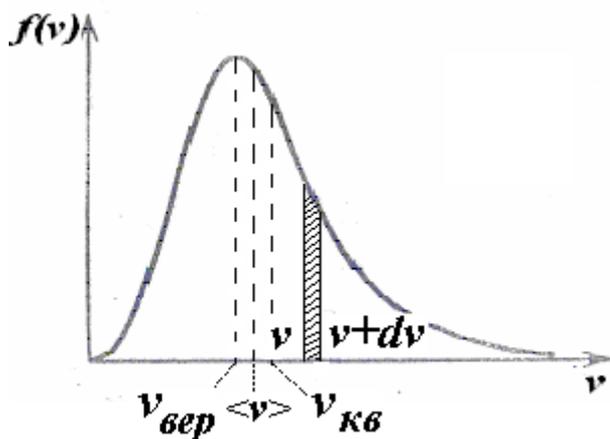


Рис. 7.3

представляет искомую функцию распределения. Она называется функцией распределения Максвелла.

График функции распределения Максвелла показан на рис. 7.3.

Как и следовало ожидать, функция обращается в нуль при $v = 0$ и $v = \infty$, т.е. число неподвижных молекул, как и число молекул, движущихся с очень большой скоростью, стремится к нулю.

Существуют три характерные скорости молекул: наиболее вероятная $v_{\text{вер}}$, средняя $\langle v \rangle$ и среднеквадратичная $v_{\text{кв}}$.

Из графика функции распределения Максвелла видно, что существует такая скорость $v_{\text{вер}}$, около которой группируются скорости наибольшего числа молекул газа.

Эта скорость называется *наиболее вероятной* и она соответствует максимуму функции $f(v)$. Ее значение можно найти, приравняв нулю производную $df(v)/dv$. Опустив в выражении (7.6) множители, не зависящие от v , получим

$$\frac{d}{dv} \left(\exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) v^2 \right) = 0,$$

или

$$\exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) \left(2 - \frac{mv^2}{kT} \right) v = 0.$$

Как уже отмечалось, значения $v = 0$ и $v = \infty$, обращающие это выражение в нуль, соответствуют минимумам функции $f(v)$. Значение v , соответствующее максимуму, получим, приравняв нулю вторую скобку.

Отсюда

$$v_{\text{вер}} = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}}. \quad (7.7)$$

Определим *среднюю арифметическую скорость*. Пусть:

ΔN_1 молекул имеют скорость v_1 (точнее, лежащих в интервале от v_1 до $v_1 + \Delta v_1$);

ΔN_2 молекул имеют скорость v_2 ;

.....
.....

ΔN_k молекул имеют скорость v_k

Средняя скорость по определению равна

$$\langle v \rangle = \frac{v_1 \Delta N_1 + v_2 \Delta N_2 + \dots + v_k \Delta N_k}{\Delta N_1 + \Delta N_2 + \dots + \Delta N_k} = \frac{\sum v_i \Delta N_i}{N}. \quad (7.8)$$

Переходя к пределу и учитывая, что количество молекул в некотором объеме, скорости которых лежат в интервале $v, v+dv$ равно $dN = f(v) dv$, получим

$$\langle v \rangle = \frac{1}{n_0} \int_0^{\infty} v dN = \frac{1}{N_0} \int_0^{\infty} N v f(v) dv. \quad (7.9)$$

$$\langle v \rangle = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m_0}{2kT} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} v^3 e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} dv. \quad (7.10)$$

Интегрирование по частям дает

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}. \quad (7.11)$$

Аналогично вычисляется *среднеквадратичная скорость*

$$v_{\text{кв}} = \sqrt{\langle v^2 \rangle}. \quad (7.12)$$

$$v_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}. \quad (7.13)$$

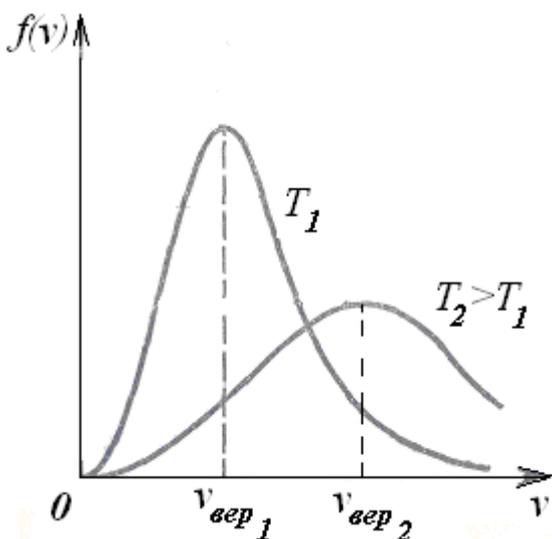


Рис. 7.4.

Кривая распределения Максвелла несимметрична относительно ее наибольшей ординаты. Поэтому средняя арифметическая скорость, равная отношению суммы всех скоростей молекул к их числу, не совпадает с наиболее вероятной. Наконец, численное значение средней квадратичной скорости лежит еще правее. Эти скорости отличаются друг от друга в пропорции

$$v_{\text{вер}} : \langle v \rangle : v_{\text{кв}} = 1 : 1,13 : 1,22.$$

Пользуясь кривой распределения Максвелла, можно графически определить число молекул, обладающих скоростями в

заданном интервале между v и $v+dv$. Это число, очевидно, равно площади заштрихованной полосы (рис. 7.3) с основанием dv и высотой $f(v)$, умноженной на полное число молекул.

Распределение молекул по скоростям зависит, как это видно из формулы, от температуры газа. Для разных температур $T_1 < T_2 < T_3$ кривые распределения молекул по скоростям будут иметь вид, показанный на рис. 7.4.

Из этих кривых видно, что при повышении температуры T скорости молекул возрастают и вся кривая смещается в сторону больших скоростей. Площади, ограниченные этими кривыми и осью скоростей, пропорциональны общему числу частиц (в единице объема) и не могут, поэтому изменяться вместе с температурой. Вследствие этого максимумы кривых по мере повышения температуры T понижаются.

Пример 7.3. Приведем распределение молекул по скоростям для случая азота при нормальных условиях.

Азот при 20°C и 760 мм рт. ст.	
0 – 100 м/с	1%
100 - 300 м/с	25%
300 - 500 м/с	42%
500 - 700 м/с	27%
700 - 900 м/с	7%
> 900 м/с	1%

Со скоростями от 300 до 700 м/с движется примерно 59% всех молекул. С малыми скоростями от 0 до 100 м/с движется всего лишь 1%. Быстрых молекул со скоростями свыше 1000 м/с всего лишь 5%.

Пример 7.4. Известно, что для того, чтобы какое либо тело могло преодолеть притяжение Земли и покинуть ее, оно должно обладать т.н. второй космической скоростью = 11,19 км/с. Согласно закону распределения Максвелла среди молекул атмосферы имеются и такие, которые покидают земную атмосферу и рассеиваются в мировом пространстве. Формула распределения позволяет найти долю таких молекул. Она равна 10^{-300} . Это число настолько ничтожно, что опасность потери атмосферы Земле не грозит даже через миллиарды лет.

А вот на Луне, масса которой и сила тяготения меньше, чем на Земле, вторая космическая скорость равна 2,4 км/с.. Доля молекул, способных оторваться от Луны, составляет 10^{-17} . Это уже совсем не то, что 10^{-300} и подсчет показывает, что воздух там будет быстро уходить. Вероятно, поэтому на Луне и нет атмосферы.

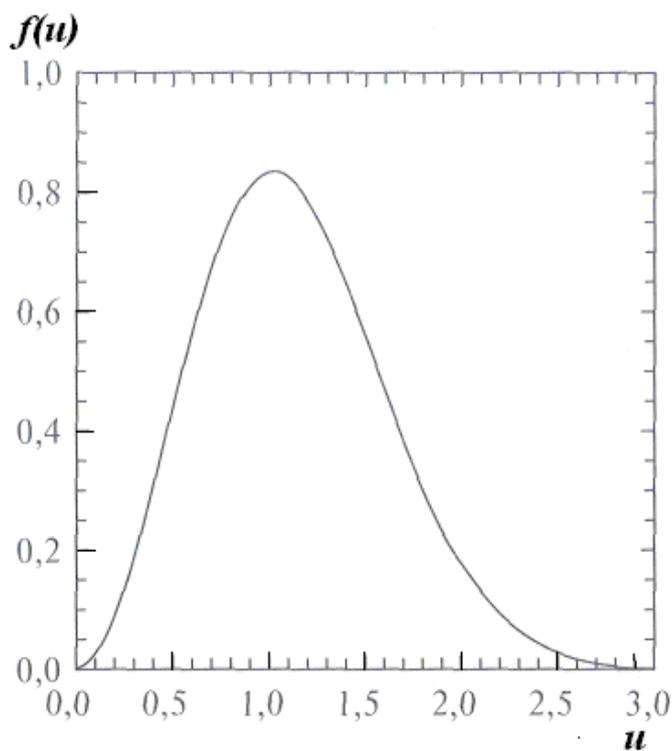


Рис. 7.5.

Если при графическом изображении функции распределения Максвелла по горизонтальной оси откладывать отношение скорости к наиболее вероятной скорости, т.е. безразмерную скорость

$$u = \frac{v}{v_{\text{вер}}}, \quad (7.14)$$

то получается распределение Максвелла в форме

$$f(u) = \frac{1}{N} \frac{dN}{du} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} u^2. \quad (7.15)$$

Эта формула распределения Максвелла по величинам безразмерной скорости и соответствующий ей график (рис. 15) удобны для решения задач. В случаях, когда определяется число ΔN молекул, обладающих скоростями в интервале $\Delta u \ll u$, число молекул можно определить по приближенной формуле

$$\Delta N = \frac{4}{\sqrt{\pi}} N e^{-u^2} u^2 \Delta u. \quad (7.16)$$

Пример 7.5. В сосуде содержится $\nu = 1,3$ моля кислорода при температуре 27°C . Определить число молекул ΔN :

- 1) скорости которых отличаются от наиболее вероятной на 1%;
- 2) скорости которых лежат в интервале $562 - 572$ м/с.

Воспользуемся распределением молекул по относительным скоростям (7.16). Учтем, что при $v = v_{\text{вер}}$ $u = 1$. Тогда величина интервала в первом вопросе $\Delta u = 0,02$. Следовательно

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-1} \cdot 1 \cdot \Delta u = \frac{4}{\sqrt{3,14}} \cdot \frac{1}{2,718} \cdot 1 \cdot 0,02 = 0,0166.$$

Выразим число молекул N через число молей ν и постоянную Авогадро N_A

$$\Delta N = 0,0166 \nu N_A = 0,0166 \cdot 1,3 \cdot 6,02 \cdot 10^{23} = 1,3 \cdot 10^{22} \text{ молекул.}$$

Вычислим наиболее вероятную скорость:

$$v_{\text{вер}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 8,31 \cdot 300}{32 \cdot 10^{-3}}} = 395 \text{ м/с.}$$

Найдем отношение

$$u = \frac{v}{v_{\text{вер}}} = \frac{562}{395} = 1,42.$$

Определим по кривой рис. 15 значение функции $f(u)$ при $u = 1,42$. Получаем $f(u) = 0,62$.

Ширина интервала скоростей $\Delta v = 10$ м/с, а $\Delta u = 10/395 = 0,0253$. Следовательно, доля молекул в этом интервале

$$f(u) \Delta u = 0,62 \cdot 0,0253 = 0,0156.$$

Соответственно, число молекул в заданном интервале равно

$$\Delta N = N f(u) \Delta u = \nu N_A f(u) \Delta u = 0,0156 \cdot 1,3 \cdot 6,02 \cdot 10^{23} = 1,22 \cdot 10^{22} \text{ молекул.}$$

§ 8. Барометрическая формула

Благодаря хаотическому движению молекулы газа равномерно распределяются по объему сосуда, так что в каждой единице объема содержится в среднем одинаковое число частиц. Однако это справедливо только в том случае, когда на молекулы не действуют внешние силы. Если же газ находится во внешнем силовом поле, ситуация становится иной. Воздух Земной атмосферы представляет собой газ, находящийся под действием

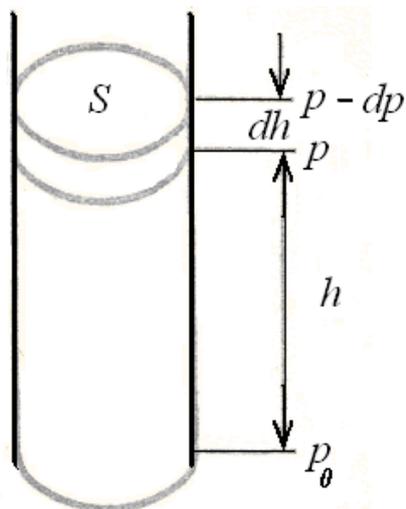


Рис. 8.1.

силы тяжести. Если бы не было теплового движения молекул, то все они под действием силы тяжести «упали» бы на Землю. Если бы отсутствовала сила тяжести, молекулы разлетелись бы по всему мировому пространству.

Действие обоих факторов – теплового движения молекул и силы притяжения к Земле – приводят к тому, что устанавливается определенный закон изменения давления с высотой.

Рассмотрим вертикальный столб воздуха в виде цилиндра с площадью основания S (рис. 8.1).

Пусть у поверхности Земли, где $h = 0$, давление равно p_0 , а на высоте h равно p . На высоте $h + dh$ давление понижается на величину $-dp$ и равно

$p - dp$.

Уменьшение давления равно отношению веса воздуха в части цилиндра, заключенной между уровнями h и $h + dh$, к площади S :

$$-dp = \frac{\rho g dV}{S} = \frac{\rho g S dh}{S} = \rho g dh. \quad (8.1)$$

Согласно уравнению Клапейрона – Менделеева

$$pV = \frac{m}{M} RT$$

плотность воздуха, который в нормальных условиях можно считать идеальным газом, равна

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{Mp}{RT}. \quad (8.2)$$

Тогда

$$dp = -\frac{Mp}{RT} g dh, \quad (8.3)$$

откуда

$$\frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{RT} dh. \quad (8.4)$$

Если считать, что молярная масса воздуха и температура на всех высотах одна и та же (что, вообще говоря, неверно), а ускорение свободного падения для небольших высот (не более 10 – 15 км) также не зависит от высоты, то полученное уравнение интегрируется:

$$\ln p = -\frac{Mg}{RT}h + \ln C, \quad (8.5, a)$$

где C – постоянная интегрирования. Отсюда

$$p = Ce^{-\frac{Mg}{RT}h}. \quad (8.5, б)$$

Постоянная C определяется из условия, что при $h = 0$ давление $p = p_0$. Подставив в уравнение (8,5, б) эти значения h и p , получим

$$C = p_0.$$

Окончательно зависимость давления воздуха от высоты над поверхностью Земли имеет вид

$$p = p_0 e^{-\frac{Mg}{RT}h}, \quad (8.6),$$

где p_0 – давление на высоте $h = 0$.

Уравнение, устанавливающее закон убывания давления с высотой, называется *барометрической формулой*. Этим законом пользуются для определения высоты над Землей путем измерения давления на данной высоте h над уровнем моря. Приборы, служащие для измерения высоты горных вершин, полета самолета, – альтиметры – представляют собой специальные барометры, шкала которых проградуирована непосредственно в метрах.

Пример 8.1. Какова высота горы, если на ее вершине атмосферное давление составляет 380 мм рт. ст.? Давление на уровне моря равно 760 мм рт. ст., а температура воздуха равна 0 °С (273 К)

Применим барометрическую формулу (8.6). $\frac{p}{p_0} = e^{-\frac{Mg}{RT}h}$ Логарифмируя, получим

$$\ln \frac{p}{p_0} = -\frac{Mg}{RT}h,$$

или

$$h = \frac{RT}{Mg} \ln \frac{p_0}{p}.$$

Используя для воздуха значение молярной массы $M = 29 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, имеем

$$h = \frac{8,31 \cdot 273}{29 \cdot 10^{-3} \cdot 9,81} \ln 2 = 5,53 \text{ км.}$$

Мы предполагали здесь, что ускорение свободного падения g не зависит от высоты h и постоянно. Такое упрощение справедливо для сравнительно небольших значений h (порядка десятка километров).

§ 9. Распределение Больцмана.

Разделим правую и левую части уравнения (8.6) на kT и воспользуемся уравнением состояния идеального газа $p = nkT$. Тогда получим зависимость концентрации молекул газа от высоты в поле силы тяжести

$$n = n_0 e^{-\frac{Mg}{RT}h}, \quad (9.1)$$

где n_0 и n – количество молекул в единице объема соответственно на уровне моря и высоте h .

Если заменить $\frac{M}{R} = \frac{m_0 N_A}{k N_A} = \frac{m_0}{k}$, где m_0 – масса молекулы, k – постоянная

Больцмана, то получаем

$$n = n_0 e^{-\frac{m_0 g h}{kT}}. \quad (9.2)$$

Поскольку $m_0 g h = \varepsilon_p$ есть не что иное, как отсчитанная от уровня $h = 0$ потенциальная энергия молекулы в поле тяжести Земли, формулу (9.2) можно записать в виде

$$n = n_0 e^{-\frac{\varepsilon_p}{kT}}. \quad (9.3)$$

Доля молекул с заданной энергией ε_p быстро убывает с ростом ε_p . Такое распределение молекул по энергиям во внешнем поле называется *распределением Больцмана* и справедливо для совокупности любых одинаковых частиц, находящихся в состоянии теплового движения в произвольном потенциальном поле внешних сил.

Контрольные вопросы

1. Является ли постоянной величиной молярная масса идеального газа? Молярный объем?
2. На чем основаны способы измерения температуры?
3. Сколько молекул содержится в 1 см^3 идеального газа при нормальных условиях?
4. При каких условиях выполняется уравнение состояния Клапейрона-Менделеева?
5. Как истолковывает статистическая физика такие свойства тел, которые можно непосредственно измерить – давление, температуру?
6. Опираясь на физический смысл температуры, поясните, почему абсолютная температура не может быть отрицательной.
7. Почему можно определить лишь часть молекул, скорости которых лежат в некотором интервале, а не часть молекул, имеющих точно заданную скорость?
8. Известно, что температура пропорциональна средней энергии поступательного движения молекул. С помощью ускорителя получен пучок заряженных частиц, движущихся с большой скоростью в одном направлении. Будет ли пучок эквивалентен газу, нагретому до высокой температуры?
9. Скорости газовых молекул близки к скорости звука в этом же газе. Что это физически означает?
10. Как изменяется состав атмосферного воздуха с увеличением высоты?
11. Почему Луна лишена атмосферы?

Глава 2. ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЙ МЕТОД

§ 10. Внутренняя энергия. Количество теплоты. Работа газа. Первое начало термодинамики

В основе термодинамики лежат экспериментально установленные законы

(начала), которые обладают большой общностью и применяются для анализа разнообразных явлений.

Особую роль в термодинамике играет внутренняя энергия U . **Внутренняя энергия тела (физической системы) есть полная энергия всех частиц тела.**

Она включает в себя энергию хаотического (теплого) движения всех частиц системы (молекул, атомов, ионов, свободных электронов и т.д.) и энергию взаимодействия этих частиц. Сюда входит:

- кинетическая энергия поступательного и вращательного движений молекул;
- кинетическая и потенциальная энергия колебательного движения атомов в молекулах;
- потенциальная энергия взаимодействия между молекулами;
- потенциальная энергия взаимодействия атомов или ионов в молекулах;
- энергии электронных оболочек атомов и ионов;
- внутриядерная энергия;
- энергия электромагнитного излучения.

Она, однако, не включает ту кинетическую энергию, которой система может обладать, если она, как целое, движется (например, при движении сосуда с газом), и ту потенциальную энергию, которой система может обладать, если она находится в поле каких-нибудь сил (например, сосуд с газом поднят над поверхностью Земли).

Каждый раз, когда система оказывается в том же состоянии, при той же температуре и давлении, ее внутренняя энергия принимает присущее этому состоянию значение, независимо от того, каким способом система пришла в это состояние. Поэтому внутренняя энергия однозначно определяется теми же параметрами, т.е. является *функцией состояния системы*.

Внутренняя энергия может быть определена только с точностью до постоянного слагаемого U_0 . Однако в термодинамике важно не само значение внутренней энергии системы, а ее изменение при изменении состояния системы. Поэтому полагают $U_0 = 0$, и под внутренней энергией понимают только те ее составляющие, которые изменяются в рассматриваемых процессах.

Известно (см. § 5), что средняя энергия теплового движения молекулы идеального газа определяется выражением $\langle \varepsilon \rangle = \frac{i}{2} kT$. Тогда для газа массой m внутренняя энергия равна сумме кинетических энергий хаотического движения $\frac{m}{M} N_A$ молекул:

$$U = \frac{i}{2} kT \frac{m}{M} N_A = \frac{i}{2} \frac{m}{M} RT. \quad (10.1)$$

Для идеального газа, где нет сил межмолекулярного взаимодействия и равна нулю потенциальная энергия взаимодействия молекул, внутренняя энергия представляет собой *только кинетическую энергию* хаотического теплового движения.

Внутренняя энергия идеального газа U зависит, как это видно формулы (10.1), от числа степеней свободы молекул и от температуры T , и не зависит ни от давления, ни от объема.

Из приведенной формулы видно, что для изменения температуры T газа нужно изменить его внутреннюю энергию. Изменение же энергии, как это известно из механики, связано с работой: энергия тела изменяется, если тело совершает, или над телом совершается работа, и это изменение как раз равно совершенной работе.

Отсюда как будто бы следует, что изменение температуры T газа может быть достигнуто только за счет механической работы: для нагревания тела над ним надо совершить работу, а для охлаждения нужно создать такие условия, при которых оно могло бы совершить работу.

Опыт показывает, что температуру T тела в самом деле можно изменить путем затраты соответствующей механической работы. Так, например, при трении тел друг о друга они нагреваются (на этом основан древний способ добывание огня).

Известно, однако, что газ, как и всякое другое тело, можно нагреть или охладить и другим способом, при котором работа, на первый взгляд, не играет никакой роли. Способ этот заключается в том, что тело приводится в контакт с другим телом, имеющим температуру, отличную от его собственной. Тот же результат может быть достигнут и без непосредственного контакта, когда два тела разделены какой-нибудь средой или даже пустотой. В первом случае говорят, что нагрев или охлаждение осуществляется путем теплопроводности, во втором — излучением.

Но из формулы (10.1) следует, что изменение температуры газа всегда связано с изменением внутренней энергии. Значит и при «контактном» способе каким-то образом происходит подвод или отвод энергии.

Механизм передачи энергии в «контактном» способе заключается в том, что частицы соприкасающихся тел при взаимных столкновениях обмениваются энергией так, что частицы сильнее нагретого тела теряют энергию, передавая ее частицам менее нагретого тела. Значит, в этом случае вместо изменения энергии за счет затраты работы тот же результат достигается путем передачи энергии хаотически движущихся частиц одного тела частицам другого.

Однако, в силу обстоятельств, связанных с историей развития физики, в том случае, когда изменение температуры происходит контактным способом или излучением, говорят, что к телу подводится или от него отводится некоторое количество теплоты.

Значит, количество теплоты представляет собой энергию, которая передается от одного тела к другому при их контакте или путем излучения. По существу, при передаче теплоты мы тоже имеем дело с работой, но работу в этом случае совершают не макроскопические упорядоченно движущиеся тела, а беспорядочно движущиеся микрочастицы.

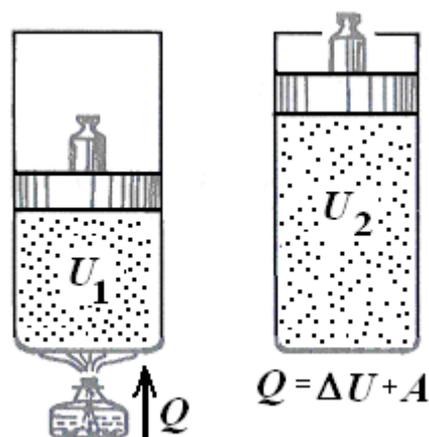


Рис. 10.1.

Никакой другой разницы между теплотой и работой (энергией) нет. Поэтому они должны измеряться в одних и тех же единицах. В СИ за единицу количества теплоты принят 1 джоуль.

Эквивалентность между количеством переданной теплоты и работой позволяет обобщить закон сохранения энергии, известный из механики. Закон сохранения энергии в применении к процессам, в которых происходит передача теплоты, является фундаментальным законом физики и получил название **первого начала термодинамики**.

Математически он записывается следующим образом:

$$Q = \Delta U + A. \quad (10.2)$$

Записанное в таком виде первое начало термодинамики утверждает:

количество теплоты Q , сообщенное системе, идет на приращение ΔU её внутренней энергии и на совершение системой работы A над внешними телами (рис. 10.1).

Под приращением внутренней энергии понимают разность между конечным и начальным значениями, т.е.

$$\Delta U = U_2 - U_1.$$

В дифференциальной форме (для бесконечно малого изменения состояния):

$$\delta Q = dU + \delta A. \quad (10.2, a)$$

Прежде, чем объяснить смысл введенных обозначений, рассмотрим работу при изменении объема газа.

Работа при изменении объема газа. Представим себе, что газ находится в цилиндре, закрытым подвижным поршнем, площадью S . Пусть газ расширяется, действуя на поршень с силой F и поднимая его на расстояние dx (рис. 10.2). Допустим, что это расстояние dx настолько малое, что давление газа p не успевает измениться и остается постоянным.

Тогда элементарная работа, затраченная на бесконечно малое перемещение поршня dx

$$\delta A = F \cdot dx = p \cdot S \cdot dx = p \cdot dV, \quad (10.3)$$

поскольку $S \cdot dx = dV$ – изменение объема газа.

Работа δA изменения объема газа равна произведению давления, под которым находится газ, на изменение его объема dV .

Можно вычислить работу, когда изменение параметров не является бесконечно малым.

При конечном изменении объема системы ($V_1 \rightarrow V_2$) работа, совершаемая газом, равна сумме всех элементарных работ δA , т.е. интегралу

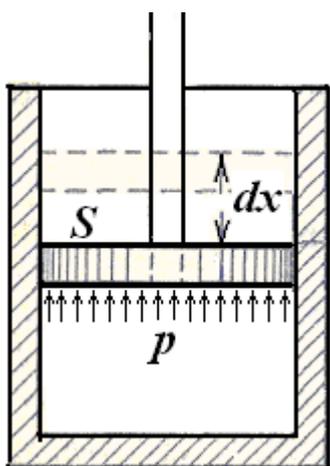


Рис. 10.2

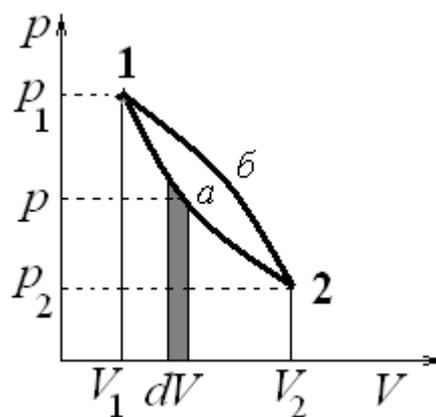


Рис. 10.3.

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV. \quad (10.4)$$

Интеграл можно определить графически. Рассмотрим pV – диаграмму (рис. 10.3). На оси ординат откладываем давление p , на оси абсцисс – объем V . Состояние газа при некоторых значениях его параметров p, V и T может быть изображено точкой. Кривая же зависимости одного параметра от другого показывает изменение состояния, которое называется *процессом* в газе. Если зависимость $p = f(V)$ построена графически, например, в виде кривой a , то элементарной работе соответствует площадь узкой зачерненной полоски на графике.

Очевидно, что интеграл (10.4) численно равен площади криволинейной трапеции, ограниченной осью V , кривой $p = f(V)$ и ординатами V_1 и V_2 .

Если переход из состояния 1 в состояние 2 происходит так, что изменение давления с объемом изображается кривой b (рис. 10.3), то связанная с этим переходом работа будет другой.

Таким образом работа при изменении объема зависит от последовательности состояний, которую проходит тело от начального в конечное состояние. Поэтому работа не является функцией состояния системы. Это функция процесса.

Что касается внутренней энергии U , то она однозначно определяется термодинамическим состоянием тела. Изменение внутренней энергии является полным дифференциалом, что отражено в обозначении dU . Поскольку dU не зависит, а δA зависит от пути перехода, то δQ тоже должно зависеть от пути перехода, т.е. способа совершения работы.

Величины δA и δQ являются не полными дифференциалами, а функционалами, они зависят от вида функции, описывающей переход из одного состояния в другое.

Количество теплоты нельзя рассматривать как количество какого-то вида энергии, содержащегося в теле. Говорить о количестве содержащейся в теле теплоты так же бессмысленно, как говорить о количестве содержащейся в теле работы. Теплота – такое же динамическое понятие, как работа, и проявляется лишь в процессе.

Переход по кривой b (рис. 10.3) сопровождается большей работой, следовательно, количество теплоты δQ , сообщенное телу, больше. А начальное и конечное состояния одинаковы в случаях a и b . Ясно поэтому, что нельзя говорить о том, что тело содержит больше теплоты.

Исторически первое начало термодинамики связано с неудачами осуществления такой машины, которая совершила бы работу, не затрачивая при этом никакого вида энергии и не получая извне тепла. Такая машина называется *вечным двигателем* (perpetuum mobile) *I рода*.

Поэтому первый закон термодинамики формулируют также так.

Невозможно построить вечный двигатель первого рода, т.е. такой периодически действующий двигатель, который производил бы работу в количестве большем, чем количество полученной им извне энергии.

Слова «периодически действующий» означают, что в конце каждого цикла двигатель возвращается к исходному состоянию.

§ 11. Применение первого начала термодинамики к газовым процессам. Внутренняя энергия и теплоемкость идеального газа

Термином «изопрцессы» называют различные процессы в газах, при которых один из параметров остается постоянным.

1. Изохорным называется процесс, происходящий при постоянном объеме ($V = \text{const}$, $m = \text{const}$)

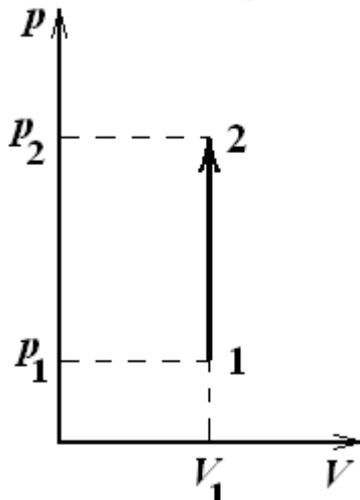


Рис. 11.1.

График этого процесса в координатах p, V представляет собой прямую, параллельную оси давлений (рис. 11.1, $1 \rightarrow 2$ – процесс изохорного нагревания).

Уравнение изохорного процесса можно получить из уравнения Клапейрона – Менделеева, если в нем положить массу и объем постоянными:

$$\frac{p}{T} = \frac{m}{M} \frac{R}{V} = \text{const} \quad (m = \text{const}, V = \text{const}). \quad (11.1)$$

В этом состоит *закон Гей-Люссака*: при постоянном объеме и неизменном количестве газа отношение давления газа к его абсолютной температуре есть величина постоянная.

Уравнение (11.1) есть уравнение изохорного процесса. Оно показывает, что в изохорном процессе давление газа прямо пропорционально температуре. Графически на диаграмме p, T процесс изображается прямой – *изохорой*. Для разных объемов газа изохоры образуют отрезки, лежащие на прямых (рис. 11.2), которые сходятся в одной точке ($p = 0$, $T = 0$).

Поскольку $V = \text{const}$, то $dV = 0$, и в изохорном процессе газ не совершает работы над внешними телами

$$\delta A = p \cdot dV = 0 \quad (11.2)$$

Это не означает, что изохорный процесс не находит применения. Он может входить как составная часть в цикл, состоящий из нескольких процессов (например, цикл Дизеля, цикл Отто и др.).

Из первого закона термодинамики (10.2, а) для $\delta A = 0$ получаем

$$\delta Q_v = dU \quad (11.3)$$

Следовательно, в изохорном процессе подводимое к телу количество теплоты тратится только на изменение внутренней энергии.

Различные тела одинаковой массы нагреваются по-разному при сообщении им одного и того же количества теплоты. Причина в том, что они различаются теплоемкостями.

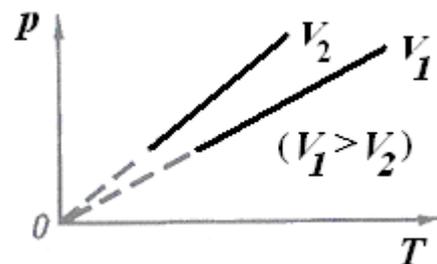


Рис. 11.2.

Теплоемкостью тела $C_{\text{тела}}$ называется физическая величина, равная отношению сообщенного телу количества теплоты δQ к вызванному этим процессом повышению температуры dT .

$$C_{\text{тела}} = \frac{\delta Q}{dT}. \quad (11.4)$$

Другими словами, теплоемкостью тела называется величина, равная количеству теплоты, которое нужно сообщить телу, чтобы повысить его температуру на один кельвин.

Теплоемкость $C_{\text{тела}}$ зависит от химического состава, массы и условий, при которых происходит нагревание тела.

Различают *удельную теплоемкость* c – теплоемкость одного килограмма, и *молярную теплоемкость* C – одного моля вещества. Очевидны соотношения:

$$C_{\text{тела}} = \frac{m}{M} C, \quad C_{\text{тела}} = mc, \quad c = \frac{C}{M}. \quad (11.5)$$

$$\delta Q = \frac{m}{M} C dT = mc dT. \quad (11.6)$$

Здесь $\frac{m}{M}$ – количество молей вещества.

Интегрирование (11.6) для небольшого температурного интервала и постоянных теплоемкостей дает

$$Q = mc(T_2 - T_1) = \frac{m}{M} C(T_2 - T_1). \quad (11.6, a)$$

Пример 11.1. Свинцовый шарик массой $m_1 = 20$ г, летящий со скоростью $v_1 = 500$ м/с, попадает в неподвижный медный шар массой $m_2 = 5$ кг и прилипает к нему. На сколько градусов Δt нагреются шары, если полагать, что вся кинетическая энергия свинцового шарика идет на нагревание? Удельные теплоемкости свинца $c_1 = 130$ Дж/(кг·К) и меди $c_2 = 390$ Дж/(кг·К).

По условию $E_k = Q$, или $\frac{m_1 v_1^2}{2} = (c_1 m_1 + c_2 m_2) \Delta t$, откуда

$$\Delta t = \frac{m_1 v_1^2}{2(c_1 m_1 + c_2 m_2)} = 1,28 \text{ (}^\circ\text{C)}.$$

Выразим количество теплоты δQ_V в формуле первого закона термодинамики для изохорного процесса (11.3) через молярную теплоемкость C_V . Индекс V у теплоемкости означает, что теплоемкость взята при постоянном объеме. Вместо (11.3) получим

$$\frac{m}{M} C_V dT = dU. \quad (11.7)$$

Отсюда следует, что молярная теплоемкость при постоянном объеме

$$C_V = \frac{M}{m} \left(\frac{dU}{dT} \right) \quad (V = \text{const}). \quad (11.8)$$

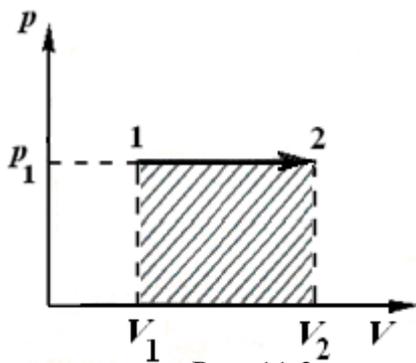


Рис. 11.3.

Интегрирование этого соотношения (константу интегрирования для удобства полагаем равной нулю, так как физический смысл имеет разность внутренних энергий системы, см. § 10) дает выражение для внутренней энергии газа массы m :

$$U = \frac{m}{M} C_v T \quad (11.9)$$

2. **Изобарным** называется процесс, происходящий при постоянном давлении ($p = \text{const}$, $m = \text{const}$).

График этого процесса в координатах p, V представляет собой прямую, параллельную оси объемов (рис. 11.3, 1→2 – процесс изобарного расширения).

Из уравнения состояния идеального газа Клапейрона – Менделеева для $p = \text{const}$ получаем

$$\frac{V}{T} = \text{const} \quad (m = \text{const}, p = \text{const}). \quad (11.10)$$

В этом состоит *закон Шарля*: при постоянном объеме и неизменной количестве газа отношение объема газа к его абсолютной температуре есть величина постоянная. Графически на диаграмме V, T процесс изображается прямой – *изобарой* (рис. 11.4).

Работа расширения газа

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p_1 dV = p_1 (V_2 - V_1) = \frac{m}{M} R (T_2 - T_1) \quad (11.11)$$

численно равна площади заштрихованной фигуры на рис. 11.3.

Согласно первому закону термодинамики

$$\delta Q_p = dU + p dV.$$

Выражая количество теплоты по формуле (11.6) и обозначая молярную теплоемкость при постоянном давлении через C_p , получим

$$\frac{m}{M} C_p dT = \frac{m}{M} C_v dT + p dV. \quad (11.12)$$

Для идеального газа справедливо уравнение Клапейрона – Менделеева

$$pV = \frac{m}{M} RT,$$

из которого, взяв дифференциал от обеих частей при $p = \text{const}$, получим

$$p dV = \frac{m}{M} R dT.$$

Подставив это выражение в первый закон термодинамики (11.12), найдем после сокращения соотношение для молярных теплоемкостей идеального газа (уравнение *Майера*)

$$C_p = C_v + R \quad (11.13)$$

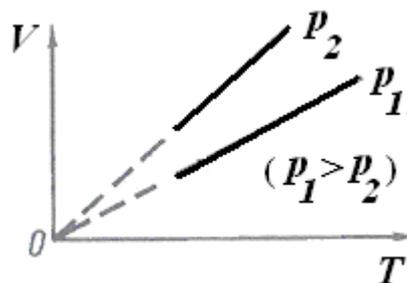


Рис. 11.4.

Пример 11.2. Разность удельных теплоемкостей при постоянном давлении и при постоянном объеме равна для некоторого газа $c_p - c_v = 260$ Дж/(кг·К). Определить молярную массу M этого газа.

Поскольку молярные и удельные теплоемкости связаны соотношением $C = Mc$, можно записать

$$C_p - C_v = M(c_p - c_v).$$

Поскольку согласно уравнению Майера (11.13) $C_p - C_v = R$, имеем

$$M(c_p - c_v) = R,$$

откуда

$$M = \frac{R}{c_p - c_v} = \frac{8,31}{260} = 32 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}.$$

Разделим обе части уравнения Майера (11.13) на C_v :

$$1 + \frac{R}{C_v} = \frac{C_p}{C_v}. \quad (11.14)$$

Обозначим отношение теплоемкостей через γ .

$$\frac{C_p}{C_v} = \gamma. \quad (11.15)$$

Эта величина представляет собой характерную для каждого газа величину и называется *показателем адиабаты*.

Из формул (11.14) и (11.15) следует, что

$$C_v = \frac{R}{\gamma - 1}, \quad C_p = R \frac{\gamma}{\gamma - 1}. \quad (11.16)$$

Тогда для внутренней энергии идеального газа получается еще одно выражение

$$U = \frac{m}{M} C_v T = \frac{m}{M} \frac{RT}{\gamma - 1} \quad (11.17)$$

или с учетом уравнения Клапейрона – Менделеева $(m/M)RT = pV$

$$U = \frac{pV}{\gamma - 1}. \quad (11.18)$$

Таким образом, внутренняя энергия идеального газа пропорциональна произведению давления на объем.

3. Изотермическим называется процесс, происходящий при постоянной температуре ($T = \text{const}$, $m = \text{const}$).

Из уравнения Клапейрона – Менделеева следует, что при изотермическом процессе давление и объем связаны соотношением

$$pV = \text{const}, \quad (11.19)$$

которое называется уравнением *изотермы* идеального газа.

В этом состоит *закон Бойля-Мариотта*: при постоянной температуре и неизменном количестве газа произведение давления газа на объем есть величина постоянная.

Графически на диаграмме p, V изотермический процесс изображается гиперболой (рис. 11.5). На этом же рисунке приведено семейство изотерм при различных постоянных температурах $T_1 < T_2 < T_3$.

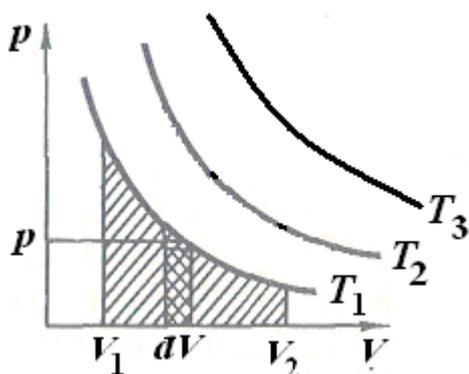


Рис. 11.5.

В изотермическом процессе ($T = \text{const}$, $dT = 0$) внутренняя энергия газа не изменяется

$$dU = d\left(\frac{m}{M} C_v T\right) = \frac{m}{M} C_v dT = 0.$$

Тогда из первого закона термодинамики

$$\delta Q = dU + \delta A$$

следует, что все подводимое количество теплоты полностью идет на совершение работы.

$$\delta Q_T = \delta A. \quad (11.20)$$

Чтобы определить работу газа необходимо вычислить интеграл

$$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p(V) dV. \quad (11.21)$$

Здесь V_1 и V_2 – объем газа в начальном и конечном состояниях.

Из уравнения Клапейрона – Менделеева вытекает, что

$$p = \frac{m}{M} \frac{RT}{V}.$$

Подставляя эту функцию в выражение для работы, получим

$$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} \frac{m}{M} RT \frac{dV}{V} = \frac{m}{M} RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (11.22)$$

Так как по закону Бойля-Мариотта

$$p_1 V_1 = p_2 V_2,$$

то работа, совершаемая газом в изотермическом процессе, может быть записана либо через отношение объемов, либо через отношение давлений

Графически на диаграмме p, V (рис. 11.5) работа газа в изотермическом процессе также численно равна площади фигуры, ограниченной изотермой, осью V и двумя ординатами начала и конца процесса (при сжатии газа площадь берется со знаком минус).

$$A_{12} = \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{M} RT \ln \frac{p_1}{p_2} = p_1 V_1 \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (11.23)$$

Поскольку при изотермическом процессе $dT = 0$, теплоемкость $C = dQ/dT$, которую можно формально ввести, в этом случае следует считать бесконечно большой.

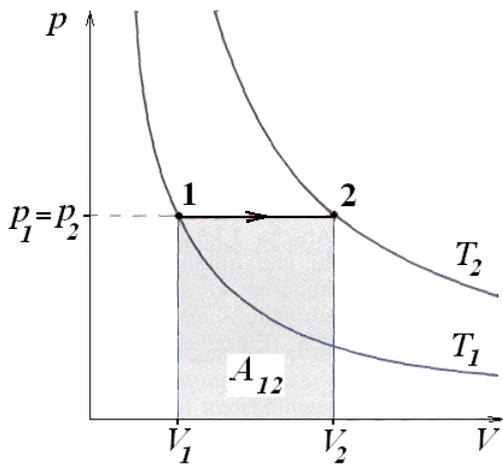


Рис. П.11.1

Пример 11.3. Определить, нагревается или охлаждается газ, если он расширяется при постоянном давлении?

Ответ на этот вопрос можно получить, изобразив на pV – диаграмме две изотермы и график изобарного процесса. Состояние, описываемое точкой 1, характеризуется температурой T_1 , соответственно, состояние 2, (точка 2 лежит на другой изотерме) – температурой T_2 . Лежащая правее и выше изотерма соответствует более высокой температуре. Ответ на поставленный вопрос следует сразу – газ нагревается, т.к. $T_2 > T_1$.

Как показать на этом же рисунке изохорное охлаждение газа?

§ 12. Адиабатный процесс. Уравнение адиабаты идеального газа

*Процесс, при котором тело теплоизолировано, и внешние условия, в которых находится тело, меняются достаточно медленно, называется **адиабатным**.*

Практически наиболее часто роль внешних условий играет внешне заданный объем тела. Наиболее просто представить себе адиабатное расширение или сжатие газа, находящегося в теплоизолированном цилиндрическом сосуде, снабженном поршнем. Оболочка, не пропускающая теплоту, называется адиабатной оболочкой.

В природе целиком не проводящих теплоту оболочек не существует. Приближением к такой оболочке может служить сосуд Дьюара. В таком сосуде с двойными посеребренными стенками, из пространства между которыми выкачан воздух, передачи теплоты через стенки практически не будет.

При достаточно медленном выдвигании поршня газ будет расширяться, следуя за поршнем и имея в каждый момент времени давление, соответствующее занимаемому им объёму. Слова “достаточно медленное” означают здесь *такую медленность процесса, при которой в газе будет успевать устанавливаться тепловое равновесие, соответствующее мгновенному положению поршня.*

Напротив, при слишком быстром выдвигании поршня газ не успевае бы следовать за ним, и под поршнем возникала бы область пониженного давления, в которую бы и расширялся остальной газ (аналогично, при слишком быстром выдвигании поршня под ним возникала бы область повышенного давления). Такой процесс не был бы адиабатным.

С практической точки зрения это условие медленности осуществляется легко. “Медленный” адиабатный процесс практически может быть довольно быстрым. Так, например скорость поршня должна быть малой лишь по сравнению со скоростью звука в газе.

Поскольку давление в цилиндре под поршнем устанавливается с помощью волн сжатия и разрежения, фронты которых распространяются со скоростью звука, то при $v_{\text{поршня}} \ll v_{\text{звука}}$, давление успеваеь выровняться по всему объёму газа. Напомним, что скорость звука в газах при нормальных условиях измеряется сотнями м/с, поэтому скорость поршня практически может быть очень большой.

Поэтому при осуществлении адиабатного расширения или сжатия на первый план выдвигается условие теплоизоляции, требующее “достаточной быстроты” процесса. За время его протекания газ не должен успеть обменяться теплом с внешней средой.

Ясно, что это условие зависит от тщательности теплоизоляции и можно сказать имеет второстепенный характер, условие же достаточной медленности носит принципиальный характер.

Итак, процесс называется адиабатным, если он протекает без теплообмена с внешней средой (т.е. $\delta Q = 0$). Для адиабатного процесса первое начало термодинамики принимает вид

$$\delta A + dU = 0. \quad (12.1)$$

т.е. работа расширения газа ($\delta A = p dV > 0$) выполняется за счет убыли внутренней энергии

$$\delta A = -dU, \quad (12.1,а)$$

и, наоборот, механическая работа при сжатии ($\delta A = p \cdot dV < 0$) переходит во внутреннюю энергию системы.

Учитывая, что для идеальных газов

$$U = \frac{m}{M} C_v T,$$

из (12.1) получаем

$$pdV + \frac{m}{M} C_v dT = 0 \quad (12.2)$$

Взяв дифференциал от обеих частей уравнения Клапейрона – Менделеева $pV = \frac{m}{M} RT$, получим

$$pdV + Vdp = \frac{m}{M} R dT. \quad (12.3)$$

Умножим уравнение (12.2) на дробь $\frac{R}{C_v}$ и

сложим его с уравнением (12.3). В результате получим

$$pdV \left(1 + \frac{R}{C_v}\right) + Vdp = 0. \quad (12.4)$$

Соотношение (12.4) приобретает вид

$$\gamma pdV + Vdp = 0. \quad (12.5)$$

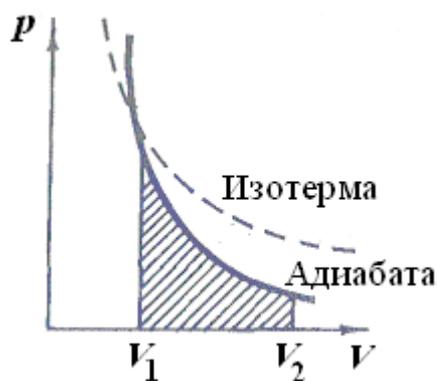


Рис. 12.1.

Умножая уравнение (12.5) на $V^{\gamma-1}$, получаем в левой части полный дифференциал

$$\gamma p V^{\gamma-1} dV + V^{\gamma} dp = d(pV^{\gamma}) = 0.$$

Отсюда следует уравнение адиабаты идеального газа (уравнение Пуассона)

$$pV^{\gamma} = \text{const} \quad (12.6)$$

Графически адиабатный процесс описывается на p, V – диаграмме кривыми, похожими на изотермы, но идущими круче (рис. 12.1), так как $\gamma > 1$ (поскольку $C_p > C_v$). Адиабата спадает с ростом объема быстрее, чем изотерма, поскольку с увеличением объема будет уменьшаться температура, что по сравнению с изотермическим процессом является дополнительной причиной, ускоряющей падение давления.

Учитывая уравнение Клапейрона-Менделеева $pV = \frac{m}{M} RT$, представим уравнение адиабаты в виде

$$pV \cdot V^{\gamma-1} = \frac{m}{M} RT \cdot V^{\gamma-1} = \text{const},$$

откуда получаем уравнение адиабаты идеального газа в переменных T и V

$$TV^{\gamma-1} = \text{const} \quad (\text{или} \quad VT^{\frac{1}{\gamma-1}} = \text{const}) \quad (12.7).$$

Из уравнения (12.7) вытекает, что с увеличением объема V температура T уменьшается – при адиабатном расширении идеальный газ охлаждается. Соответственно, при сжатии – нагревается.

Адиабатные процессы играют важную роль в природе и в технике.

Известно, что в атмосфере верхние слои воздуха холоднее, чем нижние, что, вообще говоря, противоречит явлению конвекции. Это можно объяснить адиабатным расширением воздуха в атмосфере. Огромные массы воздуха, нагреваясь вблизи поверхности Земли, поднимаются вверх, попадают в область пониженного давления и расширяются. В связи с плохой теплопроводностью воздуха теплообменом можно пренебречь, и процесс, следовательно, будет адиабатным. Выполняя работу расширения против внешнего давления, воздух в тропосфере охлаждается, а водяной пар при этом конденсируется.

Адиабатное расширение газа с совершением работы против внешних сил вызывает охлаждение газа. Такое охлаждение лежит в основе процесса получения жидких газов.

Напротив, при адиабатном сжатии газа газ не успевает отдать выделившуюся теплоту и сильно нагревается. Это используется в двигателях Дизеля для воспламенения горючей смеси.

Пример 12.1. Начальная температура горючей смеси в двигателе Дизеля $T_1 = 350$ К. Считая процесс адиабатным с показателем адиабаты для смеси $\gamma = 1,4$ и степенью сжатия смеси 17,5, определить температуру, при которой воспламеняется горючая смесь.

Воспользуемся уравнением адиабаты в форме

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}.$$

$$T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} = 350 \cdot (17,5)^{0,4} \approx 1100 \text{ K}.$$

§ 13. Работа газа в адиабатном процессе

Применяя первый закон термодинамики к адиабатному процессу, имеем из (12.1, а) после интегрирования

$$A = -\Delta U.$$

Подставляя выражение для внутренней энергии U согласно (11.18), получим выражение для работы газа в адиабатном процессе:

$$A = \frac{p_1 V_1 - p_2 V_2}{\gamma - 1}. \quad (13.1)$$

С помощью уравнения Клапейрона – Менделеева можно также выразить работу через температуры в начале T_1 и в конце T_2 процесса

$$A = \frac{m}{M} R \frac{T_1 - T_2}{\gamma - 1}. \quad (13.2)$$

Наконец, третье выражение для работы можно получить непосредственным интегрированием выражения для элементарной работы:

$$dA = p dV, \quad p V^\gamma = p_1^\gamma V_1^\gamma, \quad p = \frac{p_1 V_1^\gamma}{V^\gamma}, \quad dA = \frac{p_1 V_1^\gamma}{V^\gamma} dV,$$

$$A = p_1 V_1^\gamma \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^\gamma}.$$

После интегрирования и использования уравнения состояния, получим

$$A = \frac{m}{M} \frac{RT_1}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right]. \quad (13.3)$$

Пример 13.1. В цилиндре с подвижным поршнем газ занимает объем $V_1 = 0,25$ л и находится под давлением $p_1 = 100$ кПа. Сначала газ нагревают при постоянном объеме V_1 до некоторого давления p_2 . Затем газ расширяется адиабатно до некоторого объема V_2 . При этом его давление становится $p_3 = 50$ кПа, а температура – первоначальной. Начертить график этого процесса. 1) Определить объем V_2 и давление p_2 . 2) Каковы в этом процессе:

- работа газа;
- изменение внутренней энергии;
- количество теплоты, которое подводится или отводится от газа?

Показатель адиабаты газа $\gamma = 1,4$.

Поскольку процесс происходит с изменением температуры, удобно на pV -диаграмме начертить две изотермы. Лежащая правее и выше изотерма соответствует более высокой температуре газа. Исходное со-

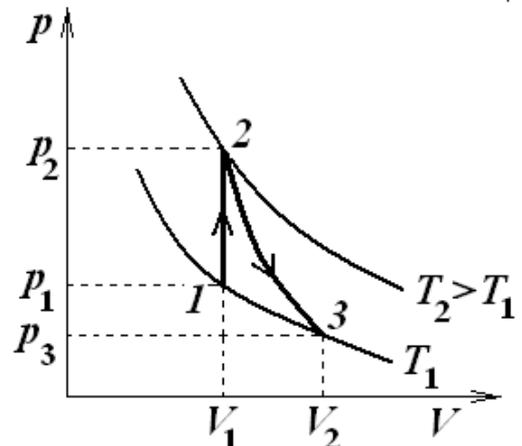


Рис. П.13.1

стояние обозначим точкой 1, промежуточное – точкой 2, конечное – точкой 3.

А) Изохорное нагревание, участок $1 \rightarrow 2$. Работа $A_{12} = 0$, так как объем газа не изменяется. Тогда из первого закона термодинамики (10.2) следует, что количество теплоты, полученное газом, равно приращению его внутренней энергии :

$$Q_{12} = \Delta U_{12} = \frac{p_2 V_1 - p_1 V_1}{\gamma - 1}. \quad (\text{П. 13.1})$$

Б) Адиабатное расширение, участок $2 \rightarrow 3$. Теплообмен отсутствует, поэтому $Q_{23} = 0$. Тогда из (10.2) следует, что работа газа совершается за счет убыли его внутренней энергии:

$$A_{23} = -\Delta U_{23} = \frac{p_2 V_1 - p_3 V_2}{\gamma - 1}. \quad (\text{П. 13.2})$$

Точки 1 и 3 по условию лежат на одной изотерме. Поэтому

$$p_1 V_1 = p_3 V_2, \quad (\text{П. 13.3})$$

откуда

$$V_2 = \frac{p_1 V_1}{p_3} = \frac{10^5 \cdot 2,5 \cdot 10^{-4}}{5 \cdot 10^4} = 5 \cdot 10^{-4} (\text{м}^3) \quad (\text{П. 13.4})$$

Точки 2 и 3 по условию лежат на адиабате. Поэтому давления и объемы связаны между собой соотношениями

$$p_2 V_1^\gamma = p_3 V_2^\gamma. \quad (\text{П. 13.5})$$

Отсюда

$$p_2 = p_3 \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^\gamma = p_3 \left(\frac{p_1}{p_3} \right)^\gamma = 5 \cdot 10^4 \left(\frac{10^5}{5 \cdot 10^4} \right)^{1,4} = 5 \cdot 10^4 \cdot 2^{1,4} = 1,32 \cdot 10^5 (\text{Па}). \quad (\text{П. 13.6})$$

Для ответа на второй вопрос задачи вычислим работу на адиабатном участке процесса.

$$A_{23} = \frac{p_2 V_1 - p_3 V_2}{\gamma - 1} = \frac{V_1 (p_2 - p_1)}{\gamma - 1} = \frac{2,5 \cdot 10^{-4} (1,32 - 1) \cdot 10^5}{1,4 - 1} = 20 (\text{Дж}) \quad (\text{П. 13.7})$$

Подстановкой полученных выше результатов (П. 13.1) и (П. 13.2) в формулу для изменения внутренней энергии

$$\Delta U = \Delta U_{12} + \Delta U_{23},$$

можно определить общее изменение внутренней энергии газа. Оно получится равным нулю. Этот вывод можно было получить и проще – начальное и конечное состояния, точки 1 и 3, имеют одинаковую температуру. Откуда сразу следует, что внутренняя энергия газа не изменяется.

Наконец, в данном примере количество теплоты Q_{12} , полученное газом в изохорном процессе, должно быть равно работе газа A_{23} при адиабатном расширении

$$Q_{12} = \frac{p_2 V_1 - p_1 V_1}{\gamma - 1} = 20 \text{ Дж}.$$

§ 14. Классическая теория теплоемкости идеального газа

Используя введенное в статистической физике понятие числа степеней свободы молекул, можно теоретически рассчитать внутреннюю энергию и вычислить теплоемкости идеальных газов.

Внутреннюю энергию одного моля идеального газа можно представить как произведение средней энергии одной молекулы $\langle \varepsilon \rangle$ на число молекул в одном моле – постоянную Авогадро

$$U = \langle \varepsilon \rangle N_A = \frac{i}{2} k N_A T = \frac{i}{2} RT \quad (14.1)$$

Поскольку молярная теплоемкость при постоянном давлении равна производной от внутренней энергии по температуре

$$C_p = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_p \quad (14.2),$$

получим

$$C_p = \frac{i}{2} R \quad (14.3)$$

Таким образом, молярная теплоемкость идеального газа при постоянном объеме есть величина, одинаковая для всех газов, молекулы которых имеют одинаковое число степеней свободы. Аналогичное соотношение получим для молярной теплоемкости при постоянном давлении

$$C_p = C_v + R = \frac{i+2}{2} R \quad (14.4)$$

Из выражений (14.3) и (14.4) находим отношение теплоемкостей для идеальных газов

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{i+2}{i}. \quad (14.5)$$

По формулам (14.3) – (14.5) можно вычислить теплоемкости газов C_v , C_p и их отношение γ :

а) для одноатомных газов $i = 3$

$$C_v = \frac{3}{2} R, C_p = \frac{5}{2} R, \gamma = \frac{5}{3} = 1,67;$$

б) для двухатомных газов $i = 5$

$$C_v = \frac{5}{2} R, C_p = \frac{7}{2} R, \gamma = \frac{7}{5} = 1,40;$$

в) для трех- и более атомных газов $i = 6$

$$C_v = \frac{6}{2} R, C_p = \frac{8}{2} R, \gamma = \frac{8}{6} = 1,33.$$

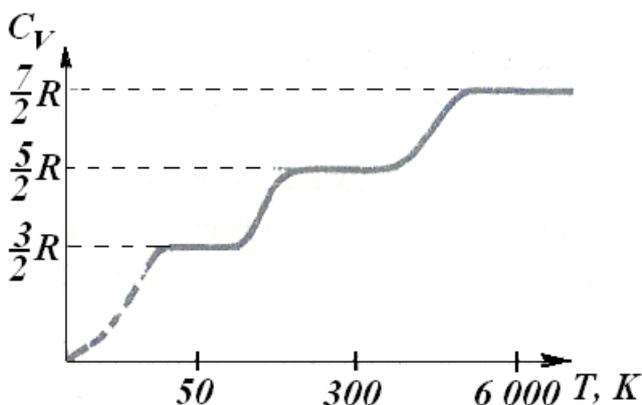


Рис. 14.1.

Полученные значения C_v и C_p для одноатомных и многих двухатомных газов при комнатных температурах хорошо согласуются с экспериментом. Однако у трехатомных газов отклонения от теории становятся систематическими.

По классической теории теплоемкость газов не должна зависеть от температуры. Опыты же показали, что теплоемкости всех веществ с повышением температуры возрастают, а с понижением – уменьшаются.

ся. Графически эта зависимость для водорода выражается характерной ступенчатой кривой (рис. 14.1).

На графике выделяются параллельные оси температур участки постоянной теплоемкости, независимой от температуры. В интервале низких температур теплоемкость водорода $C_v = \frac{3}{2}R$, в интервале средних температур $C_v = \frac{5}{2}R$, а в интервале высоких температур $C_v = \frac{7}{2}R$. Выходит, что в интервале низких температур молекулы водорода ведут себя как системы со степенями свободы только поступательного движения, при средних температурах возникают вращательные степени свободы, а при высоких – колебательные.

В соответствии с классической теорией теплоемкость должна быть целой кратной $R/2$, поскольку число степеней свободы может быть только целым. Степень свободы либо есть, либо ее нет. Классическая теория не в состоянии объяснить ход температурной зависимости C_v , даже если предположить, что с повышением температуры постепенно «включаются» степени свободы вращательного и колебательного движений.

Пояснить температурную зависимость теплоемкости дает возможность только квантовая теория.

Следовательно, закон равномерного распределения энергии между всеми степенями свободы молекул лишь приближенно применим для простейших газов при не очень низких температурах.

Пример 14.1. Определить удельные теплоемкости при постоянном объеме c_v и при постоянном давлении c_p неона и водорода, принимая эти газы за идеальные.

Удельную теплоемкость c , т.е. теплоемкость одного килограмма вещества можно получить, разделив молярную теплоемкость C на массу моля M :

$$c = \frac{C}{M}.$$

Молярные теплоемкости молекулярно-кинетическая теория позволяет выразить через число i степеней свободы молекул:

$$C_v = \frac{i}{2}R \text{ и } C_p = \frac{i+2}{2}R,$$

Для неона (одноатомный газ) $i_1 = 3$, $M_1 = 20 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

$$c_{v1} = 624 \text{ Дж/(кг·К)}; \quad c_{p1} = 1,04 \text{ кДж/(кг·К)}.$$

Для водорода (двухатомный газ) $i_2 = 5$, $M_2 = 2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

$$c_{v2} = 10,4 \text{ кДж/(кг·К)}; \quad c_{p2} = 14,6 \text{ кДж/(кг·К)}.$$

Пример 14.2. Кислород массой $m = 160$ г нагревают при постоянном давлении от температуры $T_1 = 320$ К до $T_2 = 340$ К. определить количество теплоты, которое поглощает газ, изменение внутренней энергии и работу расширения газа.

Количество теплоты, необходимое для нагревания газа при постоянном давлении:

$$Q = \frac{m}{M} C_p (T_2 - T_1).$$

Здесь C_p – молярная теплоемкость при постоянном давлении. Согласно классической теории теплоемкости идеального газа

$$C_p = \frac{i+2}{2} R.$$

Для всех двухатомных газов (в случае жестких молекул) $i = 5$, $C_p = \frac{7}{2} R$; $C_p = 29,09$ Дж/(моль К). $M = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль – молярная масса кислорода.

Изменение внутренней энергии определим по формуле

$$\Delta U = \frac{m}{M} C_v (T_2 - T_1),$$

где C_v – молярная теплоемкость газа при постоянном объеме. Для всех двухатомных газов $C_v = \frac{5}{2} R$, $C_v = 20,78$ Дж/(моль К).

Работа расширения газа в изобарном процессе

$$A = p \Delta V,$$

где $\Delta V = (V_2 - V_1)$ – изменение объема газа, которое можно определить из уравнения Клапейрона – Менделеева.

Уравнения для начального и конечного состояний:

$$pV_1 = \frac{m}{M} RT_1,$$

$$pV_2 = \frac{m}{M} RT_2.$$

Вычитая из второго уравнения первое, получим

$$p(V_2 - V_1) = \frac{m}{M} R(T_2 - T_1),$$

поэтому работа газа

$$A = \frac{m}{M} R(T_2 - T_1).$$

Подставив числа, найдем

$$Q = 2,91 \text{ кДж}; \quad \Delta U = 2,08 \text{ кДж}; \quad A = 831 \text{ Дж}.$$

Пример 14.3. Объем аргона, находящегося под давлением $p = 80$ кПа, увеличился от $V_1 = 1$ л до $V_2 = 2$ л. Насколько изменится внутренняя энергия газа, если расширение происходило: а) изобарно; б) адиабатно?

Запишем еще одно выражение для внутренней энергии. Уже было получено, что

$U = \frac{m}{M} C_v T$. Подставляя $C_v = \frac{i}{2} R$ и учитывая уравнение Клапейрона-Менделеева

$pV = \frac{m}{M} RT$, получим

$$U = \frac{i}{2} pV \quad (\text{П 13.1})$$

Изменение внутренней энергии в изобарном процессе (при $p = \text{const}$) будет иметь вид

$$\Delta U = \frac{i}{2} p(V_2 - V_1). \quad (\text{П 13.2})$$

Теперь перейдем к вычислению ΔU для адиабатного процесса. Первый закон термодинамики $Q = \Delta U + A$ для адиабатного процесса ($Q = 0$) запишется в виде

$$0 = \Delta U + A,$$

или

$$\Delta U = -A. \quad (\text{П } 13.3)$$

Работа газа в адиабатном процессе

$$A = \frac{m}{M} \frac{RT_1}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma - 1} \right], \quad (\text{П } 13.4)$$

где γ – показатель адиабаты, равный отношению теплоемкостей:

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{i + 2}{i}.$$

Для аргона – одноатомного газа – число степеней свободы молекул $i = 3$, поэтому $\gamma = 5/3 = 1,67$.

Изменение внутренней энергии аргона в адиабатном процессе расширения определим из формул (П 13.3) и (П 13.4):

$$\Delta U = \frac{m}{M} \frac{RT_1}{\gamma - 1} \left[\left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma - 1} - 1 \right]. \quad (\text{П } 13.5)$$

Последнюю формулу преобразуем с помощью уравнения Клапейрона-Менделеева $p_1 V_1 = (m/M)RT_1$:

$$\Delta U = \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1} \left[\left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma - 1} - 1 \right]. \quad (\text{П } 13.6)$$

Подстановка числовых значений дает:

а) для изобарного расширения

$$\Delta U = \frac{3}{2} \cdot 0,8 \cdot 10^5 \text{ Па} \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 121 \text{ Дж},$$

б) для адиабатного расширения

$$\Delta U = \frac{0,8 \cdot 10^5 \text{ Па} \cdot 10^{-3} \text{ м}^3}{(1,67 - 1)} \left[\left(\frac{10^{-3}}{2 \cdot 10^{-3}} \right)^{1,67 - 1} - 1 \right] = -44,6 \text{ Дж}.$$

§ 15. Обратимые и необратимые процессы. Тепловые машины и их КПД. Второе начало термодинамики

Особое положение термодинамики в физике связано с тем, что любая форма энергии при ее превращении, в конце концов, переходит в энергию тепловых движений. Если, например, в процессе механического движения энергия тела уменьшается из-за действия сил трения, то это происходит потому, что она переходит в тепло – трущиеся тела нагреваются. В тепло переходит и энергия электрического тока, энергия света, энергия химических реакций и т.д. Любой вид энергии в процессе превращений может пройти через многие формы энергии, но конечным результатом всех таких превращений непременно явится энергия тепловая.

Наибольший практический интерес имеет превращение механической энергии в тепловую и обратный процесс получения механической работы за счет тепловой энергии. В свое время, изобретение методов получения механи-

ческой работы за счет теплоты (паровая машина) явилось началом новой эпохи в истории цивилизации. Наше время является эпохой использования ядерной энергии для получения работы. Но и ядерная энергия в настоящее время превращается в механическую работу не непосредственно, а через посредство опять-таки теплоты.

Первым законом, связывающим механическую и тепловую энергии, является закон сохранения энергии. Этот закон называется первым началом термодинамики.

Прежде, чем перейти к содержанию второго закона термодинамики остановимся на необратимости тепловых процессов.

Обратимым процессом называется такое изменение состояния системы, которое, будучи проведено в обратном направлении возвращает ее в исходное состояние, так чтобы система прошла через те же промежуточные состояния, что и прямом процессе, но в обратной последовательности, а состояние тел не системы осталось неизменным.

Замечательным свойством механических движений является их обратимость. Каково бы ни было механическое движение тела, всегда возможно обратное движение (кроме тех, в которых участвуют силы трения).

Пусть, например, тело брошено в поле тяжести под некоторым углом к горизонту; описав определенную траекторию, оно упадет на землю в некотором месте. (рис. 15.1).

Если теперь бросить тело из этого места под тем же углом, под которым оно упало и с той же скоростью, то тело опишет ту же траекторию, только в обратном направлении, будет проходить те же точки пространства с теми же скоростями, что и в прямом движении и упадет в первоначальном месте. Если заснять движение брошенного тела, а затем прокрутить заснятое в обратном направлении, то мы увидим истинное обратное движение.

Другой пример – падение упругого шара на упругую горизонтальную поверхность. При подъеме шар проходит через те же промежуточные состояния, определяемые его координатами и скоростями, что и при падении, но в обратном порядке.

Необратимым термодинамическим процессом называются процесс, не допускающий возможности возвращения системы в первоначальное состояние без того, чтобы в окружающей среде остались какие-либо изменения.



Рис. 15.1.

Пример необратимого процесса – торможение тела в результате трения. Энергия механического движения расходуется на увеличение энергии теплового движения частиц. Возрастает внутренняя энергия тела и среды. Этот прямой процесс протекает самопроизвольно: для его осуществления не требуется протекания еще каких-либо процессов в окружающих

телах. Однако обратный процесс сам по себе идти не может – хаотическое движение не может самопроизвольно вызвать появление упорядоченного движения частиц.

Как правило, процессы в молекулярных системах являются необратимыми. Если снять, например, как капля чернил падает в воду и растекается в сосуде с водой, то при прокручивании съемки в обратном направлении мы увидим процесс, который никогда не происходит.

Если система по каким-либо причинам не находится в состоянии равновесия или выведена из него и после этого предоставлена сама себе (это значит, что она не подвергается внешним воздействиям), то, как показывает опыт, сам собой происходит переход к равновесному состоянию. В состоянии равновесия параметры системы не меняются с течением времени, а давление и температура выравниваются во всем объеме и тоже остаются постоянными.

Но когда равновесие уже установилось, то система не может, как показывает опыт, сама собой возвратиться к первоначальному неравновесному состоянию. Другими словами, все тепловые явления, сопровождающиеся процессами приближения к тепловому равновесию, необратимы.

Так, например, если два соприкасающихся тела обладали вначале разностью температур и были предоставлены самим себе, то, в конце концов, температуры обоих тел выравниваются, но обратный процесс – увеличение разности температур между ними – без внешнего воздействия не происходит.

Столь же необратимым является процесс расширения газа в пустоту. Газ сам по себе распределяется равномерно по всему объему сосуда, и такое состояние соответствует равновесию, но он никогда без постороннего вмешательства не соберется самопроизвольно вновь в одной половине сосуда.

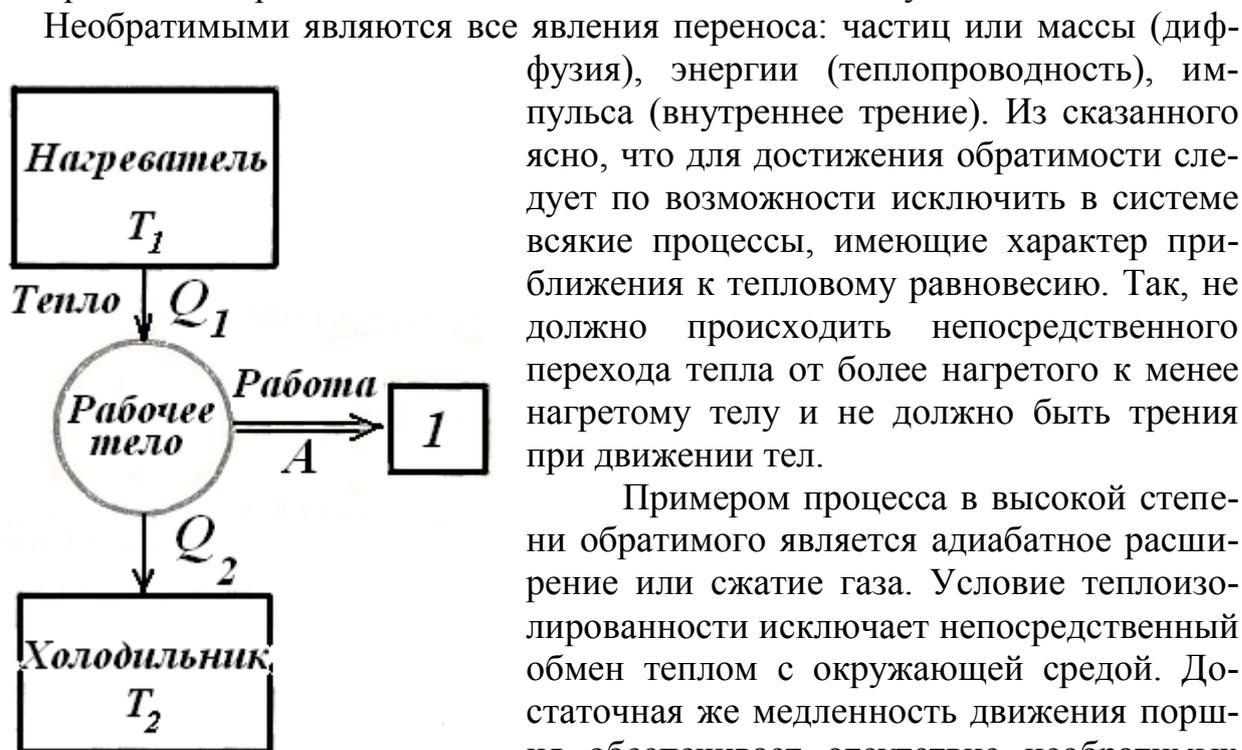


Рис. 15.2.

Необратимыми являются все явления переноса: частиц или массы (диффузия), энергии (теплопроводность), импульса (внутреннее трение). Из сказанного ясно, что для достижения обратимости следует по возможности исключить в системе всякие процессы, имеющие характер приближения к тепловому равновесию. Так, не должно происходить непосредственного перехода тепла от более нагретого к менее нагретому телу и не должно быть трения при движении тел.

Примером процесса в высокой степени обратимого является адиабатное расширение или сжатие газа. Условие теплоизоляции исключает непосредственный обмен теплом с окружающей средой. Достаточная же медленность движения поршня обеспечивает отсутствие необратимых процессов расширения газа в пустоту.

Как известно, результатом произведенной механической работы может явиться в определенных случаях возникновение равного ей количества теплоты. Это значит, что энергия макроскопического движения целиком переходит в энергию микроскопических движений молекул вещества.

Рассмотрим теперь обратный процесс преобразования теплоты в механическую работу. Для того чтобы теплота могла быть использована для получения работы, необходимо, очевидно, каким-то образом отнять от какого-нибудь тела часть его тепловой энергии. Это можно сделать, например, приведя с ним в соприкосновение другое тело более низкой температуры. Благодаря теплопроводности будет проходить процесс выравнивания температур обоих тел и передача тепла от одного из них к другому.

Однако необратимый процесс теплопроводности сам по себе не сопровождается совершением работы, т.к. при этом процессе нет никакого перемещения тел. Значит, простой обмен теплом двух соприкасающихся тел с различными температурами не может привести к совершению работы. Необходимо третье промежуточное тело, которое принимало бы тепло от более нагретого тела и совершало бы работу перемещения первого тела в пространстве. Его называют поэтому *рабочим телом*.

Более нагретое тело, от которого рабочее тело получает теплоту, называют *нагревателем*, а холодное тело, которому тепло передается, носит название *холодильника*.

Периодически действующий двигатель, совершающий работу за счет получаемого извне тепла, называется *тепловой машиной*. Схематически тепловую машину можно представить, как показано на рис. 15.2.

Будем считать, что рабочее тело, совершив определенные процессы, при которых через его посредство от нагревателя к холодильнику было передано некоторое количество теплоты, а им самим совершена некоторая работа, возвращается в исходное состояние, чтобы снова начать весь процесс. Совокупность изменений состояния тела, в результате которых состояние восстанавливается, называется *круговым процессом* или *циклом*.

На p, V -диаграмме цикл изображается замкнутой кривой.

Цикл, который выполняет рабочее тело, например газ, можно разбить на процессы расширения ($1 \rightarrow 2$) и сжатия

($2 \rightarrow 1$) газа (рис. 15.3). Работа расширения, которая численно равна площади фигуры $1a2V_11$, положительна ($dV > 0$), работа сжатия, которая численно равна площади фигуры $2b1V_1V_22$, отрицательна ($dV < 0$). Работа, которая выполняется за цикл,

$$A = A_{1 \rightarrow 2} - A_{2 \rightarrow 1}$$

определяется заштрихованной площадью, которая охватывается кривой $1a2b1$. Если за цикл выполняется положительная работа $A > 0$, то он называется *прямым* (цикл производится по часовой стрелке).

Для того, чтобы работа, совершаемая за цикл,

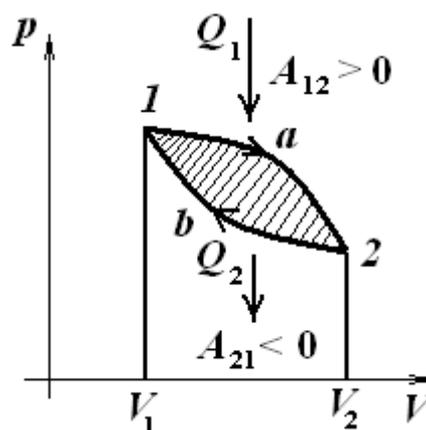


Рис. 15.3.

была положительна, давление (а следовательно, и температура) при расширении должно быть больше, чем при сжатии. Для этого рабочему телу нужно в ходе расширения сообщать теплоту (Q_1 на рис. 15.3), а в ходе сжатия отнимать от него теплоту (Q_2 на рис. 15.3).

Запишем уравнения первого закона термодинамики для расширения и сжатия.

При расширении рабочему телу сообщается количество теплоты Q_1 и тело выполняет работу расширения A_{12} . Внутренняя энергия изменяется на $U_2 - U_1 = \Delta U$.

$$Q_1 = \Delta U + A_{12} \quad (15.1)$$

Затем рабочее тело сжимается, над ним совершается работа A_{21} , которая меньше, чем A_{12} , и от него отбирается количество теплоты Q_2 . Внутренняя энергия изменяется на величину $U_1 - U_2 = -\Delta U$. Работа сжатия обычно выполняется за счет использования части работы, выполненной при расширении рабочего тела, например, за счет кинетической энергии маховика, который начал вращаться при расширении рабочего тела.

$$Q_2 = -\Delta U - A_{21} \quad (15.2)$$

Если уравнения (15.1) и (15.2) сложить, то получим, что работа, совершенная тепловой машиной, равна разности между полученным и отданным количеством теплоты:

$$Q_1 - Q_2 = A_{12} - A_{21} = A.$$

После окончания цикла рабочее тело возвращается в исходное состояние, внутренняя энергия его не изменяется. Поэтому работа цикла может выполняться только за счет внешних источников, которые подводят к телу теплоту.

Цикл с совершением работы использует, по крайней мере, два разных процесса (например, изотермический и изохорный). Таким образом, в тепловой машине превращается в работу только часть полученного от нагревателя тепла

$$A = Q_1 - Q_2. \quad (15.3)$$

Возникает вопрос: не может ли рабочее тело целиком превратить в работу полученное тепло Q_1 ?

Схема такого процесса изображена на рис. 15.4.

Ответ на такой вопрос дает второй закон термодинамики.

Второй закон термодинамики, как и первый, является обобщением опытных фактов. Он может быть сформулирован в следующем виде:

Невозможно осуществить циклический процесс, единственным результатом которого было бы превращение в работу теплоты, отнятой у какого-нибудь тела, без того, чтобы произошли какие-либо изменения в окружающих телах.

(Формулировка Д. Томсона)

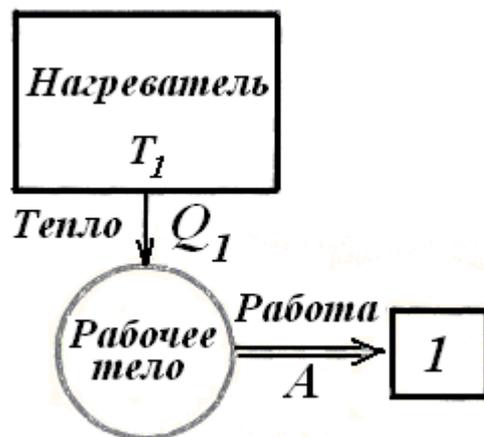


Рис. 15.4.

Другими словами, *невозможно получить работу за счет систематического охлаждения одного тела без каких-либо изменений во всех других телах.*

Таким образом, теплота, отнятая от источника, может быть превращена в работу при непременном условии, что кроме этого превращения должно измениться состояние каких-то других тел. Этими другими телами, в частности, являются холодильники, которым рабочее тело отдает часть полученного тепла.

Значит, возможность получать работу за счет тепла оплачивается, вообще говоря, высокой ценой в виде бесполезно теряемого тепла Q_2 , отдаваемого холодильнику.

Если бы это было не так, то это означало бы, что холодильник не нужен для превращения теплоты в работу. Тогда для получения работы можно было бы воспользоваться такими телами, как вода океана, Земная атмосфера и т.д. от которых можно заимствовать практически неограниченные количества теплоты. Поскольку запасы энергии в морях и океанах, в атмосфере, в Земной коре можно считать неисчерпаемыми, такая машина практически не отличалась бы от вечного двигателя. Описанная гипотетическая тепловая машина, действие которой заключается только в том, что в ней за счет теплоты совершается механическая работа, называется *вечным двигателем второго рода*, в отличие от вечного двигателя первого рода, который бы совершал работу из ничего, без затрат энергии.

КПД тепловой машины, равный отношению произведенной работы за цикл ко всему количеству теплоты, взятой у нагревателя

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}. \quad (15.4)$$

Для вечного двигателя второго рода $Q_2 = 0$, $\eta = 1$.

Опыт показывает, что *вечный двигатель второго рода неосуществим*. Этот принцип запрета вечного двигателя второго рода также является формулировкой второго закона термодинамики.

Уже отмечалось, что в системе тел, находящихся в тепловом равновесии без внешнего вмешательства никаких процессов происходить не может. Это обстоятельство имеет другой аспект – *невозможно получить работу за счет энергии тел, находящихся в тепловом равновесии*, т.к. работа связана с механическим движением, т.е. с переходом энергии в кинетическую энергию тел.

Второй закон термодинамики устанавливает направление течения процессов, происходящих в природе. Приведем еще одну формулировку второго закона термодинамики:

теплота не может сама собой переходить от менее нагретого тела к более нагретому.

(Формулировка Клаузиуса).

§ 16. Цикл Карно

Рассмотрим круговой процесс, при помощи которого тепло, отнятое у какого-нибудь тела, можно превратить в работу и притом наилучшим образом, т.е. так, чтобы полученная работа была максимально возможной.

Для этого цикл должен использовать одни только обратимые процессы. Такой обратимый круговой процесс, в котором совершается превращение теплоты в работу, был предложен французским физиком С.Карно. Цикл состоит из последовательно чередующихся двух изотермических и двух адиабатических процессов.

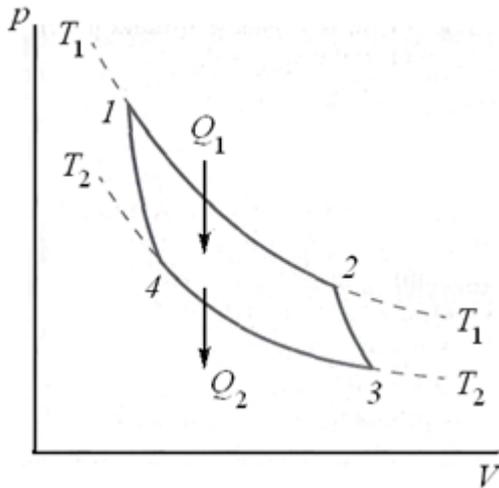


Рис. 16.1.

будет совершена работа

В качестве рабочего тела выберем один моль идеального газа.

Пусть газ первоначально сжат до некоторого давления и находится в контакте с нагревателем при температуре T_1 (точка 1, рис. 16.1). Процесс теплопроводности при этом не происходит т.к. нет разности температур. Не происходит и передачи тепла без совершения работы. Предоставим теперь рабочему телу возможность расширяться (участок $1 \rightarrow 2$), не прерывая его контакта с нагревателем. Расширение, следовательно, будет изотермическое. При этом

$$A_1 = RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = Q_1, \quad (16.1)$$

где Q_1 - количество тепла, отнятое газом от нагревателя.

Полученное рабочим телом тепло нужно передать холодильнику. Эту передачу не следует осуществлять прямым соприкосновением рабочего тела с холодильником, т.к. температура рабочего тела выше температуры холодильника и передача тепла при контакте не будет сопровождаться совершением полезной работы. Поэтому рабочее тело надо сначала охладить до температуры холодильника, и уже после этого их можно привести в контакт. Для охлаждения рабочего тела отсоединим его от нагревателя, теплоизолируем и подвергнем адиабатному расширению, до тех пор, пока оно не примет температуру холодильника (участок $2 \rightarrow 3$),.

Рабочее тело дополнительно совершает механическую работу

$$A_2 = C_v (T_1 - T_2). \quad (16.2)$$

На этом заканчивается первая половина цикла, во время которой тело совершило полезную работу за счет тепла, полученного от нагревателя.

Теперь необходимо вернуть рабочее тело в исходное состояние. Для этого рабочее тело сжимают, не прерывая его контакта с холодильником, т.е. изотермически (участок $3 \rightarrow 4$),.

Работа изотермического сжатия:

$$A_2 = RT_2 \ln \left(\frac{V_3}{V_4} \right) = Q_2 \quad (16.3)$$

выделяется в виде тепла и передается холодильнику.

Затем, изолировав рабочее тело от холодильника, его дополнительно сжимают адиабатно (участок $4 \rightarrow 1$), так чтобы оно нагревалось до температуры нагревателя. После этого рабочее тело приводят в контакт с нагревателем, и цикл на этом завершается: рабочее тело находится в исходном состоянии и процесс может быть снова начат.

При адиабатном сжатии тело нагревается за счет внешней работы, совершаемой над ним.

Адиабатные участки цикла не влияют на общий результат, поскольку работы на них равны и противоположны по знаку.

$$A'' = C_V(T_2 - T_1) = -C_V(T_1 - T_2) = -A' \quad (16.4)$$

Полезная работа за цикл

$$A = Q_1 - Q_2$$

КПД цикла

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}. \quad (16.5)$$

Подставляя значения Q_1 и Q_2 , получим

$$\eta = \frac{T_1 \ln \frac{V_2}{V_1} - T_2 \ln \frac{V_3}{V_4}}{T_1 \ln \frac{V_2}{V_1}} \quad (16.6)$$

Т.к. состояния 2 и 3 лежат на одной адиабате, то параметры газа связаны уравнением Пуассона

$$T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1} \quad (16.7)$$

То же имеет место для состояний, описываемых точками 4 и 1

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_4^{\gamma-1} \quad (16.8)$$

Разделив уравнение (16.7) на уравнение (16.8) и извлекая корень $\gamma - 1$ степени получим

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4} \quad (16.9)$$

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}. \quad (16.10)$$

Как видно из (16.10), КПД тепловой машины даже в идеальном случае полностью обратимого цикла всегда меньше единицы и зависит от соотношения между температурами нагревателя и холодильника. В цикле Карно – наилучшей из мыслимых тепловых машин – были обеспечены все условия для использования тепловой энергии. Поэтому более высокий КПД, чем в цикле Карно, получить принципиально нельзя.

КПД реальной тепловой машины всегда меньше КПД цикла Карно из-за неизбежно происходящих в ней необратимых процессов.

Температурой T_2 является обычно температура окружающего воздуха, так что она не может быть понижена. Поэтому для уменьшения доли бесполезно теряемого тепла в технике стремятся добиться работы двигателя по возможности при более высокой температуре нагревателя T_1 . В частности, современные паровые турбины работают на перегретом паре при температурах 900 – 950 К при давлениях 100-200 атмосфер.

Пример 16.1. В водо-водяном ядерном реакторе ВВЭР перегретый водяной пар генерируется в активной зоне реактора и направляется в турбину. При давлениях 12– 60 атм температура пара составляет 330 °С. Отработанный пар направляется в озеро-отстойник при температуре около 20 °С. Каков максимально возможный термический КПД атомной электростанции?

Воспользуемся формулой (16.10), предварительно перейдя от шкалы Цельсия к шкале Кельвина.

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = \frac{(273 + 330) - (273 + 20)}{(273 + 330)} = 51,4\%.$$

Конечно, реальный КПД станции гораздо ниже.

Пример 16.2. Для иллюстрации реальных технических циклов приведем цикл четырёхтактного двигателя

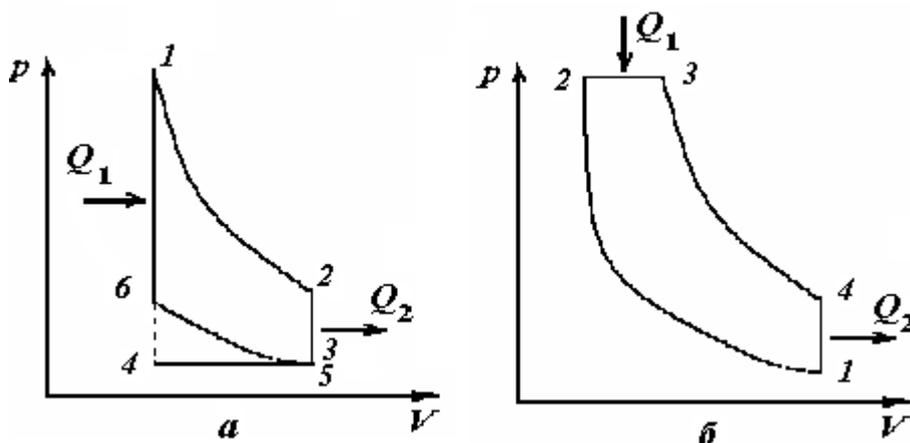


Рис. П.16.1

внутреннего сгорания – цикл Отто (рис. П. 16.1, а), состоящий из изобары, двух изохор и двух адиабат.

КПД цикла равен

$$\eta = 1 - \frac{1}{\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1}}$$

Отношение V_2/V_1 называется степенью сжатия.

Чем больше степень сжатия, тем больше КПД.

На рис. П. 16.1, б изображен цикл Дизеля, состоящий из двух адиабат, изохоры и изобары. КПД цикла

$$\eta = 1 - \frac{\left(\frac{V_3}{V_2}\right)^\gamma - 1}{\gamma \left(\frac{V_3}{V_2} - 1\right) \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}}.$$

На всех стадиях рассмотренного цикла Карно процесса нигде не допускается соприкосновение тел с различными температурами и, таким образом, избегается возникновения необратимого процесса теплопроводности. Весь цикл проводится, следовательно, обратимым путем.

Если обратить цикл Карно, то полученное устройство (*холодильная машина*) будет за счет работы внешних сил отбирать теплоту у более холодного тела и передавать его более нагретому. (Для описания работы холодильной машины нужно на рис. 15.3 все стрелки повернуть в обратную сторону). Эффективность холодильной машины принято характеризовать *холодильным коэффициентом*

$$\eta_x = \frac{Q_2}{A} = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2}, \quad (16.11)$$

где Q_2 – количество теплоты, отобранное у более холодного тела, A – затрачиваемая на это работа, Q_1 – количество теплоты, отданное более нагретому телу.

Если холодильная установка работает по обратимому обратному циклу Карно, то

$$\eta_x = \frac{T_2}{T_1 - T_2} \quad (16.12)$$

Отметим, что в отличие от традиционного понятия КПД, холодильный коэффициент может быть больше единицы, что, конечно, не нарушает закон сохранения энергии.

Пример 16.3. Мотор домашнего холодильника потребляет мощность 200 Вт. Полагая, что холодильник работает по обратному циклу Карно, определить количество теплоты, поступающее в комнату в секунду. Считать, что в камере холодильника поддерживается температура -5°C , а температура окружающего воздуха в комнате 23°C .

Из формул (16.11) и (16.12) для холодильного коэффициента холодильника имеем

$$\frac{Q_2}{A} = \frac{Q_1 - A}{A} = \frac{T_2}{T_1 - T_2}.$$

$$Q_1 = A \frac{T_1}{T_1 - T_2} = Nt \frac{T_1}{T_1 - T_2} = 200 \frac{296}{296 - 268} = 2114 \text{ Дж.}$$

Таким образом, домашний холодильник неплохо обогревает комнату – как печь мощностью примерно 2 кВт! Следует, правда, заметить, что в холодильнике основная передача тепла основана не на цикле Карно, а на фазовых переходах — испарении и конденсации.

§ 17. Энтропия

Понятие энтропии было введено в термодинамику немецким физиком Р. Клаузиусом. *Энтропией* S называется функция состояния системы, дифференциал которой в элементарном обратимом процессе равен отношению бесконечно малого количества тепла, сообщенного системе, к абсолютной температуре системы

$$dS = \frac{\delta Q}{T}. \quad (17.1)$$

По знаку изменения энтропии системы можно судить о направлении теплообмена. Если система получает тепло ($\delta Q > 0$), то ее энтропия возрастает, $dS > 0$, если отдает ($\delta Q < 0$), – энтропия убывает, $dS < 0$. Из формулы (17.1) следует, что энтропия измеряется в единицах теплоемкости.

Энтропия системы может быть определена только с точностью до прибавления постоянного слагаемого. Поскольку в соотношения обычно входит изменение энтропии, нахождение постоянной интегрирования оказывается ненужным. Физический смысл имеет не сама энтропия, а разность энтропий.

Изменение энтропии в обратимом процессе, переводящем систему из состояния 1 в состояние 2 соотношение (1) записывается в интегральной форме

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T}. \quad (17.2)$$

Если количество тепла δQ сообщается системе в ходе *необратимого процесса*, энтропия возрастает. Вместо формулы (17.1) можно записать

$$dS \geq \frac{\delta Q}{T}, \quad (17.3)$$

где знак равенства относится к обратимым, знак неравенства – к необратимым процессам.

Если соединить формулу для энтропии (17.1) с первым началом термодинамики $\delta Q = dU + pdV$, то для обратимых процессов получим так называемое **основное уравнение термодинамики**

$$TdS = dU + pdV. \quad (17.4)$$

Вычислим *изменение энтропии идеального газа*. Пусть начальное и конечное состояния газа определяются параметрами p_1, V_1 и p_2, V_2 .

С учетом того, что $dU = \frac{m}{M} C_v dT$ и $pV = \frac{m}{M} RT$, имеем

$$dS = \frac{m}{M} C_v \frac{dT}{T} + \frac{m}{M} R \frac{dV}{V}. \quad (17.5)$$

Прологарифмировав уравнение состояния $pV = \frac{m}{M} RT$ и взяв дифференциал логарифма, получим соотношение

$$\frac{dT}{T} = \frac{dV}{V} + \frac{dp}{p}. \quad (17.6)$$

С учетом уравнения $C_p = C_v + R$, формуле (17.5) придадим вид

$$dS = \frac{m}{M} C_p \frac{dV}{V} + \frac{m}{M} C_v \frac{dp}{p}. \quad (17.7)$$

Интегрируя последнее выражение от состояния 1 до состояния 2, получим

$$S_2 - S_1 = \frac{m}{M} \left(C_p \ln \frac{V_2}{V_1} + C_v \ln \frac{p_2}{p_1} \right). \quad (17.8)$$

Если начальное состояние газа описывается параметрами V_1, T_1 , а конечное состояние – V_2, T_2 , то изменение энтропии идеального газа описывается формулой

$$S_2 - S_1 = \frac{m}{M} \left(C_v \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{V_2}{V_1} \right). \quad (17.9)$$

Наиболее важной особенностью энтропии является ее поведение при необратимом процессе.

Пример 17.1. Найдем изменение энтропии при расширении идеального газа в пустоту – явно необратимом процессе. Пусть в одном из двух теплоизолированных сосудов, соединенных трубкой с закрытым вентилем, находится некоторая масса m идеального газа, а в другом сосуде – вакуум (рис. П. 17.1). Объемы сосудов V_1 и V_2 .

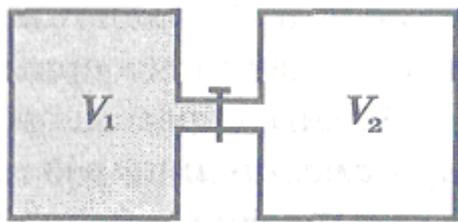


Рис. П 17.1

После открывания вентиля газ заполняет оба сосуда и приходит в состояние термодинамического равновесия. При этом процесс проходит без теплообмена ($\Delta Q = 0$) и без совершения работы ($A = 0$). Значит, по первому началу термодинамики $\Delta U = 0$, т. е. конечная температура равна начальной. Это позволяет провести расчет приращения энтропии *по обратимому изотермическому процессу*:

$$\Delta S = \int \frac{\delta Q}{T} = \int \frac{pdV}{T} = \int \frac{m}{M} R \frac{dV}{V} = \frac{m}{M} R \ln \frac{V_1 + V_2}{V_1}. \quad (\text{П } 17.1)$$

Под знаком логарифма стоит величина, всегда большая единицы. Поэтому $\Delta S > 0$, т.е. энтропия при расширении идеального газа в пустоту увеличилась.

Аналогично можно показать увеличение энтропии при теплопередаче, при взаимной диффузии газов и т.д. Таким образом, для любых процессов общим законом природы является **закон возрастание энтропии** в необратимых процессах в замкнутых системах.

Если замкнутая (т.е. теплоизолированная) система в некоторый момент времени находится в неравновесном состоянии, то процессы, протекающие в ней, приводят к возрастанию энтропии,

Принцип возрастания энтропии замкнутых систем представляет еще одну формулировку второго начала термодинамики.

Величина возрастания энтропии в замкнутой системе может служить мерой необратимости процессов. В предельном случае, когда процессы имеют обратимый характер, энтропия замкнутой системы остается постоянной.

Если процесс происходит вдоль адиабаты, то энтропия системы не меняется ($\delta Q = 0$ и $S = \text{const}$). Значит, адиабаты – это одновременно и *изоэнтропы*.

Все самопроизвольно протекающие в природе процессы – от теплообмена до химических реакций – протекают так, что энтропия возрастает. Необходимо специальное взаимодействие с окружающей средой, чтобы препятствовать возрастанию энтропии. Примером могут служить живые существа.

Именно потому, что энергия обладает свойством сохраняться в замкнутой системе, она не может служить функцией, показывающей, в каком направлении идут процессы. В замкнутой системе энергия в начале и в конце одна и та же.

Энтропия же, в естественно идущих процессах всегда возрастающая, позволяет судить, какое направление процесса возможно и какое нет, какое состояние является начальным и какое конечным.

Рост энтропии в любом процессе продолжается не беспредельно, а лишь до определенного **максимального значения**, которое соответствует **состоянию равновесия**. После того, как оно достигнуто, какие бы то ни было изменения в состоянии без внешнего воздействия идти не могут.

Пример 17.2. Определить изменение ΔS энтропии при изотермическом расширении азота массой $m = 10$ г, если давление газа уменьшилось от $p_1 = 1,1$ МПа до $p_2 = 50$ кПа.

Для изотермического процесса в выражении для приращения энтропии

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T}$$

температуру как постоянную величину можно вынести за знак интеграла

$$\Delta S = \frac{1}{T} \int_1^2 dQ = \frac{Q}{T}, \quad (\text{П } 17.2)$$

т.е. изменение энтропии равно отношению сообщенной газу теплоты к абсолютной температуре.

В соответствии с первым законом термодинамики, количество теплоты, которое получил газ, равно сумме приращения внутренней энергии и совершаемой системой работы

$$Q = \Delta U + A.$$

Для изотермического процесса $\Delta U = 0$, поэтому $Q = A$. Работа A газа в изотермическом процессе

$$A = \frac{m}{M} RT \ln \frac{p_1}{p_2}. \quad (\text{П } 17.3)$$

Подставляя (П 17.3) в (П 17.2), найдем искомое изменение энтропии

$$\Delta S = \frac{m}{M} R \ln \frac{p_1}{p_2}. \quad (\text{П } 17.4)$$

Вычисляя, найдем

$$\Delta S = 9,17 \text{ Дж/К.}$$

§ 18. Статистический смысл второго начала термодинамики

Рассмотрим содержание второго начала термодинамики с точки зрения молекулярно-кинетической теории.

Будем называть состояние системы, заданное с помощью макроскопических параметров – объема, давления, температуры, числа молей – ее **макросостоянием**.

Состояние системы, которое можно задать, описав состояние каждой из входящих в состав системы молекул, назовем **микросостоянием**.

Если система находится в равновесии, то ее параметры будут постоянными, а макросостояние – не изменяющимся. Вместе с тем молекулы все время перемещаются, сталкиваются, меняют свою скорость. Поэтому микросостояние системы все время изменяется. Ясно, что одному и тому же макросостоянию может соответствовать множество различных микросостояний.

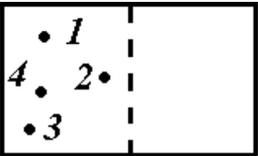
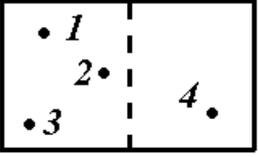
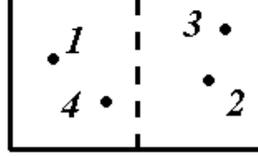
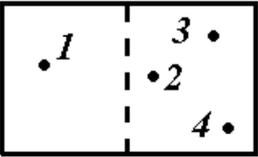
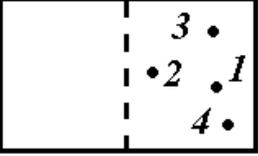
Число различных равновероятных микросостояний, каждое из которых реализует данное макросостояние, называется **статистическим весом** макросостояния и обозначается буквой Ω .

Поясним это примером. Представим себе сосуд, мысленно разделенный на две половины, и пусть в нем находится, например, 4 молекулы. Молекулы могут хаотически перемещаться и, располагаясь тем или иным порядком, создавать определенные макросостояния. Каждой из молекул мы припишем определенный номер – 1, 2, 3, 4, по которому их можно отличать друг от друга.

Под макросостояниями будем понимать различные способы размещения молекул в обеих половинах. Например, в левой половине сосуда может находиться одна молекула (любая), а в правой половине – три молекулы. Назовем это состоянием 1 – 3. Такое макросостояние реализуется четырьмя способами (микросостояниями) – в левой половине может побывать каждая из четырех молекул.

Нетрудно, например, видеть, что только одно размещение создает такое состояние, при котором в правой части сосуда вовсе нет ни одной молекулы.

Все возможные распределения четырех молекул по половинам сосуда приведены в таблице 18.1. Определить статистические веса в этом простейшем случае можно простым подсчетом.

		Таблица 18.1	
		Макросо- стояние	Число способов (статистический вес Ω)
	4 - 0	1	
	3 - 1	4	
	2 - 2	6	
	1 - 3	4	
	0 - 4	1	

Наибольшим числом способов – шестью – осуществляется состояние, при котором слева и справа по две молекулы, т.е. равномерное распределение молекул. Статистический вес этого макросостояния максимальный.

Пусть вначале все четыре молекулы находились в левой половине сосуда. С течением времени, двигаясь беспорядочно, некоторые из молекул окажутся в правой половине. Это будет означать, что газ расширился. Возможно ли, чтобы все молекулы снова сами по себе за счет хаотического движения собрались снова в левой половине? Это означало бы, что газ сначала расширился, а затем самопроизвольно сжался, т.е. процесс расширения будет обратимым. Такое возможно в одном из 16 размещений – вероятность достаточно велика.

Однако так обстоит дело только при очень малом числе молекул. Можно показать, что если в сосуде имеется N молекул, и они нумерованы, то между двумя половинами сосуда их можно распределить 2^N способами. Из этого общего числа различных размещений, при которых в одной половине (например, в левой) находится n молекул, а в другой ($N - n$) молекул, число Z размещений определяется равенством

$$Z = \frac{N!}{n!(N-n)!} \quad (\text{при этом считается, что } 0! = 1). \quad (18.1)$$

Уже для $N = 10$ молекул число их возможных размещений составит 1024, и газ может снова собраться в одну половину сосуда только в одном из 1024 случаев. Это уже гораздо меньшая вероятность, чем в случае четырех молекул.

В действительности число молекул газа не просто очень большое, оно фантастически огромно – при нормальных условиях в 1 см^3 содержится $2,69 \cdot 10^{19}$ молекул. Ясно, что вероятность того, что после расширения газа в пустоту он самопроизвольно сожмется в одной половине сосуда, настолько мала, что это событие практически неосуществимо (хотя и не запрещено законами механики).

Таким образом, процесс расширения газа в пустоту является необратимым в том смысле, что его протекание в обратном направлении практически невероятно.

Вместе с тем, значение Z будет наибольшим при $n = N/2$, т.е. наибольшим числом способов осуществляется равномерное распределение молекул в объеме сосуда.

На опыте установлено, что если система первоначально не находилась в состоянии равновесия и была предоставлена самой себе, то сам по себе произойдет переход к равновесному состоянию. Если полагать, что все состояния равновероятны, то это означает, что предоставленная самой себе макросистема стремится переходить от менее вероятных состояний к более вероятным – равновесным. В этом суть необратимости. В принципе, обратный процесс возможен, но вероятность его ничтожно мала.

Можно прийти к заключению, что второй закон термодинамики является статистическим, т.е. **наиболее вероятным изменением энтропии является ее возрастание.**

Обращает на себя внимание сходство поведения обеих величин – энтропии и статистического веса: обе они растут при переходе к равновесию. Связь энтропии со статистическим весом установлена Л. Больцманом, постулировавшим, что энтропия пропорциональна логарифму статистического веса:

$$S = k \cdot \ln \Omega \quad (18.2)$$

Здесь k – постоянная Больцмана, Ω – число распределений молекул по энергиям и по пространству, которыми может осуществляться данное макросостояние.

Легко видеть, что любое упорядочение в системе приводит к уменьшению статистического веса, так как упорядоченное состояние можно получить меньшим числом способов, чем полностью хаотическое, беспорядочное. Поэтому энтропия является количественной мерой отсутствия упорядоченности в данной системе, или другими словами, *энтропия – мера молекулярного беспорядка*.

Пример 18.1. Как изменяется энтропия идеального газа при его:

- а) изохорном нагревании;
- б) изотермическом расширении;
- в) адиабатном расширении?

Какое статистическое толкование можно дать этим процессам?

Статистическая физика связывает энтропию с вероятностью осуществления данного макроскопического состояния системы. Энтропия определяется через логарифм статистического веса Ω :

$$S = k \ln \Omega (\varepsilon, N),$$

Как было отмечено, энтропия S характеризует степень беспорядка в макросистеме – состояниям с большим беспорядком отвечает больший статистический вес Ω , чем у более упорядоченного состояния.

Характеризуя степень беспорядка, необходимо учитывать как разброс молекул по скоростям (энергиям), так и по пространству. С повышением температуры молекулы больше разбросаны по скоростям, следовательно, беспорядок становится больше. С увеличением объема пространственный беспорядок также растет и, наоборот, с уменьшением объема – уменьшается. В каждом случае необходимо оценивать, какой из двух процессов превалирует.

а). Энтропия возрастает. Сообщение системе теплоты приводит к повышению температуры, усилению хаотического движения молекул, увеличению степени беспорядка в системе, увеличению средней энергии молекул и поэтому к возрастанию числа Ω возможных энергетических состояний. А это означает по определению ($S = k \ln \Omega$) возрастание энтропии.

б) Температура остается постоянной, однако с увеличением объема увеличивается пространственный беспорядок – количество мест, которые могут занимать молекулы, число которых неизменно. Следовательно, увеличивается количество разнообразных возможностей размещения на этих местах, т.е. количество микросостояний Ω . По определению ($S = k \ln \Omega$) энтропия растет.

в) Энтропия не изменяется. При адиабатном расширении газа за счет увеличения объема (см. ответ п. б) энтропия возрастает. Но за счет уменьшения температуры, которое при этом происходит, энтропия уменьшается (см. ответ п. а). Эти две тенденции полностью компенсируют друг друга.

§ 19. Реальные газы. Уравнение Ван-дер-Ваальса

Мы определили идеальный газ как газ, состоящий из молекул, не взаимодействующий между собой, а сами молекулы мы при этом считали материальными точками, т.е. мы пренебрегаем их размерами и объемом.

Отсутствие взаимодействия между молекулами означает, что на молекулы в промежутках между столкновениями не действуют какие-либо силы, что они движутся свободно. Между тем, при столкновениях молекул между собой, они изменяют свою скорость, что очевидно, невозможно без действия силы. Следовательно, межмолекулярные силы существуют, но они становятся заметными только при столкновениях, когда расстояния между молекулами очень малы.

Отсутствие объема у молекул означает, что объем сосуда весь целиком доступен для движения каждой молекулы, т.к. все прочие молекулы, будучи точками, не занимают объема. Мы знаем, что молекулы действительно имеют определенные размеры. Радиус молекул большинства газов $\sim 0,1$ нм. Для объема одной молекулы получается $4 \cdot 10^{-30} \text{ м}^3$. В одном кубическом метре газа при нормальных условиях содержится $2,68 \cdot 10^{25}$ молекул. Их суммарный собственный объем составляет $4 \cdot 10^{-30} \text{ м}^3 \cdot 2,68 \cdot 10^{25} \text{ м}^3 \approx 10^{-4} \text{ м}^3$. Таким образом, на долю молекул приходится только одна десятитысячная часть всего объема газа.

Оба допущения, положенные в основу теории идеального газа являются приближенными. Уравнение Клапейрона – Менделеева так же является приближенными. Оно справедливо только при достаточно малых давлениях. При повышении давления наблюдаются отклонения от таких газовых законов, как законы Бойля-Мариотта и Гей-Люссака, являющихся прямыми следствиями уравнения состояния Клапейрона – Менделеева.

Пример 19.1. Приведем для сравнения опытные и рассчитанные по уравнению Клапейрона – Менделеева значения объема, занимаемого одним молем углекислого газа при температуре 320 К и различных давлениях..

Таблица 19.1

Давление, атм	Объем, л	
	Опытные данные	По уравнению Клапейрона-Менделеева
1	26,2	26,3
10	2,52	2,63
40	0,54	0,66
100	0,098	0,26

Как видно из приведенных данных, уже при давлениях в несколько десятков атмосфер наблюдаются заметные отклонения от законов идеального газа, а при давлении 100 атм уравнение Клапейрона – Менделеева совершенно неприменимо.

Опыт, таким образом, показывает, что реальные газы значительно отличаются по своим свойствам от идеальных.

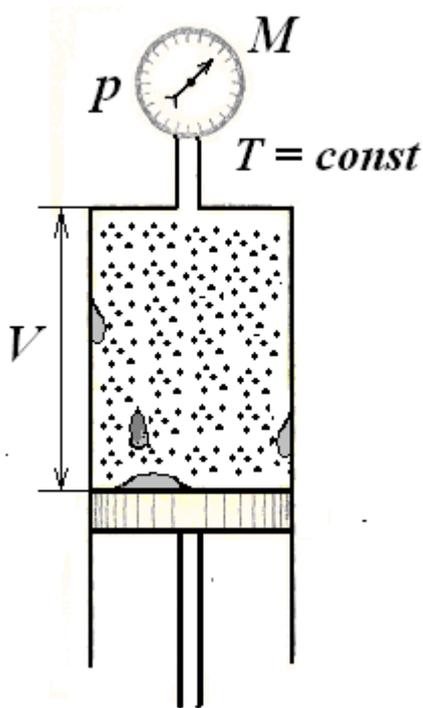


Рис. 19.1.

(или удельный объем).

По мере подъема поршня и, значит, уменьшения объема давление непрерывно растет, сначала обратно пропорционально объему (AB). Так продолжается до тех пор, пока объем не уменьшится до V_1 (рис. 19.2).

Дальнейшее уменьшение объема до значения V_2 не вызывает изменения давления. Как раз в это время можно заметить, что на поверхности поршня и на стенках сосуда появляются капельки жидкости. Дальнейшее продвижение поршня вверх сопровождается увеличением количества жидкости над поршнем и уменьшением количества газа. Давление остается постоянным, пока весь объем не окажется заполненным жидкостью. V_2 – объем жидкости.

Если продолжать и после этого поднимать поршень, т.е. сжимать уже жидкость, то давление резко увеличится – жидкости мало сжимаемы.

При давлениях и объемах, соответствующих участку BC часть объема занята жидкостью, другая часть – газом, который в этом случае называется насыщенным паром. Ордината, соответствующая участку BC , определяет давление насыщенного пара.

Несоответствие данных опыта о зависимости объема газа от давления уравнению состояния идеального газа носит не только количественный характер, но с ним связаны важные качественные изменения.

Известно, что при определенных значениях давления и температуры газы конденсируются, т.е. переходят в жидкое состояние. Такое явление ни в какой мере не следует из уравнения состояния идеального газа. Этот процесс можно исследовать экспериментально в следующей установке.

Пусть исследуемый газ помещен в сосуд, закрытый подвижным поршнем (рис. 19.1). Будем поддерживать его температуру постоянной, но ниже характерной для каждого газа значения.

Процесс сжатия удобно графически изобразить изотермой.

По оси ординат будем откладывать давление, измеряемое манометром, по оси абсцисс – молярный объем газа p

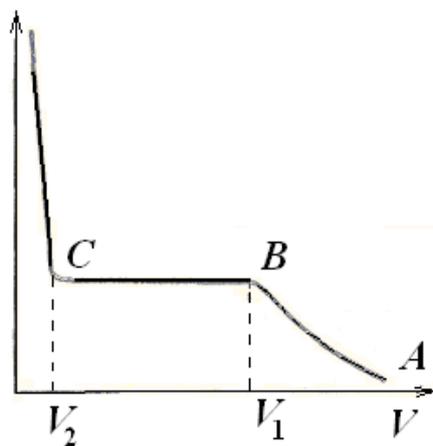


Рис. 19.2

По оси ординат будем откладывать давление, измеряемое манометром, по оси абсцисс – молярный объем газа p

Повторим этот опыт при других температурах и получим семейство экспериментальных изотерм (рис. 19.3). С повышением температуры горизонтальные линии – изобары насыщающих паров, соответствующих двухфазному состоянию, становятся все короче. Это связано с тем, что при повышении температуры удельный объем насыщающих паров становится меньше и точка B передвигается влево. С другой стороны, удельный объем жидкости растет, точка C перемещается вправо. При некоторой температуре обе точки сливаются, и тогда исчезает разница между жидким и газообразным состояниями.

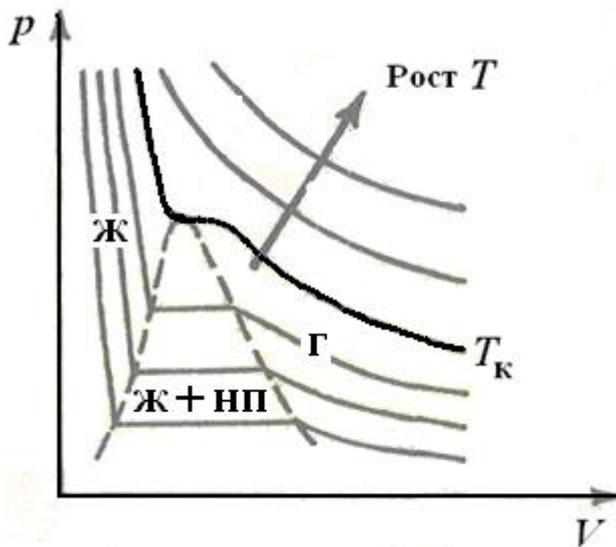


Рис. 19.3.

Это состояние называется *критическим* и та температура, при которой оно наступает, – *критической температурой* $T_{кр}$. Если на различных изотермах соединить все точки, при которых начинается процесс кипения и конденсации, то получится область, очерченная пунктиром. Эта пунктирная линия разделяет pV -диаграмму на три области.

Справа от очерченной области – газ, однофазное состояние. Слева жидкость – тоже однофазное состояние. Внутри очерченной области двухфазная система – жидкость плюс насыщенный пар. Выше критической изотермы опять находится однофазная область. Выше критической температуры $T_{кр}$ вещество может быть только однородным при любом сжатии. Критической температуре $T_{кр}$ соответствуют определенные значения критического объема $V_{кр}$ и критического давления $p_{кр}$.

Существует ряд приближенных уравнений, описывающих поведение реальных газов. Простейшее из них было предложено голландским физиком Ван-дер-Ваальсом. Это уравнение вносит поправки в уравнение состояния идеального газа $pV = RT$. Для одного моля реального газа оно имеет вид

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT. \quad (19.1)$$

Здесь a и b – экспериментальные постоянные Ван-дер-Ваальса, имеющие для разных газов различные значения и учитывающие отклонение свойств реального газа от свойств идеального.

Наличие у молекул собственного объема приводит к тому, что часть объема сосуда становится недоступной для движения молекул. Эту часть объема характеризует поправка b . Она учитывает и отталкивание молекул на близких расстояниях.

Поправка a/V^2 имеет размерность давления, она характеризует добавку к внешнему давлению и учитывает притяжение молекул в результате межмоле-

кулярного взаимодействия. Из-за притяжения молекул друг к другу газ сжимает сам себя.

Силы притяжения, называемые *силами Ван-дер-Ваальса*, действуют между молекулами при сравнительно больших расстояниях.

По природе эти силы являются электрическими и обусловлены тем, что атомы и молекулы содержат электрически заряженные частицы.

Слабые силы притяжения возникают из-за того, что хотя молекулы в целом нейтральны, электрические заряды в них разделены и могут смещаться относительно друг друга (рис. 19.4). В электрическом отношении молекула превращается в диполь, т.е. два разноименных одинаковых по абсолютному значению, расположенных на близком расстоянии друг от друга заряда. На малых расстояниях (порядка размеров самих молекул) силы притяжения переходят в силы отталкивания.

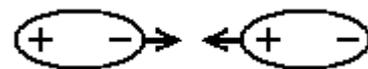


Рис. 19.4.

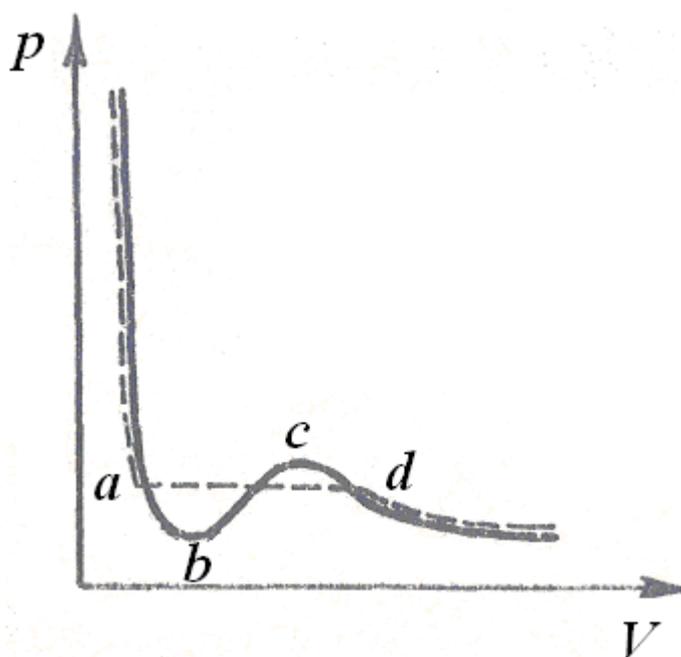


Рис. 19.5.

Универсальной формулы, описывающей зависимость сил Ван-дер-Ваальса от расстояния, не существует, так как в молекулах содержится по многу заряженных частиц. Расчет показывает, что сила Ван-дер-Ваальса убывает с расстоянием очень быстро – в большинстве случаев прямо пропорционально расстоянию между молекулами в седьмой степени.

Построенный в соответствии с уравнением Ван-дер-Ваальса график зависимости давления газа от занимаемого им объема при постоянной температуре (изотерма Ван-дер-Ваальса) показан на рис. 19.5 сплошной линией. Одновременно пунктиром дана экспериментальная изотерма для того же газа. Из рисунка видно, что изотерма Ван-дер-Ваальса удовлетворительно совпадает с опытными данными, за исключением участка *abcd*.

Участок резкого роста кривой левее точки *a* на опыте отвечает жидкости. Участок *ad* соответствует конденсации газа, т.е. его переходу в жидкое состояние. При этом давление газа над поверхностью жидкости равно давлению насыщенного пара и остается постоянным. Состояния, соответствующие участкам *ab* – перегретой жидкости– и *cd* – пересыщенного пара– в принципе могут быть реализованы. Состояния, соответствующие участку *bc*, не могут существовать, т.к. в природе не существует такие вещества, которые при росте давления увеличивали бы свой объем.

Участок резкого роста кривой левее точки *a* на опыте отвечает жидкости. Участок *ad* соответствует конденсации газа, т.е. его переходу в жидкое состояние. При этом давление газа над поверхностью жидкости равно давлению насыщенного пара и остается постоянным. Состояния, соответствующие участкам *ab* – перегретой жидкости– и *cd* – пересыщенного пара– в принципе могут быть реализованы. Состояния, соответствующие участку *bc*, не могут существовать, т.к. в природе не существует такие вещества, которые при росте давления увеличивали бы свой объем.

Контрольные вопросы

1. Каков молекулярный механизм передачи теплоты от горячего тела к холодному телу?
2. Какое состояние термодинамической системы определяется как равновесное?
3. Каково минимальное число параметров, характеризующих состояние теплового равновесия?
4. Можно ли говорить о количестве тепла, содержащегося в теле?
5. Как определить работу сил давления на pV -диаграмме?
6. Почему работа газа зависит от вида процесса изменения объема?
7. Система совершила круговой процесс, в результате которого была выполнена некоторая работа. Как изменилась при этом внутренняя энергия?
8. Обогреватель нагревает воздух в комнате, и его температура растет. Изменится ли при этом внутренняя энергия воздуха в комнате?
9. Что означает фраза «адиабатный процесс протекает достаточно быстро»? Чем определяется «достаточная быстрота» процесса?
10. Какой из приведенных процессов является обратимым: изохорный, изобарный, изотермический, адиабатный?
11. При изотермическом расширении идеального газа вся теплота, полученная газом, целиком затрачивается на совершение работы. Не нарушается ли при этом второй закон термодинамики?
12. Каким является изменение энтропии в системе, совершающей замкнутый процесс?
13. Чем обусловлена максимальность КПД обратимой тепловой машины, работающей по циклу Карно?
14. Перечислите основные свойства энтропии.
15. Как изменяется энтропия изолированной системы при увеличении объема? При повышении температуры?
16. Как изменяется энтропия двух тел при теплообмене между ними?
17. Как изменяется энтропия идеального газа при его изохорном нагревании? При изотермическом расширении? При адиабатном расширении? При адиабатном расширении газа в вакуум? Какое статистическое толкование можно дать этим процессам?
18. Как связаны термодинамическая вероятность состояния и состояние равновесия системы?
19. Исходя из того, что изменение энтропии в цикле равно нулю, доказать, что КПД теплового двигателя меньше единицы.
20. Какими являются силы взаимодействия между молекулами – гравитационными или электрическими? Являются ли эти силы силами притяжения или отталкивания?

Глава 3. ЯВЛЕНИЯ ПЕРЕНОСА В ГАЗАХ

Если первоначально газ не находится в состоянии равновесия (например, разные части газа имеют разные температуры или концентрации молекул) и предоставлен самому себе, то как показывает опыт сам по себе происходит переход газа в равновесное состояние.

Беспорядочное тепловое движение молекул, непрерывные столкновения между ними приводят к тому, что температуры или концентрации стремятся выровняться.

Это сопровождается передачей (переносом) от одной части газа к другой массы (диффузия), импульса (вязкость или внутреннее трение) и внутренней энергии (теплопроводность).

Такие процессы называются *явлениями переноса*.

§ 20. Диффузия

Диффузию определяют как взаимное проникновение и перемешивание молекул двух соприкасающихся газов (а также жидкостей и твердых тел) вследствие их теплового движения.

Пусть к газу, занимающему некоторый объем, добавлена примесь другого газа. При одинаковых во всем объеме давлении и температуре концентрация n_1 примеси в одной части объема будет больше, чем в остальных частях (рис. 20.1). Для простоты положим, что концентрация n_1 изменяется только в одном направлении, например, вдоль оси x . Быстрота этого изменения характеризуется производной $\frac{dn_1}{dx}$.

Как показывает опыт, через некоторое время примесь распространится по всему объему и смесь газов станет однородной.

Такое выравнивание концентраций происходит благодаря тепловому движению молекул.

Расположим перпендикулярно оси x воображаемую площадку S . За счет теплового движения через площадку S проходят молекулы как слева направо, так и справа налево.

Однако число молекул примеси, проходящих через площадку S слева направо, превышает число этих молекул, проходящих справа налево. При этом такое же количество молекул основного газа переходит через площадку S в обратном направлении, т.е. суммарное число молекул обеих компонент в единице объема (концентрация) остается одинаковым. В итоге тепловое движение приводит к направленному переносу молекул примеси. Таким образом, происходит *процесс выравнивания концентрации газовых молекул – диффузия*.

Интенсивность процесса диффузии характеризуется потоком молекул примеси.

Потоком какой-либо величины (частиц, массы, энергии и т.п.) называется количество этой величины, проходящее в единицу времени через некоторую воображаемую поверхность.

Опытным путем установлено, что диффузионный поток молекул пропорционален градиенту концентрации, взятому с обратным знаком (закон *Фика*).

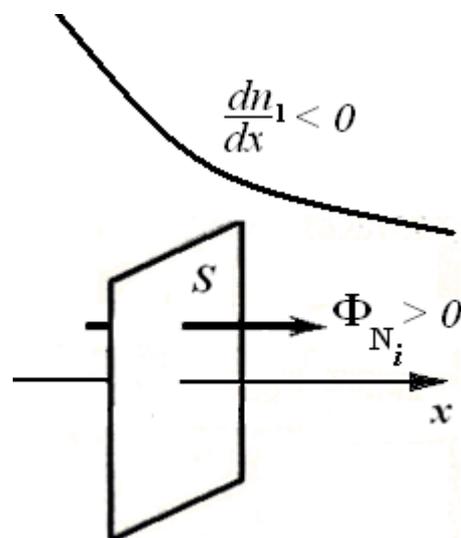


Рис. 20.1.

Градиентом какой-нибудь скалярной величины, зависящей от координат, называется вектор, характеризующий быстроту изменения этой величины в пространстве. Этот вектор направлен в сторону наиболее быстрого возрастания величины. Если скалярная величина изменяется только вдоль какого-нибудь одного направления, например оси x , то численное значение градиента равно просто производной

$$(\text{grad} \cdot n_1)_x = \frac{dn_1}{dx}. \quad (20.1)$$

Согласно закону Фика поток молекул

$$\Phi_{N_1} = -D \frac{dn_1}{dx} S. \quad (20.2)$$

Знак минус в формуле (20.2) указывает, что перенос молекул примеси происходит в направлении убывания концентрации. Коэффициент D называется *коэффициентом диффузии*. Коэффициент диффузии измеряется в $\text{м}^2/\text{с}$. Типичное значение коэффициента диффузии газов при нормальных условиях $D \sim 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$ (медленнее происходит диффузия в жидкостях, например, для поваренной соли в воде $D \sim 10^{-9} \text{ м}^2/\text{с}$, еще медленнее – в твердых телах, например, для золота в свинце $D \sim 10^{-14} \text{ м}^2/\text{с}$).

Молекулярно-кинетическая теория дает для коэффициента диффузии значение

$$D = \frac{1}{3} \lambda \langle v \rangle. \quad (20.3)$$

Таким образом, коэффициент диффузии определяется средней длиной свободного пробега λ и средней арифметической скоростью $\langle v \rangle$ теплового движения молекул.

Если параметры системы в некотором процессе с течением времени изменяются, процесс называется *нестационарным*. В *стационарном* процессе величины, характеризующие систему, не изменяются со временем.

Диффузия – процесс необратимый и, как правило, нестационарный, поскольку со временем происходит выравнивание разностей концентраций. Если искусственно поддерживать разности концентраций, то можно создать стационарную диффузию.

Несмотря на то, что диффузия происходит благодаря тепловому движению молекул с довольно большими скоростями (для молекул воздуха при комнатной температуре средняя скорость молекул примерно 500 м/с, а для молекул водорода 1800 м/с), диффузионное перемешивание в газах является медленным процессом. Причина несоответствия состоит в том, что в процессах установления равновесия (релаксации) важную роль играют не только скорости движения молекул, но и столкновения между ними и обусловленная столкновениями длина пробега. Так диффузионное время релаксации τ (время, за которое выравнивается концентрация диффундирующего вещества) имеет порядок величины

$$\tau \approx \frac{L^2}{D}, \quad (20.4)$$

где L – линейный размер области, в которой в начальный момент времени концентрация вещества распределена неравномерно, D – коэффициент диффузии. Вследствие малости коэффициента диффузии это время значительно.

Пример 20.1. Оценим время, за которое за счет диффузии запах духов распространится в неподвижном воздухе на расстояние 1 м. Полагая коэффициент диффузии духов в воздухе $D \approx 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$, согласно (20.4) будем иметь

$$\tau \approx \frac{1 \text{ м}^2}{10^{-5} \text{ м}^2 / \text{с}} = 10^5 \text{ с} \approx 27,8 \cdot \text{ часов} .$$

Полученный ответ не соответствует повседневному опыту. Вывод – определяющим процессом в распространении запахов является не диффузия, а конвекция, т.е перенос молекул духов потоками воздуха.

Пример 20.2. Определить зависимость коэффициента диффузии D от температуры T при следующих процессах: 1) изобарном; 2) изохорном.

По формуле (20.3) коэффициент диффузии $D = \frac{1}{3} \lambda \langle v \rangle$. Раскроем значения сред-

ней длины свободного пробега $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n} = \frac{kT}{\sqrt{2} \pi d^2 p}$ и средней арифметической скоро-

сти молекул $\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$. Тогда получим: 1) при изобарном процессе ($p = \text{const}$)

$D \sim T \sqrt{T}$, 2) при изохорном процессе, для которого $p \sim T$, $D \sim \sqrt{T}$.

§ 21. Теплопроводность

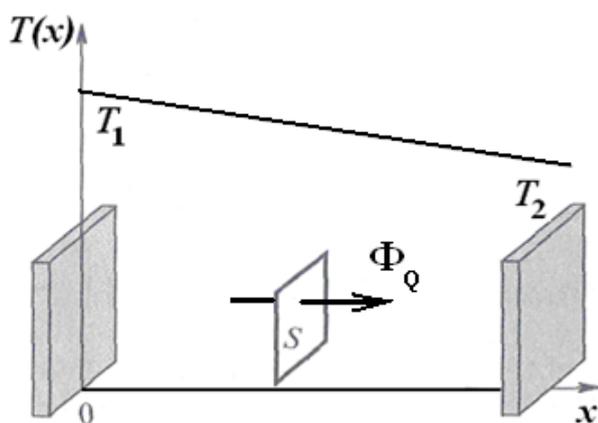


Рис. 21.1.

Предположим, что есть два источника тепла в виде широких пластин различной температуры T_1 и T_2 , расположенных перпендикулярно оси x . Между пластинами помещается газ, в начальный момент времени одинаково разогретый по всему объему (рис. 21.1).

За счет теплового движения через площадку S проходят молекулы как слева направо, так и справа налево, и если давление газа во всех точках одно и то же, то числа этих молекул одинаковы.

Но молекулы, движущиеся слева, несут с собой большую энергию, чем молекулы, приходящие к площадке справа, потому что они приходят из области высокой температуры. В результате непосредственной передачи энергии от молекул, обладающих большей энергией, молекулам с меньшей энергией возникает поток тепла слева направо, равный разности энергий, переносимых молекулами слева и справа.

Газ, заполняющий зазор между пластинами, передает внутреннюю энергию от горячего тела к более холодному, вследствие чего происходит выравнивание температуры. Этот процесс называется *теплопроводностью*.

При этом в газе устанавливается некоторое распределение температур $T(x)$ и температурный градиент dT/dx .

Закон теплопроводности был сформулирован *Фурье*. Тепловой поток Φ_Q через поверхность S удовлетворяет уравнению

$$\Phi_Q = -\kappa \frac{dT}{dx} S \quad (21.1)$$

Постоянная κ называется *теплопроводностью* и имеет размерность $[\kappa] = \text{Дж}/(\text{м} \cdot \text{с} \cdot \text{К})$. Знак минус показывает, что поток теплоты направлен в сторону понижения температуры, т.е. против градиента температуры dT/dx .

Для идеального газа согласно кинетической теории газов

$$\kappa = \frac{1}{3} \rho \lambda c_v \langle v \rangle, \quad (21.2)$$

где ρ – плотность газа, c_v – удельная теплоемкость при постоянном объеме.

Пример 21.1. Современные окна, например, однокамерные стеклопакеты, состоят из двух стекол толщиной 4 мм и воздушной прослойки толщиной $d = 14$ мм.

Теплопроводность стекла $\kappa_{\text{ст}} \approx 1 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$, теплопроводность воздуха в 50 раз меньше – $\kappa = 0,026 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$. Поэтому главную роль в сохранении тепла в комнате играет воздушная прослойка между стеклами.

Если в комнате поддерживается постоянная температура t_1 , а на улице t_2 , то имеет место стационарная теплопроводность, и в воздушном промежутке устанавливается линейное распределение температуры. Поэтому градиент температуры равен

$$\frac{T_1 - T_2}{d}, \quad (\text{П.21.1})$$

а поток тепловой энергии

$$\frac{dQ}{dt} = -\kappa S \frac{T_1 - T_2}{d}. \quad (\text{П. 21.2})$$

Пусть площадь окна составляет 2 м^2 , а температура на улице $t_2 = -10 \text{ }^\circ\text{C}$. Оценим поток тепловой энергии через такое окно:

$$\frac{dQ}{dt} = 0,026 \cdot 2 \cdot \frac{30}{0,014} = 111,4 \text{ Вт}$$

Потери тепловой энергии через окно за месяц

$$Q = 111,4 \cdot 24 \cdot 30 = 80,2 \text{ кВт} \cdot \text{ч}.$$

§ 22. Вязкость

Вязкость или внутреннее трение – это свойство текучих тел (жидкостей и газов) оказывать сопротивление перемещению одной их части относительно другой.

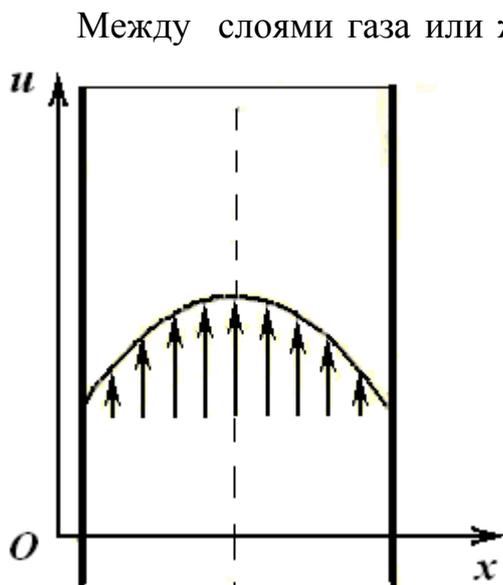


Рис. 22.1.

Между слоями газа или жидкости, которые перемещаются параллельно друг другу с различными по величине скоростями, возникают силы трения. Эти силы направлены по касательной к поверхности соприкасающихся слоев. Со стороны слоя, который движется быстрее, на слой, который движется медленнее, действует ускоряющая сила. Наоборот, слой, движущийся медленнее, тормозит слой газа, который движется быстрее.

Таким образом, этот процесс способствует выравниванию скоростей движения различных слоев газа.

Рассмотрим механизм возникновения вязкости. Представим себе газ(или жидкость), текущий вдоль трубы (рис. 22.1). При этом скорости разных слоев распределены так, как показано на рис. 22.1, где стрелки представляют векторы скоростей u слоев, перпендикулярные оси x .

Наибольшая скорость наблюдается в средней прилегающей к оси части трубы, по мере приближения к стенкам скорость уменьшается, а слой, непосредственно прилегающий к стенкам трубы, неподвижен.

В результате теплового движения молекулы перелетают из одного слоя газа в другой, перенося при этом свой импульс mu упорядоченного движения из одного слоя в другой. В итоге обмена молекулами между слоями, движущимися с различными скоростями, импульс упорядоченного движения быстрее движущегося слоя уменьшается, а медленнее движущегося слоя – увеличивается. Другими словами, быстрее движущийся слой тормозится, а медленнее движущийся – ускоряется.

Согласно второму закону Ньютона сила равна быстроте изменения импульса, т.е. производной импульса по времени.

Это значит, что на каждый из слоев, движущийся относительно соседнего, действует сила, равная изменению импульса в единицу времени.

Сила эта – сила трения между слоями газа, движущимися с различными скоростями. Отсюда и название – *внутреннее трение*.

Уравнение для силы внутреннего трения между соседними слоями установлено Ньютоном и называется законом Ньютона:

$$F = \eta \left| \frac{du}{dx} \right| S. \quad (22.1)$$

Здесь η – динамическая вязкость, S – площадь поверхности, лежащей на границе между слоями, du/dx – быстрота изменения скорости течения жидкости или газа в направлении x , перпендикулярном к направлению движения слоев (градиент u).

Согласно кинетической теории газов

$$\eta = \frac{1}{3} \rho \langle v \rangle \lambda. \quad (22.2)$$

Вязкость измеряется в килограммах на метр·секунду (кг/м·с) или, что то же самое, в паскаль·секундах (Па·с). Употребляется также единица измерения г/с·см, называемая *пуазом*.

В качестве примера приведем значения динамической вязкости некоторых газов и жидкостей при температуре 20° С.

Таблица 22.1

Вещество	η , кг/с·м	Вещество	η , кг/с·м
Водород	$0,88 \cdot 10^{-5}$	Вода	$1 \cdot 10^{-3}$
Воздух	$1,8 \cdot 10^{-5}$	Ртуть	$1,55 \cdot 10^{-3}$
Бензол	$6,5 \cdot 10^{-2}$	Глицерин	1,5

Пример 22.1. Используя данные для водяного пара при нормальных условиях: плотность $\rho = 0,7 \text{ кг/м}^3$, средняя арифметическая скорость молекул $\langle v \rangle = 566 \text{ м/с}$, средняя длина свободного пробега $\lambda = 1,24 \cdot 10^{-7} \text{ м}$, концентрация молекул $n = 2,69 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$, произведем численные оценки коэффициентов переноса.

$$\text{Коэффициент диффузии } D = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с};$$

$$\text{теплопроводность (для } i = 6) \kappa = 0,02 \text{ Дж/(м}\cdot\text{с}\cdot\text{К)};$$

$$\text{динамическая вязкость } \eta = 0,8 \cdot 10^{-5} \text{ Па}\cdot\text{с}.$$

Эти данные характерны при нормальных условиях для большинства газов.

Контрольные вопросы

1. Возможны ли стационарные, но неравновесные состояния системы?
2. Почему при жаре массивные металлические предметы на ощупь кажутся горячими, а деревянные – нет?
3. Почему шерстяная одежда хорошо сохраняет тепло?
4. Как зависит теплопроводность κ идеального газа от давления?
5. Почему в ветреную погоду более прохладно, чем в отсутствие ветра?
6. При медленном выдыхании воздуха на руку ощущается тепло, а при быстром – холод. Почему?
7. Каков механизм возникновения сил трения в газах и жидкостях?
8. Каким явлением объясняется тот факт, что ветер с течением времени утихает?

Глава 4. ЖИДКОСТИ

§ 23 Строение жидкостей. Поверхностное натяжение

По своей структуре жидкости занимают промежуточное положение между газами и твердыми телами.

Силы взаимодействия между молекулами жидкости являются силами Ван-дер-Ваальса, то есть силами притяжения, которые на очень малых расстояниях переходят в силы отталкивания.

Когда средняя кинетическая энергии молекул становится меньше модуля средней потенциальной энергии их притяжения, возникает связанное состояние системы молекул, т.е. жидкость.

В газах расстояние между молекулами в среднем большое, поэтому они быстро изменяют взаимное положение. Молекулы газов движутся совершенно хаотично, в их расположении отсутствует какой бы то ни было порядок.

В жидкостях расстояние между молекулами гораздо меньше, чем в газах. Поэтому молекулы сравнительно медленно меняют свое взаимное положение. Группы молекул могут образовывать агрегаты молекул, напоминающие по своим свойствам твердое тело. Говорят, что в жидкостях наблюдается *ближний порядок* – упорядоченное расположение только соседних молекул. На больших расстояниях порядок «размывается» и переходит в «беспорядок».

Молекулы жидкости совершают тепловые колебания около временных положений равновесия. Время от времени молекула скачком перемещается в новое положение равновесия, отстоящее на расстояние порядка размеров самих молекул.

Если газы всегда занимают объем сосуда, в котором они находятся, то жидкости имеют собственный объем и ограничивающую его поверхность.

Молекулы жидкости располагаются так близко друг к другу, что силы притяжения между ними (силы Ван-дер-Ваальса) имеют значительную величину. Однако силы притяжения между молекулами с увеличением расстояния между ними быстро убывают. Поэтому заметное воздействие молекул друг на друга осуществляется в пределах небольшого расстояния $r_{\text{м.д.}}$, называемого *радиусом молекулярного действия*. Сфера радиуса $r_{\text{м.д.}}$ называется *сферой молекулярного действия*. Радиус молекулярного действия равен нескольким эффективным диаметрам молекулы.

Таким образом, каждая молекула испытывает притяжение со стороны всех молекул, находящихся внутри сферы молекулярного действия, центр которой совпадает с центром данной молекулы.

Когда молекула находится внутри жидкости, то ее со всех сторон симметрично окружают другие молекулы. Результирующая сила притяжения к соседним молекулам в среднем равна нулю (рис. 23.1).

У молекулы, которая находится на поверхности жидкости, окружение несимметричное (рис. 23.1). Взаимодействие молекул жидкости с молекулами пара и воздуха над жидкостью настолько незначительны, что ими можно пренебречь. Все молекулы, которые расположены в поверхностном слое жидкости, толщина которого равна радиусу сферы молекулярного действия, находятся под действием результирующих сил молекулярных взаимодействий, направ-

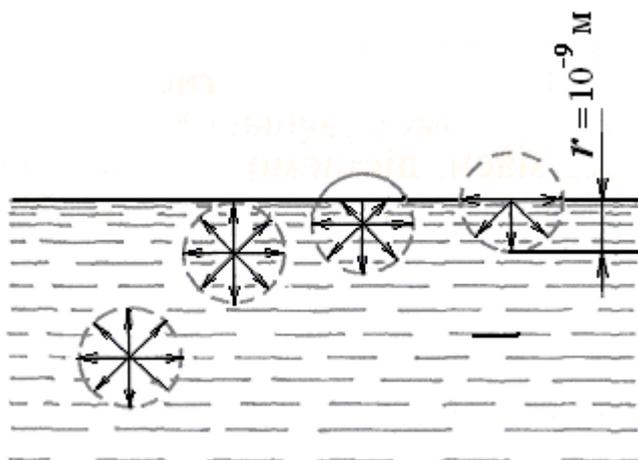


Рис. 23.1.

ленных внутрь жидкости. Эти силы создают поверхностное молекулярное давление на жидкость.

Молекулярное давление поверхностного слоя в жидкостях достаточно сильное, например, для воды оно равно 10^9 Па. Наличием такого большого молекулярного давления можно объяснить малую сжимаемость жидкостей.

Переходя из глубины жидкости в поверхностный слой, молекулы выполняют работу *против* результирующих сил молекулярных действий нижних слоев. За счет этого потенциальная энергия молекулы увеличивается. Поэтому молекулы поверхностного слоя имеют большую потенциальную энергию, чем молекулы остального объема жидкости.

Положение равновесия соответствует минимуму потенциальной энергии. Поэтому в отсутствие внешних сил жидкость принимает форму с минимальной поверхностью, т.е. форму шара. В условиях невесомости жидкость принимает форму шара, а в условиях земного тяготения такую форму принимают только небольшие капли.

Наличие поверхностной энергии обуславливает стремление жидкости к сокращению своей поверхности. Жидкость ведет себя так, как если бы она была заключена в упругую растянутую пленку, стремящуюся сжаться. Естественно, что никакой пленки, ограничивающей жидкость снаружи, нет. Поверхностный слой состоит из тех же молекул, что и вся жидкость.

Выделим мысленно участок поверхности жидкости, ограниченный замкнутым контуром. Стремление этого участка к сокращению приводит к тому, что он действует на остальную часть поверхности с касательными к поверхности силами, перпендикулярными в каждом месте к соответствующему элементу контура. Эти силы называют *силами поверхностного натяжения*.

Сила, приходящаяся на единицу длины контура, называется **поверхностным натяжением** и обозначается буквой σ . Измеряют ее в ньютонах на метр (Н/м).

Действием сил поверхностного натяжения объясняется сокращение мыльной пленки, которая затягивает проволочный каркас с подвижной стороной (рис. 23.2). Чтобы удержать перемычку каркаса от перемещения в сторону сокращения площади пленки, к ней нужно приложить внешнюю силу F , уравновешивающую силу поверхностного натяжения.

У пленки две поверхности, поэтому слой жидкости граничит с перемычкой по контуру длиной $2l$ и, следовательно, действует на перемычку с силой, равной

$$F = 2\sigma l. \quad (23.1)$$

Увеличив внешнюю силу F на пренебрежимо малую величину, сместим перемычку вправо на расстояние dx . При этом перемычка совершит над жидкой пленкой работу

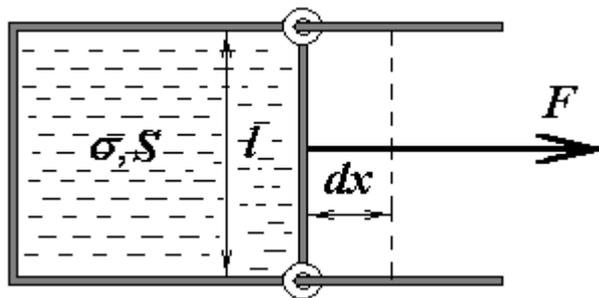


Рис. 23.2.

$$dA = F dx = 2\sigma l dx = \sigma dS, \quad (23.2)$$

где dS – приращение площади поверхностного слоя пленки.

Результатом совершения работы (23.2) являются увеличение площади поверхностного слоя на dS и, следовательно, возрастание поверхностной энергии на $dE_{\text{пов}}$

$$dA = dE_{\text{пов}}. \quad (23.3)$$

Из сравнения выражений (23.2) и (23.3) вытекает, что поверхностное натяжение σ представляет собой дополнительную энергию, которой обладает единица площади поверхностного слоя. В соответствии с этим σ можно измерять не только в ньютонах на метр, но также и в джоулях на квадратный метр (Дж/м²).

У большинства жидкостей поверхностное натяжение имеет при 20° С порядок от 10^{-2} до 10^{-1} Н/м. Например, у эфира $1,71 \cdot 10^{-2}$, ацетона $2,33 \cdot 10^{-2}$, бензола $2,89 \cdot 10^{-2}$, глицерина $6,57 \cdot 10^{-2}$, воды $7,27 \cdot 10^{-2}$ Н/м. Однако у ртути 0,465 Н/м

Пример 23.1. Один из методов экспериментального определения поверхностного натяжения связан с наблюдениями над отрывом капель жидкости, вытекающих из узкой трубки. При выходе из трубки размер капли постепенно возрастает и отрывается она тогда, когда достигает вполне определенной величины.

Перед отрывом капли образуется шейка, радиус которой $r_{\text{ш}}$ несколько меньше радиуса трубки. Вдоль окружности этой шейки действует сила поверхностного натяжения, которая удерживает ее. Отрыв произойдет тогда, когда вес капли P станет равным силе поверхностного натяжения.

Если радиус шейки примерно равен радиусу трубки r , а поверхностное натяжение жидкости σ , то сила поверхностного натяжения равна $2\pi r \cdot \sigma$. Следовательно, условие отрыва капли

$$2\pi r \cdot \sigma = P \quad (\text{П } 23.1)$$

Обычно в целях повышения точности измерения отсчитывают определенное количество капель, измеряют их общий вес и, полагая, что капли имеют сферическую форму, определяют их радиус. Вес висящей сферической капли радиуса R равен

$$(4/3)\pi R^3 \cdot \rho \cdot g,$$

где ρ – плотность жидкости. Условие отрыва капли

$$(4/3)\pi R^3 \cdot \rho \cdot g = 2\pi r \cdot \sigma. \quad (\text{П } 23.2)$$

Пусть на опыте установлено, что радиус капли воды $R = 2,26 \cdot 10^{-3}$ м, радиус трубки $r = 10^{-3}$ м. Определим по этим данным поверхностное натяжение воды.

Из формулы (П. 23.2) находим

$$\sigma = \frac{2R^3 \rho g}{3r} = \frac{2 \cdot (2,26 \cdot 10^{-3})^3 \cdot 10^3 \cdot 9,81}{3 \cdot 10^{-3}} = 7,55 \cdot 10^{-2} \text{ Н / м} \quad (\text{П } 23.3)$$

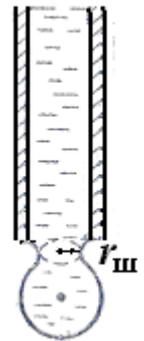


Рис. П.23.1

§ 24. Условия равновесия на границе жидкость – твердое тело.

Смачивание

Если на поверхность твердого тела поместить каплю жидкости, то зависимости от соотношения поверхностных натяжений возможны два варианта (рис. 24.1). Капля воды растекается на стекле, в то же время как ртуть на той же поверхности превращается в сплюснутую каплю.

Обозначим через dl элемент длины, направленный вдоль линии соприкосновения трех сред – твердой, жидкой и газообразной. Отметим, что элемент длины dl направлен перпендикулярно плоскости чертежа.

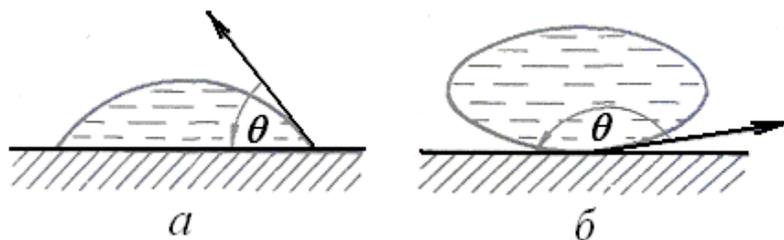


Рис. 24.1

Обозначим далее поверхностное натяжение на границе твердого тела и жидкости через $\sigma_{т, ж}$, на границе твердого тела и газа – через $\sigma_{т, г}$, на границе жидкости и газа – через $\sigma_{ж, г}$.

Силы поверхностного натяжения, действующие на элемент длины, равны соответственно

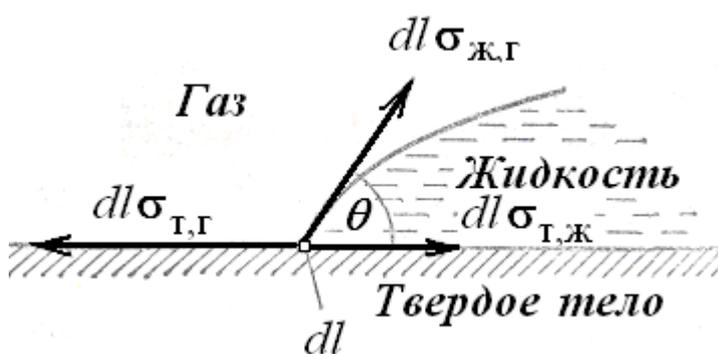


Рис. 24.2.

$\sigma_{т, ж} dl, \sigma_{т, г} dl, \sigma_{ж, г} dl$. (рис. 24.2)

Условием равновесия элемента длины dl является обращение в нуль касательной к поверхности составляющей всех сил, действующих на элемент:

$$\sigma_{т, г} = \sigma_{т, ж} + \sigma_{ж, г} \cos \theta. \quad (24.1)$$

Угол θ между касательными к поверхности твердого тела и жидкости отсчитывается внутри жидкости и называется *краевым углом*.

Из уравнения (24.1) следует, что

$$\cos \theta = \frac{\sigma_{т, г} - \sigma_{т, ж}}{\sigma_{ж, г}} \quad (24.2)$$

В зависимости от соотношения между поверхностными натяжениями краевой угол может принимать значения от 0 до 180° .

Если $\sigma_{т, г} > \sigma_{т, ж}$, угол θ оказывается острым, если $\sigma_{т, г} < \sigma_{т, ж}$, угол θ – тупой. Первый случай называется *частичным смачиванием* (рис. 24.1, а), второй случай – *частичным несмачиванием* (рис. 24.1, б).

Если $\sigma_{т, г} - \sigma_{т, ж} = \sigma_{ж, г}$, краевой угол равен нулю и жидкость растекается по поверхности твердого тела тонким слоем. Имеет место полное смачивание. Это же будет наблюдаться и при $\sigma_{т, г} - \sigma_{т, ж} > \sigma_{ж, г}$.

Соответственно, при

$$\sigma_{т, ж} = (\sigma_{т, г} + \sigma_{ж, г})$$

краевой угол равен 180° и жидкость полностью отделяется от поверхности твердого тела, касаясь ее в одной точке – имеет место полное несмачивание. Оно наблюдается, например, для воды на парафине.

Взаимодействие частиц жидкости с частицами твердого тела влияет и на форму поверхности, налитой в сосуд. Плоская и горизонтальная поверхность в широкой части сосуда искривляется у самых стенок, образуя вогнутый *мениск* у смачивающих жидкостей и выпуклый у несмачивающих (рис. 24.3).

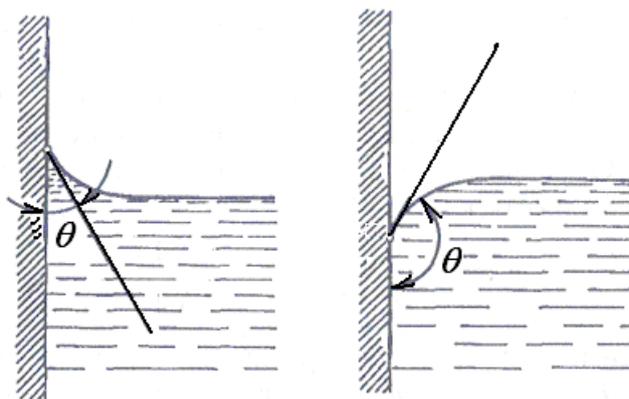


Рис. 24.3.

При плавании тел в жидкости из-за эффектов смачивания и несмачивания возникают дополнительные силы, которые либо увеличивают подъемную силу, либо уменьшают ее. Когда жидкость смачивает твердое тело, то поверхностное натяжение направлено против подъемной силы и стремится погрузить брусок в жидкость (рис. 24.4, а). Когда жидкость не смачивает твердое тело, поверхностное натяжение направлено вверх и стремится вытолкнуть брусок из жидкости (рис. 24.4, б).

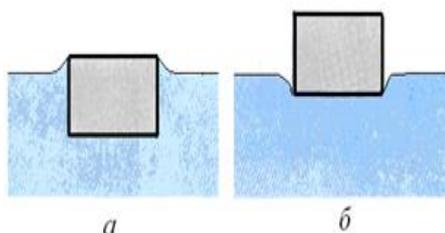


Рис. 24.4

На различном смачивании веществ основано явление флотации. *Флотация* состоит в разделении смеси порошков на основе их избирательного смачивания различными жидкостями. При флотации предварительно раздробленную породу (0,1 – 0,01

мм) перемешивают в воде, которая содержит незначительные концентрации поверхностно-активных веществ (например, дешевых масел), и вспенивают. Пустая порода (кварц, силикаты, известняки и т.д.) оседает на дно, поскольку она смачивается. Частицы ценных материалов втягиваются в масло, притягиваются к пузырькам воздуха и выносятся с пеной в отстойники.

Флотация — один из основных методов обогащения руд, углей и других полезных ископаемых.

§ 25. Давление под искривленной поверхностью.

Формула Лапласа

Всякая поверхностная пленка жидкости под действием сил поверхностного натяжения сокращается до минимальной площади, т. е. стремится стать плоской. Стремясь стать плоской, выпуклая пленка увеличивает давление на жидкость, а вогнутая уменьшает его (рис. 25.1). Здесь p_0 – атмосферное давление, Δp – *дополнительное давление*.

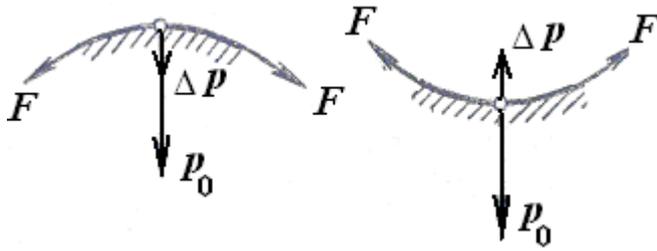


Рис. 25.1.

Определим величину дополнительного давления Δp под искривленной поверхностью. Пусть жидкость ограничена сферической поверхностью радиуса R .

Выделим на этой поверхности площадку S , опирающуюся на круглое основание S_0 радиуса

$$r = R \cos \theta .$$

К любому элементу длины окружности приложены силы поверхностного натяжения F , направленные по касательной к поверхности сферы.

Каждую из этих сил можно разложить на составляющие, как показано на рис. 25.2.

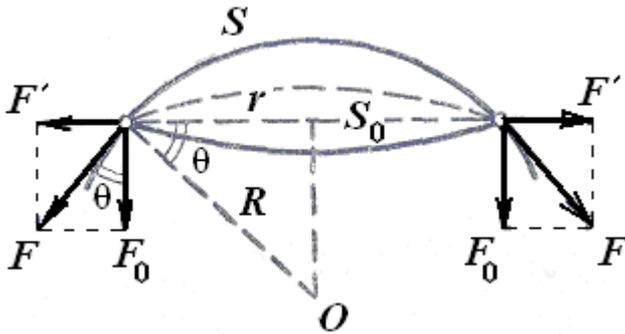


Рис. 25.2.

Составляющие F' взаимно компенсируются.

Тогда сумма всех сил поверхностного натяжения, действующих по периметру основания S_0 , дает равнодействующую, перпендикулярную S_0 и равную

$$F_0 = \sigma \cdot 2\pi r \cdot \cos \theta . \quad (25.1)$$

Разделив эту силу на площадь основания $S_0 = \pi r^2$, получим дополнительное

давление на жидкость от сил поверхностного натяжения, обусловленное кривизной поверхности

$$\Delta p = \frac{F_0}{S_0} = \frac{\sigma \cdot 2\pi r \cdot \cos \theta}{\pi r^2} = 2\sigma \frac{\cos \theta}{r} = \frac{2\sigma}{R} . \quad (25.2)$$

В общем случае поверхности любой формы дополнительное давление, обусловленное кривизной поверхности, выражается уравнением

$$\Delta p = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) . \quad (25.3)$$

(формула Лапласа).

Здесь R_1 и R_2 – главные радиусы кривизны поверхности в данной точке. Если через нормаль к поверхности провести пересекающие плоскости, то линии пересечения этих плоскостей с поверхностью будут иметь какие-то радиусы кривизны. Главные радиусы кривизны поверхности в данной точке – это R_1 – минимальный и R_2 – максимальный, которые лежат во взаимно перпендикулярных плоскостях.

Для сферы оба главных радиуса кривизны совпадают и равны радиусу сферы и формула (25.3) переходит в (25.2). У цилиндра один из главных радиусов кривизны равен бесконечности, а другой совпадает с радиусом цилиндра.

Пример 25.1. Каково дополнительное давление внутри мыльного пузыря диаметром $d = 10$ см. Какую работу необходимо выполнить, чтобы выдуть этот пузырь?

Пленка мыльного пузыря имеет две сферических поверхности: внутреннюю и внешнюю. Обе поверхности давят на воздух, который находится внутри. Толщина пленки очень мала, поэтому диаметры обеих поверхностей практически одинаковы. Дополнительное к атмосферному давлению, обусловленное кривизной поверхности

$$\Delta p = 2 \frac{2\sigma}{r},$$

где r – радиус пузыря. Поскольку $r = \frac{d}{2}$, то $\Delta p = \frac{8\sigma}{d}$.

Работа, которую необходимо выполнить, чтобы, растягивая пленку, увеличить ее поверхность на ΔS , выражается формулой

$$A = \sigma \Delta S = \sigma(S - S_0).$$

В данном случае S – общая площадь двух сферических поверхностей пленки мыльного пузыря, S_0 – общая площадь двух поверхностей плоской пленки, которая затягивала отверстие трубки до выдувания пузыря.

Пренебрегая S_0 , получим

$$A = \sigma S = 2\pi d^2 \sigma.$$

Подставив числовые значения, найдем

$$\Delta p = 3,2 \text{ Па.}$$

$$A = 2 \cdot 3,14 \cdot (0,1)^2 \cdot 40 \cdot 10^{-3} = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ (Дж)} = 2,5 \text{ мДж.}$$

§ 26. Капиллярные явления

Если расстояние между поверхностями, ограничивающими жидкость, сравнимо с радиусом кривизны поверхности жидкости, то такие сосуды называются *капиллярными*.

Следствием дополнительного давления, вызванного кривизной поверхности, является так называемый *капиллярный подъем*.

Поднятие (при смачивании) или опускание (при несмачивании) жидкости объясняется тем, что давление под вогнутой поверхностью меньше, чем давление под плоской поверхностью, а под выпуклой – больше (рис. 26.1, а).

На рис. 26.1, б изображена узкая трубка, опущенная в широкий сосуд с жидкостью. Пусть стенки сосуда смачиваются жидкостью. Тогда жидкость в трубке образует вогнутый мениск, и давление на жидкость становится меньше, чем в широком сосуде. Поэтому жидкость переходит в капилляр и поднимается в нем до тех пор, пока гидростатическое давление столба жидкости высотой h , равное ρgh (ρ – плотность жидкости, g – ускорение свободного падения) не станет равным лапласовскому давлению Δp :

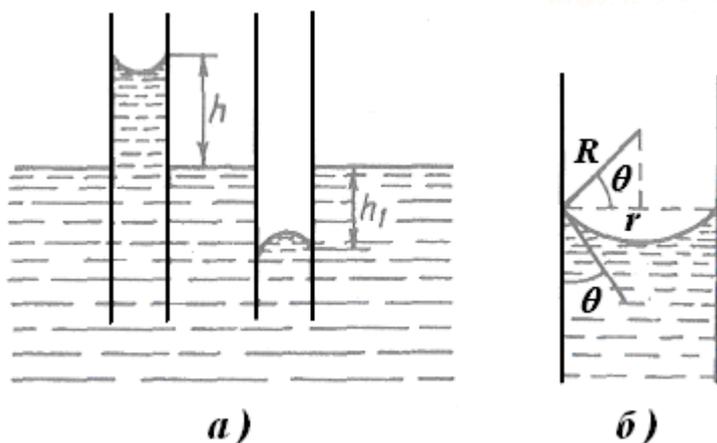


Рис. 26.1.

$$\rho gh = \frac{2\sigma}{R}. \quad (26.1)$$

Это равенство определяет высоту подъема жидкости в капилляре. Радиус кривизны мениска R , очевидно, не совпадает с радиусом капиллярной трубки r . Как видно из рис. 26.1,б

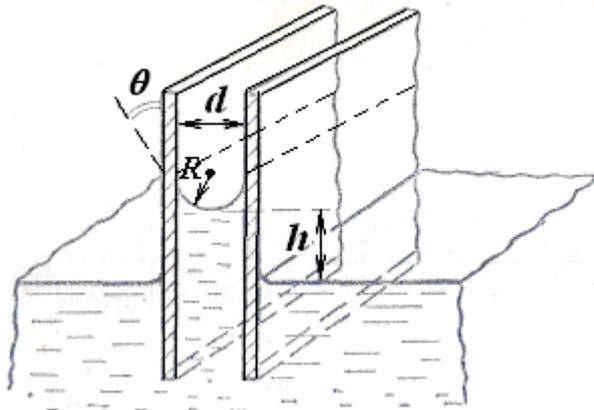


Рис. П. 26.1.

$$R = \frac{r}{\cos\theta}. \quad (26.2)$$

Тогда

$$h = \frac{2\sigma}{\rho gr} \cos\theta. \quad (26.3)$$

Капиллярным подъемом объясняется ряд широко известных явлений, например, подъем грунтовых вод в почве, подъем воды из почвы по стволам деревьев и проч. Так же точно поднимается влага по каменистому фундаменту к стенам строения, если не предусмотреть гидроизоляцию.

Пример 26.1. На какую высоту поднимается вода между двумя параллельными стеклянными пластинами, если расстояние между ними равно $d = 0,3$ мм?

Вода смачивает стекло, образуя вогнутый мениск, и поднимается за счет капиллярности. Давление столба жидкости, поднятой на высоту h , компенсируется давлением, создаваемым поверхностным натяжением искривленной поверхности и направленным вверх. С учетом формулы Лапласа имеем

$$\rho gh = \frac{\sigma}{R}. \quad (\text{П. 26.1})$$

Здесь учтено, что один из главных радиусов кривизны равен бесконечности, а другой совпадает с радиусом мениска. Аналогично формуле (26.2) установим связь между радиусом мениска R и расстоянием между пластинами d :

$$R = \frac{d}{2\cos\theta}. \quad (\text{П. 26.2})$$

Тогда для высоты капиллярного подъема получим

$$h = \frac{2\sigma \cos\theta}{\rho gd}. \quad (\text{П.26.3})$$

Полагая, что имеет место полное смачивание, определим высоту подъема

$$h = \frac{2 \cdot 7,3 \cdot 10^{-2} \cdot 1}{10^3 \cdot 9,81 \cdot 0,3 \cdot 10^{-3}} \approx 5 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 5 \text{ см}.$$

§ 27. Испарение и кипение жидкостей

Процессами, происходящими на границе между жидкостью и газом или паром, являются *испарение, кипение и конденсация*.

Испарением называется процесс парообразования, который происходит только на свободной поверхности жидкости. Вследствие теплового движения молекул испарение происходит при любой температуре, но его интенсивность возрастает с увеличением температуры. Скорость испарения пропорциональна свободной поверхности жидкости и ее температуре. Испарение объясняется вылетом из поверхностного слоя жидкости молекул, обладающих наибольшей скоростью (кинетической энергией), так что в результате испарения внутренняя энергия жидкости уменьшается, и она охлаждается.

Если число молекул, покидающих жидкость за некоторое время, равно числу молекул, возвращающихся в жидкость за то же время, наступает состояние динамического равновесия. Пар в состоянии динамического равновесия с жидкостью называется *насыщенным*.

Очевидно, что с повышением температуры плотность, а следовательно, и давление насыщенного пара увеличиваются.

Кипением называется процесс интенсивного испарения жидкости не только с ее свободной поверхности, но и по всему объему жидкости внутри образующихся при этом пузырьков пара. Пузырьки образуются как в объеме самой жидкости, так и на границе со стенками сосуда. По мере испарения жидкости внутри этих пузырьков давление пара в них повышается, пузырьки быстро увеличиваются в размерах и, всплывая на поверхность, лопаются. Вследствие этого возникает характерное бурление кипящей жидкости. Содержащийся в пузырьках насыщенный пар переходит в паровую фазу над жидкостью

Давление p внутри газового пузырька, находящегося в жидкости, представляет собой сумму внешнего давления p_0 , гидростатического давления вышележащих слоев жидкости $p_{\text{ж}}$ и добавочного давления Δp , вызванного поверхностным натяжением на поверхности пузырька

$$p = p_0 + p_{\text{ж}} + \Delta p, \quad (27.1)$$

причем

$$p_{\text{ж}} = \rho gh, \quad \Delta p = \frac{2\sigma}{r},$$

где r – радиус пузырька пара, h – расстояние от его центра до поверхности жидкости, ρ и σ – плотность и поверхностное натяжение жидкости.

Рост пузырьков пара, т.е. кипение жидкости, возможно только в том случае, когда температура жидкости такова, что давление $p_{\text{п}}$ насыщенного пара внутри пузырька несколько превышает давление p , вычисленного по формуле (27.1):

$$p_{\text{п}} \geq p_0 + \rho gh + \frac{2\sigma}{r}. \quad (27.2)$$

Если условие (27.2) не выполняется, происходит «захлопывание» пузырька и конденсация находящегося в нем пара.

Кипение возникает при более низкой температуре, если в жидкости имеются пылинки, пузырьки растворенных газов, бугорки шероховатости на стенках сосуда и другие *центры парообразования*.

Если кипение жидкости происходит при постоянном давлении p_0 , то ее температура – *температура кипения* – также остается неизменной.

Для поддержания кипения к жидкости необходимо подводить теплоту. Теплота, подводимая к кипящей жидкости, расходуется на отрыв молекул от жидкости и перевод их в паровую фазу, а также на работу пара против внешнего давления при увеличении объема паровой фазы.

Теплота r_k , необходимая для испарения единицы массы жидкости, нагретой до температуры кипения, называется *удельной теплотой парообразования*. Для превращения килограмма воды в пар при 100 °С необходимо затратить энергию $2,26 \cdot 10^6$ Дж.

Кипение жидкости и конденсация пара являются примерами **фазовых переходов первого рода**. Фазовым переходом первого рода называется процесс, при котором скачком изменяется плотность, внутренняя энергия и энтропия тела.

Характерной особенностью всех фазовых переходов первого рода является то, что в этих процессах *одновременно постоянны давление и температура*, но зато изменяется соотношение между массами двух фаз.

Второй особенностью этих процессов является то, что для их осуществления необходимо подводить к системе или отводить от нее некоторое количество теплоты, называемое *теплотой фаз перехода*.

Другими примерами фазовых превращений первого рода являются переход твердого состояния в жидкое (*плавление*), и обратный переход (*кристаллизация*). Превращение твердого тела в газ называется *сублимацией или возгонкой*.

В термодинамике доказывается, что теплота r фазового перехода единицы массы вещества выражается следующим образом:

$$r = (v_2 - v_1)T \frac{dp}{dT}, \quad (27.3)$$

где v_1 , и v_2 – удельные объемы (объемы единицы массы) вещества в исходной и конечной фазах, соответственно, T и p – температура и давление фазового перехода, $\frac{dp}{dT}$ – быстрота изменения давления с температурой.

Соотношение (27.3) называется **уравнением Клапейрона – Клаузиуса**. Оно справедливо для любого фазового перехода первого рода (например, испарения, плавления, кристаллизации, сублимации и т.п.).

Для случая кипения жидкости уравнение (27.3) перепишется в виде

$$r_k = (v_n - v_{жк})T \frac{dp}{dT},$$

откуда

$$\frac{dp}{dT} = \frac{(v_n - v_{жк})T}{r_k}, \quad (27.4)$$

где v_n , и $v_{жк}$ – удельные объемы пара и жидкости при температуре кипения T .

Поскольку удельный объем газа всегда больше удельного объема жидкости $v_{\text{г}} > v_{\text{ж}}$ и $r_{\text{к}} > 0$, то из (27.4) следует, что $\frac{dT}{dp} > 0$, т.е. температура кипения возрастает при увеличении давления.

Пример 27.1. На атомных электростанциях паровые котлы работают при давлении в них $p_0 > 125$ атм ($1,25 \cdot 10^7$ Па). При этом вода нагревается до температуры порядка 330 °С, а кипения ее все еще не происходит. Если давление в таком котле уменьшить, то происходит бурное кипение воды, давление выделившегося пара почти мгновенно возрастает до огромных величин и может вызвать разрушение котла. Это обстоятельство учитывают при эксплуатации паровых котлов.

§ 28. Понятие о жидких кристаллах

Жидкие кристаллы – это особое состояние некоторых органических веществ, в котором они обладают как свойствами жидкости (текучестью), так и сохраняют определенную упорядоченность в расположении молекул и анизотропию физических свойств, присущую твердым кристаллам.

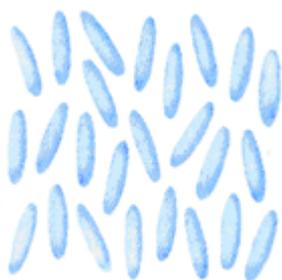


Рис. 28.1.

Особенностью жидких кристаллов с молекулярной точки зрения является вытянутая структура их молекул. Такая форма молекул определяет приблизительно параллельность их взаимной укладки и приводит к анизотропии их физических свойств.

Различают три основных типа жидких кристаллов – *сметические*, *нематические* и *холестерические*.

Наименьшую упорядоченность имеют *нематические* жидкие кристаллы. Молекулы их параллельны, но сдвинуты вдоль своих осей одна относительно другой (рис. 28.1).

Примером может служить параазоксианизол.

В *сметических* жидких кристаллах молекулы параллельны друг другу и расположены слоями. Сметики характеризуется одномерной пространственной упорядоченностью. Молекулы в слоях жидкости ориентированы в среднем перпендикулярно к поверхности слоев (рис. 28.2).

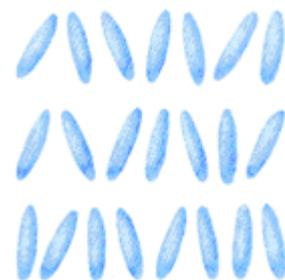


Рис. 28.2.

Структура *холестерических* жидких кристаллов (пример – эфиры холестерина) похожа на структуру нематических, но отличается дополнительным закручиванием молекул в направлении, перпендикулярном их длинным осям. Холестерики характеризуются спиральной структурой ориентации молекул (рис. 28.3).

Жидкие кристаллы обладают очень важными оптическими свойствами, в оптическом отношении сметики и нематики являются одноосными кристаллами, свойства которых легко изменяются внешними воздействиями.

Наиболее характерным свойством жидких кристаллов является их способность изменять ориентацию молекул под воздействием электрических полей. Это обеспечило их широкое применение в системах обработки и отображения информации.

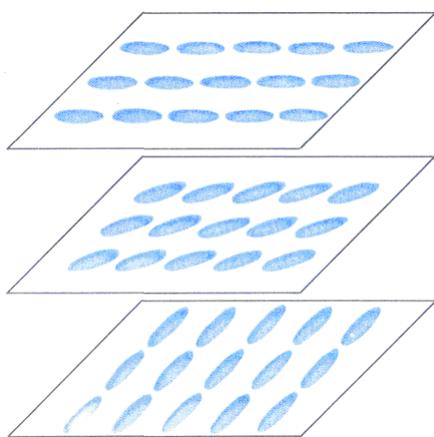


Рис. 28.3.

Монитор с жидкокристаллическим дисплеем состоит из высокоточной электроники, обрабатывающей входной видеосигнал, жидкокристаллической матрицы (стеклянных пластин, между которыми располагаются жидкие кристаллы), источников света для подсветки (мониторы не излучают, а используют свет от внешнего источника), блока питания и корпуса с элементами управления.

В настоящее время жидкокристаллические мониторы являются основным направлением в технологии мониторов.

Контрольные вопросы

1. Какие факторы делают структуру жидкости промежуточной между твердыми телами и газами?
2. Почему жидкости мало сжимаемы?
3. Какой характер носит тепловое движение молекул жидкости? Чем отличаются траектории движения молекул в газе и жидкости?
4. Каковы причины особых свойств поверхностного слоя жидкости?
5. Почему капли жидкости имеют шарообразную форму?
6. Как, пользуясь методом отрыва капель, можно измерить поверхностное натяжение жидкости?
7. Почему существование поверхностного натяжения четко проявляется только в маленьких каплях и узких трубках?
8. Почему трудно разделить две стеклянные пластинки, если между ними находится тонкий слой воды?
9. Существует ли поверхностное натяжение в твердых телах?
10. Какие свойства жидких кристаллов используются на практике?

Глава 5. ЭЛЕМЕНТЫ ФИЗИКИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

§ 29. Особенности кристаллического состояния.

Физические типы кристаллов

За исключением гелия все вещества при низких температурах переходят в твердое состояние. При этом скорости тепловых движений частиц (молекул, атомов, ионов) становятся настолько малыми, что силы взаимодействия между ними ограничивают перемещения частиц, и тело сохраняет способность сохранять свою форму.

Агрегатное состояние вещества, характеризующееся постоянством формы и характером теплового движения атомов, которые совершают малые колебания вокруг положений равновесия, называется *твердым телом*.

Существуют, однако, вещества, которые по признаку сохранения формы должны быть отнесены к твердым телам, но которые во всем остальном не отличаются от жидкостей. К числу таких веществ, называемых *аморфными* веществами, относятся стекло, различные смолы, пластмассы. Они ведут себя как жидкости с аномально большой вязкостью, благодаря которой они при обычных температурах не могут течь. Однако при повышении температуры они приобретают обычную для жидкостей способность течь.

В отличие от этого, у кристаллических веществ переход в жидкое состояние при повышении температуры происходит скачком, при вполне определенной для данного вещества температуре - температуре плавления.

Свойства твердых тел обусловлены тем, что атомы (или другие частицы) расположены в них не хаотически, как в жидкостях или газообразных веществах, а в определенном, характерном для каждого вещества порядке. Такие тела с правильным расположением частиц называются *кристаллическими*.

Особенностью аморфных тел является отсутствие так называемого дальнего порядка, т.е. отсутствие присущего кристаллам строгого повторения во всех направлениях одного и того же элемента структуры. В аморфных телах упорядоченное расположение частиц распространяется только на соседние атомы (ближний порядок). Аморфные вещества изотропны, т.е. их физические свойства одинаковы во всех направлениях.

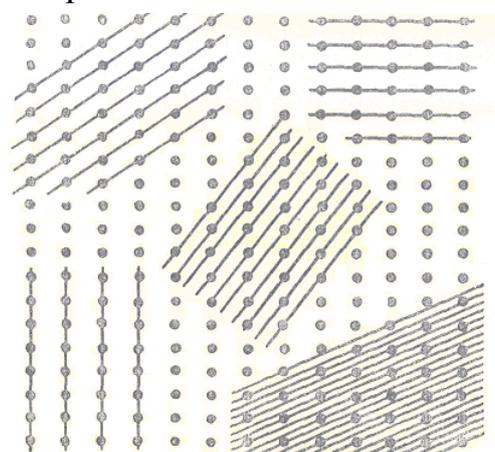


Рис. 29.1.

Следствием того, что частицы, образующие кристалл (атомы, ионы, молекулы) располагаются в правильном порядке, является неодинаковость свойств кристалла в различных направлениях, которая называется *анизотропией*.

На рис. 29.1 изображена двумерная модель кристалла, таким же образом атомы распо-

ложены и в пространстве, образуя *кристаллическую решетку*, в узлах которой находятся атомы.

Если провести через узлы решетки в разных направлениях плоскости, то видно, что густота расположения атомов в этих плоскостях различна.

Тогда все те свойства вещества, которые зависят от расстояний между частицами (модули упругости на растяжение или сжатие, скорость распространения звука, теплопроводность, диэлектрическая проницаемость, скорость распространения света для прозрачных тел и т.д.), будут различаться по разным направлениям.

Правильность внешней огранки и анизотропия кристаллов не всегда проявляются, поскольку кристаллические тела встречаются, как правило, в виде *поликристаллов* – совокупности множества беспорядочно расположенных сросшихся мелких кристалликов. Таковы все металлы. Искусственно в специальных условиях можно получить из раствора или расплава большие монокристаллы. Монокристаллы встречаются также в природе у некоторых минералов.

Различают четыре типа кристаллов в зависимости от природы частиц в узлах решетки и от характера сил взаимодействия между частицами. Это *ионные, атомные, металлические и молекулярные кристаллы*.

1. Ионные кристаллы. Некоторые атомы легко теряют электроны, в результате чего образуется положительный ион. Другие атомы, наоборот, захватывают электрон и превращаются в отрицательно заряженный ион. Между разноименно заряженными ионами действуют электростатические (кулоновские) силы притяжения.

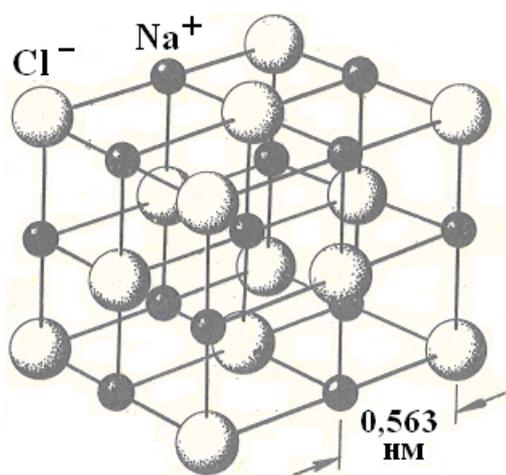


Рис. 29.2.

На рис. 29.2 изображена решетка каменной соли (NaCl) – типичный пример ионной решетки. Эта решетка принадлежит к кубической системе. В ее узлах расположены чередующиеся положительные ионы Na⁺ и отрицательные ионы Cl⁻. Ближайшими соседями иона данного знака являются ионы противоположного знака. Весь кристалл можно рассматривать, как одну гигантскую молекулу.

2. Атомные кристаллы. В узлах решетки этих кристаллов расположены нейтральные одинаковые атомы. Связь между двумя атомами, возникающая при обобществлении электронов, принадлежащих этим атомам, называется *ковалентной*. Силы взаимодействия имеют также электрический характер, однако строгое их объяснение может быть дано только на основе квантовой теории.

В рамках же классической теории можно привести такое наглядное представление о ковалентной связи.

Пусть два положительных заряда отталкиваются кулоновскими силами (рис. 29.3,а). Если на середине расстояния между ними поместить отрицательный заряд, по абсолютному значению равный положительным зарядам (рис. 29.3,б), то со стороны этого заряда на положительные заряды будут действовать силы притяжения, в четыре раза большие, чем силы отталкивания положительных зарядов. В результате (рис. 29.3,в) на положительные заряды действует сила притяжения, стремящаяся их сблизить, а силы, действующие на отрицательный заряд со стороны положительных, взаимно компенсируются.

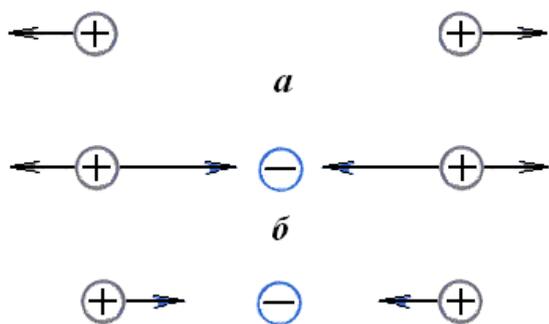


Рис. 29.3.

Однако статическое равновесие такой системы невозможно. В квантовой механике объясняется, что некоторые электроны при своем движении большую часть времени проводят между положительно заряженными ядрами. Обычно это два электрона, движение которых *обобществляется*, поэтому нельзя сказать, какому из атомов молекулы они принадлежат. Так возникает ковалентная связь.

Таким образом, ковалентная связь (от лат. «со» – совместно) осуществляется электронными парами — в ней участвует по одному электрону от каждого атома. Она имеет направленный характер, т. е. воздействие направлено на тот атом, с которым у данного атома

имеется совместная электронная пара. Данная связь может осуществляться только валентными электронами.

Поскольку каждый электрон может обеспечить связь только с одним атомом, число связей, в которых может участвовать данный атом (число соседей, с которыми он может быть связан), равно его валентности.

Типичные примеры атомных кристаллов — это графит и алмаз. Оба они состоят из атомов углерода, но резко отличаются кристаллическим строением (рис. 29.4). В отличие от алмаза, атомы углерода в графите расположены слоями. Расстояние между соседними слоями в 2,3 раза превосходит расстояние между соседними атомами углерода внутри слоя. Это оказывает сильное влия-

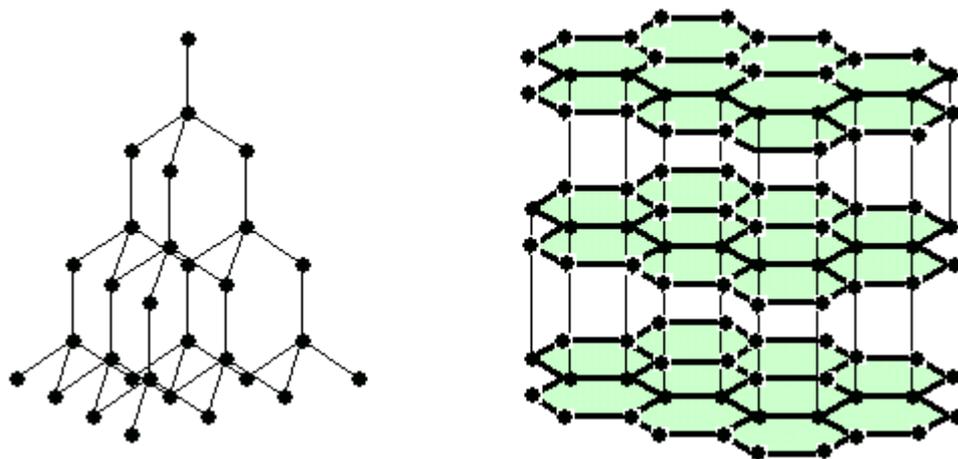


Рис. 29.4.

Это оказывает сильное влия-

ние на различие свойств графита и алмаза. Алмаз — самый твердый минерал, графит, наоборот, легко расслаивается и крошится.

3. Металлические кристаллы. В узлах решетки этих кристаллов расположены положительные ионы. Пространство между ними заполнено электронным газом, который компенсирует силы отталкивания между ионами, удерживая их вместе (рис. 29.5) В противном случае решетка просто распалась бы. При

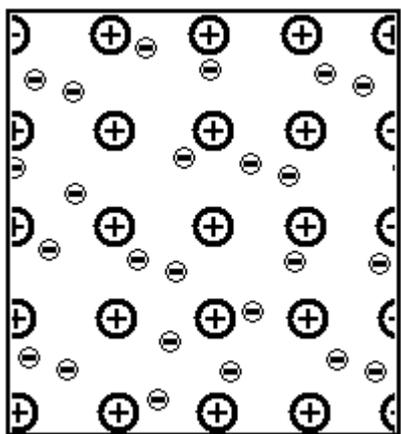


Рис. 29.5.

этом и электронное облако удерживается в пределах решетки и не может ее покинуть. По своей физической природе металлическая связь является тоже ковалентной, но обобществляются многие электроны.

4. Молекулярные кристаллы. В узлах решетки этих кристаллов расположены определенным образом ориентированные молекулы. Молекулы в таком кристалле связаны друг с другом слабыми ван-дер-ваальсовыми силами или водородной связью.

Водородная связь осуществляется с участием атома водорода, расположенного между атомами внутри молекулы. Например, молекулярную решетку образует лед H_2O . Один из типов льда показан на рис. 29.6, здесь большие шары – атомы кислорода, малые шары – атомы водорода.

Электрон атома водорода слабо связан с протоном и может легко смещаться к ближайшему атому кислорода. В результате протон почти «оголяется» и создаются условия для притяжения атомов кислорода.

Молекулярные решетки образуют также углекислота (CO_2) - сухой лед, азот (N_2), кислород (O_2) и водород (H_2).

Большинство молекулярных кристаллов – это кристаллы органических соединений (нафталин и др.), полимеров, белков, нуклеиновых кислот (биологические кристаллы).

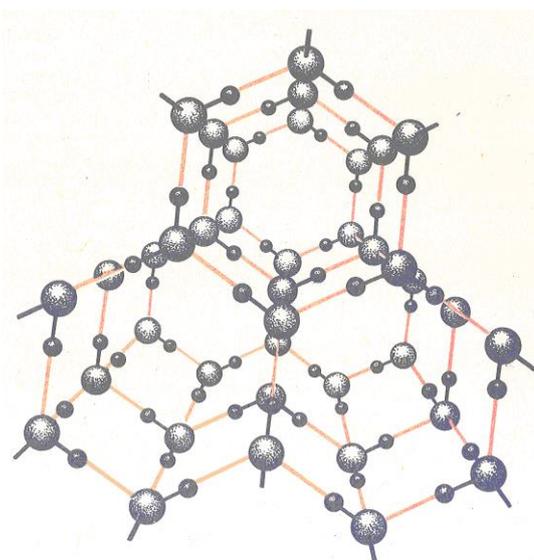


Рис. 29.6.

§ 30. Краткие сведения об упругих свойствах твердых тел

Деформацией твердых тел называется изменение формы тела под действием внешних механических сил. Под действием внешней силы происходит деформация кристаллической решетки, т.е. изменение взаимного расположения частиц и расстояний между ними. Вследствие этого возбуждаются упругие силы притяжения и отталкивания, противодействующие внешним силам.

Основные виды деформаций: продольное и всестороннее растяжение и сжатие, сдвиг и кручение.

Деформация называется *упругой*, если она исчезает после прекращения действия вызвавшей ее силы, и *пластической*, если она сохраняется и после прекращения нагрузки. При достаточно малых силах твердые тела деформируются упруго.

Мерой деформации является относительная деформация ε , равная отношению абсолютной деформации Δx к первоначальному значению величины x , характеризующей форму или размеры тела

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{x}. \quad (30.1)$$

Все возможные деформации твердых тел могут быть сведены к двум элементарным деформациям: *однородному растяжению (сжатию) и сдвигу*.

Деформация растяжения и сжатия. Пусть цилиндрический стержень

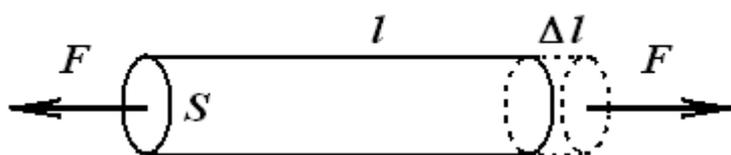


Рис. 30.1.

длиной l и площадью поперечного сечения S подвергается действию силы F , направленной параллельно его оси (рис. 30.1).

Под действием этой силы длина стержня увеличивается на некоторую величину Δl . Относительное удлинение стержня

$$\varepsilon = \Delta l/l. \quad (30.2)$$

Опыт показывает, что деформация определяется не силой, приложенной к телу, а отношением этой силы к площади поперечного сечения поверхности, к которой приложена эта сила:

$$\sigma = \frac{F}{S}. \quad (30.3)$$

Эта величина называется **напряжением**. Единица измерения напряжения – паскаль. Если сила F направлена по нормали к площадке S , напряжение называется *нормальным*, если она направлена по касательной к площадке – *касательным*.

По закону Гука значение нормального напряжения в зависимости от относительного удлинения дается формулой

$$\sigma = \varepsilon E, \quad (30.4)$$

где E – модуль упругости, называемый *модулем Юнга*. Это одна из основных характеристик упругих свойств твердого тела. Его размерность совпадает с размерностью давления.

Если переписать закон Гука в виде

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma}{E}, \quad (30.5)$$

то модуль Юнга можно определить как нормальное напряжение, при котором длина растягиваемого образца удваивается ($\Delta l = l$). Заметим, что такое определение модуля Юнга носит отвлеченный характер, поскольку закон Гука выполняется только при малых деформациях ($\Delta l/l \ll 1$).

При одностороннем растяжении или сжатии изменяется не только длина стержня, но и его поперечные размеры (например, радиус для цилиндра, изображенного на рис. 30.1, при растяжении уменьшается, при сжатии увеличивается).

Можно и эту деформацию характеризовать относительным изменением ε' поперечных размеров образца.

$$\varepsilon' = \frac{\Delta r}{r}. \quad (30.6)$$

Постоянная для данного вещества величина μ , равная отношению относительных поперечного и продольного удлинений, называется *коэффициентом Пуассона*:

$$\mu = -\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}. \quad (30.7)$$

Знак минус учитывает, что при растяжении поперечные размеры тела уменьшаются, а при сжатии – увеличиваются. Коэффициент Пуассона характеризует изменение объема тела при одностороннем сжатии или растяжении. Положительность μ для всех известных материалов означает, что при удлинении они только уменьшаются в поперечном сечении.

Из определения коэффициента Пуассона следует, что относительное поперечное растяжение или сжатие ε' можно выразить через относительное удлинение или укорочение ε :

$$\varepsilon' = -\mu \varepsilon. \quad (30.8)$$

Покажем, что значением коэффициента Пуассона определяется изменение объема деформируемого образца.

Объем цилиндрического образца (рис. 30.1)

$$V = \pi r^2 l.$$

Изменение объема

$$dV = \pi (2lrdr + r^2 dl).$$

Для того, чтобы объем тела не изменялся при деформации, необходимо выполнение равенства

$$dV = 0,$$

или

$$2lrdr = -r^2 dl.$$

Отсюда находим

$$\frac{\Delta r}{r} = -\frac{1}{2} \frac{\Delta l}{l},$$

то есть

$$\mu = -\frac{\frac{\Delta r}{r}}{\frac{\Delta l}{l}} = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, для того, чтобы объем тела при деформации не изменялся, т.е. изменение длины Δl образца компенсировалось соответствующим изменением радиуса Δr (для цилиндрического образца), необходимо, чтобы

$$\mu = \frac{1}{2}. \quad (30.9)$$

В действительности для большинства тел коэффициент Пуассона меньше $\frac{1}{2}$ и находится в пределах 0,30 – 0,40, т.е. объем тела при линейной деформации увеличивается (у пробки коэффициент Пуассона равен нулю). Для жидкостей коэффициент Пуассона $\mu = 0,5$.

Деформация сдвига. Этот вид деформации возникает под действием сил, приложенных к двум диагонально противоположным граням тела (рис. 30.2).

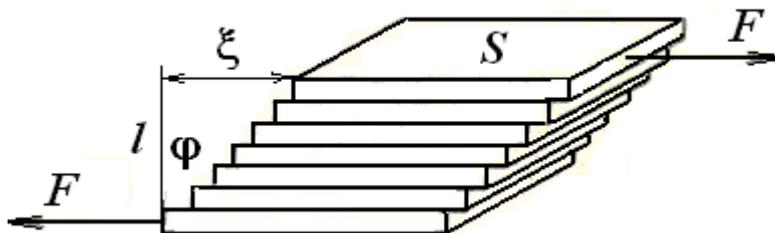


Рис. 30.2.

Такая система сил вызывает смещение плоских слоев, параллельных направлению сил, друг относительно друга. Из рис. 30.2 видно, что при этом крайние грани смещаются на некоторое расстояние ξ . Если первоначальная длина образца равна l , то величина деформации может характеризоваться отношением ξ/l . Так это отношение при малом ξ равно $\text{tg } \varphi \approx \varphi$, где φ – угол сдвига плоскостей, то мерой деформации принимается именно этот угол. Из опыта следует

$$\varphi = \frac{F}{GS}, \quad (30.10)$$

где G – модуль сдвига; F – тангенциальная сила, направленная по касательной к поверхности; $F/S = \tau$ – касательное напряжение. Тогда формула (30.10) записывается в виде

$$\tau = G \varphi.$$

Между модулем сдвига и модулем Юнга существует соотношение

$$G = E/(2(1 + \mu)) \quad (30.11)$$

Модули сдвига и Юнга для твердых материалов имеют одинаковый порядок $10^{10} - 10^{11}$ Па. Например, для стали $E = 2,2 \cdot 10^{11}$ Па, $G = 0,8 \cdot 10^{11}$ Па; для меди $E = 1,2 \cdot 10^{11}$ Па, $G = 0,44 \cdot 10^{11}$ Па; для свинца $E = 1,6 \cdot 10^{10}$ Па, $G = 0,6 \cdot 10^{10}$ Па.

Пример 30.1. К стальному стержню длиной $l = 3$ м и диаметром $d = 2$ см подвешен груз массой $m = 2,5 \cdot 10^3$ кг. Определить напряжение σ в стержне, его относительное ε и абсолютное Δl удлинение.

Выберем начало координат в точке подвеса стержня. Напряжение σ в любом сечении стержня с координатой x создается весом груза mg и весом той части стержня, которая находится ниже сечения (рис. П.30.1):

$$\rho \frac{\pi d^2}{4} (l - x) g . \quad (\text{П. 30.1}).$$

Тогда зависимость напряжения в стержне от координаты x произвольного сечения будет иметь вид

$$\sigma(x) = \frac{P}{S} = \frac{m + \rho \frac{\pi d^2}{4} (l - x)}{\frac{\pi d^2}{4}} g . \quad (\text{П. 30.2}).$$

Подставив числовые значения массы груза, длины стержня и плотности стали $\rho_{\text{ст}} = 7.8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, получим

$$\sigma(x) = 7,81 \cdot 10^7 + 7,65(3 - x) \cdot 10^4 . \quad (\text{П. 30.3})$$

Здесь σ – в паскалях, x – в метрах. Поскольку напряжение зависит от координаты линейно, среднее значение напряжения

$$\langle \sigma \rangle = \frac{\sigma(0) + \sigma(l)}{2} . \quad (\text{П. 30.4})$$

Используя закон Гука $\varepsilon = \frac{\langle \sigma \rangle}{E}$ и значение модуля Юнга для стали $E_{\text{ст}} = 2 \cdot 10^{11} \text{ Па}$, найдем абсолютное удлинение

$$\Delta l = \varepsilon l = \frac{\langle \sigma \rangle}{E} l . \quad (\text{П.30.5})$$

$$\varepsilon = 3,91 \cdot 10^{-4}, \Delta l = 1,17 \text{ мм}.$$

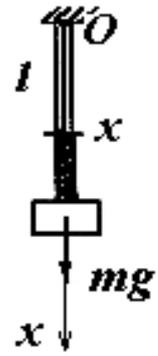


Рис. П. 30.1

Контрольные вопросы

1. Как соотносятся кинетическая и потенциальная энергия молекул в газах, жидкостях и твердых телах?
2. Чем обусловлена неодинаковость физических свойств кристаллов по различным направлениям?
3. Как подразделяются кристаллы по физическому признаку?
4. Согласно одному из основных положений электростатики система покоящихся точечных зарядов, находящихся на конечном расстоянии друг от друга, не может быть устойчивой. Не противоречит ли существование ионных кристаллов этому положению?
5. Каков механизм ковалентной связи по классическим представлениям?
6. Какова роль свободных электронов, образующих электронный газ, в образовании металлической связи?
7. К каким двум элементарным деформациям можно свести любую деформацию твердого тела?

ЧАСТЬ 3.1

ЭЛЕКТРОСТАТИКА. ПОСТОЯННЫЙ ТОК

Глава 1. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ

§ 31. Электрический заряд

Все тела в природе образованы из атомов и молекул, которые, в свою очередь, состоят из ядер и электронов, обладающих электрическим зарядом. Электрический заряд, подобно массе, является свойством элементарных частиц, их внутренней характеристикой. *Электрический заряд – величина, определяющая интенсивность электромагнитного взаимодействия заряженных частиц.*

Различают два вида электрических зарядов, условно названных *положительными и отрицательными*. Электроны являются отрицательно заряженными частицами, а протоны, входящие в состав атомного ядра, – положительными. Одноименные заряды (заряды одного знака) отталкиваются друг от друга, разноименные (заряды разных знаков) – притягиваются.

Наименьший по величине экспериментально обнаруженный в природе заряд – это заряд электрона

$$q_e = -e; \quad e \approx 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл.} \quad (31.1)$$

Электрический заряд, равный e , называется элементарным зарядом. Носителями элементарных зарядов и нейтральными, т.е. такими, заряд которых равен нулю, являются следующие элементарные частицы (таблица 31):

Таблица 31.

$+e$	протон, позитрон, положительный мюон μ^+ , положительный пион π^+
$-e$	электрон, антипротон, отрицательный мюон μ^- , отрицательный пион π^-
0	нейтрон, нейтрино, фотон, нейтральный пион π^0

В каждом атоме суммарный положительный и отрицательный заряды одинаковы, поэтому в любом элементарном объеме тела алгебраическая сумма зарядов равна нулю. Вследствие этого тела являются электрически нейтральными или незаряженными.

Однако, если оторвать электроны от одних тел и передать их другим телам, то эти тела становятся соответственно положительно и отрицательно заряженными. Например, если натирать стеклянную палочку куском резины, стекло заряжается положительно, резина в таком же количестве – отрицатель-

но. Заряд наэлектризованной о шерсть пластмассовой палочки является отрицательным.

Электрический заряд q любого тела является целым кратным электрическому заряду e , т.е. изменяется дискретно, или, как говорят, *квантуется*:

$$q = \pm Ne, \quad (31.2)$$

где N – целое число.

Экспериментально установлено, что **суммарный электрический заряд изолированной системы остается постоянным** при всех взаимодействиях и превращениях частиц этой системы. Это утверждение называется *законом сохранения электрического заряда*.

Электрические заряды могут возникать и исчезать, однако при этом возникают или исчезают одновременно два элементарных заряда разных знаков. Например, если сталкиваются электрон с зарядом $-e$ и его античастица позитрон с зарядом $+e$, то в результате аннигиляции рождаются два гамма-фотона

$$e^- + e^+ = \gamma + \gamma.$$

Полный заряд до и после реакции равен нулю.

И наоборот, пролетая вблизи атомного ядра, гамма-фотон может превратиться в пару частиц – электрон($-e$) и позитрон($+e$).

Еще одним свойством электрического заряда, установленным экспериментально, является независимость заряда от его скорости. Величина заряда, измеренная в различных инерциальных системах отсчета, является одинаковой. Это обстоятельство называют *релятивистской инвариантностью заряда*.

§ 32. Закон Кулона

Если размеры заряженных тел пренебрежимо малы по сравнению с расстояниями между ними, тела можно считать материальными точками, или *точечными зарядами*.

Французский физик Ш. Кулон экспериментально установил: *сила взаимодействия двух точечных неподвижных зарядов в вакууме пропорциональна произведению зарядов q_1 и q_2 , обратно пропорциональна квадрату расстояния r между ними и направлена по прямой, соединяющей эти заряды:*

$$F = k \frac{|q_1||q_2|}{r^2}. \quad (32.1)$$

Эта формула определяет *модуль* силы. Коэффициент пропорциональности k в СИ равен:

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}, \quad (32.2)$$

где ϵ_0 – *электрическая постоянная*,

$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ А}^2 \cdot \text{с}^4 / \text{м}^3 \cdot \text{кг}. \quad (32.3)$$

Удобным для расчетов является приближенное значение k :

$$k \approx 9 \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{Кл}^2.$$

Чтобы формула давала не только значение модуля силы, но и направление силы, закон Кулона можно выразить в векторной форме:

$$\mathbf{F} = k \frac{q_1 q_2}{r^3} \mathbf{r}, \quad (32.4)$$

Здесь \mathbf{F} – сила, действующая на заряд, к которому обращен вектор \mathbf{r} , проведенный от одного заряда к другому (рис. 32.1). Модуль этого вектора равен расстоянию между зарядами.

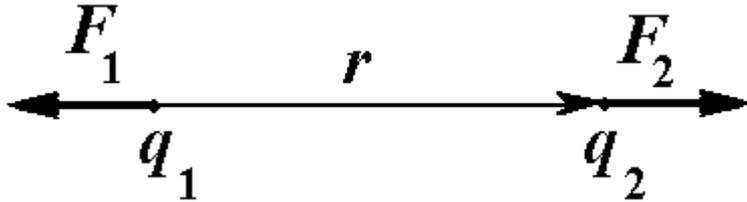


Рис. 32.1.

При любых знаках зарядов формула (32.4) дает правильное направление силы. Так, при отталкивании (рис. 32.1), т.е. в случае одноименных зарядов $q_1 q_2 > 0$, и сила \mathbf{F}_2 , действующая на заряд q_2 со стороны заряда q_1 , направлена вдоль \mathbf{r} .

При притяжении, т.е. в случае разноименных зарядов $q_1 q_2 < 0$, и векторы \mathbf{F}_2 и \mathbf{r} направлены в противоположные стороны (рис. 32.2).

Чтобы получить силу \mathbf{F}_1 , действующую на первый заряд q_1 , нужно провести вектор \mathbf{r} от q_2 к q_1 , подставить его в (32.4) и повторить рассуждения.

Если записать закон Кулона в виде

$$F_r = k \frac{q_1 q_2}{r^2}, \quad (32.5)$$

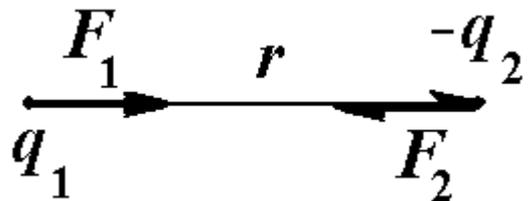


Рис. 32.2.

то это выражение представляет собой *проекцию* вектора \mathbf{F} на направление вектора \mathbf{r} . Проекция может быть положительной либо отрицательной в зависимости от знака произведения $q_1 q_2$.

§ 33. Электрическое поле. Напряженность электрического поля

Согласно представлениям классической физики взаимодействие между зарядами осуществляется через поле. Всякий электрический заряд изменяет определенным образом свойства окружающего его пространства – создает *электромагнитное поле*. Это поле проявляет себя в том, что на помещенный в какую-либо его точку другой, «пробный» заряд действует некоторая сила, т.е. взаимодействие электрических зарядов осуществляется через «посредника» – электромагнитное поле.

Электрическое поле наряду с веществом является формой существования материи. Ему присущи энергия и импульс, поле является физической реальностью.

Поле, создаваемое *неподвижными зарядами*, не изменяется со временем и называется *электростатическим*.

(Заметим, что движущиеся заряды, кроме электрического поля создают также магнитное поле.)

Скорость распространения электромагнитного поля в пустоте равна
 $c = 299\,792,458 \text{ км/с} \approx 300\,000 \text{ км/с}$.

Для изучения поля рассматривают две его физические характеристики - силовую и энергетическую.

Помещая в соответствующую точку поля пробный заряд, можно обнаружить силу, действующую на него. Величина силы, действующей на заряд, характеризует «интенсивность» поля. Эта сила зависит как от поля, так и от самого пробного заряда.

Например, в случае поля, создаваемого неподвижным точечным зарядом q в точке, положение которой относительно заряда q определяется радиус-вектором \mathbf{r} , на пробный положительный точечный заряд q_{np} в этом поле будет по закону Кулона (32.4) действовать сила

$$\mathbf{F} = k \frac{qq_{np}}{r^3} \mathbf{r} \quad (33.1)$$

Сила пропорциональна величине каждого из зарядов. Однако, отношение силы к пробному заряду \mathbf{F}/q_{np} уже не зависит от величины пробного заряда, а зависит только от величин q и \mathbf{r} , определяющих поле в данной точке.

Напряженностью \mathbf{E} электрического поля называется векторная величина, равная в каждой точке отношению силы \mathbf{F} , действующей на пробный заряд q_{np} , помещенный в эту точку, к величине заряда q_{np} :

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q_{np}}. \quad (33.2)$$

Вектор \mathbf{E} – силовая характеристика электрического поля – численно равен и совпадает по направлению с силой, действующей со стороны поля на помещенный в рассматриваемую точку единичный положительный заряд. Отсюда вытекает простое правило – для определения направления вектора напряженности электрического поля в разных точках пространства в эти точки надо мысленно поместить плюс единицу заряда. На рис 33.1 и 33.2 показаны картины полей, создаваемых точечным положительным (рис. 33.1) и точечным отрицательным (рис. 33.2) зарядами. Вектор напряженности \mathbf{E} имеет радиальное направление: он направлен от создающего поле заряда q , если это положительный заряд, и к создающему поле заряду q , если он отрицательный.

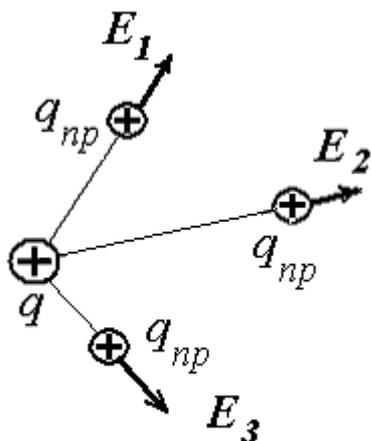


Рис. 33.1.

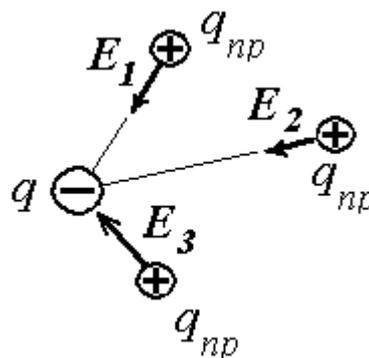


Рис. 33.2.

Из формул (33.1) и (33.2) получим *напряженность поля точечного заряда* q в любой точке поля

$$\mathbf{E} = k \frac{q}{r^3} \mathbf{r}, \quad (33.3)$$

где \mathbf{r} – радиус-вектор, проведенный из заряда в данную точку поля. Направлен вектор \mathbf{E} вдоль радиальной прямой от заряда, если он положителен, и к заряду, если он отрицателен.

Модуль E напряженности поля точечного заряда q в точке, отстоящей на расстоянии r от него:

$$E = k \frac{|q|}{r^2} \quad (33.4)$$

Единица измерения напряженности электрического поля в СИ – ньютон на кулон или вольт на метр – равна напряженности такого поля, в котором на заряд в 1 Кл действует сила в 1 Н.

Пример 33.1. Пользуясь формулой для напряженности электрического поля точечного заряда (3.3) и учитывая размеры атома $r_a \sim 10^{-10}$ м, оценим напряженность электрического поля внутри простейшего из атомов – атома водорода. Поле создается положительно заряженным ядром – протоном с зарядом $|e| = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

$$E = \frac{|e|}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 9 \cdot 10^9}{10^{-20}} \approx 1,5 \cdot 10^{11} \text{ В/м.}$$

Достижимые на практике электрические поля имеют гораздо меньшую величину напряженности – порядка 10^7 В/м.

Зная напряженность электрического поля, можно найти силу, действующую на любой заряд q , помещенный в данную точку поля. В соответствии с (33.2) выражение для этой силы имеет вид

$$\mathbf{F} = q \mathbf{E} \quad (33.5)$$

Принцип суперпозиции. Опытным путем установлено, что напряженность поля, создаваемого несколькими зарядами, равна векторной сумме напряженностей полей, создаваемых каждым зарядом в отдельности:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \dots = \sum \mathbf{E}_i. \quad (33.4)$$

Сложение напряженностей электрических полей по правилу сложения векторов выражает так называемый *принцип суперпозиции (наложения друг на друга) электрических полей*.

Это означает, что присутствие других электрических зарядов никак не сказывается на поле, создаваемом данным зарядом. Отдельные заряды действуют независимо, «не мешая» друг другу, не влияют друг на друга, и поэтому суммарное поле можно определить как векторную сумму от каждого из них в отдельности.

Принцип суперпозиции позволяет рассчитать напряженность поля, созданного любым распределением неподвижных электрических зарядов.

Пример 33.2. Поле диполя. *Электрическим диполем* называется система двух одинаковых по модулю и противоположных по знаку точечных зарядов $+q$ и $-q$, расстояние l между которыми (*плечо диполя*) мало по сравнению с расстояниями r до тех точек, в которых рассматривается поле системы.

Определим напряженность электрического поля диполя:

- 1) в точке A , лежащей на продолжении плеча l на расстоянии r от его середины (при $r \ll l$) (рис. П.33.1);
- 2) в точке B на перпендикуляре к плечу диполя, проведенному через его середину (рис. П.33.2);
- 3) в произвольной точке C .

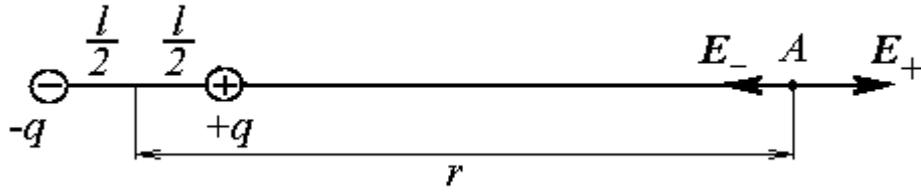


Рис. П.33.1.

По принципу суперпозиции:

$$E_A = E_+ + E_-$$

Здесь E_+ – напряженность поля, создаваемого зарядом $+q$, а E_- – зарядом $-q$ в точке A . Поскольку в точке A эти векторы направлены в противоположные стороны, используя формулу (3.4) можно написать:

$$E_A = E_+ - E_- = k \frac{q}{\left(r - \frac{l}{2}\right)^2} - k \frac{q}{\left(r + \frac{l}{2}\right)^2} = k \frac{2qlr}{\left(r^2 - \frac{l^2}{4}\right)^2}.$$

По условию $r \gg l$, поэтому $r^2 \gg \frac{l^2}{4}$ и в знаменателе последней формулы можно пренебречь $\frac{l^2}{4}$ по сравнению с r^2 . Тогда для напряженности поля в точке A получим

$$E_A = k \frac{2ql}{r^3}. \quad (\text{П. 33.1})$$

Плечом диполя называют вектор l , направленный по оси диполя от отрицательного заряда к положительному и численно равный расстоянию между ними. Произведение абсолютной величины заряда на плечо называют электрическим моментом диполя $p = ql$. Тогда

$$E_A = k \frac{2p}{r^3},$$

- 2). Для точки B на прямой, перпендикулярной к оси диполя, векторы E_+ и E_- имеют одинаковые модули, равные

$$E_+ = E_- = k \frac{q}{r^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2} \approx k \frac{q}{r^2} \quad (\text{П. 33.2})$$

Из подобия равнобедренных треугольников, опирающихся на отрезок l и на вектор E_B , следует

$$\frac{E_B}{E_+} = \frac{l}{r_+} = \frac{l}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2}} \approx \frac{l}{r}.$$

Подставив значение E_+ (П. 33.2), получим

$$E_B = k \frac{ql}{r^3} = k \frac{p}{r^3}. \quad (\text{П. 33.3})$$

Эта зависимость в векторном виде :

$$E_B = -k \frac{p}{r^3}. \quad (\text{П. 33.4})$$

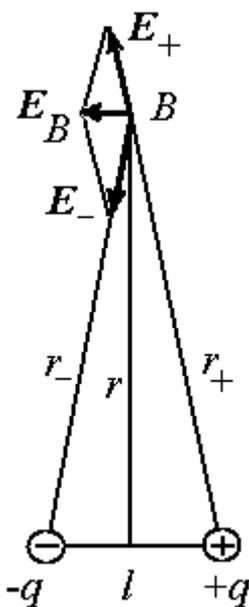


Рис.П.33

3). Можно показать, что напряженность поля диполя в произвольной точке C определяется формулой

$$E_C = k \frac{P}{r^3} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \alpha}, \quad (\text{П. 33.5})$$

где α – угол между вектором l и вектором r .

Отметим, что в отличие от поля одного точечного заряда, напряженность которого убывает как $\frac{1}{r^2}$, напряженность поля диполя с расстоянием от убывает как $\frac{1}{r^3}$, т.е. быстрее.

§ 34. Линии вектора напряженности. Поток вектора напряженности

Для графического изображения электрических полей используют линии вектора напряженности или силовые линии. Эти линии проводятся таким образом, чтобы в каждой точке касательная к линии совпадала по направлению с вектором напряженности в этой точке (рис. 34.1). Силовым линиям приписывают направление: они выходят из положительных зарядов или приходят из бесконечности. Они либо оканчиваются на отрицательных зарядах, либо уходят в бесконечность. На рисунках это направление указывают стрелками на силовой линии.

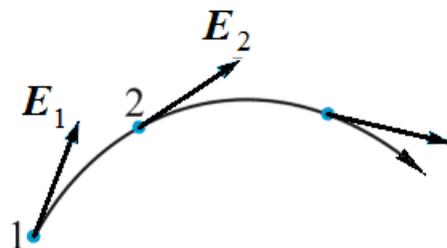


Рис. 34.1.

Условились густоту линий связывать с модулем напряженности поля E . А именно, через единичную площадку, перпендикулярную силовым линиям проводят столько линий, какова в этом месте величина напряженности поля. Таким образом линии проводят гуще в тех местах, где напряженность поля больше, и реже там, где она меньше.

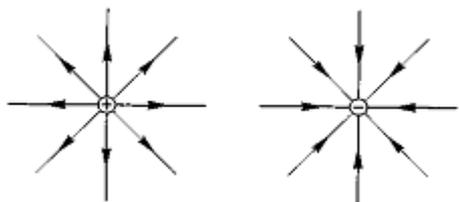


Рис. 34.2.

На рис. 34.2 показаны силовые линии поля уединенных положительного и отрицательного точечных зарядов. Из формулы (33.3) следует, что они являются радиальными прямыми, распределенными с одинаковой густотой по всем направлениям.

Более сложный вид имеет картина линий поля, создаваемого двумя зарядами противоположных (рис. 34.3) или одинаковых знаков (рис. 34.4)

Поле называется *однородным*, если величина и направление вектора E одинаковы во всех точках поля. Очевидно, что однородное поле изображается прямыми параллельными силовыми линиями одинаковой густоты (рис. 34.5).

Введем понятие *потока вектора напряженности* поля через поверхность.

Рассмотрим небольшую площадку, ΔS_0 , расположенную в однородном электростатическом поле перпендикулярно силовым линиям (рис. 34.6).

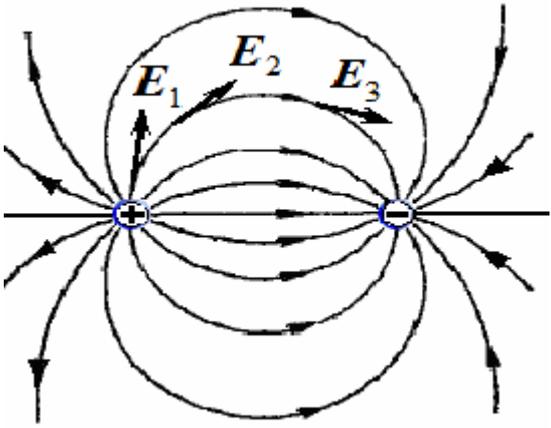


Рис. 34.3.

Определим, какое число силовых линий пронизывает эту площадку. По договоренности *густоту линий*, т.е. количество линий, рассчитанное на единицу площади поверхности, ориентированной перпендикулярно к линиям, выбирают равной модулю E напряженности поля.

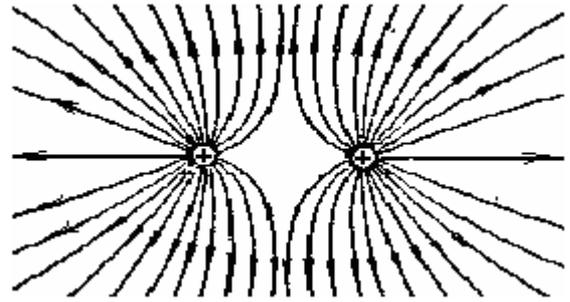


Рис. 34.4.

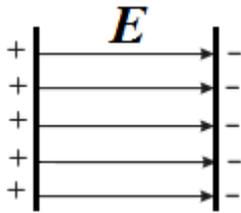


Рис. 34.5.

Тогда количество линий, пронизывающих площадку ΔS_0 будет равно

$$\Delta\Phi_E = E \Delta S_0 \quad (34.1)$$

Пусть теперь ΔS – другая площадка, силовые линии образуют с нормалью к этой площадке угол α . Площадка ΔS_0 является проекцией площадки ΔS на плоскость, перпендикулярную к силовым линиям.

$$\Delta S_0 = \Delta S \cos \alpha.$$

Здесь α – угол между направлением линий напряженности и направлением нормали к площадке ΔS (рис. 34.6).

Как видно из рисунка, число линий, пересекающих ΔS и ΔS_0 одинаково. Поэтому количество линий, пронизывающих площадку ΔS будет также равно

$$\Delta\Phi_E = E \Delta S_0 = E \Delta S \cos \alpha$$

Величина $E \cos \alpha$ представляет собой проекцию вектора E на направление нормали n к площадке ΔS :

$$E \cos \alpha = E_n$$

Поэтому число силовых линий $\Delta\Phi$, пересекающих площадку ΔS равно

$$\Delta\Phi_E = E_n \Delta S \quad (34.2)$$

Произведение $E_n \Delta S$ носит название **потока вектора напряженности поля** через поверхность ΔS . Формула (34.2) показывает, что поток $\Delta\Phi_E$ вектора E через поверхность ΔS равен полному числу силовых линий, пересекающих эту поверхность.

Отметим, что поток вектора напряженности, как и число проходящих через поверхность силовых линий, есть скаляр – алгебраическая величина. Поток

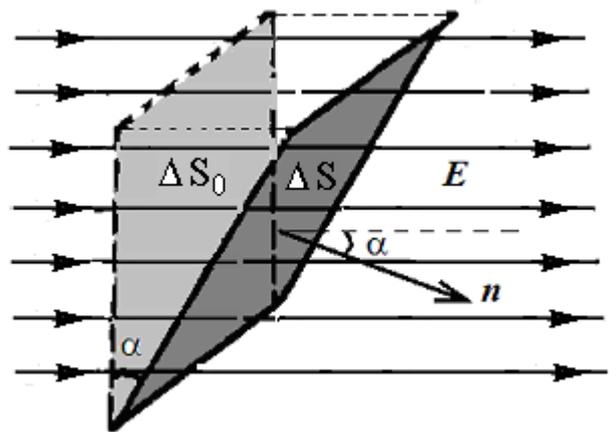


Рис. 34.6.

считается положительным, если силовые линии пересекают поверхность в направлении нормали и отрицательным – в противоположном направлении.

В случае замкнутых поверхностей под нормалью к площадке dS подразумевают обращенную наружу, т.е. внешнюю нормаль. Тогда поток, выходящий из охватываемой поверхностью области наружу, будет положительным.

Если под dS понимать вектор, направленный перпендикулярно к плоскости площадки в направлении внешней нормали и равный по величине площади этой элементарной площадки, то поток вектора напряженности E через площадку dS есть *скалярное произведение* векторов E и dS :

$$d\Phi_E = E \cdot dS = E dS \cos \alpha = E_n dS = E dS_n, \quad (34.3)$$

где $dS_n = dS \cos \alpha$ – площадь проекции площадки dS на плоскость, перпендикулярную вектору E .

Полный поток Φ_E вектора напряженности электрического поля через произвольную поверхность S равен алгебраической сумме потоков через все малые участки этой поверхности – интегралу по поверхности

$$\Phi_E = \int_S E dS \cos \alpha = \int_S E_n dS = \int_S E dS_n, \quad (34.4)$$

§ 35. Теорема Гаусса для электростатического поля в вакууме

Рассмотрим картину силовых линий электрического поля неподвижного точечного положительного заряда (рис. 35.1). Они представляют собой симметрично расположенные радиальные прямые.

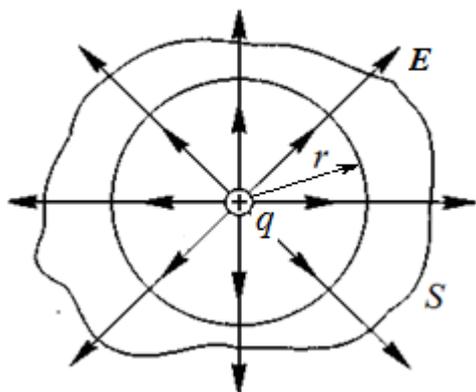


Рис. 35.1.

Вычислим поток вектора E через замкнутую сферическую поверхность, окружающую этот заряд и имеющую центр в точке нахождения заряда. Полное число Φ_E линий, пересекающих сферическую поверхность радиуса r , будет равно произведению густоты линий на площадь поверхности сферы $4\pi r^2$. Густота линий должна быть по условию равна модулю вектора E :

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}.$$

Здесь учтено, что $|q| = q$, т.к. $q > 0$. Из этой формулы следует, что на всей поверхности сферы напряженность поля, а следовательно, и густота линий, будет одинакова по величине. Напряженность направлена вдоль радиуса, то есть по нормали к поверхности сферы, поэтому $E_n = E$. Следовательно, поток вектора напряженности через охватывающую заряд сферическую поверхность равен

$$\Phi_E = \oint_S E_n dS = E_n S = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad (35.1)$$

Знак потока совпадает со знаком заряда.

Если заменить сферу произвольной замкнутой поверхностью S , охватывающей заряд q (рис. 35.1), то очевидно, что каждая силовая линия, пересекающая сферу, пересечет и эту поверхность. Значит, поток Φ_E вектора E и для поверхности любой другой формы, если она замкнута и включает внутри себя точечный заряд q , также будет равен q/ϵ_0 .

$$\Phi_E = \oint_S E_n dS = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Если внутри замкнутой поверхности находится несколько зарядов, то в силу принципа суперпозиции полей суммарная напряженность поля будет представлять собой векторную сумму напряженностей полей каждого из зарядов

$$\Phi_E = \oint_S E_n dS = \oint_S (E_{1n} + E_{2n} + \dots) dS = \Phi_{1E} + \Phi_{2E} + \dots \quad (35.2)$$

и, следовательно,

$$\Phi_E = \sum_i \frac{q_i}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i \quad (35.3)$$

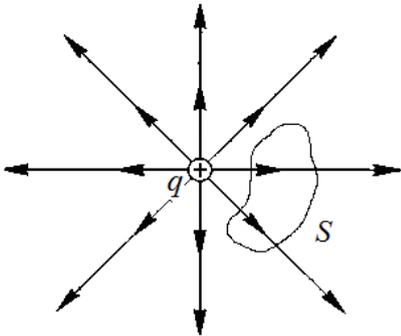


Рис. 35.2.

Если замкнутая поверхность не охватывает заряда (рис. 35.2), то поток вектора E через эту поверхность равен нулю, т.к. число силовых линий, входящих через поверхность, равно числу выходящих из нее.

Доказанное утверждение называется теоремой Гаусса для электростатического поля в вакууме: **поток вектора напряженности электростатического поля в вакууме через произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме заключенных внутри этой поверхности зарядов, деленной на ϵ_0 .**

$$\oint_S E_n dS = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i \quad (35.4)$$

Заметим, что теорема Гаусса тесно связана со справедливостью закона Кулона. Вывод теоремы Гаусса использует сокращение r^2 , а это возможно из-за того, что сила взаимодействия зарядов, описываемая законом Кулона, обратно пропорциональна квадрату расстояния между зарядами. Закон Кулона и теорема Гаусса фактически представляют один и тот же закон природы. Кроме того, пропорциональность площади поверхности квадрату линейных размеров – это отличительная черта евклидовой геометрии в трехмерном пространстве. Таким образом, теорема Гаусса свидетельствует о неискривленности трехмерного физического пространства, т.е. о том, что его геометрия евклидова.

§ 36. Применение теоремы Гаусса для нахождения напряженности некоторых полей в вакууме

1. Поле бесконечной равномерно заряженной плоскости.

Пусть бесконечная плоскость заряжена с постоянной *поверхностной плотностью зарядов* σ , которая определяется формулой

$$\sigma = \frac{dq}{dS}, \quad (36.1)$$

где dq – заряд, расположенный на малом участке поверхности площадью dS . Для определенности выберем положительный заряд ($\sigma > 0$).

Поскольку плоскость бесконечна и заряжена однородно, то из соображений симметрии следует полагать, что напряженность в любой точке поля должна быть перпендикулярна к плоскости ($E = E_n$), направлена от нее (выбран случай положительно заряженной плоскости), а густота линий везде одна и та же (рис. 36.1).

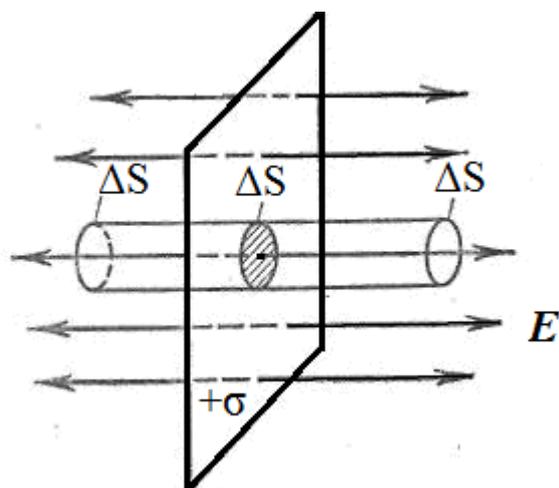


Рис. 36.1.

Эта плоскость является плоскостью симметрии поля, в симметричных относительно плоскости точках напряженность должна быть одинакова по величине и противоположна по направлению.

Для применения теоремы Гаусса выберем замкнутую поверхность в виде цилиндрической поверхности с образующими, перпендикулярными к плоскости, и основаниями ΔS , параллельными плоскости и расположенными на одинаковом расстоянии от нее.

Поток вектора напряженности поля через цилиндрическую часть поверхности равен нулю, так как линии напряженности поля скользят вдоль этой поверх-

ности и не пересекают ее.

Внутри построенной таким образом замкнутой поверхности оказывается участок заряженной плоскости ΔS , на котором находится заряд

$$\Delta q = \sigma \Delta S. \quad (36.2)$$

При вычислении потока вектора E через замкнутую поверхность необходимо учитывать, что силовые линии пронизывают две площадки ΔS – лежащие вправо и влево от плоскости. Следовательно, поток через них равен

$$\Phi_E = E \cdot 2\Delta S. \quad (36.3)$$

С другой стороны, тот же поток по теореме Гаусса равен заряду внутри, деленному на ϵ_0 :

$$2E\Delta S = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma \Delta S,$$

откуда напряженность поля с каждой стороны от равномерно заряженной плоскости в вакууме

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}. \quad (36.4)$$

Следовательно, поле бесконечной заряженной плоскости не зависит от расстояния до нее и перпендикулярно к плоскости.

Если записать полученный результат в виде $E_n = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$, где E_n – проекция вектора E на нормаль n к заряженной плоскости, причем вектор n направлен от

этой плоскости, то эта формула будет справедлива и для отрицательно заряженной плоскости.

Если $\sigma > 0$, то и $E_n > 0$, вектор \mathbf{E} направлен от заряженной плоскости, как на рис. 36.1, если же $\sigma < 0$, то $E_n < 0$, и вектор \mathbf{E} направлен к заряженной плоскости.

2. Напряженность поля двух бесконечных параллельных плоскостей, заряженных разноименно с поверхностными плотностями зарядов $+\sigma$ и $-\sigma$ (модель плоского конденсатора).

Изобразим на рис. 36.2 сплошными силовые линии, начинающиеся на положительных зарядах левой поверхности, и штриховыми - входящие в правую поверхность, несущую отрицательный заряд.

Напряженность поля каждой отдельной плоскости равна по модулю $\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$. В пространстве между

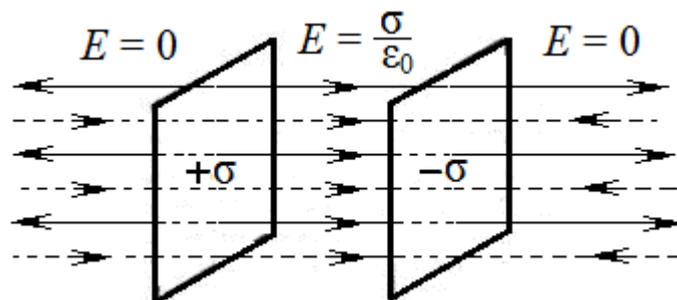


Рис. 36.2.

плоскостями напряженности совпадают по направлению, по принципу суперпозиции напряженности полей складываются и общая напряженность равна

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \quad (36.5)$$

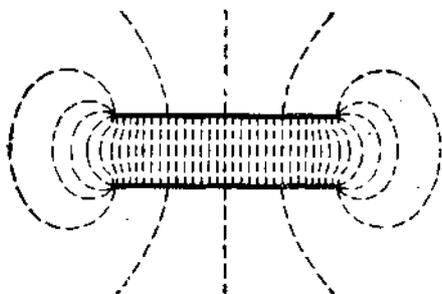


Рис. 36.3.

Здесь под σ подразумевается модуль поверхностной плотности заряда.

Напряженность поля вне пластин равна нулю, так как по абсолютному значению напряженности равны, а по направлению противоположны – поля взаимно уничтожаются.

Таким образом, поле оказывается сосредоточенным между пластинами. Напряженность поля во всех точках этой области одинакова по величине и по направлению. Она направлена от положительно заряженной плоскости к отрицательной по нормали к ним. Такое поле является однородным, а линии напряженности представляют собой совокупность параллельных равноотстоящих прямых. Подобным рассмотренному случаю является поле заряженного плоского конденсатора (рис. 36.3), хотя он имеет конечные размеры. Однородность поля нарушается только вблизи краев пластин.

3. Напряженность поля равномерно заряженной нити.

Рассмотрим бесконечную прямолинейную нить, вдоль которой равномерно распределен заряд с линейной плотностью заряда

$$\tau = \frac{dq}{dl}. \quad (36.6)$$

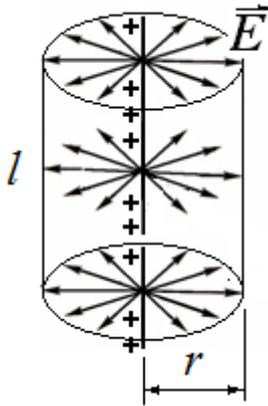


Рис. 36.4.

Из соображений симметрии следует, что поле бесконечной равномерно заряженной нити имеет осесимметричный характер – вектор \mathbf{E} в каждой точке направлен перпендикулярно к нити и радиально от нее (если $\tau > 0$, рис. 36.4) или к ней (если $\tau < 0$). Модуль вектора \mathbf{E} зависит только от расстояния r до нити. Линии напряженности являются радиальными прямыми, лежащими в плоскостях, перпендикулярных нити.

Чтобы воспользоваться теоремой Гаусса и найти напряженность электрического поля на расстоянии r от нити, окружим ее замкнутой цилиндрической поверхностью так, чтобы сама нить являлась осью цилиндра.

Учитывая, что силовые линии пронизывают только боковую поверхность цилиндра и скользят по его основаниям, определим поток вектора \mathbf{E} простым умножением E_r на площадь боковой поверхности:

$$\Phi_E \int_S \mathbf{E}_n dS = E_r S_{\text{бок}} = E_r \cdot 2\pi r l, \quad (36.7)$$

где E_r – проекция вектора \mathbf{E} на радиус-вектор \mathbf{r} , проведенный от нити в рассматриваемую точку поля и направленный перпендикулярно к оси.

Поскольку заряд, охватываемый замкнутой поверхностью, в данном случае равен

$$q = \tau l,$$

применим теорему Гаусса:

$$\Phi_E = \frac{q}{\varepsilon_0}, \text{ или } E_r \cdot 2\pi r l = \frac{\tau \cdot l}{\varepsilon_0}.$$

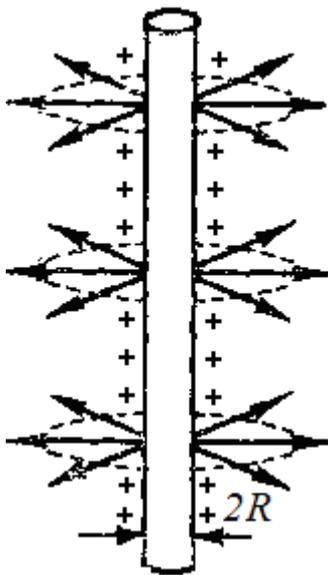


Рис. 36.5.

Откуда

$$E_r = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}. \quad (36.8)$$

При $\tau > 0$ $E_r > 0$, т.е. вектор \mathbf{E} направлен от заряженной нити, при $\tau < 0$ $E_r < 0$, вектор \mathbf{E} направлен к нити.

Такой же вид имеет поле бесконечного равномерно заряженного по поверхности цилиндра (рис. 36.5). Если радиус цилиндра R , поверхностная плотность заряда σ , то заряд, приходящийся на элемент длины dl цилиндра равен

$$dq = \sigma \cdot 2\pi R dl,$$

а количество заряда, приходящегося на единицу длины цилиндра – линейная плотность заряда τ :

$$\tau = \frac{dq}{dl} = \frac{\sigma 2\pi R dl}{dl} = \sigma 2\pi R.$$

Тогда

$$E_r = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{\sigma R}{\epsilon_0 r} \quad (r \geq R) \quad (36.9).$$

Если $r < R$, то гауссова коаксиальная с заряженной поверхностью замкнутая цилиндрическая поверхность радиуса r не охватывает зарядов, вследствие чего $E_r = 0$. То есть внутри заряженной бесконечно длинной цилиндрической поверхности поле отсутствует.

4. Напряженность поля равномерно заряжено сферической поверхности.

Пусть заряд q равномерно распределен в вакууме по поверхности сферы радиуса R (рис. 36.6) с поверхностной плотностью зарядов σ :

$$\sigma = \frac{q}{S_{\text{сферы}}} = \frac{q}{4\pi R^2}.$$

Поле такой заряженной сферы будет центрально симметрично относительно центра сферы.

Это означает, что векторы напряженности \mathbf{E} будут направлены радиально, а величина напряженности зависит только от расстояния r от центра сферы.

В качестве замкнутой гауссовой поверхности выберем также сферическую поверхность радиуса $r > R$, описанную вокруг заряженной сферы с тем же центром.

Поскольку для всех точек поверхности напряженность поля \mathbf{E} перпендикулярна поверхности, поток вектора \mathbf{E} определится так:

$$\Phi_E = E_r \cdot 4\pi r^2 \quad (36.10)$$

По теореме Гаусса поток равен заряду внутри гауссовой сферы, деленному на ϵ_0 :

$$E_r \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0},$$

откуда

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \quad (r \geq R) \quad (36.11)$$

Эта формула совпадает с формулой напряженности поля точечного заряда q , помещенного в центре сферы.

Если радиус вспомогательной поверхности r меньше радиуса R заряженной сферы, то такая поверхность не будет охватывать зарядов. Вследствие этого из теоремы Гаусса следует, что внутри равномерно заряженной сферической поверхности поле отсутствует, $\mathbf{E} = 0$.

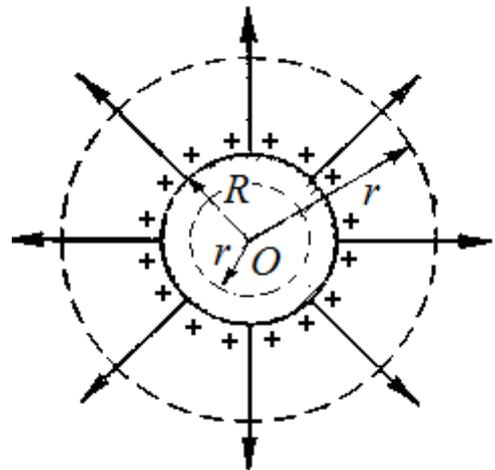


Рис. 36.6.

5. Напряженность поля равномерно заряженного по объему шара.

Пусть заряд q равномерно распределен в вакууме по объему шара радиуса R с объемной плотностью зарядов ρ :

$$\rho = \frac{q}{V_{\text{шара}}} = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3}.$$

Определим напряженность электрического поля внутри шара в точке M (рис. 36.7) на расстоянии $r < R$ от центра. Для этого проведем через точку M вспомогательную концентрическую сферу радиуса r .

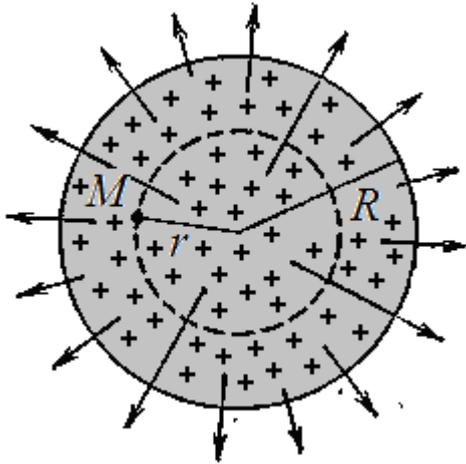


Рис. 36.7.

Вспомогательная поверхность охватывает заряд

$$q_1 = \rho V_1 = \rho \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Только этот заряд q_1 создает поток вектора напряженности Φ_E через поверхность вспомогательной сферы площадью $S = 4\pi r^2$. Поэтому

$$\Phi_E = E_r \cdot S = E_r \cdot 4\pi r^2 = \frac{q_1}{\varepsilon_0} = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi r^3}{\varepsilon_0}.$$

Отсюда

$$E_r = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho}{4\pi r^2 \varepsilon_0} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r = \frac{qr}{4\pi \varepsilon_0 R^3}. \quad (r < R) \quad (36.12)$$

Для точек, лежащих вне шара ($r > R$), вспомогательная поверхность охватывает весь заряд q и поле равномерно заряженного шара совпадает с полем точечного заряда, помещенного в центр шара:

$$E_r = \frac{q}{4\pi \varepsilon_0 r^2}. \quad (r \geq R). \quad (36.13)$$

§ 37. Работа перемещения заряда в электрическом поле.

Потенциал поля

Пусть электростатическое поле создается неподвижным точечным зарядом q . Определим, какую работу выполняют силы поля при перемещении заряда q_1 из точки 1 в точку 2 этого поля (рис. 37.1).

Сила F , действующая со стороны поля на заряд q_1 , различна в разных точках поля. Поэтому разобьем мысленно криволинейный путь $1 \rightarrow 2$ на элементарные прямолинейные участки dS , в пределах которых силу можно считать постоянной.

По определению элементарная работа силы на участке dS равна

$$dA = F \cdot dS \cdot \cos \alpha,$$

где α – угол между направлением силы F и элементарного перемещения dS .

Тогда полная работа электрических сил на всем пути выразится суммой элементарных работ, т.е. криволинейным интегралом

$$A = \int_{1 \rightarrow 2} F dS \cos \alpha.$$

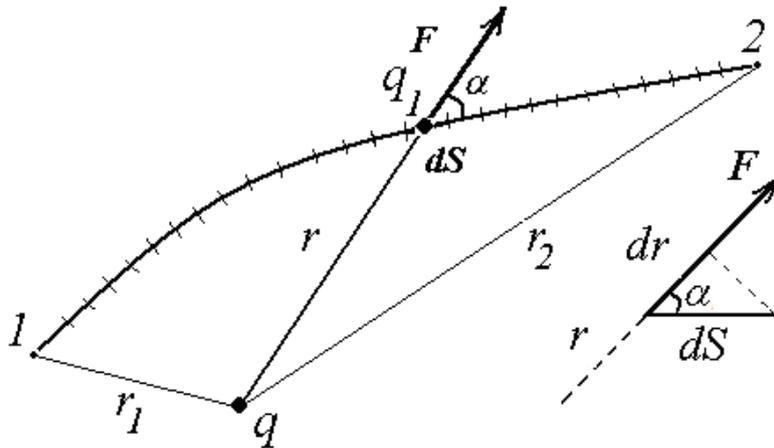


Рис. 37.1.

Как видно из рисунка

$$dS \cdot \cos \alpha = dr,$$

где dr – проекция элемента длины контура dS на направление радиус-вектора r .

Выразим силу F через напряженность E электрического поля

$$F = Eq_1.$$

Тогда элементарная работа на участке dS

$$dA = F \cdot dS \cdot \cos \alpha = E \cdot q_1 \cdot dr = kqq_1 \frac{dr}{r^2}, \quad (37.1)$$

и полная работа

$$A = kqq_1 \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = kqq_1 \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right). \quad (37.2)$$

Из формулы (37.2) следует:

- работа не зависит от формы пути, по которому происходит движение заряда q_1 , а зависит только от начального и конечного положений зарядов (от r_1 и r_2);
- в том случае, когда движение заряда происходит по замкнутому пути, т.е. конечная точка перемещения совпадает с начальной, работа равна нулю.

Работу, совершаемую силами поля над зарядом q_1 при обходе по замкнутому контуру, можно представить как криволинейный интеграл

$$\oint_L q_1 E dl \cos \alpha = 0.$$

Кружок у знака интеграла указывает на интегрирование по замкнутому контуру L . После сокращения на постоянную величину q_1 , получим

$$\oint_L E_l dl = 0. \quad (37.3)$$

Здесь через E_l обозначена проекция вектора E на направление элементарного перемещения dS .

Входящий в выражение (37.3) интеграл называется *циркуляцией вектора напряженности вдоль замкнутого контура L* .

Таким образом, **циркуляция вектора напряженности электростатического поля по произвольному замкнутому контуру равна нулю.**

Поля, которые удовлетворяют этим условиям, называются *потенциальными*.

В таких полях работа сил поля совершается за счет убыли потенциальной энергии. Поэтому работу (37.2) можно представить как разность значений потенциальной энергии W , которыми обладает заряд q_1 в точках 1 и 2 :

$$A_{12} = k \frac{qq_1}{r_1} - k \frac{qq_1}{r_2} = W_{p1} - W_{p2}. \quad (37.4)$$

Отсюда для потенциальной энергии заряда q_1 в поле заряда q получаем

$$W_p = k \frac{qq_1}{r} + const \quad (37.5)$$

Как и в механике, потенциальная энергия определяется не однозначно, а с точностью до произвольной постоянной $const$. Это связано с тем, что физический смысл имеет только разность потенциальных энергий в двух точках пространства, выражающая работу, производимую при переходе из одной точки в другую. При нахождении же этой разности произвольная постоянная исключается.

Значение $const$ обычно выбирается таким образом, чтобы при удалении заряда на бесконечность ($r = \infty$) потенциальная энергия (37.5) обращалась в нуль. Для этого необходимо положить произвольную постоянную $const = 0$.

При этом условии получается, что

$$W_p = k \frac{qq_1}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_1}{r} \quad (37.6)$$

Потенциальная энергия (37.6) есть энергия взаимная. Оба взаимодействующих заряда входят в выражение (37.6) симметрично. Поэтому с одинаковым правом можно считать, что либо заряд q_1 находится в электрическом поле заряда q , либо заряд q находится в электрическом поле заряда q_1 .

При одноименных зарядах q и q_1 , т.е. при отталкивании, потенциальная энергия положительна и убывает при разведении зарядов. При разноименных зарядах, т.е. при притяжении потенциальная энергия отрицательна и возрастает при разведении зарядов.

Величина

$$\varphi = \frac{W_p}{q_1}, \quad (37.7)$$

численно равная *потенциальной энергии*, которой обладает в данной точке поля *положительный единичный заряд*, называется **потенциалом** поля в данной точке. Потенциал является энергетической характеристикой поля.

Подставляя в (37.7) значение потенциальной энергии (37.6), получаем для потенциала поля точечного заряда выражение

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}. \quad (37.8)$$

Используя понятие потенциала, выражение для работы, совершаемой полем при перемещении заряда q_1 из точки 1 в точку 2 можно записать в виде

$$A = q_1 (\varphi_1 - \varphi_2). \quad (37.9)$$

Работа, совершаемая электростатическим полем при перемещении заряда, равна произведению величины заряда на разность потенциалов начальной и конечной точек пути.

Если заряд q_1 из точки с потенциалом φ_1 удаляется на бесконечность (где по условию потенциал равен нулю), работа сил поля будет равна

$$A_{1\infty} = q_1 \varphi_1.$$

Тогда можно дать второе определение потенциала.

Потенциал численно равен работе, которую совершают силы поля над положительным единичным зарядом при удалении его из данной точки на бесконечность:

$$\varphi_1 = \frac{A_{1\infty}}{q_1} \quad (37.10)$$

Такую же по величине работу необходимо совершить против сил электрического поля при перенесении положительного единичного заряда из бесконечности в данную точку поля.

Физический смысл имеет только разность потенциалов между какими-либо точками, а не сами значения потенциалов в этих точках.

Если поле создается несколькими зарядами, то в силу принципа суперпозиции потенциал произвольной точки поля равен алгебраической сумме потенциалов, создаваемых в этой точке всеми зарядами:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \dots = \sum_{i=1}^n \varphi_i \quad (37.11)$$

Потенциалы измеряются в вольтах. Разность потенциалов между двумя точками поля равна одному вольту, если при переносе заряда, равного 1 Кл, из одной точки в другую, поле совершает работу в 1 Дж.

1 В = 1 Дж/Кл.

Пример 37.1. Электрическое поле создается двумя зарядами $q_1 = 4$ мкКл и $q_2 = -2$ мкКл, находящимися на расстоянии $a = 10$ см друг от друга. Определить работу A сил поля при перемещении заряда $q = 50$ нКл из точки 1 в точку 2 поля (рис. П. 37.1).

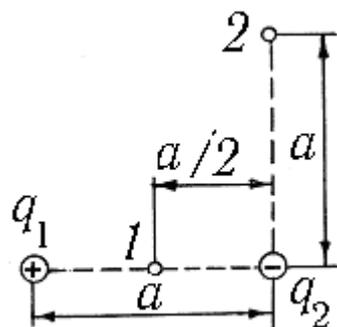


Рис. П. 37.1.

Работа перемещения заряда из одной точки поля в другую равна произведению заряда на разность потенциалов этих точек

$$A = q(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Для определения потенциалов φ_1 и φ_2 точек 1 и 2 поля применим принцип суперпозиции электрических полей: потенциал электрического поля, созданного двумя зарядами в некоторой точке, равен алгебраической сумме потенциалов, создаваемых отдельными зарядами q_1 и q_2 . Тогда

$$\varphi_1 = kq_1/(a/2) + kq_2/(a/2) = 2k(q_1+q_2)/a;$$

$$\varphi_2 = kq_1/(a\sqrt{2}) + kq_2/a = k(q_1/\sqrt{2}+q_2)/a.$$

После преобразований окончательно имеем

$$A = kq(q_1(2 - \frac{1}{\sqrt{2}}) + q_2)/a \quad (\text{П. 37.1})$$

В расчетах потенциалов знаки зарядов учитываются автоматически, т.е. в последнюю формулу надо подставить $q_2 = -2 \cdot 10^{-6}$ Кл.

Подставим числа

$$A = 9 \cdot 10^9 \cdot 50 \cdot 10^{-9} (4 \cdot 10^{-6} (2 - \frac{1}{1,41}) - 2 \cdot 10^{-6}) / 0,1 \approx 1,43 \cdot 10^{-2} (\text{Дж}) = 14,3 (\text{мДж}).$$

Пример 37.2. К закрепленной частице, заряд которой $q_1 = 2$ нКл, из бесконечности со скоростью $v = 0,1$ м/с приближается заряженная частица, масса которой $m = 40$ мг и заряд $q = 1$ нКл. На какое наименьшее расстояние r они сблизятся (рис. П. 37.2)?

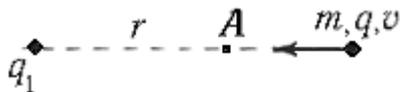


Рис. П. 37.2.

В точке A неподвижный заряд q_1 создает электрическое поле с потенциалом

$$\varphi_A = k \frac{q_1}{r}.$$

Тогда потенциальная энергия взаимодействия зарядов в точке A

$$W_p = q\varphi_A = \frac{kqq_1}{r}.$$

Потенциальная энергия движущейся частицы в бесконечности равна нулю. По закону сохранения энергии в момент остановки подвижной частицы в точке A начальная кинетическая энергия переходит в потенциальную энергию кулоновского отталкивания

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{kqq_1}{r}, \quad (\text{П. 37.2})$$

$$r = \frac{2kqq_1}{mv^2}. \quad (\text{П. 37.3})$$

Подставляя числа, найдем

$$r = \frac{2 \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-9} \cdot 2 \cdot 10^{-9}}{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot (0,1)^2} = 9 \cdot 10^{-2} (\text{м}) = 9 (\text{см}).$$

§ 38. Эквипотенциальные поверхности. Связь между напряженностью и потенциалом

Для графического изображения поля наряду с силовыми линиями используют *эквипотенциальные поверхности*. Геометрическое место точек, имеющих равный потенциал, называется поверхностью равного потенциала или эквипотенциальной поверхностью $\varphi = \text{const}$.

В случае уединенного точечного заряда, как следует из формулы (37.8) $\varphi = \text{const}$ при $r = \text{const}$, т.е. эквипотенциальные поверхности представляют собой концентрические сферы.

На плоскости эти поверхности вырождаются в концентрические окружности (рис. 38.1).

При перемещении заряда из одной точки эквипотенциальной поверхности в другую поле, как следует из выражения $A = q_1 (\varphi_1 - \varphi_2)$, не совершает над ним работы, т.к. $(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$.

Тогда из формулы работы $A = F \cdot dS \cdot \cos \alpha$ следует, что $\cos \alpha = 0$, т.е. силовые линии поля всюду перпендикулярны эквипотенциальным поверхностям.

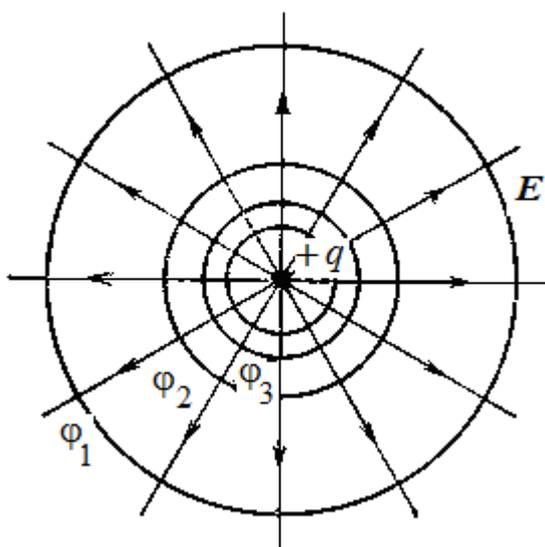


Рис. 38.1.

Взаимная перпендикулярность силовых линий поля и эквипотенциальных поверхностей справедлива не только для поля точечного заряда, но и для сколь угодно сложных электростатических полей.

Обе характеристики поля – векторная (напряженность E) и скалярная (потенциал φ) связаны между собой.

Чтобы установить связь потенциала с напряженностью поля рассмотрим две точки поля 1 и 2, принадлежащие двум близким эквипотенциальным поверхностям $\varphi_1 = \text{const}$ и $\varphi_2 = \text{const}$ (рис. 38.2). Предположим, что пробный заряд переходит из точки 1 в точку 2 вдоль прямо-

линейного отрезка Δl . Обе точки нужно выбрать достаточно близко друг от друга, чтобы можно было считать напряженность поля, и, следовательно, силу, действующую на пробный заряд, на отрезке Δl постоянной.

Для работы электростатического поля по перемещению пробного заряда $q_{пр}$ на пути Δl можно написать два выражения.

С одной стороны, работа силы $F = q_{пр} E$ на перемещении Δl равна

$$A = q_{пр} E \Delta l \cos \alpha = q_{пр} E_l \Delta l .$$

Как видно из рис. 8.2

$$E_l = E \cos \alpha$$

– проекция вектора E на направление отрезка Δl .

С другой стороны, работа перемещения заряда в электростатическом поле

$$A = q_{пр} (\varphi_1 - \varphi_2).$$

Приравняем оба выражения для работы. После сокращения на величину пробного заряда получим

$$E_l \Delta l = (\varphi_1 - \varphi_2).$$

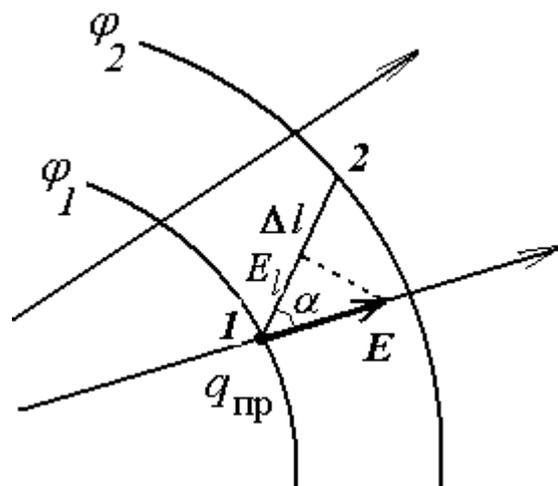


Рис. 38.2.

Отсюда

$$E_l = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\Delta l} = -\frac{\Delta\varphi}{\Delta l} \quad (38.1)$$

Минус в этой формуле обусловлен тем, что $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ – это *приращение* потенциала (от конечного значения отнимается начальное), а $\varphi_1 - \varphi_2 = -\Delta\varphi$ – это *убыль* потенциала.

Переходя в выражении (38.1) к пределу при условии, что перемещение Δl стремится к нулю, получим

$$E_l = -\frac{\partial\varphi}{\partial l} \quad (38.2)$$

Производная $\frac{\partial\varphi}{\partial l}$ выражает *быстроту изменения потенциала в данном направлении*. Следовательно, *проекция вектора напряженности электростатического поля на произвольное направление численно равна быстрой убыли потенциала поля на единицу длины в этом направлении*.

Символ частной производной показывает, что дифференцирование производится только по l , считая другие переменные постоянными.

Вдоль силовой линии $\cos\alpha = 1$, в этом случае E_l и $\left|\frac{\partial\varphi}{\partial l}\right|$ достигают максимального значения, равного $|\mathbf{E}|$. Если \mathbf{n} – нормаль к эквипотенциальным поверхностям, то

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial\varphi}{\partial n} \cdot \mathbf{n} \quad (38.3)$$

Таким образом, потенциал изменяется наиболее быстро в направлении силовой линии. Знак минус в уравнениях (38.2) и (38.3) указывает на то, что вектор \mathbf{E} напряженности поля направлен в сторону наиболее быстрого убывания потенциала.

Поскольку направление перемещения можно выбирать произвольно, проекции вектора напряженности на координатные оси будут иметь вид:

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} \quad (38.4)$$

Выразим вектор \mathbf{E} через его составляющие:

$$\mathbf{E} = E_x \mathbf{i} + E_y \mathbf{j} + E_z \mathbf{k} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \mathbf{k} \right) \quad (38.5)$$

Здесь $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ – единичные векторы координатных осей. Вектор, определяемый выражением (38.5), называется *градиентом потенциала* и обозначается как $\text{grad } \varphi$.

Градиентом некоторой скалярной величины, являющейся функцией пространственных координат, является вектор, направленный в сторону наиболее быстрого возрастания этой величины и численно равный быстрой ее роста в этом направлении. Поэтому связь между напряженностью и потенциалом электростатического поля можно представить как

$$\mathbf{E} = - \text{grad } \varphi. \quad (38.6)$$

Напряженность в какой-либо точке электростатического поля равна градиенту потенциала в этой точке, взятому с обратным знаком.

Формула (38.2) позволяет по известным значениям φ найти напряженность поля в каждой точке. Можно решить и обратную задачу – по заданным значениям \mathbf{E} в каждой точке найти разность потенциалов между двумя произвольными точками поля. Из (38.2) следует

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{1 \rightarrow 2} \mathbf{E}_l dl. \quad (38.7)$$

Интеграл можно брать по любой линии, соединяющей точки 1 и 2, поскольку работа сил поля не зависит от формы пути.

§ 39. Вычисление разности потенциалов по напряженности поля

1. Поле уединенного точечного заряда.

Напряженность поля уединенного точечного заряда в вакууме дается формулой (33.4)

$$E_r = k \frac{q}{r^2}.$$

Связь между напряженностью и потенциалом запишется в виде

$$E_r = - \frac{d\varphi}{dr}.$$

Тогда потенциал поля точечного заряда

$$\varphi = - \int E_r dr = -kq \int \frac{dr}{r^2} = k \frac{q}{r} + \text{const}.$$

На бесконечности потенциал принято считать равным нулю ($\varphi = 0$ для $r = \infty$), и постоянную интегрирования следует положить равной нулю, т.е. потенциал поля точечного заряда

$$\varphi = k \frac{q}{r}.$$

Отсюда *разность потенциалов* между двумя точками, лежащими на расстояниях r_1 и r_2 от точечного заряда

$$\varphi_1 - \varphi_2 = kq \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (39.1)$$

2. Поле равномерно заряженной плоскости и плоского конденсатора.

Напряженность поля равномерно заряженной бесконечной плоскости определяется формулой

$$E_n = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0},$$

где σ – поверхностная плотность заряда. Поле плоскости ортогонально к ней.

Если направить ось Ox перпендикулярно к пластинам, то согласно выражению (38.7) разность потенциалов между точками, отстоящими от плоскости на расстояния x_1 и x_2 равна

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{x_1}^{x_2} E_x dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} dx = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} (x_2 - x_1). \quad (39.2)$$

Для электростатического поля в вакууме между двумя параллельными плоскостями, заряженными разноименно (поле плоского конденсатора) (рис. 39.1) получим разность потенциалов (называемую напряжением) между двумя бесконечными заряженными пластинами (обкладками конденсатора)

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_0^d \frac{\sigma}{\varepsilon_0} dx = \frac{\sigma d}{\varepsilon_0} \quad (39.3)$$

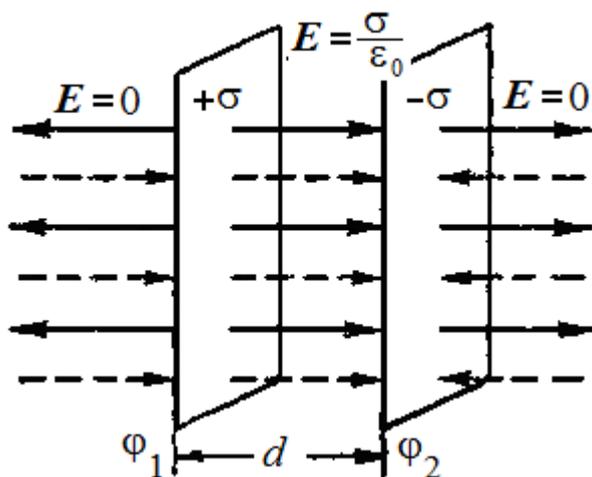


Рис. 39.1.

3. Поле равномерно заряженной бесконечной нити.

Вектор напряженности поля \mathbf{E} в любой точке направлен вдоль радиальной прямой, перпендикулярной к нити (рис. 39.2), а его проекция на эту прямую дается формулой (36.8)

$$E_r = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}.$$

Так как напряженность поля зависит только от r , то связь между напряженностью и потенциалом (формула (38.2)) запишется в виде

$$E_r = -\frac{d\varphi}{dr},$$

Откуда следует, что разность потенциалов между двумя точками, лежащими на расстояниях r_1 и r_2 от нити, равна

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} E_r dr = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}. \quad (39.4)$$

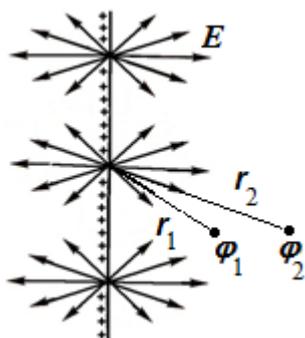


Рис. 39.2.

Пример 39.1. Электростатическое поле создается положительно заряженной бесконечной нитью с линейной плотностью заряда $\tau = 1$ нКл/м. Какую скорость приобретет электрон, приблизившись под действием поля к нити вдоль линии напряженности от расстояния $r_1 = 1,5$ см до $r_2 = 1$ см? Начальная скорость электрона равна нулю.

Поле бесконечной равномерно заряженной нити симметрично: линии напряженности являются радиальными прямыми, лежащими в плоскостях, перпендикулярных к нити (рис. П.39.1).

Работа сил поля равна приращению кинетической энергии электрона

$$A = W_{k2} - W_{k1}, \text{ или}$$

$$e(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}, \quad (\text{П. 39.1})$$

где W_{k1} и W_{k2} – кинетические энергии электрона до и после прохождения ускоряющего поля, v_1 и v_2 – начальная и конечная скорости электрона, e – заряд, m – масса электрона, φ_1 и φ_2 – потенциалы начальной и конечной точек пути. Воспользуемся (9.4)

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

С учетом того, что $v_1 = 0$ и $W_{k1} = 0$, получим

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{e\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1} \quad \text{и} \quad v = \sqrt{\frac{e\tau}{m\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}}. \quad (\text{П. 39.2})$$

Подставив числовые значения, определим $v = 1,6$ Мм/с.

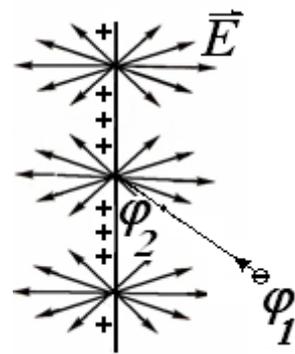


Рис. П.39.1.

Пример 39.2. В качестве детектора α -, β - и γ - радиоактивных излучений применяют газоразрядные счетчики. Такой счетчик представляет собой проводящий цилиндр 3 (рис. П.39.2) с натянутой вдоль оси цилиндра **тонкой металлической нитью 2**.

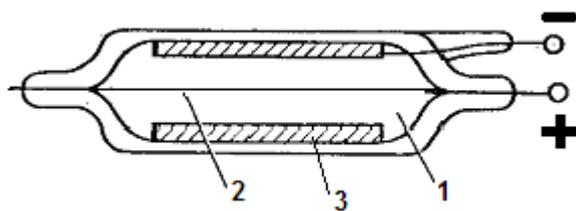


Рис. П.39.2.

Между нитью 2 и цилиндром 3 создается высокая разность потенциалов порядка 400 В. Частицы, пройдя сквозь цилиндр счетчика, попадают в пространство 1 между электродами и вызывают ионизацию газа. Образовавшиеся в газе ионы притягиваются к электродам. Так как поле неоднородно и **сильно возрастает вблизи нити**,

то движущиеся вторичные электроны на длине свободного пробега приобретает кинетическую энергию, достаточную для ударной ионизации атомов. Возникает лавинный процесс ионизации, в результате которого на нить попадает значительное число электронов, потенциал нити изменяется, что фиксируется прибором как единичный разрядный импульс.

Контрольные вопросы

1. Может ли измениться заряд элементарной частицы в результате ядерной реакции?
2. Почему окружающие нас макроскопические тела как правило не заряжены?
3. Будет ли закон Кулона иметь одинаковый вид для определения силы взаимодействия как точечных зарядов, так и протяженных заряженных тел?
4. Каким образом по картине силовых линий поля можно сделать выводы о направлении и численном значении напряженности электрического поля?
5. Совпадают ли линии напряженности с траекторией движения положительного пробного заряда? Могут ли пересекаться силовые линии электростатического поля?
6. Может ли замкнутая поверхность охватывать заряды, а поток вектора E через нее равняться нулю?
7. Изобразите графически однородное и неоднородное электростатические поля.
8. Как изменяется напряженность поля бесконечной равномерно заряженной пластины по мере удаления от нее?
9. Каковы единицы измерения напряженности электрического поля?

10. Постройте график изменения напряженности электростатического поля с расстоянием для: а) равномерно заряженной плоскости; б) равномерно заряженной сферы.
11. Какова связь потенциала электрического поля с работой сил поля перемещения заряда?
12. Почему напряженность электрического поля направлена в сторону наиболее быстрого убывания потенциала?
13. Какое условие является необходимым и достаточным для того, чтобы электростатическое поле являлось потенциальным?
14. Как доказать, что электростатическое поле, создаваемое точечным зарядом, является потенциальным?
15. Какова связь напряженности с потенциалом электростатического поля на примере однородного поля в плоском конденсаторе?
16. Может ли существовать электростатическое поле, силовые линии которого параллельны, но имеют разную густоту в разных частях поля?

Глава 2. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ДИЭЛЕКТРИКАХ

§ 40. Диполь во внешнем электрическом поле

Рассмотрим поведение жесткого электрического *диполя* (см. § 33), помещенного в *однородное электрическое поле*.

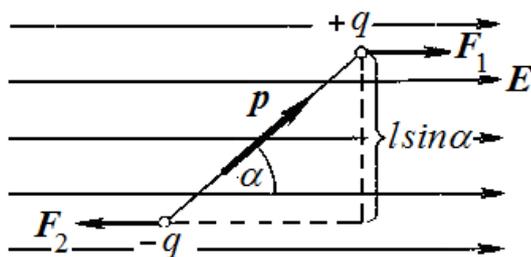


Рис. 40.1.

Пусть вектор \mathbf{p} дипольного момента направлен под углом α к направлению внешнего поля \mathbf{E} (рис. 40.1). Диполь называют жестким, если в электрическом поле расстояние l между его зарядами не изменяется. Электрический момент диполя равен численно $p = ql$ и направлен от отрицательного заряда к положительному.

На положительный заряд $+q$ действует сила, совпадающая по направлению с вектором \mathbf{E} и равная $F_1 = qE$, а на отрицательный заряд — противоположного направления и равная $F_2 = -qE$.

Силы равные по величине и направленные в противоположные стороны образуют *пару сил*. Механический вращающий момент этой пары численно равен произведению модуля силы на плечо пары $l \sin \alpha$:

$$M = Fl \sin \alpha = qEl \sin \alpha = pE \sin \alpha. \quad (40.1)$$

Вектор \mathbf{M} момента равен векторному произведению векторов \mathbf{p} и \mathbf{E}

$$\mathbf{M} = [\mathbf{pE}]. \quad (40.2)$$

Момент сил \mathbf{M} стремится повернуть диполь так, чтобы его электрический момент \mathbf{p} установился по направлению внешнего поля \mathbf{E} .

Для того, чтобы повернуть диполь на малый угол $d\alpha$ против часовой стрелки вокруг оси, перпендикулярной к направлению поля, внешние силы должны совершить определенную работу.

$$dA = M d\alpha = pE \sin \alpha d\alpha. \quad (40.3)$$

Эта работа затрачивается на увеличение потенциальной энергии W , которой обладает диполь в электрическом поле

$$dW = dA = pE \sin \alpha d\alpha. \quad (40.4)$$

Интегрируя, получаем

$$W = -pE \cos \alpha + \text{const} = -pE + \text{const} \quad (40.5)$$

Если положить $\text{const} = 0$, то энергия диполя равна нулю тогда, когда диполь устанавливается перпендикулярно полю ($\alpha = \pi/2$).

Минимальное значение энергии, равное $-pE$, получается, когда $\alpha = 0$, т. е. когда диполь ориентирован своим моментом вдоль поля.

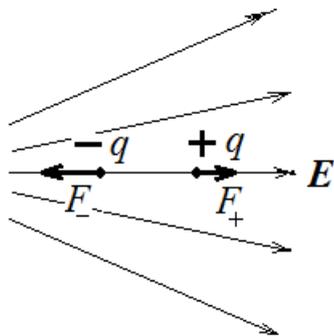


Рис.40.2

Это соответствует положению устойчивого равновесия. При отклонении диполя от этого положения снова возникает механический момент внешних сил, который возвращает диполь в первоначальное положение.

В *неоднородном электрическом поле* на диполь, кроме вращающего момента, действует также сила, стремящаяся втянуть диполь в область более сильного

поля. На рис. 40.2 изображен диполь в неоднородном электрическом поле в случае, когда дипольный момент p направлен по полю. Сила F_- больше силы F_+ , результирующая сила $F_- - F_+$ стремится переместить диполь в область большей напряженности электрического поля.

Этим поведением диполя, в частности, объясняется прилипание легких диэлектрических предметов («диполей») – кусочков бумаги, пенопласта – к наэлектризованным телам.

Пример 40.1. Какова минимальная и максимальная потенциальная энергия диполя с электрическим моментом $p = 4 \cdot 10^{-9}$ Кл·м, который находится во внешнем однородном электрическом поле напряженностью $E = 300$ В/м?

Согласно формуле (40.5) потенциальная энергия диполя

$$W = -pE \cos \alpha .$$

Минимальная энергия при $\alpha = 0^\circ$ $W = -pE = -4 \cdot 10^{-9} \cdot 300 = -1,2 \cdot 10^{-6}$ (Дж) соответствует положению устойчивого равновесия. Максимальная энергия при $\alpha = 180^\circ$ $W = pE = 4 \cdot 10^{-9} \cdot 300 = 1,2 \cdot 10^{-6}$ (Дж) соответствует положению неустойчивого равновесия.

§ 41. Типы диэлектриков. Поляризация диэлектриков

Все вещества в природе можно условно *разделить на две категории*: проводники – хорошо пропускающие электрический ток, и диэлектрики (изоляторы) – практически не пропускающие ток. Промежуточное положение занимают полупроводники, пропускающие ток при определенных условиях.

С точки зрения классической физики в металлических проводниках имеется много так называемых свободных электронов, оторвавшихся от ионов кристаллической решетки. Включение сколь угодно малого внешнего электрического поля вызывает направленное движение электронов – электрический ток.

Диэлектрики – это вещества, плохо проводящие электрический ток. Это объясняется тем, что в диэлектриках, в отличие от металлов, практически отсутствуют свободные электроны, все электроны связаны с атомами. Электрическое поле не отрывает электроны от атомов, а только смещает их на малые (порядка межатомных) расстояния, т.е. на расстояния порядка 10^{-7} - 10^{-8} см.

Все диэлектрики можно разделить на такие три группы.

1. Диэлектрики с полярными молекулами.

Молекулы некоторых веществ, например жидкостей – воды H_2O , соляной кислоты HCl , бензола C_6H_6 и др., твердых тел – H_2S , газов – SO_2 , обладают собственным дипольным моментом.

Это означает, что в таких молекулах центры «тяжести» положительных и отрицательных зарядов смещены друг относительно друга. Подобные молекулы называются *полярными*.

Электрическое поле полярной молекулы можно представить как поле некоторого эквивалентного электрического диполя с постоянным дипольным моментом $\mathbf{p} = q\mathbf{l}$, где l – расстояние между электрическими центрами.

Когда внешнее электрическое поле отсутствует, дипольные моменты молекул в полярных диэлектриках из-за наличия теплового движения ориентированы хаотически (рис. 41.1). На рис. 41.1 положительно заряженная часть молекулы закрашена в черный цвет, отрицательная – в белый.

При наличии внешнего поля наиболее устойчивым является состояние, соответствующее минимуму потенциальной энергии, т.е. состояние, при котором дипольные моменты молекул \mathbf{p} были бы параллельны напряженности поля \mathbf{E} .

Вследствие совместного действия обоих факторов (сил поля и хаотического теплового движения) в диэлектрике устанавливается ориентация дипольных моментов полярных молекул в направлении поля (рис. 41.1).

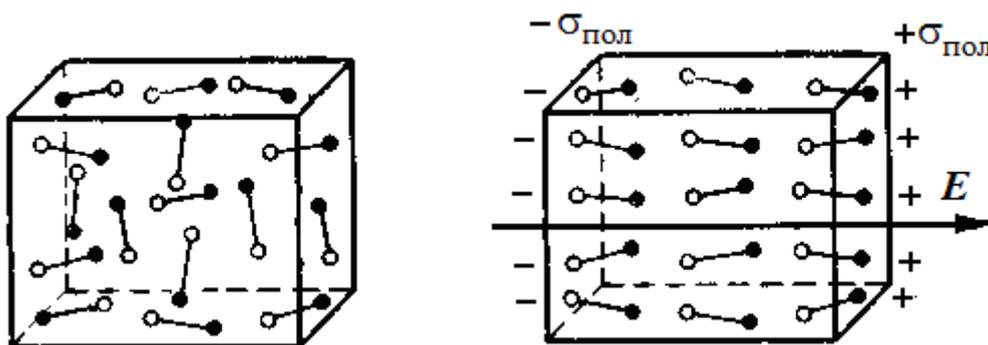


Рис. 41.1.

Процесс смещения связанных заряженных частиц диэлектрика под действием внешнего электрического поля называется *поляризацией диэлектрика*.

В рассматриваемом случае внешнее поле вызывает поляризацию, выстраивая, ориентируя дипольные моменты молекул по направлению поля. Такая поляризация называется *ориентационной*.

На торцевые поверхности диэлектрического образца выступают нескомпенсированные положительные и отрицательные заряды – концы молекул-

диполей. Их называют *поляризационными или связанными зарядами* (на рис. 41.1 $+\sigma_{\text{пол}}$ и $-\sigma_{\text{пол}}$).

Тепловое движение, разумеется, мешает выстраиванию молекул, так что ориентационная поляризация уменьшается с ростом температуры.

2. Диэлектрик с неполярными молекулами

Каждая молекула (или атом) диэлектрика имеет положительно заряженные ядра и отрицательно заряженные электроны, которые движутся вокруг ядер. Положительные заряды всех ядер равны по абсолютной величине заряду всех электронов, и поэтому молекула вещества в целом электрически нейтральна.

Ко второй группе можно отнести диэлектрики, в молекулах которых центры положительных и отрицательных частиц совпадают (рис. 41.2).

Молекулы таких диэлектриков называются *неполярными*. В частности, к диэлектрикам этой группы принадлежат водород H_2 , азот N_2 , кислород O_2 , окись углерода CO , CCl_4 , парафин, бензол и ряд других углеводородов. В отсутствие внешнего электрического поля дипольный момент таких молекул равен нулю.

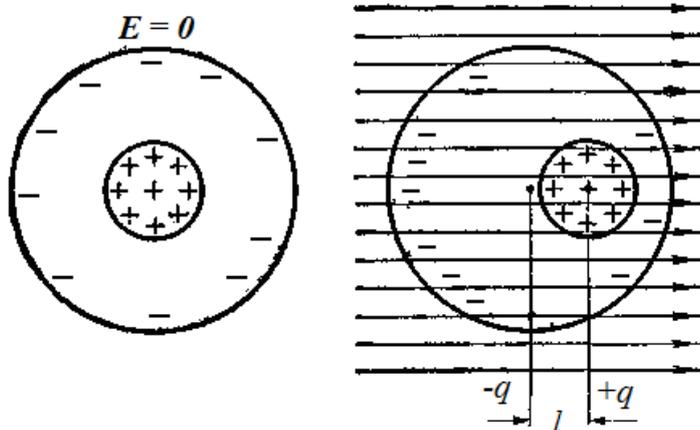


Рис. 41.2.

Если во внешнее поле внести диэлектрик с неполярными молекулами, то электронные орбиты деформируются, и поэтому смещается центр тяжести электронов относительно центра тяжести атомных ядер.

Молекулы становятся электрическими диполями, ориентированными положительно заряженными концами в направлении электрического поля – неполярные молекулы становятся полярными (рис. 41.2). В этом состоит механизм *электронной* поляризации.

Такие наведенные диполи называют упругими (квазиупругими), в отличие от жестких полярных молекул.

При внесении неполярного диэлектрика в электрическое поле все наведенные дипольные моменты располагаются цепочками вдоль линий напряженности. Вследствие этого грани диэлектрика приобретают разноименные заряды – диэлектрик поляризуется.

3. Ионные диэлектрики

К третьей группе диэлектриков принадлежат *ионные кристаллы*, в которых в пространственных решетках правильно чередуются положительные и отрицательные ионы (например, NaCl , KCl , CsCl). В таких кристаллах нельзя вы-

делить отдельные молекулы, их можно рассматривать как совокупность двух ионных решеток, вставленных друг в друга (рис. 41.3). Одна решетка построена из положительных ионов, другая – из отрицательных.

На рис. 41.3 изображена схема кристаллической решетки поваренной соли NaCl; здесь маленькие шарики – положительные ионы натрия, большие –

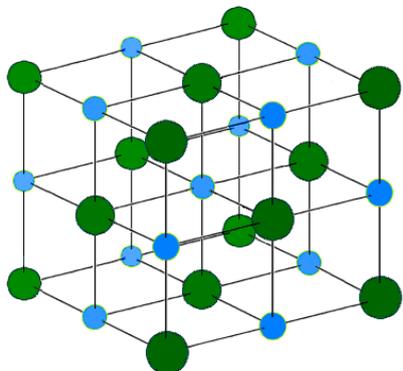


Рис. 41.3

отрицательные ионы хлора. Все кристаллы поваренной соли имеют одинаковую кубическую форму.

Когда внешнее электрическое поле отсутствует, электрические силы взаимодействия заряженных ионов в узлах решетки взаимно уравновешиваются, и на каждой грани кристалла располагается одинаковое количество положительных и отрицательных ионов. Если такой кристалл внести в электрическое поле, то под действием сил поля положительные ионы смещаются в направлении вектора напряженности,

а все отрицательные ионы – в противоположном направлении. Поэтому на противоположных гранях кристалла преобладают ионы одного знака, и кристалл будет поляризованным.

Таким образом, для всех трех типов диэлектрика характерным признаком поляризации является возникновение электрического дипольного момента в любом макроскопически малом объеме диэлектрика

Пример 41.1. На явлении поляризации, а точнее, реполяризации основана работа СВЧ-печи (микроволновой печи), предназначенной для быстрого приготовления или подогрева пищи. Нагрев в печи основан на принципе так называемого «дипольного сдвига».

Молекулярный дипольный сдвиг под действием электрического поля происходит в материалах, содержащих полярные молекулы. Лучшим полярным диэлектриком является вода, которая содержится практически во всех продуктах питания.

В переменном электрическом поле высокочастотного электромагнитного излучения молекулы воды периодически меняют направление. Сталкиваясь и передавая энергию соседним молекулам, молекулы воды увеличивают среднюю кинетическую энергию молекул вещества, а следовательно, увеличивают его температуру.

Пример 41.2. В некоторых кристаллических диэлектриках сжатие образца в определенном направлении ведет к его поляризации – к появлению на противоположных гранях поляризационных зарядов противоположного знака. Наоборот, подача разности потенциалов на противоположные грани ведет к сжатию (или расширению) образца. Такое явление называется *пьезоэлектрическим эффектом*. Этот эффект проявляют кварц, титанат бария, сегнетова соль и др. Поляризация в направлении механического действия обусловлена структурной перестройкой, смещением ионов и деформацией электронных оболочек.

Пьезоэлектрические материалы широко используют в технике для преобразования механических колебаний в электрические и наоборот. Из них изготавливают различные датчики для измерения частоты и амплитуды вибраций конструкций, двигателей, турбин, самолетов, датчики механических напряжений, датчики давления жидкостей и газов; чувствительные элементы в микрофонах и т.п. Для преобразования электрических колебаний в звуковые используют пьезоэлектрики в качестве акустических генераторов (ультразвуковых излучателей, излучателей гидролокаторов–сонаров и т.д.).

§ 42. Поляризованность. Диэлектрическая восприимчивость

Для количественной оценки поляризации диэлектрика вводится понятие **вектора поляризации (поляризованности)**. Под поляризованностью понимают сумму электрических дипольных моментов молекул единицы объема поляризованного диэлектрика, иными словами, поляризованность определяется *электрическим дипольным моментом единицы объема поляризованного диэлектрика*.

$$\mathbf{P} = \frac{\sum \mathbf{p}_i}{\Delta V}, \quad (42.1)$$

где \mathbf{p}_i - дипольный момент i -й молекулы, а суммирование производится по всем молекулам, содержащимся в объеме ΔV .

Опыт показывает, что внешнее электрическое поле либо создает дипольные моменты, ориентированные по полю (упругая поляризация), либо ориентирует дипольные моменты молекул (ориентационная поляризация), вследствие чего диэлектрик приобретает макроскопический дипольный момент.

Следовательно, поляризованность \mathbf{P} должна быть пропорциональна напряженности внешнего поля

$$\mathbf{P} = \kappa \epsilon_0 \mathbf{E}, \quad (42.2)$$

где коэффициент κ носит название *диэлектрической восприимчивости*. Эта величина характеризует способность среды к поляризации.

Зная величину поляризованности, можно определить поверхностную плотность избыточных, так называемых *поляризационных зарядов*, появляющихся во внешнем электрическом поле на поверхности диэлектрика.

Рассмотрим образец диэлектрика в виде наклонной призмы с площадью основания S и ребром l , помещенный в электрическое поле, параллельное его боковому ребру (рис. 42.1). На одном из оснований призмы появляются отрицательные заряды с поверхностной плотностью $-\sigma'$, а на другой - положительные заряды с поверхностной плотностью $+\sigma'$. Очевидно, что полный дипольный момент призмы равен произведению величины поляризационного заряда $q' = \sigma' \cdot S$, возникающего на ее торцах, на расстояние между ними l :

$$P = \sigma' \cdot S l.$$

Согласно определению можно записать, что поляризованность (электрический момент единицы объема) равна

$$P = \frac{q' l}{V} = \frac{\sigma' S l}{V}$$

Если α - угол между направлением нормали к основанию призмы и вектором \mathbf{P} , то объем призмы равен

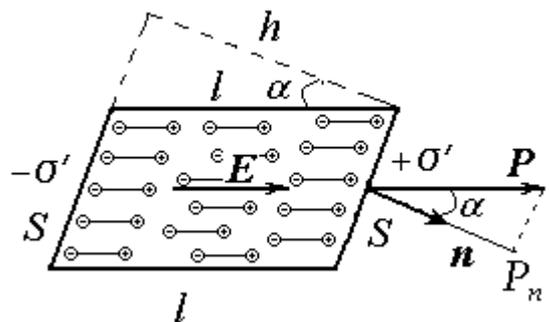


Рис. 42.1.

$$V = Sh = Sl \cos \alpha$$

Подставив значение объема призмы, получим

$$P = \frac{\sigma' Sl}{Sl \cos \alpha},$$

откуда

$$\sigma' = P \cos \alpha = P_n \quad (42.3)$$

Поверхностная плотность связанных (поляризационных) зарядов равна проекции вектора поляризованности \mathbf{P} на внешнюю нормаль \mathbf{n} к рассматриваемой поверхности диэлектрика.

§ 43. Электрическое смещение Диэлектрическая проницаемость

Рассмотрим поле, создаваемое в вакууме двумя бесконечными разноименно заряженными пластинами, заряженными с поверхностной плотностью свободных зарядов $+\sigma$ и $-\sigma$.

Предположим, что между ними помещен слой однородного диэлектрика (рис. 43.1).

Под действием поля диэлектрик поляризуется, т.е. происходит смещение положительных зарядов по полю и отрицательных – против поля.

В результате поляризации поверхности диэлектрика также приобретают поверхностные заряды $+\sigma'$ и $-\sigma'$, причем около положительной заряженной плоскости будет находиться отрицательно заряженная поверхность диэлектрика.

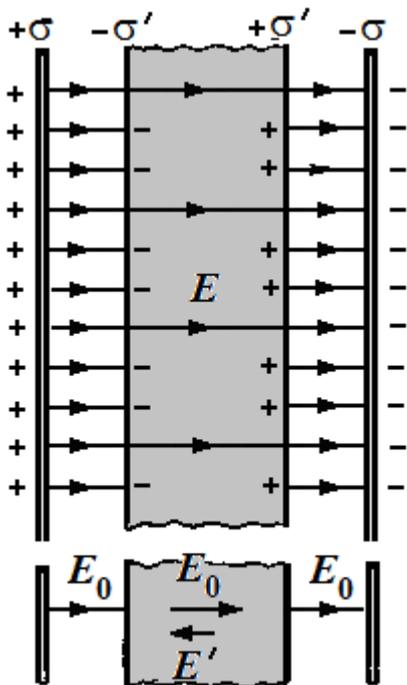


Рис. 43.1.

Из рис. 43.1 видно, что электрическое поле \mathbf{E}' связанных зарядов направлено противоположно внешнему полю \mathbf{E}_0 , созданному свободными зарядами.

Согласно принципу суперпозиции напряженность поля \mathbf{E} внутри диэлектрика есть сумма этих двух полей:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}', \quad (43.1)$$

или в проекциях

$$E = E_0 - E'. \quad (43.2)$$

Оба поля создаются двумя бесконечными заряженными плоскостями и равны соответ-

ственно $E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ и $E' = \frac{\sigma'}{\epsilon_0}$. Поэтому

$$E = \frac{\sigma - \sigma'}{\epsilon_0}. \quad (43.3)$$

Поскольку напряженность поля внутри диэлектрика меньше, чем вне его, то часть линий вектора напряженности, начинающихся (или заканчивающихся) на свободных зарядах, заканчиваются (соответственно, начинаются) на связанных зарядах (рис. 43.1).

Таким образом, вектор напряженности E , проходя через воздушный зазор между плоскостями и диэлектриком, испытывает скачкообразное изменение. Это создает неудобство при расчете электростатических полей.

Связанные заряды появляются на поверхностях диэлектрика под действием поля, созданного свободными зарядами. Поэтому первичным источником поля в диэлектрике являются именно свободные заряды.

Результирующее поле в диэлектрике E равно векторной сумме поля свободных зарядов и поля поляризационных связанных зарядов. Но поверхностная плотность связанных зарядов, определяющая поле связанных зарядов, в свою очередь зависит от напряженности результирующего поля в диэлектрике

$$\sigma' = P_n = \kappa \varepsilon_0 E_n.$$

Возникает затруднение, разрешить которое можно путем введения вспомогательной величины D , источниками которой являются *только свободные заряды*.

Эту векторную величину D называют *электрическим смещением* (иногда – *индукцией*) *электрического поля* и определяют по формуле:

$$D = \varepsilon_0 E + P \quad (43.4)$$

С учетом соотношения $P = \kappa \varepsilon_0 E$ выражение для электрического смещения приобретает вид

$$D = \varepsilon_0 E + \kappa \varepsilon_0 E = \varepsilon_0 (1 + \kappa) E = \varepsilon \varepsilon_0 E, \quad (43.5)$$

где безразмерная величина

$$\varepsilon = 1 + \kappa \quad (43.6)$$

называется *диэлектрической проницаемостью* рассматриваемого вещества.

В вакууме $\kappa = 0$, $\varepsilon = 1$.

Через диэлектрическую проницаемость поляризованность P запишется теперь как

$$P = \varepsilon_0 (\varepsilon - 1) E \quad (43.7)$$

Как было показано ранее, поверхностная плотность связанных зарядов равна нормальной составляющей вектора поляризации

$$\sigma' = P_n = \kappa \varepsilon_0 E_n.$$

Поскольку поле внутри диэлектрика в данном случае перпендикулярно к его поверхности, $E_n = E$ и $\sigma' = \kappa \varepsilon_0 E$. Подставляя это значение в формулу (43.3), получим

$$E = E_0 - \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} = E_0 - \kappa E,$$

откуда

$$E = \frac{E_0}{1 + \kappa} = \frac{E_0}{\varepsilon} \quad (43.8)$$

Таким образом, в рассматриваемом случае *величина диэлектрической проницаемости показывает, во сколько раз напряженность электрического поля в диэлектрике меньше, чем напряженность поля, которое создается тем же расположением свободных зарядов в вакууме*.

Все формулы, описывающие электрические поля и взаимодействие электрических зарядов и полученные в предыдущих параграфах, остаются справедливыми.

ливыми и для однородного и изотропного диэлектрика, если вместо электрической постоянной ϵ_0 ввести произведение $\epsilon_0\epsilon$. Например, в закон Кулона

$$F = \frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2}$$

диэлектрическая проницаемость ϵ входит как величина, показывающая, во сколько раз сила взаимодействия двух свободных зарядов в диэлектрике меньше, чем в вакууме. Ослабление взаимодействия происходит из-за экранизации свободных зарядов связанными, образующимися в результате поляризации среды.

Аналогично напряженность и потенциал электрического поля точечного заряда

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2}, \varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r}$$

и т. д.

У газов диэлектрическая проницаемость близка к единице, у твердых диэлектриков не превышает 10, а у жидких диэлектриков не превышает 100. Особый класс диэлектриков – сегнетоэлектрики – имеют аномально большие значения $\epsilon \sim 10^4$.

Умножив (13.8) на $\epsilon\epsilon_0$, получим электрическое смещение D внутри диэлектрика:

$$D = \epsilon\epsilon_0 E = \epsilon_0 E_0. \quad (43.9)$$

Следовательно, *внутри диэлектрика электрическое смещение совпадает с электрическим смещением внешнего поля.*

Если записать соотношение (43.9) для модулей векторов $D = \epsilon_0 E_0$, а также учесть, что напряженность поля между двумя параллельными бесконечными плоскостями, заряженными с поверхностной плотностью зарядов $+\sigma$ и $-\sigma$ в вакууме равна $E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$, то получим

$$D_0 = \sigma. \quad (43.10)$$

Электрическое смещение D описывает поле, создаваемое свободными зарядами. Однако связанные заряды, возникающие в диэлектрике, могут вызвать перераспределение свободных зарядов, создающих поле. Поэтому вектор D характеризует электростатическое поле, создаваемое свободными зарядами (т.е. в вакууме), но при таком их распределении в пространстве, какое имеется при наличии диэлектрика.

Поле вектора D графически изображается линиями вектора смещения, так же как и поле вектора E . Однако, если линии вектора E начинаются и заканчиваются на любых – как свободных, так и связанных зарядах, и поэтому на границе диэлектрика густота этих линий изменяется скачком, то линии вектора D начинаются и заканчиваются только на свободных зарядах, и их густота на границе диэлектрика остается неизменной.

Математическая запись *электростатической теоремы Гаусса для поля в диэлектрике* в интегральной форме имеет вид:

$$\Phi_D = \oint_S D_n dS = \sum_i q_i \quad (43.11)$$

т.е. **поток вектора электрического смещения через произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме заключенных внутри этой поверхности свободных зарядов.**

Пример 43.1. Плоский конденсатор, расстояние между пластинами которого $d = 8$ мм, заряжен до разности потенциалов $U_0 = 500$ В и отключен от источника напряжения. После зарядки конденсатора между пластинами вдвинули фарфоровую пластину ($\varepsilon = 6,5$). Определить:
 1.) модули векторов напряженности поля E и электрического смещения D ;
 2.) модуль поляризованности P диэлектрика;
 3.) поверхностную плотность связанных зарядов $\pm\sigma'$ на фарфоровой пластине;
 4.) диэлектрическую восприимчивость к фарфора.

Напряженность поля заряженного конденсатора в отсутствие пластины диэлектрика $E_0 = \frac{U_0}{d}$, напряженность поля в пластине в ε раз меньше:

$$E = \frac{E_0}{\varepsilon} = \frac{U_0}{\varepsilon d} = \frac{500}{6,5 \cdot 0,008} = 9,62 \frac{\text{кВ}}{\text{м}}$$

Смещение при переходе границы диэлектрика не изменяется и имеет одинаковое значение внутри и вне пластины:

$$D = \varepsilon_0 \varepsilon E = D_0 = \varepsilon_0 E_0 = \frac{\varepsilon_0 U_0}{d} = \frac{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 500}{0,008} \approx 5,53 \cdot 10^{-7} \left(\frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}\right) \approx 0,55 \frac{\text{мкКл}}{\text{м}^2}$$

Модуль поляризованности

$$P = \kappa \varepsilon_0 E = (\varepsilon - 1) \varepsilon_0 \frac{E_0}{\varepsilon} = \frac{(\varepsilon - 1) \varepsilon_0 U_0}{\varepsilon d} = \frac{(6,5 - 1) 8,85 \cdot 10^{-12} 500}{6,5 \cdot 0,008} \approx 0,47 \left(\frac{\text{мкКл}}{\text{м}^2}\right)$$

Поляризованность перпендикулярна к поверхности пластины, поэтому поверхностная плотность связанных зарядов $\sigma' = P_n = \pm P = \pm \frac{(\varepsilon - 1) \varepsilon_0 U}{\varepsilon d} = \pm 0,47 \left(\frac{\text{мкКл}}{\text{м}^2}\right)$.

$$\kappa = \varepsilon - 1 = 6,5 - 1 = 5,5.$$

Контрольные вопросы

1. Электрический диполь помещен во внешнее однородное электрическое поле. Сколько существует положений равновесия диполя? Какое из них является устойчивым, и какое – неустойчивым, и почему?
2. В чем сходство и в чем различие между свободными и поляризационными зарядами?
3. Можно ли отделить друг от друга поляризационные заряды, разрезав в электрическом поле диэлектрик на части?
4. Можно ли передать поляризационные заряды другому телу путем соприкосновения тел?
5. Прямоугольный образец однородного диэлектрика расположен перпендикулярно внешнему электрическому полю. Будут ли возникать поляризационные заряды на: а) торцевых поверхностях; б) на боковых поверхностях диэлектрика?
6. Как влияет диэлектрик на напряженность электростатического поля? Каков физический смысл диэлектрической проницаемости ε ?
7. Как объяснить уменьшение силы взаимодействия двух точечных зарядов в однородном диэлектрике?

8. Пластина однородного изотропного диэлектрика помещена в однородное электростатическое поле перпендикулярно полю. Как изменяется густота линий векторов E и D при пересечении пластины?

Глава 3. ПРОВОДНИКИ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

§ 44. Равновесие зарядов на проводнике

Тела, в которых имеется большое количество свободных зарядов, называются проводниками. В проводниках электрические заряды могут свободно перемещаться под действием сколь угодно малой силы. Жидкости и газы в обычном состоянии являются плохими проводниками электричества. Если же газ ионизовать, а в жидкости растворить какую-либо соль, кислоту или щелочь (такой проводящий раствор будет называться электролитом), то проводимость их увеличивается.

Если проводниками являются жидкости и газы, то в них движутся как положительные, так и отрицательные заряженные частицы: положительные и отрицательные ионы и электроны.

В металлах же, которые являются лучшими проводниками, чем жидкости и газы, проводимость обусловлена только движением электронов. Положительно заряженные ионы металла образуют кристаллическую решетку и удерживаются вблизи положений равновесия силами взаимодействия с «газом свободных электронов». Электронный газ образуется за счет одного или нескольких электронов, отданных каждым атомом.

Рассмотрим незаряженный металлический проводник, внесенный во внешнее электрическое поле (рис. 44.1).

Под действием поля свободные заряды начнут перемещаться и будут продолжать двигаться до тех пор, пока дополнительное поле E' , вызванное разделением зарядов внутри проводника (рис. 44.2), не скомпенсирует полностью внешнее поле E_0 так, чтобы

$$E' + E_0 = 0. \quad (44.1)$$

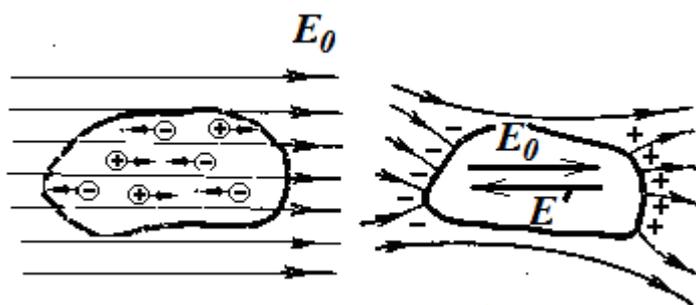


Рис. 44.2.



Рис. 44.1.

Только в этом случае будет отсутствовать сила, действующая на заряды, а значит, прекратится их направленное движение. При равновесии зарядов их направленное движение внутри проводника прекращается.

В состоянии равновесия напряженность электрического поля внутри проводника равна нулю.

Поскольку внутри проводника $E = 0$, из соотношения

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{1 \rightarrow 2} E_l dl$$

следует, что для произвольных точек 1 и 2, взятых внутри проводника, $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$. Иными словами, в состоянии равновесия потенциал всех точек внутри проводника одинаков.

$$\varphi = \text{const} \quad (44.2)$$

Заметим, что время, в течение которого в проводнике происходит перемещение зарядов и устанавливается равновесие, для металлов чрезвычайно мало.

Следующее условие равновесия зарядов на проводнике: *напряженность поля на поверхности проводника должна быть в каждой точке направлена по нормали к поверхности*:

$$E = E_n. \quad (44.3)$$

В противном случае под действием касательной составляющей напряженности электроны продолжали бы перемещаться вдоль поверхности, что также противоречит условию равновесия.

Учитывая, что силовые линии всегда перпендикулярны к эквипотенциальной поверхности, заключаем, что в случае равновесия зарядов поверхность проводника будет эквипотенциальной.

Перераспределение зарядов в проводнике под влиянием внешнего электрического поля называется *электростатической индукцией*. Возникающие при этом на проводнике заряды, численно равные друг другу, но противоположные по знакам, называются *индуцированными* или *наведенными* зарядами.

§ 45. Электрическое поле заряженного проводника

Если проводнику сообщить некоторый заряд q , то он распределяется так, чтобы соблюдались условия равновесия.

Представим себе произвольную замкнутую поверхность, полностью заключенную в пределах тела. Поскольку при равновесии зарядов поле в каждой точке внутри проводника отсутствует, поток вектора напряженности E через эту поверхность равен нулю. Согласно теореме Гаусса алгебраическая сумма зарядов внутри поверхности также будет равна нулю. Это справедливо для произвольной поверхности. Следовательно, при равновесии *ни в каком месте внутри проводника не может быть избыточных зарядов* – все они располагаются на поверхности проводника с некоторой поверхностной плотностью σ .

Это происходит потому, что одноименные заряды отталкиваются и стремятся расположиться как можно дальше друг от друга.

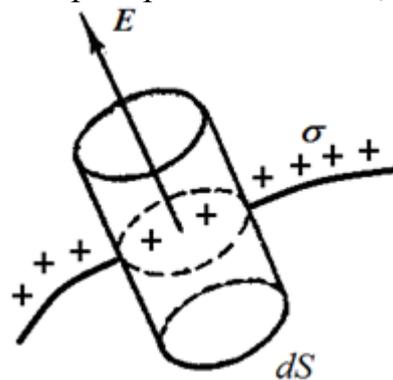


Рис. 45.1.

Значит, удаление вещества из некоторого объема внутри проводника никак не отразится на равновесном распределении зарядов.

Практическим применением этого свойства проводников является электростатическая защита (экранировка) чувствительных приборов и людей от действия внешних электрических полей, при которой они окружаются проводящей оболочкой (обычно ее выполняют в виде густой металлической сетки).

Рассмотрим небольшую цилиндрическую поверхность, образованную нормальными к поверхности проводника и основаниями dS , одно из которых расположено внутри, а другое – вне проводника (рис. 45.1).

Поток напряженности через внутреннюю часть поверхности равен нулю, т.к. внутри проводника поле $E = 0$. Вне проводника в непосредственной близости к нему напряженность поля E направлена по нормали к поверхности.

Внутри цилиндра попадает свободный заряд σdS . Применяя к цилиндрической поверхности теорему Гаусса, получим для напряженности поля вблизи поверхности проводника

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}. \quad (45.1)$$

Плотность зарядов зависит от кривизны поверхности, она растет на выступах и остриях и убывает на вогнутых участках. На острие заряженного проводника поверхностная плотность может стать настолько большой, что заряды начинают «стекать», образуя так называемый электрический ветер.

§ 46. Емкость уединенного проводника

Рассмотрим проводник, заряд которого равен q , а потенциал поверхности (одинаковый во всех ее точках) равен φ . Заряд q распределяется по поверхности таким образом, чтобы всюду внутри проводника выполнялись условия равновесия – напряженность поля равнялась бы нулю.

Сообщим проводнику дополнительно еще такой же заряд q . Поскольку внутри проводника поле по-прежнему должно остаться равным нулю, дополнительный заряд распределяется по поверхности **точно таким же образом**, как и прежний, создаст всюду точно такое же поле и изменит потенциал каждой точки на такую же величину φ .

Необходимо при этом, чтобы проводник был уединенным, удаленным от других тел. Иначе перемещение зарядов вне проводника может привести к перераспределению зарядов и в нем самом.

Таким образом, заряд и потенциал уединенного проводника пропорциональны друг другу: $\varphi \sim q$. Следовательно, для каждого уединенного проводника отношение заряда к потенциалу проводника есть величина постоянная

$$C = \frac{q}{\varphi} \quad (46.1)$$

Коэффициент C называется емкостью уединенного проводника.

Емкость уединенного проводника численно равна величине заряда, который нужно сообщить этому проводнику, чтобы изменить его потенциал на единицу:

В СИ единицей емкости является фарад (Ф) – емкость проводника, потенциал которого изменяется на 1 В, если сообщить ему заряд в 1 Кл.

Емкость – характеристика проводника, количественная мера его способности удерживать электрический заряд. Чем больше емкость, тем больший заряд может накопить проводник при данном φ . Емкость определяется геометрическими размерами проводника, его формой и электрическими свойствами окружающей среды (ее диэлектрической проницаемостью) и не зависит от материала проводника.

В качестве примера определим *емкость уединенного проводящего шара* радиуса R , помещенного в среду с диэлектрической проницаемостью ϵ .

Поле заряженного проводящего шара является центрально симметричным относительно центра шара.

Вектор напряженности \mathbf{E} такого поля в любой точке вне шара ($r \geq R$) направлен вдоль радиальной прямой, поэтому проекция E_r вектора \mathbf{E} на радиальное направление равна

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{q}{r^2}.$$

Из формулы (38.3), связывающей напряженность с потенциалом, следует, что

$$E_r = -\frac{d\varphi}{dr}.$$

Тогда для разности потенциалов точек поля справедливо выражение

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} E_r dr.$$

Полагая $\varphi = 0$ при $r \rightarrow \infty$, получаем для потенциала уединенного заряженного шара

$$\varphi = \int_R^{\infty} E_r dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon R} \int_R^{\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon R}, \quad (46.2)$$

так что

$$C = \frac{q}{\varphi} = 4\pi\epsilon\epsilon_0 R. \quad (46.3)$$

Емкость уединенного шара пропорциональна его радиусу и диэлектрической проницаемости среды, окружающей шар.

Пример 46.1. Подсчитаем емкость Земли, считая ее уединенным сферическим проводником радиусом $R \approx 6400$ км. Диэлектрическая проницаемость ϵ окружающей среды практически равна единице. По формуле (16.3)

$$C = 4 \cdot 3,14 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 6,4 \cdot 10^6 \text{ Ф} \approx 7,1 \cdot 10^{-6} \text{ Ф} = 710 \text{ мкФ}.$$

Уединенные проводники имеют значительно меньшую емкость. Следовательно, фарад – очень большая величина. На практике чаще всего встречаются емкости от микрофарад (мкФ) до пикофарад (пФ).

Понятие емкости применимо только к проводникам, так как для них существует равновесное распределение зарядов по объему тела, при котором все точки проводника имеют один и тот же потенциал. Если же заряд сообщается изолятору, то он не растекается по нему и поэтому в различных местах изолятора потенциал различен (в зависимости от расстояний до того места, где находится подведенный заряд).

§ 47. Конденсаторы

Наличие вблизи проводника других тел изменяют его емкость, т.к. потенциал проводника зависит и от электрических полей, создаваемых зарядами, наведенными в окружающих тела вследствие электростатической индукции.

Рассмотрим заряженный, например, положительно $+q$, проводник A и приблизим к нему незаряженный проводник B . Под действием поля, создаваемого заряженным проводником A , в проводнике B возникнут индуцированные заряды. На ближнем конце проводника B возникнет индуцированный заряд другого знака, чем заряд проводника A , в данном случае отрицательный $-q$. Одноименный с q положительный заряд $+q$ возникнет на дальнем конце проводника B (рис. 47.1).

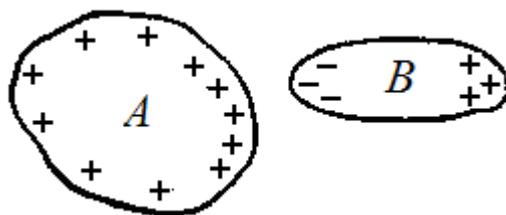


Рис. 47.1.

Теперь потенциал проводника A будут создавать не только его собственные заряды $+q$, но и индуцированные в проводнике B . Оба индуцированных заряда $-q$ и $+q$ равны по абсолютному значению. Они оба будут влиять на потенциал проводника A , но большее влияние окажут те заряды, которые расположены к нему ближе, в данном случае $-q$.

Так как ближе оказываются отрицательные заряды, при поднесении к заряженному проводнику A незаряженного проводника B потенциал проводника A станет меньше. Согласно формуле емкости $C = \frac{q}{\varphi}$ это означает увеличение емкости проводника A .

Система двух проводников, емкость которых увеличена за счет их взаимного расположения, называется конденсатором.

Конденсаторы изготавливают в виде двух проводников, называемых *обкладками*, разделенных тонким слоем диэлектрика. Обкладки несут одинаковые по величине, но противоположные по знаку заряды.

Обкладкам придают такую форму, чтобы поле было сосредоточено внутри конденсатора. Емкость конденсатора (взаимная емкость его обкладок)

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2}, \quad (47.1)$$

где q – заряд одной из обкладок $\varphi_1 - \varphi_2$ - разность потенциалов (напряжение) между обкладками. Емкость конденсатора практически не зависит от наличия окружающих тел и может достигать очень большой величины при малых геометрических размерах.

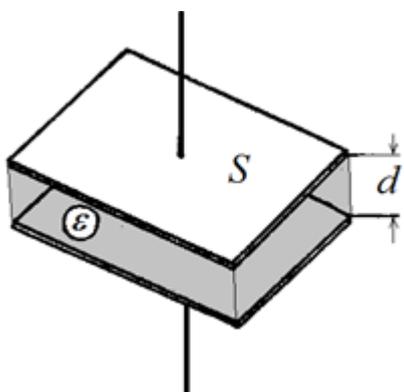


Рис. 47.2.

равный по абсолютному значению, но противоположный по знаку заряду первой пластины, а одноименный заряд, возникший на наружной поверхности второй пластины, уйдет в Землю.

Если расстояние d между пластинами мало по сравнению с их размерами, можно пренебречь краевыми эффектами и считать поле внутри конденсатора однородным и воспользоваться выражением для напряженности поля двух бесконечных разноименно заряженных плоскостей. Учитывая, что диэлектрик ослабляет поле в ϵ раз, для напряженности поля в плоском конденсаторе получим

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon\epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon\epsilon_0 S}, \quad (47.2)$$

где S – площадь обкладки. Ранее было выведено выражение (39.3) для разности потенциалов (напряжения) между обкладками

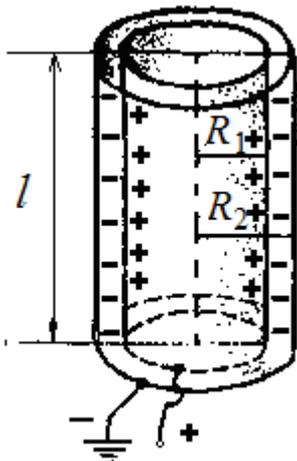


Рис. 47.4.

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\sigma d}{\epsilon\epsilon_0} = \frac{qd}{\epsilon\epsilon_0 S}.$$

Следовательно, емкость плоского конденсатора

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{\epsilon\epsilon_0 S}{d}. \quad (47.3)$$

Цилиндрический конденсатор состоит из двух расположенных один внутри другого коаксиальных проводящих цилиндров, разделённых диэлектриком (рис. 47.4). Можно, пользуясь формулами (39.4) и (47.1), аналогично показать для цилиндрического конденсатора, име-

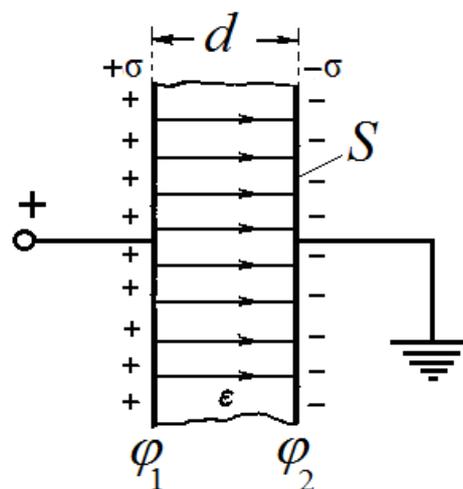


Рис. 47.3.

ющего длину l и радиусы коаксиальных цилиндров R_1 и R_2 :

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{2\pi\epsilon\epsilon_0 l}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \quad (47.4)$$

В электролитических цилиндрических конденсаторах в качестве диэлектрика используют тонкую оксидную пленку, образующуюся на поверхности одного из электродов (металлического) – анода, а в роли второго электрода – катода – выступает электролит. За счет очень малой толщины оксидной пленки радиусы цилиндров близки по значению, т.е. $R_2/R_1 \rightarrow 1$, $\ln \frac{R_2}{R_1} \rightarrow 0$ и, как следу-

ет из формулы (47.4), емкость цилиндрического конденсатора C достигает значительной величины.

Существуют миниатюрные танталовые электролитические конденсаторы. Они имеют довольно малые размеры и предназначены для монтажа на печатных платах миниатюрных плееров, мобильных телефонов, материнских платах ноутбуков и компьютеров.

Пример. 47.1. Плоский воздушный конденсатор был заряжен до напряжения $U_0 = 600$ В и отключен от источника питания. Площадь пластин конденсатора $S = 200$ см², расстояние между ними $d = 2$ мм. После отключения конденсатора от источника напряжения между обкладками конденсатора поместили диэлектрическую пластину ($\epsilon = 6$). Определить разность потенциалов U_1 между пластинами после внесения диэлектрика. Определить также емкости конденсатора C_0 и C_1 до и после внесения диэлектрика.

Впервые М.Фарадей опытным путем установил, что емкость конденсатора с диэлектриком (рис. П.17.1) увеличивается в ϵ раз, т.е.

$$C_1 = \epsilon C_0$$

Так как заряд отключенного от источника конденсатора не меняется при помещении в него диэлектрика $q_0 = q_1 = q = const$, справедливы следующие соотношения:

$$q_0 = C_0 U_0 \quad \text{и} \quad q_1 = C_1 U_1.$$

Отсюда $C_0 U_0 = C_1 U_1$ или

$$U_1 = U_0 \frac{C_0}{C_1} = \frac{U_0}{\epsilon} = \frac{600}{6} = 100(\text{В}).$$

Емкости конденсатора:

$$C_0 = \frac{\epsilon_0 S}{d} = \frac{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 200 \cdot 10^{-4}}{0,002} = 88,5 \cdot 10^{-12} \text{Ф} = 88,5 \text{нФ}$$

$$C_1 = \epsilon C_0 = 6 \cdot 88,5 = 531 \text{нФ}.$$

Пример. 47.2. Как изменится заряд на обкладках конденсатора, если диэлектрическая пластинка вносится в пространство между пластинами конденсатора при включенном источнике питания?

В отличие от первого случая, теперь постоянным оказывается напряжение U_0 на обкладках конденсатора до и после внесения диэлектрика, а заряды на обкладках разные.

$$U_0 = U_1 = U = const; \quad C_1 = \epsilon C_0; \quad q_0 = C_0 U;$$

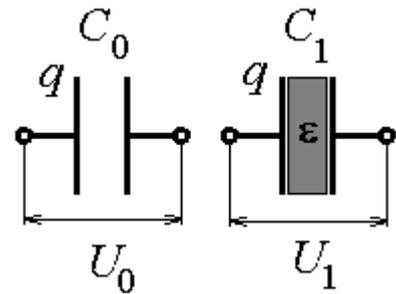


Рис. П. 47.1

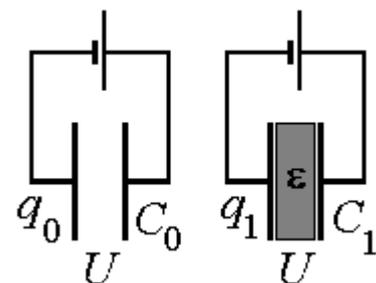


Рис. П. 47.2

$$q_1 = C_1 U = \varepsilon C_0 U = \varepsilon q_0; \quad \frac{q_1}{q_0} = \varepsilon.$$

Тогда дополнительный заряд, который натекает на пластины конденсатора от источника питания

$$\Delta q = q_1 - q_0 = \varepsilon q_0 - q_0 = q_0(\varepsilon - 1) = C_0 U (\varepsilon - 1). \\ \Delta q = 88,5 \cdot 10^{-12} \cdot 600 \cdot (6 - 1) \approx 0,27 \text{ мкКл.}$$

§ 48. Соединение конденсаторов

При практическом использовании конденсаторы часто объединяют в батареи.

При **параллельном** соединении обкладки конденсаторов соединяют в две группы, потенциалы которых φ_1 и φ_2 (рис. 48.1).

Разность потенциалов между обкладками всех конденсаторов одинакова и равна $\varphi_1 - \varphi_2$. При зарядке такой батареи сообщенный ей заряд q частично попадает на обкладки всех конденсаторов.

Суммарный заряд батареи равен сумме зарядов отдельных конденсаторов:

$$q = q_1 + q_2 + q_3 + \dots + q_n \quad (48.1)$$

Таким образом, в случае параллельного соединения конденсаторов

$$C_{\text{пар}} = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{q_1}{\varphi_1 - \varphi_2} + \frac{q_2}{\varphi_1 - \varphi_2} + \dots + \frac{q_n}{\varphi_1 - \varphi_2} = C_1 + C_2 + \dots + C_n \quad (48.2)$$

При параллельном соединении емкость батареи равна сумме емкостей отдельных конденсаторов.

Параллельное соединение применяют для того, чтобы получить большую емкость, чем емкость одного конденсатора.

При **последовательном** соединении конденсаторов (рис. 48.2) обкладки отдельных конденсаторов имеют заряды, численно равные, но противоположные по знаку

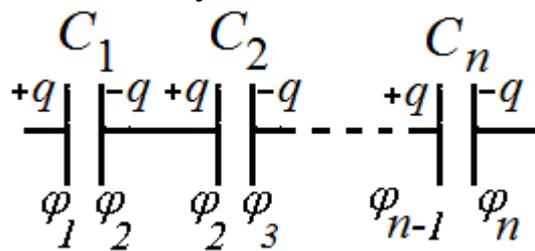


Рис. 48.2

Если первой обкладке сообщить заряд $+q$, то на второй обкладке батареи появится индуцированный заряд $-q$. Поскольку эта обкладка соединена с первой обкладкой второго конденсатора, и образует с ней единый проводник, то согласно закону сохранения заряда, на последней появится заряд $+q$. В свою очередь, это приведет к появлению заряда $-q$ на другой обкладке второго конденсатора и т.д. В результате все после-

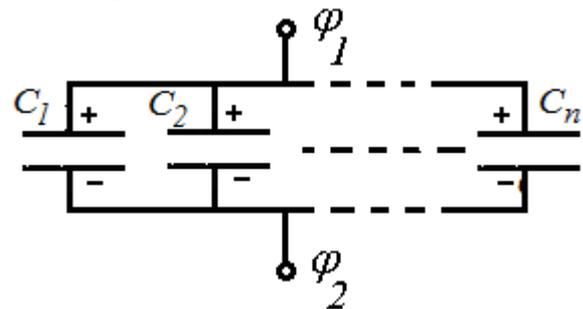


Рис. 48.1.

довательно соединенные конденсаторы будут заряжены одинаково. При этом батарее сообщен только заряд q .

Полная разность потенциалов на клеммах всей батареи $\varphi_1 - \varphi_n$ равна сумме разностей потенциалов между обкладками каждого из конденсаторов

$$\varphi_1 - \varphi_n = (\varphi_1 - \varphi_2) + (\varphi_2 - \varphi_3) + \dots + (\varphi_{n-1} - \varphi_n). \quad (48.3)$$

Согласно определению емкости

$$C_{\text{носл}} = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_n}.$$

Или

$$\frac{1}{C_{\text{носл}}} = \frac{\varphi_1 - \varphi_n}{q} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{q} + \frac{\varphi_2 - \varphi_3}{q} + \dots + \frac{\varphi_{n-1} - \varphi_n}{q} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n} \quad (48.4)$$

При последовательном соединении конденсаторов складываются обратные величины емкостей.

В частности, для двух последовательно соединенных конденсаторов

$$C_{\text{носл}} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}. \quad (48.5)$$

Пример 18.1. Два конденсатора, емкости которых $C_1 = 0,2$ мкФ и $C_2 = 0,4$ мкФ соединены последовательно и подключены к источнику напряжения $U = 300$ В. Определить заряды q_1 и q_2 и напряжения U_1 и U_2 на конденсаторах.

При последовательном соединении конденсаторы заряжаются одинаковым зарядом $q_1 = q_2 = q = \text{const}$. Поскольку емкости конденсаторов различны, то напряжения на каждом из них также различны, а полное напряжение

$$U = U_1 + U_2 \quad (\text{П. 48.1})$$

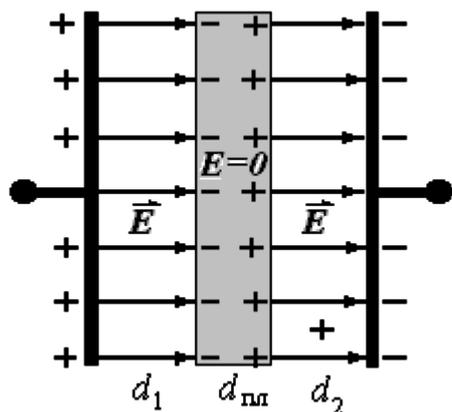
распределяется между конденсаторами соответственно их емкостям

$$U_1 = \frac{q}{C_1}; \quad U_2 = \frac{q}{C_2}.$$

Из этих равенств следует:

$$C_1 U_1 = C_2 U_2. \quad (\text{П. 48.2})$$

Решая систему уравнений (П. 48.1) и (П. 48.2), получим



$$U_1 = \frac{C_2}{C_1 + C_2} U = \frac{0,4}{0,2 + 0,4} 300 = 200 \text{ В}.$$

$$U_2 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} U = \frac{0,2}{0,2 + 0,4} 300 = 100 \text{ В}.$$

$$q_1 = q_2 = C_1 U_1 = C_2 U_2 = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} U = \frac{0,2 \cdot 0,4}{0,2 + 0,4} 10^{-6} \cdot 300 = 4 \cdot 10^{-5} \text{ Кл} = 40 \text{ мкКл}$$

Рис. П. 48.1

Пример 48.2. Плоский воздушный конденсатор был заряжен до разности потенциалов $U_0 = 300$ В и отключен от источника напряжения. Расстояние между обкладками конденсатора $d = 2$ см. После этого в конденсатор параллельно его обкладкам ввели проводящую пластину толщиной $d_{пл} = 1$ см, размеры которой равны размерам обкладок (рис. П. 48.1). Как изменятся емкость конденсатора и напряжение на нем?

При внесении незаряженного проводника в электрическое поле носители заряда начинают двигаться: положительные в направлении внешнего поля, отрицательные - в противоположную сторону. Вследствие этого на внешних поверхностях пластины возникают заряды противоположного знака, называемые индуцированными. Поле этих зарядов направлено противоположно внешнему полю. По принципу суперпозиции электрическое поле внутри пластины является суммой поля конденсатора и поля, создаваемого индуцированными зарядами.

Напряженность поля в любой точке внутри пластины становится равной нулю (условие равновесия зарядов). Все линии напряженности электрического поля в зазоре конденсатора разрываются, они заканчиваются на отрицательных индуцированных зарядах и вновь начинаются на положительных зарядах.

Потенциал внутри пластины является постоянным. Это позволяет рассматривать конденсатор с проводящей пластиной внутри как систему двух последовательно включенных конденсаторов C_1 и C_2 (рис. П. 48.2) ..

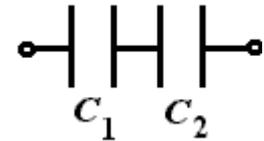


Рис. П. 48.2

а). Если толщина пластины $d_{пл}$ намного меньше, чем d , то $d \approx d_1 + d_2$, а емкости соответственно равны (для воздуха $\epsilon = 1$)

$$C_1 = \frac{\epsilon_0 S}{d_1}, \quad C_2 = \frac{\epsilon_0 S}{d_2}.$$

Общая емкость C определится из соотношения

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{d_1}{\epsilon_0 S} + \frac{d_2}{\epsilon_0 S} = \frac{d}{\epsilon_0 S} = \frac{1}{C_0},$$

где C_0 – емкость конденсатора без пластины. Таким образом, при любом положении *тонкой* пластины *емкость конденсатора не меняется*, $C = C_0$.

б) Если проводящая пластина имеет определенную толщину $d_{пл}$, то $d = d_1 + d_{пл} + d_2$. Общая емкость двух образовавшихся последовательно соединенных конденсаторов может быть найдена из соотношения

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{d_1}{\epsilon_0 S} + \frac{d_2}{\epsilon_0 S} = \frac{d - d_{пл}}{\epsilon_0 S}.$$

Откуда

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d - d_{пл}} > C_0.$$

Таким образом, *емкость возросла*. В то же время *заряд конденсатора*, отключенного от источника напряжения, *не меняется*.

$$q = C_0 U_0 = CU.$$

$$\text{Тогда } U = \frac{C_0}{C} U_0 = \frac{d - d_{пл}}{d} U_0 < U_0.$$

Следовательно, *напряжение уменьшилось*. $U = 150$ В.

Контрольные вопросы

1. Как распределяются заряды по поверхности уединенного заряженного сферического проводника? Проводника произвольной формы? Каким будет потенциал точек поверхности в этих двух случаях?
2. Будут ли одинаковыми потенциалы точек поверхности незаряженного проводника, помещенного в электрическое поле? Потенциалы точек внутри проводника?
3. Имеются два одинаково заряженных проводника, емкости которых различны. Будут ли перемещаться заряды, если привести проводники в контакт?
4. Имеются два заряженных проводника: у одного заряд меньше, но потенциал выше, чем у другого. Как будут перемещаться электрические заряды при соприкосновении этих проводников?
5. Почему емкость конденсатора, который состоит из двух проводников (A и B) больше, чем емкость каждого из уединенных проводников (A или B)? В чем преимущества конденсатора, состоящего из пары проводников?
6. Как изменится емкость плоского конденсатора, если в воздушный зазор между обкладками вдвинуть: очень тонкую металлическую пластину? Металлическую пластину конечной толщины?
7. Изменится ли напряжение между пластинами заряженного плоского конденсатора, если одну из них заземлить?
8. Зависит ли напряженность поля заряженного и отключенного от источника напряжения конденсатора от расстояния между его пластинами? Подключенного к источнику?
9. Как и почему изменятся емкость, напряженность электрического поля, напряжение, если поместить диэлектрик между обкладками заряженного конденсатора?
10. Между обкладками плоского конденсатора вдвигается пластина диэлектрика. Как изменятся характеристики конденсатора в двух случаях: 1) конденсатор заряжен и отключен от источника напряжения; 2) конденсатор не отключается от источника напряжения?

Глава 4. ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

§ 49. Энергия взаимодействия точечных электрических зарядов

Рассмотрим систему, состоящую из расположенных на расстоянии r друг от друга двух точечных зарядов q_1 и q_2 . Величина

$$W = q_1 \frac{q_2}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r} = q_1\varphi_1 \quad (49.1)$$

(через φ_1 обозначен потенциал поля заряда q_2 в той точке, где находится заряд q_1), как известно, равна потенциальной энергии первого заряда q_1 в поле второго заряда q_2 . Очевидно, что это выражение можно также записать в виде потенциальной энергии второго заряда в поле первого

$$W = q_2 \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{q_1}{r} = q_2\varphi_2. \quad (49.2)$$

Здесь φ_2 - потенциал поля заряда q_1 в точке, где находится заряд q_2 .

Чтобы подчеркнуть тот факт, что энергией обладает не каждый заряд в отдельности, а энергия принадлежит сразу двум зарядам, энергию W называют *энергией взаимодействия*. Следовательно, потенциальная энергия взаимодействия двух зарядов равна

$$W = q_1\varphi_1 = q_2\varphi_2.$$

Выражение для потенциальной энергии взаимодействия двух зарядов удобно записать в симметричном виде

$$W = \frac{1}{2}(q_1\varphi_1 + q_2\varphi_2). \quad (49.3)$$

В общем случае системы, состоящей из n зарядов, энергия их взаимодействия

$$W = \frac{1}{2}(q_1\varphi_1 + q_2\varphi_2 + \dots + q_n\varphi_n) = \frac{1}{2}\sum_i q_i\varphi_i, \quad (49.4)$$

где φ_i – потенциал, создаваемый в той точке, где находится заряд q_i , всеми зарядами, кроме q_i .

Для неподвижных зарядов энергия взаимодействия зарядов является энергией электрического поля.

§ 50. Энергия заряженного проводника и системы проводников. Энергия заряженного конденсатора

Рассмотрим уединенный проводник с зарядом q , потенциалом φ и емкостью C . Чтобы увеличить заряд этого проводника на dq , необходимо перенести из бесконечности на поверхность проводника дополнительный заряд dq , совершив против сил кулоновского отталкивания между одноименными зарядами работу

$$dA = (\varphi - \varphi_\infty) dq = \varphi dq = C \varphi d\varphi. \quad (50.1)$$

Чтобы зарядить проводник от нулевого потенциала до потенциала, равного φ , надо совершить полную работу

$$A = \int_0^\varphi C \varphi d\varphi = \frac{C\varphi^2}{2}. \quad (50.2)$$

В силу закона сохранения энергии увеличение потенциальной энергии проводника равно совершенной над ним работе, так что, полагая потенциальную энергию незаряженного проводника равной нулю, мы получаем для энергии заряженного уединенного проводника выражение

$$W = \frac{C\varphi^2}{2} = \frac{q\varphi}{2} = \frac{q^2}{2C}. \quad (50.3)$$

Формулу (50.3) можно получить иначе, рассматривая заряд q , находящийся на проводнике, как систему точечных зарядов q_i . Поверхность проводника является эквипотенциальной. Поэтому потенциал точек, в которых находятся точечные заряды q_i , одинаков и равен потенциалу φ проводника. Из формулы (49.4) для энергии взаимодействия зарядов получим для энергии заряженного проводника выражение

$$W = \frac{1}{2}\varphi\sum_i q_i = \frac{q\varphi}{2},$$

где $q = \sum_i q_i$ – заряд проводника.

Рассмотрим теперь систему k заряженных проводников. Поскольку все заряды на поверхности одного проводника имеют одинаковый потенциал, который равен потенциалу φ_k проводника, вместо суммы по всем точечным зарядам получим сумму по всем проводникам

$$W = \frac{1}{2} \sum_k Q_k \varphi_k. \quad (50.4)$$

Здесь W – энергия электростатического взаимодействия системы заряженных проводников, k – номер проводника, φ_k – потенциал k -го проводника, Q_k – полный заряд на k -м проводнике.

Применим формулу (50.4) для конденсатора. Конденсатор – это два проводника. Учитывая, что заряды обкладок равны по величине и противоположны по знаку, получим

$$W = \frac{1}{2} ((+q)\varphi_1 + (-q)\varphi_2) = \frac{1}{2} q(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{1}{2} qU, \quad (50.5)$$

где U – разность потенциалов между обкладками конденсатора.

Используя формулу (50.5) и принимая во внимание, что $q = CU$, получаем для электрической энергии заряженного конденсатора

$$W = \frac{qU}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{CU^2}{2}. \quad (50.6)$$

В случае плоского конденсатора напряженность поля внутри него не зависит от расстояния между пластинами. Это позволяет получить выражение для энергии заряженного конденсатора иначе.

Пусть пластины конденсатора, несущие равные и противоположные по знаку заряды, расположены на расстоянии d друг от друга. Так как разноименно заряженные пластины конденсатора притягиваются, дадим возможность одной из пластин перемещаться в направлении к другой пластине вплоть до их полного совмещения. При этом заряды пластин компенсируются, и конденсатор с запасенной в нем энергией исчезает. Очевидно, что работа действующей на пластину электрической силы равна первоначальному запасу энергии конденсатора.

Сила, действующая на пластину, равна произведению ее заряда q на напряженность однородного электрического поля, создаваемого покоящейся пластиной. Эта напряженность, как показано в § 36, равна половине полной напряженности E электрического поля внутри конденсатора. Поэтому работа, совершаемая за счет запасенной в конденсаторе энергии, равна

$$A = W = Fd = q \left(\frac{E}{2} \right) d = \frac{qU}{2},$$

где $U = Ed$ – напряжение между пластинами.

Пример 50.1. Конденсатор емкостью $C_1 = 2$ мкФ заряжают до напряжения $U_1 = 110$ В, после чего его замыкают на незаряженный конденсатор неизвестной емкости. Определить емкость второго конденсатора, если после замыкания на нем установилось напряжение $U_2 = 44$ В. Какое количество теплоты выделяется вследствие замыкания?

После замыкания образуется батарея из двух параллельно соединенных конденсаторов. Поэтому напряжение на каждом из них будет одинаковым U_2 . Заряд первого конденсатора до замыкания $q_1 = C_1 U_1$ распределяется между обоими конденсаторами

$$q_1 = q'_1 + q'_2; \quad q'_1 = C_1 U_2, \quad q'_2 = C_2 U_2, \text{ или } C_1 U_1 = C_1 U_2 + C_2 U_2, \text{ откуда } C_2 = C_1 \left(\frac{U_1}{U_2} - 1 \right).$$

Энергия до соединения $W = \frac{C_1 U_1^2}{2}$, после соединения $W' = \frac{(C_1 + C_2) U_2^2}{2}$. Отсюда

$$Q = W - W' = \frac{C_1 U_1 (U_1 - U_2)}{2}.$$

Подставляя числа, находим $C_1 = 3 \text{ мкФ}$, $Q = 7,26 \text{ мДж}$

Пример 50.2. Емкость плоского конденсатора $C_0 = 200 \text{ пФ}$. Диэлектрик – стекло ($\varepsilon = 7$). Конденсатор зарядили до разности потенциалов $U_0 = 700 \text{ В}$ и отключили от источника напряжения. Какую работу нужно совершить, чтобы вынуть стеклянную пластину из конденсатора?

Начальная энергия поля в конденсаторе $W_0 = \frac{C_0 U_0^2}{2}$. После удаления пластины емкость конденса-

тора уменьшится в ε раз и станет равной $C_1 = \frac{C_0}{\varepsilon}$. При этом энергия поля в конденсаторе станет равной

$$W_1 = \frac{q^2}{2C_1}, \text{ где } q = C_0 U_0 - \text{заряд на обкладках, который не меняется, т.к. конденсатор отключен от источника напряжения.}$$

Тогда $W_1 = \frac{C_0^2 U_0^2}{2C_1} = \frac{\varepsilon C_0 U_0^2}{2}$. Таким образом, энергия конденсатора увеличилась в ε раз. На

удаление пластины внешние силы совершили работу

$$A = W_1 - W_0 = \frac{(\varepsilon - 1) C_0 U_0^2}{2} = \frac{(7 - 1) \cdot 200 \cdot 10^{-12} \cdot (700)^2}{2} = 294 \text{ (мкДж)}.$$

§ 51. Плотность энергии электростатического поля

Энергию заряженного конденсатора можно трактовать либо как потенциальную энергию взаимодействия зарядов на его обкладках, либо как энергию создаваемого этими зарядами электрического поля, заключенного в пространстве между обкладками. Электростатическое поле неотделимо от создающих его неподвижных зарядов. Поэтому, оставаясь в рамках электростатики, нельзя ответить на вопрос – что является носителем энергии – заряды или поле?

Физическими экспериментами было показано, что переменные во времени электрические и магнитные поля могут существовать обособленно, независимо от возбудивших их зарядов и распространяются в пространстве в виде электромагнитных волн. Такие волны способны переносить энергию, что подтверждает вывод о том, что *носителем энергии является поле*.

Соответственно и электростатическое поле обладает энергией. Назовем величину

$$w = \frac{W}{V}, \tag{51.1}$$

равную энергии однородного электростатического поля, приходящейся на единицу занимаемого им объема, **объемной плотностью энергии** электростатического поля.

Для того чтобы определить, чему равна плотность энергии электростатического поля, рассмотрим плоский конденсатор. С учетом того, что емкость плоского конденсатора

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d},$$

а разность потенциалов между его обкладками

$$U = Ed,$$

где E - напряженность поля между обкладками, выражение (50.6) для энергии заряженного конденсатора можно представить в виде

$$W = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d} (Ed)^2 = \frac{1}{2} \varepsilon\varepsilon_0 E^2 Sd = \frac{1}{2} \varepsilon\varepsilon_0 E^2 V. \quad (51.2)$$

Таким образом, энергия электростатического поля конденсатора прямо пропорциональна объему, заключенному между его обкладками, и энергия электрического поля распределена в пространстве с плотностью

$$w = \frac{W}{V} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}. \quad (51.3)$$

Можно показать, что это выражение справедливо не только для поля конденсатора, но и в общем случае произвольного электрического поля.

Пример 51.1. Площадь обкладок плоского воздушного конденсатора равна $S = 100\text{см}^2$, расстояние между ними $d = 2$ мм. Какая разность потенциалов была приложена между обкладками, если при разряде конденсатора выделилось количество теплоты, равное $Q = 90$ мкДж.

Выделившееся количество теплоты равно энергии электростатического поля заряженного конденсатора

$$Q = W = wV = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} Sd$$

Откуда
$$E = \sqrt{\frac{2Q}{\varepsilon_0 \varepsilon Sd}},$$

и разность потенциалов
$$U = Ed = \sqrt{\frac{2Qd}{\varepsilon_0 \varepsilon S}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9 \cdot 10^{-5} \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{-2}}} \approx 2 \cdot 10^3 \text{ В}.$$

Пример 51.2. Определить силу притяжения пластин заряженного плоского конденсатора. Площадь пластин S , заряд на каждой пластине q . Конденсатор заряжен и отключен от источника электрической энергии.

При сближении пластин на расстояние Δd сила притяжения F выполняет работу

$$\Delta A = F \cdot \Delta d.$$

Вследствие сближения пластин конденсатора объем его поля уменьшается. Объемная плотность энергии поля $w = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}$ при этом не изменяется, т.к. напряженность поля E не зависит от расстояния между обкладками, а зависит только от плотности зарядов на обкладках. Следовательно, энергия поля конденсатора уменьшается на величину

$$\Delta W = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} S \Delta d.$$

Из закона сохранения энергии вытекает, что $\Delta A = \Delta W$, или

$$F \Delta d = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} S \Delta d,$$

откуда $F = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} S$. Подставляя значение напряженности электрического поля плоского конденсатора

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon\varepsilon_0 S},$$

получим

$$F = \frac{q^2}{2\varepsilon\varepsilon_0 S}. \quad (\text{П. 51.1})$$

Контрольные вопросы

1. Чему равна максимальная потенциальная энергия системы притягивающихся зарядов?
2. Где локализована энергия заряженного конденсатора?
3. В каком случае запасается большая энергия при подключении батареи конденсаторов к источнику напряжения: а) при их последовательном соединении; б) при их параллельном соединении?
4. В поле заряженного конденсатора попадает заряженная частица. Ее кинетическая энергия в поле изменяется. За счет какой энергии выполняется работа?
5. При соединении заряженного конденсатора с незаряженным энергия системы убывает. Она расходуется на образование искры, нагревание проводников и т.д. От чего зависят потери энергии? Могут ли потери энергии быть равными нулю, если, например, использовать сверхпроводники?
6. Чему равна энергия поля заряженного проводника?
7. Что происходит с энергией плоского конденсатора, который был заряжен и отключен от источника напряжения, при раздвижении его пластин?
8. Как изменится энергия заряженного и отключенного плоского воздушного конденсатора, если между его обкладками вставить диэлектрическую пластину? Если энергия изменится, то кто выполняет работу?
9. Какова размерность плотности энергии электрического поля?

Глава 5. ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

§ 52. Постоянный электрический ток, его характеристики и условия существования

Электрическим током называется упорядоченное движение электрических зарядов. Носителями тока могут быть электроны, а также положительные и отрицательные ионы.

Упорядоченное движение свободных электрических зарядов, происходящее в проводнике, называется током *проводимости* (ток в металлах, в электролитах, в газах). Упорядоченное движение зарядов при движении в пространстве заряженного тела, называется *конвекционным* током.

Силой тока называется скалярная величина, равная заряду, проходящему за одну секунду через любое поперечное сечение проводника. Если за время dt через сечение проводника переносится заряд dq , то сила тока

$$I = \frac{dq}{dt}. \quad (52.1)$$

Таким образом, сила тока определяется как скорость переноса заряда через рассматриваемое сечение проводника.

За направление электрического тока по традиции принимается направление, в котором перемещаются положительные заряды. Точнее, перемещались бы, поскольку электропроводность большинства проводников (металлов, полупроводников, плазмы) обусловлена движением отрицательно заряженных свободных электронов (рис. 52.1).

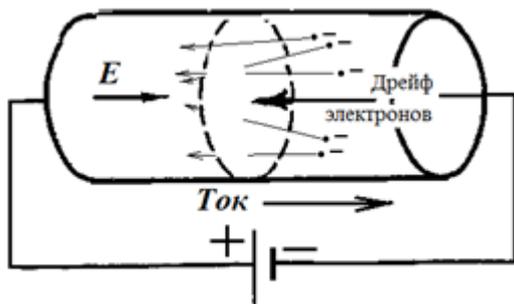


Рис. 52.1.

Если сила и направление тока не меняются со временем, ток называется *постоянным*. Для постоянного тока, очевидно, справедливо соотношение

$$I = \frac{q}{t} \quad (52.2)$$

Единицей силы тока в системе СИ является ампер (А). Ампер входит в число основных единиц системы СИ и вводится на основе магнитного взаимодействия токов.

При силе постоянного тока, равной 1 А, через сечение проводника за 1 с переносится заряд, равный 1 Кл.

Ток может быть неравномерно распределен по сечению проводника (например, переменный ток высокой частоты почти не проникает вглубь проводника), так что необходимо ввести величину, характеризующую распределение силы тока по сечению проводника. Это вектор плотности тока \mathbf{j} .

Плотность тока \mathbf{j} определяется зарядом, проходящим за единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную направлению упорядоченного движения зарядов. Модуль плотности тока

$$j = \frac{dI}{dS_{\perp}}, \quad (52.3)$$

а направление вектора j совпадает с направлением скорости упорядоченного движения положительных зарядов.

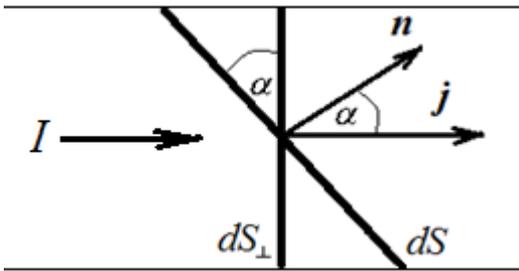


Рис. 52.2.

Если малый элемент площадью dS расположен так, что нормаль n к ней составляет с вектором j угол α , то сила тока через площадку dS_{\perp} согласно (52.3) равна

$$dI = j dS_{\perp}.$$

Как видно из рис. 52.2:

$$dS_{\perp} = dS \cos \alpha.$$

Поэтому

$$dI = j dS_{\perp} = j dS \cos \alpha = j_n dS,$$

где $j_n = j \cos \alpha$ – проекция вектора j на нормаль n .

Таким образом, через площадку dS течет такой же ток, как и через площадку dS_{\perp} . Сила тока через произвольную поверхность S получается суммированием по всем элементам:

$$I = \int_{(s)} j_n dS \quad (52.4)$$

Если сечение проводника перпендикулярно вектору плотности тока, плотность тока одинакова по всему сечению, а направление нормали совпадает с направлением движения положительных зарядов, то сила тока

$$I = j \cdot S$$

Пусть в единице объема проводника содержится n носителей тока, заряд каждого из которых q . Обозначим скорость упорядоченного движения носителей тока через u (рис. 52.4). Через единичную поверхность пройдут за секунду только те носители, которые в начале этой секунды находились внутри цилиндра с основанием единичной площади и высотой (длиной боковой поверхности), численно равной скорости направленного движения u . Объем цилиндра равен u , количество носителей – nu , а суммарный заряд – nqu . Следовательно, для плотности тока получается формула

$$j = nqu \quad (52.5)$$

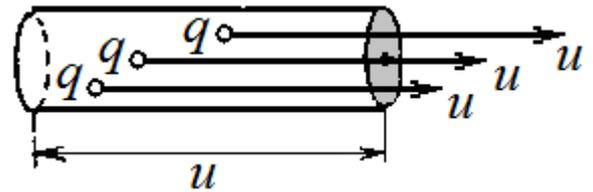


Рис. 52.4.

Если электрический ток создается одновременно как положительными, так и отрицательными носителями, полная плотность тока равна векторной сумме вкладов отдельных сортов носителей.

Как следует из выражения (52.3), плотность тока в системе СИ измеряется в амперах на квадратный метр (A/m^2). В технике используется измерение плотности тока в амперах на квадратный миллиметр (A/mm^2).

Для появления и существования электрического тока проводимости должны выполняться два условия.

1. В рассматриваемой среде должны существовать *носители тока* – способные свободно перемещаться заряженные частицы. Такими носителями тока в металлах являются свободные электроны, в полупроводниках – электроны проводимости и дырки, в электролитах – положительные и отрицательные ионы, в газах – противоположно заряженные ионы и электроны.

2. В рассматриваемой среде должно существовать *электрическое поле*, энергия которого затрачивается на перемещение электрических зарядов. Для существования постоянного тока энергия поля должна все время пополняться, то есть необходим *источник энергии* электрического поля.

§ 53. Сторонние силы, ЭДС и напряжение

Пусть на концах проводника AB (рис 53.1) создана разность потенциалов $\varphi_A - \varphi_B$, которая создает внутри него электрическое поле E , направленное в сторону падения потенциала. Для удобства рассуждений будем предполагать, что носителями тока являются положительные заряды. В реальности в металлических проводниках ток проводимости создается движением электронов, что, однако, не меняет сути рассуждений.

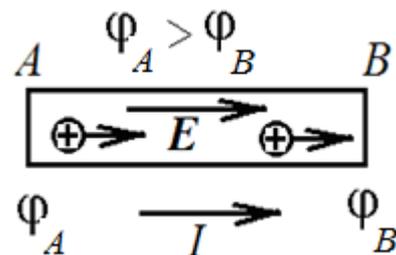


Рис. 53.1.

В течение очень короткого времени будет происходить перемещение зарядов от A к B до тех пор, пока в проводнике не установится одинаковый потенциал; при этом напряженность электрического поля внутри проводника станет равной нулю, и ток I прекратится. Таким образом, проводник, в котором действуют только электростатические силы, со временем переходит в равновесное состояние.

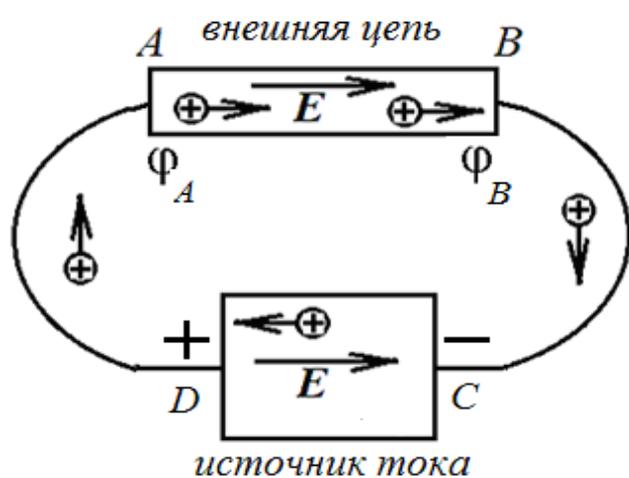


Рис. 53.2.

Для того чтобы поддерживать ток длительное время, нужно от конца проводника B с меньшим потенциалом φ_B непрерывно отводить приносимые сюда током заряды, а к концу A с большим потенциалом φ_A непрерывно их подводить (рис. 53.2). Иными словами, необходимо осуществить круговорот зарядов, при котором они двигались бы по замкнутому пути.

В замкнутой цепи наряду с участком AB , на котором положительные заряды движутся в сторону убывания потенциала φ , должен иметься уча-

сток, на котором перенос положительных зарядов происходит в направлении возрастания φ , т.е. против сил электростатического поля с напряженностью E , существующего между полюсами источника (часть цепи CD на рис. 53.2).

Перемещение носителей тока на участке CD (против поля E) возможно лишь с помощью сил неэлектростатического (не кулоновского) происхождения, называемых *сторонними силами*.

Устройство, создающее и поддерживающее разность потенциалов $\Delta\varphi = \varphi_A - \varphi_B$ на концах проводника за счет работы сторонних сил, называется *источником тока*.

Источник тока замыкает электрическую цепь, по которой осуществляется непрерывное движение зарядов. Ток течет по внешней части цепи – по проводнику и по внутренней – источнику тока. Источник тока имеет два полюса (рис. 53.2): положительный, с более высоким потенциалом, и отрицательный, с более низким потенциалом. При разомкнутой внешней цепи на отрицательном полюсе образуется избыток электронов, а на положительном – недостаток.

Во внешней цепи ток течет от положительного полюса к отрицательному, а внутри источника тока – от отрицательного полюса к положительному. Внутри источника тока сторонние силы направлены против электрических сил.

Таким образом, **источник тока** должен обеспечивать кругообразное движение носителей тока, подобно тому, как насос обеспечивает циркуляцию жидкости в какой-нибудь замкнутой системе.

Происхождение сторонних сил может быть различным. Сторонние силы приводят в движение заряженные частицы внутри генераторов, гальванических элементов, аккумуляторов. В генераторах сторонние силы — это либо силы, действующие на электроны проводимости со стороны вихревого электрического поля, возникающего при изменении магнитного поля со временем, либо лоренцевы силы, действующие со стороны магнитного поля на электроны в движущемся проводнике; в гальванических элементах и аккумуляторах — это химические силы и т. д.

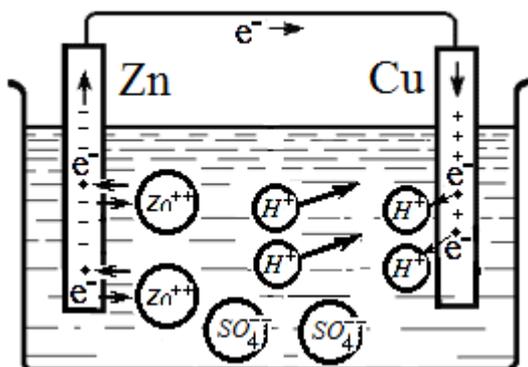


Рис. П. 53.1.

Пример 53.1. Рассмотрим механизм возникновения ЭДС в простейшем химическом источнике тока – элементе Вольта (рис. П. 53.1). В водный раствор серной кислоты опускают две металлических пластины: из цинка Zn и меди Cu. При растворении цинка в электролит переходят положительно заряженные ионы цинка Zn^{++} . В цинковой пластине остаются избыточные электроны. Молекула серной кислоты в воде распадается на два иона H^+ и один ион SO_4^{--} :



Положительно заряженные ионы цинка Zn^{++} , переходя в раствор, отталкивают положительные ионы водорода H^+ и оттесняют их к медной пластине. Здесь каждый водородный ион H^+ отнимает у медной пластины электрон, превращаясь в нейтральный атом. Атом водорода, соединяясь с другим таким же атомом, образует молекулу газообразного водорода H_2 . Поскольку медная пластина теряет электроны, она заряжается положительно. (Отметим, что на медной пластине происходят подобные реакции, однако цинковая пластина растворяется быстрее медной).

В результате между цинковой и медной пластинами возникает разность потенциалов 1,1 В. Если замкнуть цепь, образующиеся свободные электроны будут переходить по внешней цепи к положительному электроду. В цепи потечет постоянный ток, источником энергии для которого будут химические реакции.

В результате между цинковой и медной пластинами возникает разность потенциалов 1,1 В. Если замкнуть цепь, образующиеся свободные электроны будут переходить по внешней цепи к положительному электроду. В цепи потечет постоянный ток, источником энергии для которого будут химические реакции.

Перемещая электрические заряды, сторонние силы совершают работу за счет энергии, затрачиваемой в источнике тока. Величина, численно равная работе сторонних сил над единичным положительным зарядом, называется **электродвижущей силой** (ЭДС) ε , действующей в замкнутой цепи или на ее участке. Следовательно, если работа сторонних сил над зарядом q равна $A_{ст}$, то

$$\varepsilon = \frac{A_{cm}}{q} \quad (53.1)$$

Из сопоставления этой формулы с формулой работы сил поля над зарядом ($A = q(\varphi_1 - \varphi_2)$) вытекает, что размерность ЭДС совпадает с размерностью потенциала. Измеряется ЭДС в тех же единицах, что и потенциал, т. е. в вольтах (В).

По аналогии с напряжённостью электрического поля введем понятие *напряжённость поля сторонних сил* \mathbf{E}^{ct} , под которой будем понимать векторную величину, равную отношению сторонней силы \mathbf{F}^{ct} , действующей на электрический заряд q , к величине этого заряда.

$$\mathbf{E}^{cm} = \frac{\mathbf{F}^{cm}}{q} \quad (53.2)$$

Стороннюю силу, действующую на заряд q , можно представить в виде произведения заряда на напряжённость поля сторонних сил \mathbf{E}^{cm} :

$$\mathbf{F}^{cm} = q \mathbf{E}^{cm} \quad (53.3)$$

Тогда работа сторонних сил на участке 1—2 цепи будет равна сумме элементарных работ, т.е. криволинейному интегралу вдоль участка цепи 1—2

$$A^{cm} = \int_{12} F_l^{cm} dl = q \int_{12} E_l^{cm} dl \quad (53.4)$$

Здесь F_l^{ct} и E_l^{cm} — проекции векторов сторонней силы и напряжённости поля сторонних сил на направление элементарного перемещения dl . Соответственно, ЭДС, действующая на участке 1—2 цепи

$$\varepsilon_{12} = \int_{12} E_l^{cm} dl. \quad (53.5)$$

ЭДС, действующая в замкнутой цепи, определяется криволинейным интегралом по замкнутому пути L

$$\varepsilon = \oint_L E_l^{cm} dl \quad (53.6)$$

Интеграл (53.6) называется *циркуляцией напряженности* по замкнутому контуру L . Таким образом, ЭДС, действующая в замкнутой цепи, равна циркуляции вектора напряженности поля сторонних сил.

Кроме сторонних сил, на носители тока действуют также кулоновские силы электростатического поля. Внутри проводника с током напряжённость \mathbf{E} электрического поля по принципу суперпозиции равна

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^{кул} + \mathbf{E}^{ct}, \quad (53.7)$$

где, соответственно, $\mathbf{E}^{кул}$ и \mathbf{E}^{ct} — напряжённости электростатического поля кулоновских сил и поля сторонних сил.

Следовательно, результирующая сила, действующая в каждой точке цепи на заряд q , равна

$$\mathbf{F} = q (\mathbf{E}^{кул} + \mathbf{E}^{ct}) \quad (53.8)$$

Работа, совершаемая результирующей силой над зарядом q на участке 1—2 цепи, определяется выражением

$$A_{12} = \int_{12} E_l^{кул} dl + \int_{12} E_l^{cm} dl = q(\varphi_1 - \varphi_2) + q\varepsilon_{12} \quad (53.9)$$

Величина, численно равная работе, совершаемой как электростатическими, так и сторонними силами при перемещении вдоль цепи из точки 1 в точку 2 единичного положительного заряда называется **напряжением** U на данном участке цепи. Согласно формуле (53.9)

$$U_{12} = (\varphi_1 - \varphi_2) + \varepsilon_{12} \quad (53.10)$$

Участок цепи, на котором не действуют сторонние силы, называется *однородным*. Участок, на котором действуют сторонние силы, называется *неоднородным*. Для однородного участка

$$U_{12} = (\varphi_1 - \varphi_2) \quad (53.11)$$

т. е. напряжение совпадает с разностью потенциалов на концах участка цепи.

§ 54. Закон Ома для однородного участка цепи. Электрическое сопротивление проводника

Рассмотри однородный участок цепи, т.е. участок, не содержащий ЭДС, потенциалы концов которого равны соответственно φ_1 и φ_2 (рис. 54.1).

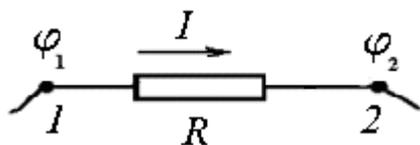


Рис. 54.1.

Согласно закону, экспериментально установленному немецким физиком Г.Омом, **сила тока, текущего по однородному металлическому проводнику, пропорциональна напряжению U на концах проводника:**

$$I = \frac{1}{R}U = \frac{1}{R}(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (54.1)$$

Величина R в формуле закона Ома называется *электрическим сопротивлением проводника*. Единицей сопротивления служит ом (Ом), равный сопротивлению такого проводника, в котором при напряжении в 1 В течет ток силой 1 А.

Электрическое сопротивление зависит от размеров и формы проводника, а также от свойств материала, из которого он сделан. Для однородного проводника с постоянным сечением

$$R = \rho \frac{l}{S}, \quad (54.2)$$

где l - длина проводника, S - площадь его поперечного сечения, ρ - зависящий от свойств материала коэффициент, называемый *удельным электрическим сопротивлением вещества*. Удельное сопротивление ρ - это сопротивление проводника длиной $l = 1$ м и площадью поперечного сечения $S = 1$ м². Измеряется ρ в ом·метрах (Ом·м).

Выделим мысленно в проводнике элементарный цилиндрический объем с образующими, параллельными векторам \mathbf{j} и \mathbf{E} (рис. 54.2).

Согласно формуле (54.2) сопротивление цилиндра равно $\rho dl/dS$. Через поперечное сечение цилиндра течет ток силы $\mathbf{j} dS$. Напряже-

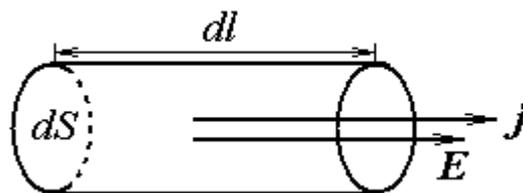


Рис. 54.2.

ние, приложенное к цилиндру, равно $E dl$. Подстановка этих значений в формулу (54.1) дает, что

$$j dS = \frac{dS}{\rho dl} E dl$$

откуда

$$j = \frac{1}{\rho} E \quad (54.3)$$

Поскольку дрейфовая скорость носителей тока создается электрическим полем, имеет место пропорциональность $\mathbf{u} \sim \mathbf{E}$, так что и плотность тока будет пропорциональна вектору напряженности.

Векторы \mathbf{j} и \mathbf{E} имеют одинаковое направление. Поэтому можно написать

$$\mathbf{j} = \frac{1}{\rho} \mathbf{E} = \sigma \mathbf{E}. \quad (54.4)$$

Эта формула выражает **закон Ома в дифференциальной форме**. Он связывает в каждой точке проводника плотность тока с напряженностью электрического поля. *Плотность тока в данной точке проводника прямо пропорциональна напряженности электрического поля в этой точке.*

Обратная удельному сопротивлению ρ величина $\sigma = 1/\rho$ называется *удельной электрической проводимостью (электропроводностью)* вещества. Единица, обратная Ом \cdot м, называется сименсом (См). Следовательно, единицей электропроводности σ является сименс на метр (См/м).

Остановимся на механизме осуществления постоянного тока. Как известно из электростатики (см. § 44), при равновесии зарядов поле неподвижных зарядов внутри проводника равно нулю, а у его поверхности вектор \mathbf{E} напряженности поля направлен по нормали к поверхности. Наличие тока в проводнике означает, что вдоль проводника потенциал электрического поля изменяется. Следовательно, в проводниках при наличии тока электрическое поле не равно нулю, оно существует и внутри проводника с током. На поверхности проводника существует тангенциальная составляющая напряженности электрического поля. Чем же создается это поле?

Роль источника тока состоит в том, чтобы разделять положительные и отрицательные заряды. После разделения заряды перемещаются на полюса источника и по закону Кулона действуют на заряды проводника вблизи полюсов, которые в свою очередь действуют на другие заряды и т. д. На место уходящих зарядов непрерывно поступают новые.

В результате этих коллективных взаимодействий *в цепи на поверхности проводников возникает такое распределение движущихся зарядов, которое обеспечивает существование внутри проводников электрического поля.*

Таким образом, источниками электрического поля, которое существует в проводнике и обеспечивает наличие постоянного тока, являются *поверхностные заряды*. Они распределяются на поверхности проводников под действием зарядов на полюсах источника тока.

Поскольку взаимодействие между зарядами осуществляется посредством электромагнитных сил, процесс образования постоянного тока в цепи после ее

замыкания, характеризуется скоростью распространения электромагнитных волн, зависящей от распределения емкостей, индуктивностей и других характеристик цепи. В свободном пространстве скорость распространения электромагнитных взаимодействий равна скорости света.

Опыт показывает, что удельное сопротивление, а следовательно, и сопротивление металлов, зависит от температуры, линейно увеличиваясь для большинства металлов с ее ростом.

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 (1 + \alpha t), \\ R &= R_0 (1 + \alpha t), \end{aligned} \quad (54.5)$$

где ρ_0, ρ - удельные сопротивления вещества проводника соответственно при 0°C и $t^\circ\text{C}$; R_0, R — сопротивления проводника при 0°C и $t^\circ\text{C}$, α — термический коэффициент сопротивления, показывающий как меняется сопротивление проводника при изменении температуры на 1 градус.

Для чистых металлов при не очень низких температурах $\alpha \approx (1/273) \text{ K}^{-1}$, т.е. можно записать

$$R = \alpha R_0 T \quad (54.6)$$

Температурная зависимость сопротивления проводника объясняется тем, что при повышении температуры возрастает интенсивность рассеивания (число столкновений) свободных электронов на ионах кристаллической решетки.

Зависимость сопротивления металлов от температуры используют в *термометрах сопротивления*. Обычно в качестве термометрического тела такого термометра берут платиновую проволоку, зависимость сопротивления которой от температуры достаточно изучена. Об изменениях температуры судят по изменению сопротивления проволоки, которое можно измерить. Такие термометры позволяют измерять очень низкие и очень высокие температуры, когда обычные жидкостные термометры непригодны.

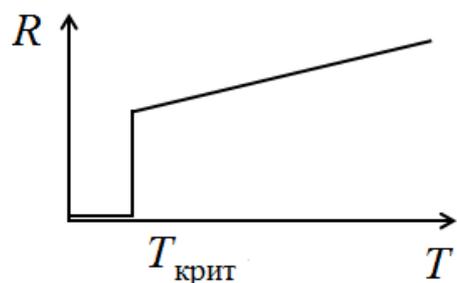


Рис.54.3

При определенных температурах (0,012 - 20 К), называемых «критическими», и при значениях напряженности магнитного поля (внешнего или сопутствующего току), меньшего определенного «критического» значения, сопротивление некоторых металлов скачком уменьшается практически до нуля (рис. 54.3) и металл переходит в сверхпроводящее состояние. Впервые в 1911 г. это обнаружил Г. Камерлинг-Оннес для ртути.

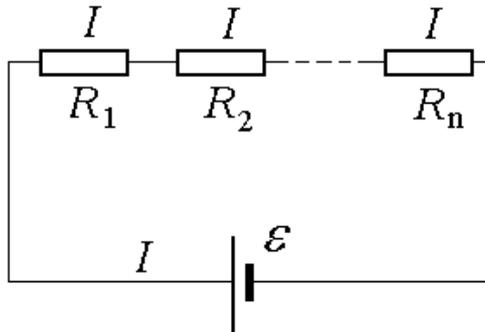
Сверхпроводимость характеризуется не только почти полным исчезновением электрического сопротивления образца, но и одновременным изменением его магнитных и тепловых свойств. Вследствие отсутствия сопротивления в сверхпроводниках можно получать очень большие токи без выделения теплоты.

В настоящее время сверхпроводимость обнаружена у многих металлов, сплавов и соединений. Разработаны керамики, переходящие в сверхпроводящее состояние при температурах превышающих 100 К, так называемые высокотемпературные сверхпроводники.

§ 55. Последовательное и параллельное соединение проводников

При *последовательном соединении* (рис. 55.1) согласно закону сохранения заряда через сопротивления проходит за одно и то же время одинаковый заряд. Поэтому сила тока во всех сопротивлениях одинакова

$$I_1 = I_2 = \dots = I_n = I \quad (55.1)$$



Сумма падений напряжения на всех сопротивлениях равна напряжению на концах цепи:

$$U_1 + U_2 + \dots + U_n = (\varphi_1 - \varphi_2) + (\varphi_2 - \varphi_3) + \dots + (\varphi_{n-1} - \varphi_n) = \varphi_1 - \varphi_n = U. \quad (55.2)$$

Для каждого из напряжений по закону Ома можно записать

Рис. 55.1.

$$U_1 = I_1 R_1, \quad U_2 = I_2 R_2, \quad \dots, \quad U_n = I_n R_n. \quad (55.3)$$

Тогда

$$U = I_1 R_1 + I_2 R_2 + \dots + I_n R_n = I (R_1 + R_2 + \dots + R_n) \quad (55.4)$$

С другой стороны, $U = I R_{\text{посл}}$.

Следовательно, *при последовательном соединении полное сопротивление цепи равно сумме отдельных сопротивлений,*

$$R_{\text{посл}} = \sum_{i=1}^n R_i, \quad (55.5)$$

а падение напряжения на них пропорционально этим сопротивлениям.

При *параллельном соединении* (рис. 55.2) напряжение на участке AB будет одинаково для всех сопротивлений

$$U_1 = U_2 = U_3 = \dots = U_n \quad (55.6)$$

Из закона сохранения заряда следует, что сила тока на входе и на выходе равна сумме сил токов в отдельных ветвях параллельной цепи

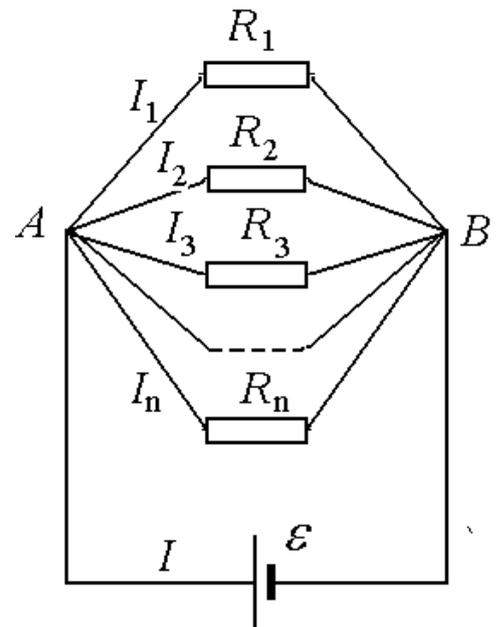


Рис.55.2.

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + \dots + I_n =$$

$$= \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \frac{U}{R_3} + \dots + \frac{U}{R_n} = U \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots + \frac{1}{R_n} \right) \quad (55.7)$$

С другой стороны, для всего участка справедливо соотношение

$$I = \frac{U}{R_{\text{паралл}}},$$

где $R_{\text{паралл}}$ – общее сопротивление цепи при параллельном соединении. Сравнивая обе формулы, получаем

$$\frac{1}{R_{\text{паралл}}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}, \dots \dots \dots (55.8)$$

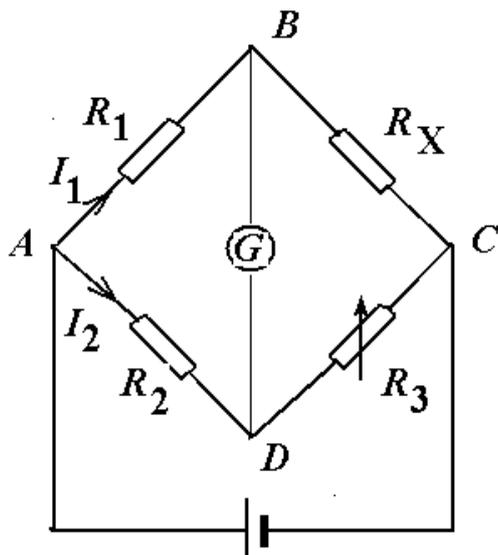


Рис. П. 55.1

При параллельном соединении проводников величина, обратная общему сопротивлению цепи, равна сумме величин, обратных сопротивлениям параллельно включенных проводников.

При этом ток в отдельных сопротивлениях обратно пропорционален этим сопротивлениям.

Пример 55.1. Мост Уитстона. Для точного измерения сопротивлений используются методы сравнения сопротивлений, не требующие измерений тока и напряжения, в основу которых положена мостовая схема Уитстона (рис. П 55.1).

Мост состоит из четырех сопротивлений R_1, R_2, R_3, R_X , одно из которых R_X неизвестно и которое необходимо измерить.

На одну из диагоналей моста AC подается напряжение от источника питания, в другую диагональ BD включен нулевой индикатор G (чувствительный гальванометр).

Регулируя сопротивление одного из плеч R_3 , добиваются равновесия моста, при котором ток в диагонали с нулевым индикатором равен нулю.

Пусть в уравновешенном мосту через сопротивления R_1 и R_X проходит одинаковый ток I_1 , а через R_2 и R_3 – тоже одинаковый ток I_2 . Так как разность потенциалов между точками B и D равна нулю, то напряжения на сопротивлениях R_1 и R_2 являются одинаковыми,

$$I_1 R_1 = I_2 R_2 \tag{П.55.1}$$

и напряжения на сопротивлениях R_X и R_3 являются также одинаковыми:

$$I_1 R_X = I_2 R_3 \tag{П.55.2}$$

Разделив равенства (П.55.1) и (П.55.2) друг на друга, получаем

$$\frac{R_1}{R_X} = \frac{R_2}{R_3}.$$

Отсюда

$$R_X = R_3 \frac{R_1}{R_2} \tag{П.55.3}$$

Зная значение R_3 и отношение сопротивлений R_1 и R_2 , соответствующие условию равновесия, можно вычислить R_X .

Для удобства уравновешивания моста и упрощения вычислений по формуле (П.55.3) отношение (R_1/R_2) фиксируют и заранее точно измеряют (например, 0,001; 0,01; 0,1; 1; 10; 100; 1000). Балансировку моста осуществляют с помощью только одного переменного сопротивления R_3 (обычно используют магазины сопротивлений). Промышленные мосты постоянного тока позволяют измерять сопротивления от 10^{-6} до 10^{14} Ом с очень высокой точностью.

§ 56. Работа, мощность и тепловое действие тока. Закон Джоуля – Ленца

При прохождении тока, т.е. при упорядоченном перемещении зарядов **кулоновские и сторонние силы** выполняют работу. Эту работу называют *работой электрического тока*.

Определим работу тока в случае **однородного участка** цепи, т.е. участка, **не содержащего ЭДС** (рис. 54.1)

По определению напряжение U между двумя точками проводника в случае однородного участка цепи численно равно работе кулоновских сил по перемещению единицы заряда вдоль проводника между этими точками. Тогда при перенесении заряда $dq = I dt$ выполняется **элементарная работа электрического тока**

$$dA = dq U = IU dt.$$

При постоянном токе силой I за конечный промежуток времени t работа электрического тока

$$A = IU \int_0^t dt = IU t = I^2 R t = \frac{U^2}{R} t. \quad (56.1)$$

Мощность тока определяется работой, совершаемой за единицу времени:

$$P = \frac{dA}{dt} = IU = I^2 R = \frac{U^2}{R} \quad (56.2)$$

Сталкиваясь с ионами кристаллической решетки металла, носители тока – электроны – передают им свою энергию, которую получают от поля. Поэтому работа поля над зарядами переходит в энергию теплового движения ионов металла, т.е. происходит нагревание проводника. Если ток проходит по неподвижному металлическому проводнику, и в нем не происходит химических превращений, то по закону сохранения энергии количество выделившейся теплоты Q равно работе тока A :

$$Q = IU t = I^2 R t = \frac{U^2}{R} t. \quad (56.3)$$

Эта формула выражает **закон Джоуля – Ленца**, который был установлен Дж. Джоулем и независимо от него Э.Х. Ленцем **опытным путем**: *количество теплоты, которое выделяется в проводнике, прямо пропорционально квадрату силы тока, сопротивлению проводника и времени прохождения тока*.

Если сила тока изменяется со временем, т.е. $I = I(t)$, то количество теплоты, выделившееся за время t , вычисляется по формуле

$$Q = \int_0^t I^2 R dt. \quad (56.4)$$

Работа и мощность электрического тока измеряется в тех же единицах, что и механическая работа, т.е. в СИ в джоулях:

$$\begin{aligned} 1 \text{ Дж} &= 1 \text{ В} \cdot 1 \text{ А} \cdot 1 \text{ с}, \\ 1 \text{ Вт} &= 1 \text{ Дж/с} = 1 \text{ В} \cdot 1 \text{ А}. \end{aligned}$$

Часто используются кратные единицы: 1 кВт (киловатт) = 10^3 Вт, 1 МВт (мегаватт) = 10^6 Вт. Для работы используется внесистемная единица 1 кВт·ч (киловатт-час) – работа, совершаемая за 1 час при развиваемой мощности 1 кВт. 1 кВт·ч = 3,6 МДж.

Формула (56.3) выражает суммарное количество теплоты, которое выделилось в проводнике сопротивлением R . Эта теплота выделяется по всему объему проводника. Найдем количество теплоты, выделяемое в единице объема. Для этого снова рассмотрим участок однородного проводника в виде цилиндра длиной dl и неизменного поперечного сечения dS (рис. 54.2). Согласно закону Джоуля – Ленца за время dt в этом объеме выделится теплота

$$dQ = I^2 R dt = (jdS)^2 \frac{\rho dl}{dS} dt = \rho j^2 dV dt, \quad (56.5)$$

где $dV = dS dl$ – величина элементарного объема. Разделив последнее выражение на $dV dt$, найдем количество теплоты, выделившееся в единице объема в единицу времени (*плотность тепловой мощности*)

$$w = \rho j^2 \quad (56.6)$$

Приняв во внимание закон Ома в дифференциальной форме $j = \sigma E$, и выражение для удельной электропроводности $\sigma = \frac{1}{\rho}$, формулу (56.6) можно представить в виде

$$w = \sigma E^2 \quad (56.7)$$

Выражение (56.7) называется **законом Джоуля – Ленца в дифференциальной форме**. Плотность тепловой мощности прямо пропорциональна квадрату напряженности электрического поля в данной точке проводника.

Пример 56.1. Сила тока в проводнике сопротивлением $R = 10$ Ом равномерно возрастает за время $\Delta t = 4$ с от $I_0 = 0$ до $I_{\max} = 8$ А. Определить : 1) количество теплоты, которое выделилось в проводнике за первые $t_1 = 3$ с; 2) количество электронов, которые прошли через поперечное сечение проводника за это время.

Закон Джоуля – Ленца в виде $Q = I^2 R t$ справедлив для постоянного тока. Если же сила тока в проводнике изменяется, то этот закон справедлив только для бесконечно малого промежутка времени, в течение которого ток можно считать постоянным

$$dQ = I^2 R dt. \quad (П.56.1)$$

По условию задачи сила тока равномерно возрастает, поэтому закон изменения силы тока можно записать в виде $I = kt$, где k – коэффициент пропорциональности, численно равный тангенсу угла наклона прямой (рис. П 56.1)

$$k = \frac{I_{\max}}{\Delta t} = \frac{8 \text{ А}}{4 \text{ с}} = 2 \frac{\text{А}}{\text{с}} \quad (П. 56.2)$$

Тогда

$$dQ = k^2 t^2 R dt \quad (П. 56.3)$$

Для определения количества теплоты, которая выделилась за конечный промежуток времени, выражение (П. 56.3) необходимо проинтегрировать. За первые t_1 секунд выделится количество теплоты

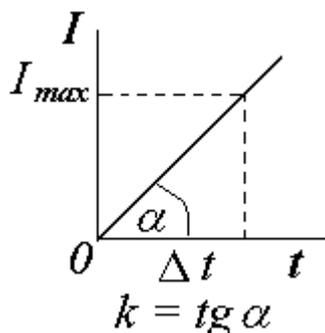


Рис. П. 56.1.

$$Q = \int_0^{t_1} k^2 t^2 R dt = k^2 R \int_0^{t_1} t^2 dt = \frac{k^2 R t_1^3}{3} \quad (\text{П. 56.4})$$

Подставляя числовые значения, найдем $Q = 360$ Дж.

По определению сила тока равна заряду, который переносится в единицу времени через поперечное сечение проводника:

$$I = \frac{dq}{dt}.$$

Тогда заряд q , который прошел за время t_1 , равен

$$q = \int_0^{t_1} I dt = k \int_0^{t_1} t dt = k \frac{t_1^2}{2}. \quad (\text{П. 56.5})$$

Разделим заряд q на элементарный заряд e и получим количество электронов, прошедших через поперечное сечение,

$$N = \frac{q}{e} = \frac{k t_1^2}{2e} = \frac{2 \cdot 3^2}{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} = 5,63 \cdot 10^{19} \text{ электронов}. \quad (\text{П. 56.6})$$

Пример 56.2. По нихромовому проводнику ($\rho = 1,1 \cdot 10^{-6}$ Ом·м) длиной $l = 2$ м и площадью поперечного сечения $S = 0,4$ мм² идет ток. При этом каждую секунду выделяется количество теплоты $Q = 3,52$ Дж. Определить плотность тока.

Согласно (56.6) закон Джоуля – Ленца в дифференциальной форме может быть представлен в виде

$$w = \rho j^2,$$

где w – плотность тепловой мощности, ρ – удельное сопротивление проводника, j – плотность тока.

По определению плотность тепловой мощности представляет собой количество теплоты, выделяемое в единице объема в единицу времени:

$$w = \frac{Q}{V \cdot t} = \frac{Q}{S l t}.$$

Тогда плотность тока

$$j = \sqrt{\frac{w}{\rho}} = \sqrt{\frac{Q}{S l t \rho}} = \sqrt{\frac{3,52}{0,4 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1,1 \cdot 10^{-6}}} = 2 \cdot 10^6 \left(\frac{A}{m^2} \right) = 2 \frac{A}{mm^2}.$$

§ 57. Закон Ома для неоднородного участка цепи

Рассмотрим теперь *неоднородный*, т.е. такой, на котором действуют также и сторонние силы, *участок* электрической цепи с током. Так как на участке цепи находится источник тока (рис. 57.1), то при переносе заряда dq работу совершают как кулоновские, так и сторонние силы.

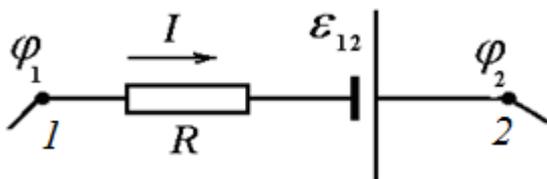


Рис. 57.1.

По определению напряжением U_{12} на участке цепи называется физическая величина, численно равная работе, совершаемой результирующим полем кулоновских и сторонних сил при перемещении из точки 1 в точку 2 единичного положительного заряда

$$U_{12} = (\varphi_1 - \varphi_2) + \varepsilon_{12}.$$

Тогда полная работа, совершаемая как сторонними, так и кулоновскими силами по перемещению заряда $dq = Idt$ – работа тока на рассматриваемом участке цепи – будет равна:

$$dA = dq U_{12} = I (\varphi_1 - \varphi_2) dt + I \varepsilon_{12} dt. \quad (57.1)$$

Если ток постоянный, а проводник неподвижный, единственной формой энергии, в которую преобразовывается совершенная над зарядом работа dA , является теплота dQ , выделившаяся на участке

$$dQ = I^2 R dt = IR Idt = IR dq, \quad (57.2)$$

и, поскольку

$$dA = dQ,$$

получаем

$$(\varepsilon_{12} + (\varphi_1 - \varphi_2))dq = IR dq,$$

откуда следует **закон Ома для неоднородного участка цепи**

$$I = \frac{\varepsilon_{12} + (\varphi_1 - \varphi_2)}{R} = \frac{U_{12}}{R} \quad (57.3)$$

Сила тока в проводнике прямо пропорциональна напряжению между концами рассматриваемого участка цепи.

В формуле (57.3) сила тока и ЭДС – величины алгебраические. Сила тока положительна, если ток течет в направлении от конца проводника 1 к концу 2. Скалярную величину ЭДС ε_{12} берут со знаком «плюс», если она способствует движению положительных зарядов в направлении $1 \rightarrow 2$, и со знаком «минус», если препятствует.

§ 58. Закон Ома для замкнутой цепи

Если соединить концы 1 и 2 неоднородного участка цепи (рис. 57.1), то их потенциалы выровняются ($\varphi_1 = \varphi_2$) и образуется замкнутая цепь (рис. 58.1). Обозначим через R сопротивление внешней части цепи (сопротивление проводника, подключенного к полюсам источника тока), а через r – внутреннее сопротивление источника тока.

В этом случае из (57.3) получаем **закон Ома для замкнутой цепи**

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r}. \quad (58.1)$$

Как видно из формулы (58.1), падение напряжения на внешней цепи сопротивлением R , т.е. напряжение на полюсах источника тока

$$U = IR = \varepsilon - Ir, \quad (58.2)$$

где Ir – падение напряжения внутри источника тока.

Если соединить клеммы источника накоротко, то $R = 0$ (случай *короткого замыкания*). Тогда

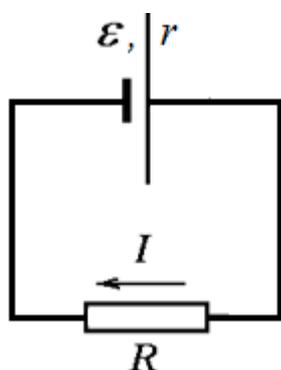


Рис. 58.1.

$$I_{к.з.} = \frac{\varepsilon}{r} = I_{\max}, U = IR = 0. \quad (58.3)$$

Если *цепь разомкнута*, внешнее сопротивление $R = \infty$. Тогда ток $I = \frac{\varepsilon}{\infty} = 0$ и по формуле (58.2) напряжение

$$U = \varepsilon \quad (58.4)$$

Следовательно, ЭДС численно равна напряжению на клеммах разомкнутого источника.

Для замкнутой электрической цепи $\varphi_1 = \varphi_2$ и работа электрических сил равна нулю. Поэтому в замкнутой цепи совершает работу только приложенная ЭДС (см формулу (57.1)).

$$dA = I \varepsilon dt. \quad (58.5)$$

Используя закон Ома для замкнутой цепи (58.1), для работы постоянного тока за конечный промежуток времени t получим

$$A = I \varepsilon t = \frac{\varepsilon^2}{R + r} t = I^2 (R + r) t \quad (58.6)$$

Уравнения (58.6) выражают *работу источника тока* во всей цепи. Она состоит из двух частей : работы внутри источника $I^2 r t$ (бесполезная работа) и работу на внешнем участке $I^2 R t$ (полезная работа).

Соответственно, полная мощность источника

$$P = I \varepsilon = \frac{\varepsilon^2}{R + r} = I^2 (R + r), \quad (58.7)$$

и мощность, которую поглощает потребитель (полезная)

$$P_{\text{полезн}} = IU = I^2 R = \frac{\varepsilon^2 R}{(R + r)^2}. \quad (58.8)$$

Коэффициент полезного действия η источника тока определяется как отношение полезной мощности к полной

$$\eta = \frac{P_{\text{полезн}}}{P} = \frac{R}{R + r} \quad (58.9)$$

Пример 58.1. Как видно из (58.9), режим работы источника при заданных значениях ε и r зависит от сопротивления потребителя R . Исследуем полученное выражение.

1. При $R = 0$ (короткое замыкание) $P_{\text{полезн}} = 0$, $P = \frac{\varepsilon^2}{R}$, $I = \frac{\varepsilon}{r}$, $\eta = 0$. Сила тока и общая мощность будут максимальными, но полезная мощность и КПД будут равны нулю. Вся развиваемая мощность расходуется на нагрев источника и может привести к его разрушению.

2. Существует оптимальное значение R , при котором источник отдает максимальную мощность потребителю. Для определения этого сопротивления можно исследовать на максимум функцию $P_{\text{полезн}}(R)$, заданную уравнением (58.8).
Получим

$$\frac{dP_{\text{полезн}}}{dR} = \varepsilon^2 \frac{r^2 - R_m^2}{(r + R_m)^2} = 0$$

откуда, учитывая, что r и R всегда положительны, имеем

$$R_m = r. \quad (\text{П.58.1})$$

Т.е. оптимальная нагрузка данного источника тока равна внутреннему сопротивлению этого источника. При этих условиях

$$P_{\text{полезнmax}} = \frac{\varepsilon^2}{4r}, \quad P = \frac{\varepsilon^2}{2r}, \quad \eta = 0,5. \quad (\text{П.58.2})$$

3. Если $R \gg r$, то $I \approx \frac{\varepsilon}{R}$

$$P_{\text{полезн}} \approx \frac{\varepsilon^2}{R}, \quad P \approx \frac{\varepsilon^2}{R}, \quad \eta \rightarrow 1 \quad (\text{П.58.3})$$

Сила тока в цепи мала, полезная и общая мощности также малы, но КПД максимальный.

На рис. П. 58.1 показаны зависимости мощности источника P ,

мощности во внешней цепи $P_{\text{полезн}}$ и КПД источника η от силы тока I

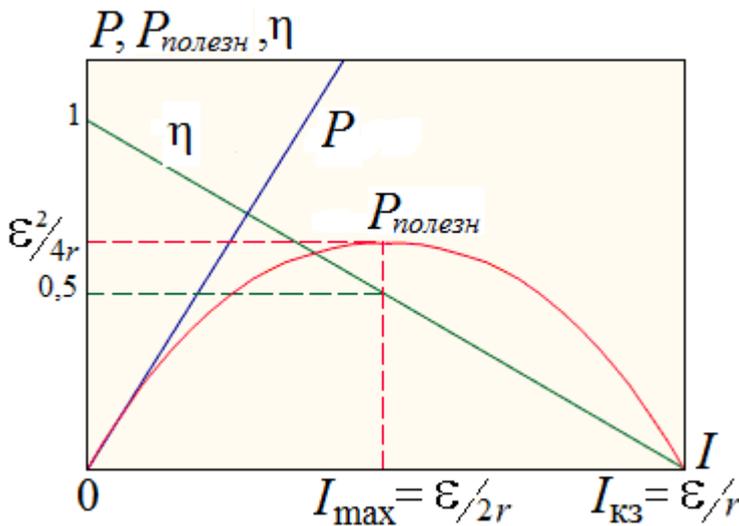


Рис. П. 58.1.

§ 59. Правила Кирхгофа

Правила Кирхгофа позволяют определять силу и направление тока в любой части разветвленной цепи, если известны сопротивления и ЭДС.

Первое правило Кирхгофа относится к узлам, т.е. к таким точкам в разветвленной цепи, в которой сходится не менее трех проводников (рис. 59.1).

Первое правило Кирхгофа является следствием закона сохранения заряда

и требования, чтобы в цепи постоянного тока ни в одной точке проводника не накапливались и не уменьшались заряды, а потенциал любой точки цепи оставался неизменным.

Если условиться считать подходящие к узлу токи положительными, а исходящие из узла – отрицательными, то можно сказать, что **алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна нулю**, т.е. количество зарядов, приходящих в данную точку в единицу времени, равно количеству зарядов, уходящих из данной точки за то же время:

$$\sum_{k=1}^l I_k = 0, \quad (59.1)$$

где l – число сходящихся токов.

На рис. 59.1 в узле сходятся пять проводников с токами. Первое правило Кирхгофа для этого узла:

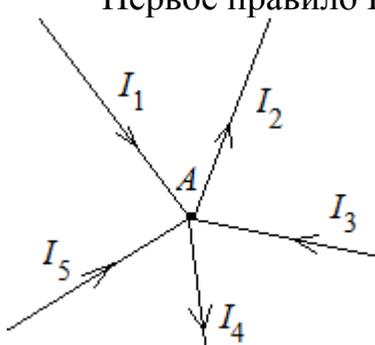


Рис. 59.1.

$$I_1 - I_2 + I_3 - I_4 + I_5 = 0.$$

Рассмотрим произвольную разветвленную цепь, часть которой изображена на рис. 59.2, A, B и C – точки разветвления.

Второе правило Кирхгофа относится к произвольным замкнутым контурам, которые можно мысленно выделить в рассматриваемой разветвленной цепи (например, контур ABC на рис. 59.2).

Правило контуров получается в результате применения закона Ома для неоднородного участка цепи (57.3) к различным участкам замкнутой цепи. Пользуясь правилом знаков, установленным в § 57, для каждого из трех неоднородных участков цепи рис. 59.2 можно записать:

$$-I_1 R_1 = \varphi_A - \varphi_B - \varepsilon_1,$$

$$I_2 R_2 = \varphi_B - \varphi_C - \varepsilon_2,$$

$$I_3 R_3 = \varphi_C - \varphi_A + \varepsilon_3.$$

Если сложить эти равен-

ства, потенциалы взаимно уничтожатся и получится

$$-I_1 R_1 + I_2 R_2 + I_3 R_3 = -\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3.$$

В общем случае для всякого замкнутого контура можно записать

$$\sum_{i=1}^n I_i R_i = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i, \quad (59.2)$$

где n – число отдельных участков, на которые контур разбивается узлами (на рис. 59.2 $n = 3$).

Это уравнение выражает второе правило Кирхгофа: **в любом замкнутом контуре, выбранном в разветвленной электрической цепи, алгебраическая сумма произведений сил токов I_i на сопротивления R_i соответствующих участков контура равна алгебраической сумме ЭДС в контуре**

Перед составлением уравнений по правилам Кирхгофа необходимо:

- 1) выбрать направления токов, указав их стрелками на чертеже;
- 2) выбрать направление обхода контуров (по часовой стрелке или против нее).

Оба направления можно выбирать *произвольно*, но их следует зафиксировать и при составлении уравнений придерживаться.

Наибольшие трудности при составлении уравнений вызывают **правила знаков**.

1. **Положительными** считаются токи, которые совпадают с направлением обхода, соответствующее произведение IR входит в уравнение со знаком плюс (I_2 и I_3 на рис. 59.2). **Отрицательными** считаются токи, направления которых противоположны направлению обхода контура (I_1 на рис. 59.2).

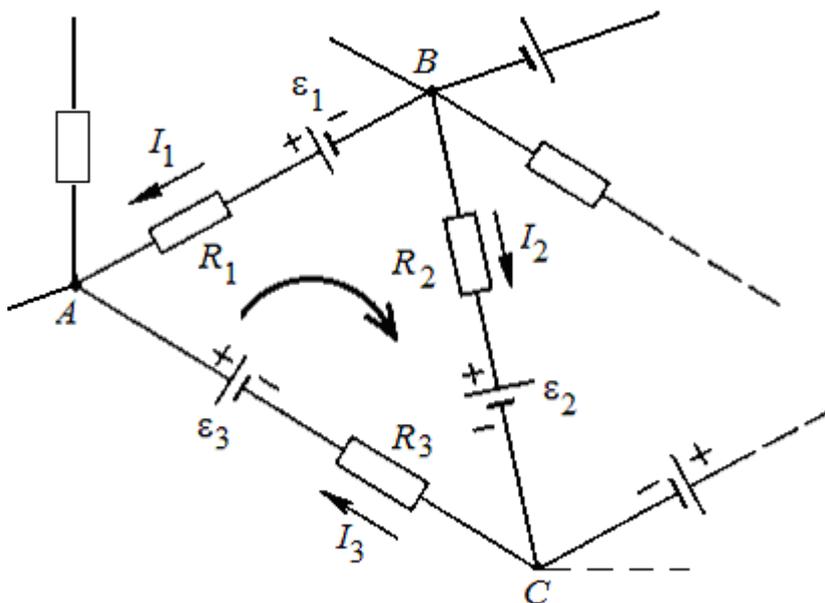


Рис. 59.2.

2. ЭДС источников берутся **со знаком плюс**, если они создают токи, направление которых совпадают с направлением обхода контура (ε_3 на рис. 59.2), другими словами, такие, которые в направлении обхода проходятся от отрицательного полюса к положительному. В противном случае ЭДС берутся **со знаком минус** (ε_1 и ε_2 на рис. 59.2).

Число независимых уравнений, составляемых по первому и второму правилам Кирхгофа, должно равняться числу неизвестных величин, например, токов, текущих в разных звеньях цепи.

Чтобы избежать составления лишних уравнений, являющихся простой комбинацией уже составленных, следует выбирать каждый новый контур таким образом, чтобы он содержал хотя бы один элемент, который не содержится в предыдущих контурах.

Теперь можно сформулировать **порядок расчета** сложных цепей.

1. Обозначить на схеме токи во всех неразветвленных участках, произвольно задавая им направление.

2. Согласно первому правилу Кирхгофа написать уравнения (59.1) для всех узлов, кроме одного (уравнение для последнего узла является следствием предыдущих). Для m узлов записывается $(m - 1)$ независимых уравнений первого правила Кирхгофа.

3. Выделить всевозможные замкнутые контуры. Условиться о направлении обхода.

4. Согласно второму правилу Кирхгофа составить уравнение (59.2) для всех простых контуров, которые можно выделить в данной цепи и которые не получаются наложением уже рассмотренных. В разветвленной цепи, содержащей ρ участков между соседними узлами (ветвей) и m узлов, имеется $(\rho - m + 1)$ независимых уравнений второго правила Кирхгофа.

5. Решить систему линейных уравнений, общее число которых равно числу неизвестных (например, токов)

6. Если в результате решения получившейся системы уравнений какие-либо токи окажутся отрицательными, то в действительности их направления противоположны выбранным на схеме.

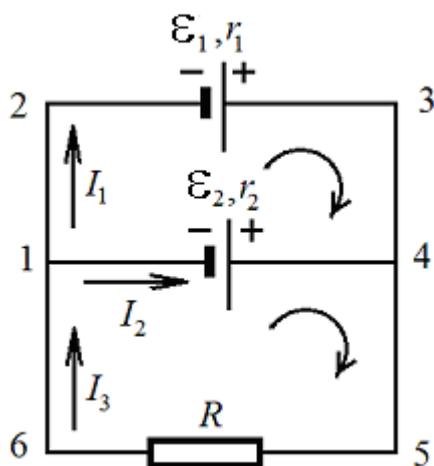


Рис. П.59.1

Пример 59.1. Два источника тока с ЭДС и внутренними сопротивлениями, равными соответственно $\varepsilon_1 = 10$ В, $r_1 = 1$ Ом и $\varepsilon_2 = 8$ В, $r_2 = 2$ Ом соединены с реостатом ($R = 6$ Ом), как показано на рис. П. 59.1. Определить силу тока на всех участках цепи.

Обозначим токи в неразветвленных участках цепи через I_1, I_2, I_3 и зададим им предположительные направления, как указано на рис. П 59.1.

Рассматриваемая схема имеет два узла: 1 и 4. Но составлять уравнения по первому правилу Кирхгофа следует только для одного узла, т.к. уравнение, составленное для второго узла, будет следствием первого.

Составим уравнение для токов в узле I , пользуясь правилом: ток, подходящий к узлу, входит в уравнение со знаком плюс, отходящий от узла – со знаком минус.

$$-I_1 - I_2 + I_3 = 0 \quad (\text{П.59.1})$$

Теперь составим уравнения для контуров. Выберем два простых контура, например, следующим образом: 12341 и 14561 . Условимся обходить контуры по часовой стрелке. Обходя эти контуры, получаем следующие уравнения:

$$I_1 r_1 - I_2 r_2 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \quad (\text{П.59.2})$$

$$I_2 r_2 + I_3 R = \varepsilon_2 \quad (\text{П.59.3})$$

Рассмотрение же контура 1234561 не вносит ничего нового, так как даст уравнение, являющееся следствием двух предыдущих.

Мы получили систему (П.59.1 – П.59.3) из трех уравнений с тремя неизвестными токами. Подставим числовые значения:

$$-I_1 - I_2 + I_3 = 0,$$

$$I_1 - 2I_2 = 10 - 8,$$

$$2I_2 + 6I_3 = 8.$$

Решая систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными любым способом, например методом исключения, получим

$$I_1 = 1,6 \text{ А}, \quad I_2 = -0,2 \text{ А}, \quad I_3 = 1,4 \text{ А}.$$

Второй ток получился отрицательным. Значит, на самом деле направление тока обратно выбранному на рисунке.

§ 60. Элементы классической электронной теории электропроводности металлов

Классическая (в смысле некантовая) электронная теория проводимости металлов была создана П.Друде и Г.Лоренцем. Она объясняет высокую электропроводность металла наличием огромного числа электронов проводимости, которые хаотически перемещаются в объеме металла.

При образовании кристаллической решетки металла часть валентных электронов отрывается от своих атомов. Электроны, как принято говорить, обобществляются, они не принадлежат теперь никакому конкретному иону металла и могут свободно перемещаться под действием внешнего электрического поля, образуя электрический ток.

Металлический кристалл можно представить в виде пространственной решетки из положительных ионов, погруженной в «электронный газ» (рис. 60.1). Этот газ свободных электронов заполняет кристаллическую решетку и компенсирует силы взаимного электростатического отталкивания положительных ионов и тем самым связывает их в твердое тело.

В классической электронной теории металлов предполагается, что движение электронов подчиняется законам классической механики.

Электроны проводимости образуют в металле электронный газ, который имеет свойства одноатомного газа и подчиняется законам статистики Максвелла-Больцмана. При

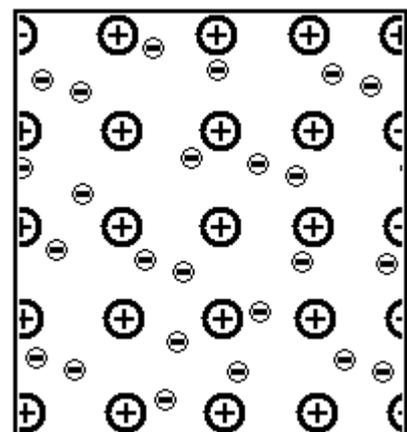


Рис. 60.1.

хаотическом движении электроны сталкиваются с ионами кристаллической решетки, которые, в свою очередь, совершают беспорядочные тепловые колебания около положений равновесия – узлов кристаллической решетки (взаимодействием электронов между собой пренебрегают). Электронный газ находится в термодинамическом равновесии с ионной решеткой.

Пример 60.1. Медный диск радиусом $R = 0,5$ м равномерно вращается ($\omega = 10^4$ рад/с) относительно оси, перпендикулярной к плоскости диска и проходящей через его центр. Определить разность потенциалов между центром диска и его крайними точками.

При вращении металлического диска электроны проводимости отбрасываются центробежной силой инерции на его периферию. В центральной области диска возникает недостаток электронов, и она заряжается положительно. На краях диска накапливаются электроны проводимости, и она заряжается отрицательно. Возникает электрическое поле напряженностью E , направленное по радиусам диска от его центра. Это поле противодействует дальнейшему движению электронов на края диска. Равновесие наступает, когда центробежная сила инерции $m\omega^2 r$ станет равной электрической силе eE_r :

$$m\omega^2 r = eE_r .$$

Здесь e – заряд электрона, m – его масса, E_r – проекция вектора напряженности E на радиальное направление. Отсюда получим:

$$E_r = \frac{\omega^2}{(e/m)} r .$$

Разность потенциалов между центром диска и его краями

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_0^R E_r dr = \frac{\omega^2}{(e/m)} \int_0^R r dr = \frac{\omega^2 R^2}{2(e/m)} . \quad (\text{П.60.1})$$

Подставив числа, найдем

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{10^8 \cdot 0,25}{2 \cdot 1,76 \cdot 10^{11}} = 71 \cdot 10^{-6} (\text{В}) = 71 \text{ мкВ} .$$

Можно говорить о средней длине свободного пробега электронов, которая по порядку величины должна быть равной периоду кристаллической решетки металла, т.е. $\langle \lambda \rangle \approx 10^{-10}$ м.

Полагая, что на электронный газ могут быть распространены результаты кинетической теории газов, можно произвести оценку средней **скорости теплового движения** электронов в металлах.

Согласно молекулярно-кинетической теории средняя энергия поступательного движения молекул газа зависит только от температуры газа, но не от массы его молекул:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{3}{2} kT .$$

Здесь k – постоянная Больцмана, m – масса частицы, T – абсолютная температура. Отсюда находится средняя квадратическая скорость хаотического движения частиц

$$v = \sqrt{\frac{3kT}{m}}. \quad (60.1)$$

Если применить эту формулу к электронному газу при комнатной температуре $T = 300$ К, то получим среднюю квадратическую скорость электронов:

$$v = \sqrt{\frac{3 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{9,1 \cdot 10^{-31}}} = 11,68 \cdot 10^4 = 1,17 \cdot 10^5 \text{ (м/с)} = 117 \text{ км/с}.$$

Такого же порядка будет и средняя арифметическая скорость теплового движения электронов $\langle v \rangle$.

Хаотическое движение электронов не создает электрического тока. При включении электрического поля на хаотическое *тепловое движение*, происходящее, со средней скоростью $\langle v \rangle$, накладывается *упорядоченное движение* электронов со средней скоростью $\langle u \rangle$ (так называемой **дрейфовой скоростью**). Величину этой скорости можно оценить, исходя из формулы, связывающей плотность тока j с числом n электронов проводимости в единице объема, их зарядом e и средней скоростью $\langle u \rangle$:

$$j = ne \langle u \rangle$$

Оценим вначале концентрацию n электронов в металле, например, в меди. Медь находится в первой группе таблицы элементов Менделеева, атомы меди имеют один валентный электрон, который может быть отдан в электронный газ проводимости. Поэтому число свободных электронов примерно совпадает с числом атомов. Разделив плотность ρ меди на ее молярную массу M , определим число молей в единице объема. Умножив его затем на число Авогадро N_A , получим число атомов в единице объема, т.е. концентрацию электронов

$$n = N_A \frac{\rho_{Cu}}{M_{Cu}} = 6,02 \cdot 10^{23} \frac{8,9 \cdot 10^3}{63,5 \cdot 10^{-3}} = 8,4 \cdot 10^{28} \text{ (м}^{-3}\text{)}. \quad (60.2)$$

Для оценки дрейфовой скорости электронов воспользуемся предельной допустимой техническими нормами плотностью тока j для медных проводов, которая составляет около $10 \text{ А/мм}^2 = 10^7 \text{ А/м}^2$.

Взяв для меди концентрацию электронов проводимости $n = 10^{29} \text{ м}^{-3}$, получим оценку дрейфовой скорости электронов

$$\langle u \rangle = \frac{j}{ne} = \frac{10^7}{10^{29} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} \approx 10^{-3} \text{ (м/с)}. \quad (60.3)$$

Таким образом, даже при больших плотностях тока средняя скорость упорядоченного движения электронов $\langle u \rangle \sim 1 \text{ мм/с}$ ничтожно мала (в 10^8 раз меньше) по сравнению с тепловой скоростью электронов $\langle v \rangle \sim 100 \text{ км/с}$. Чрезвычайно малая скорость упорядоченного движения электронов по сравнению со скоростью их теплового движения объясняется очень частыми столкновениями электронов с ионами кристаллической решетки.

Как же согласовать очень малую величину скорости упорядоченного движения электронов с практически мгновенной передачей электрических сиг-

налов на большие расстояния? Высокая скорость распространения электрического тока по цепи обусловлена не скоростью направленного движения электронов, а скоростью распространения электромагнитного поля, вызывающего направленное движение электронов по всей цепи. Эта скорость в вакууме равна $c \approx 3 \cdot 10^8$ м/с (скорость света). Поэтому движение электронов под действием внешнего электрического поля возникает на всем протяжении провода практически одновременно с замыканием цепи.

Объяснение закона Ома в классической электронной теории. Будем считать, что при каждом соударении электрон передает решетке накопленную энергию полностью и поэтому после соударения начинает движение без начальной скорости. Под действием поля электрон получит постоянное ускорение равное

$$a = \frac{F}{m} = \frac{eE}{m}, \quad (60.4)$$

и к концу свободного пробега скорость упорядоченного движения достигнет значения

$$u_{\max} = a\tau = \frac{eE}{m}\tau, \quad (60.5)$$

где τ – среднее время между двумя последовательными соударениями электрона с ионами решетки. Если средняя скорость движения электронов относительно кристаллической решетки металла равна $\langle v \rangle + \langle u \rangle$, то для среднего времени свободного пробега τ получаем:

$$\tau = \frac{\langle \lambda \rangle}{\langle v \rangle + \langle u \rangle} \approx \frac{\langle \lambda \rangle}{\langle v \rangle}.$$

Здесь учтено, что, как было показано выше, $\langle u \rangle \ll \langle v \rangle$. Тогда скорость к концу пробега

$$u_{\max} = \frac{eE \langle \lambda \rangle}{m \langle v \rangle}. \quad (60.6)$$

Поскольку скорость изменяется за время пробега равномерно от нуля до u_{\max} , ее среднее (за пробег) значение равно половине максимального

$$\langle u \rangle = \frac{1}{2} u_{\max} = \frac{eE \langle \lambda \rangle}{2m \langle v \rangle}.$$

Подставив эту скорость в выражение для плотности тока $j = neu$, получим

$$j = \frac{ne^2 \langle \lambda \rangle}{2m \langle v \rangle} E. \quad (60.7)$$

Это выражение совпадает с законом Ома

$$j = \sigma E$$

и дает теоретическое выражение эмпирической постоянной, т.е. удельной электропроводности металла

$$\sigma = \frac{ne^2 \langle \lambda \rangle}{2m \langle v \rangle}. \quad (60.8)$$

Проанализируем формулу (60.8). Электропроводность σ больше в том металле, в котором больше концентрация электронов проводимости n .

Если бы электроны не сталкивались с ионами решетки, средняя длина свободного пробега $\langle \lambda \rangle$, а, следовательно, и проводимость были бы бесконечно велики. Таким образом, согласно классическим представлениям электрическое сопротивление металлов обусловлено соударениями свободных электронов с ионами кристаллической решетки.

Кроме того, электропроводность зависит от средней скорости хаотического движения электронов, которая пропорциональна квадратному корню из температуры, $\langle v \rangle \sim \sqrt{T}$. Поэтому формула (60.8) объясняет факт уменьшения электропроводности при нагревании металлического проводника.

Пример 60.2. Удельное сопротивление меди $\rho = 17$ нОм·м, концентрация свободных электронов в меди $n = 10^{29}$ м⁻³. Исходя из классической теории электропроводности металлов, определить среднюю длину свободного пробега $\langle \lambda \rangle$ электронов в меди. Среднюю скорость теплового движения электронов принять равной $\langle v \rangle = 100$ км/с.

Пользуясь выражением (60.8) для электропроводности

$$\sigma = \frac{1}{\rho} = \frac{ne^2 \langle \lambda \rangle}{2m \langle v \rangle},$$

определим

$$\lambda = \frac{2m \langle v \rangle}{ne^2 \rho} = \frac{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 10^5}{10^{29} \cdot (1,6 \cdot 10^{-19})^2 17 \cdot 10^{-9}} = 4,2 \cdot 10^{-9} \text{ (м)} = 4,2 \text{ нм}.$$

Объяснение закона Джоуля – Ленца в классической электронной теории. Причиной возникновения электрического сопротивления является взаимодействие электронов с ионами кристаллической решетки. Сталкиваясь с ионами, электроны передают решетке кинетическую энергию, приобретенную ими под действием поля. Вследствие этого увеличивается амплитуда колебаний ионов решетки, и, следовательно, температура металла повышается.

К концу свободного пробега электрон приобретает скорость u_{\max} , и, следовательно, дополнительную кинетическую энергию

$$W_k = \frac{mu_{\max}^2}{2} = \frac{e^2 \langle \lambda \rangle E^2}{2m \langle v \rangle^2}. \quad (60.9)$$

Число столкновений электрона в единицу времени равно

$$\langle z \rangle = \frac{\langle v \rangle}{\langle \lambda \rangle}. \quad (60.10)$$

Все n электронов проводимости, содержащихся в единице объема проводника, испытывают $n \langle z \rangle$ столкновений в единицу времени и передают кристаллической решетке энергию

$$w = n \langle z \rangle \frac{mu_{\max}^2}{2}. \quad (60.11)$$

Эта энергия превращается в энергию теплового движения ионов металла, т.е. расходуется на нагревание проводника. Подставляя в формулу (60.11) выражения (60.10) и u_{\max} из формулы (60.6), определим энергию, которая превращается в теплоту в единице объема проводника в единицу времени

$$w = \frac{ne^2 \langle \lambda \rangle}{2m \langle v \rangle} E^2. \quad (60.12)$$

Величина w является удельной тепловой мощностью тока, а коэффициент пропорциональности между w и E^2 по формуле (60.8) есть электропроводность σ , следовательно, выражение (60.12) представляет собой закон Джоуля-Ленца в дифференциальной форме

$$w = \sigma E^2.$$

Объяснение закона Видемана - Франца в классической электронной теории. Из опыта известно, что наряду с высокой электропроводностью металлы отличаются также большой теплопроводностью. Видеман и Франц установили эмпирический закон, согласно которому отношение коэффициента теплопроводности к электропроводности для всех металлов приблизительно одинаково и изменяется пропорционально абсолютной температуре.

$$\frac{K}{\sigma} = CT, \quad (60.13)$$

где C – некоторая константа.

Способностью проводить тепло обладают и неметаллические кристаллы. Однако теплопроводность металлов значительно превосходит теплопроводность диэлектриков. Из этого можно заключить, что теплопередача в металлах осуществляется в основном не кристаллической решеткой, а электронами.

Рассматривая электроны как одноатомный газ, для коэффициента теплопроводности можно привести выражение из кинетической теории газа

$$K = \frac{1}{3} \rho c_v \langle \lambda \rangle \langle v \rangle, \quad (60.14)$$

где $\rho = mn$ – плотность газа, c_v – его удельная теплоемкость при постоянном объеме. Для одноатомного идеального газа, каким в электронной теории является электронный газ, частицы имеют три степени свободы. Поэтому

$$c_v = \frac{C_V}{M} = \frac{3R}{2M} = \frac{3kN_A}{2M}. \quad (60.15)$$

Здесь k – постоянная Больцмана.

Молярная масса электронного газа $M = mN_A$, где m – масса электрона.

Тогда

$$\rho c_v = mn \frac{3kN_A}{2mN_A} = \frac{3}{2} nk. \quad (60.16)$$

Для теплопроводности получается выражение

$$K = \frac{1}{2} nk \langle \lambda \rangle \langle v \rangle. \quad (60.17)$$

А отношение теплопроводности K к удельной электропроводности σ :

$$\frac{K}{\sigma} = \frac{k}{e^2} m \langle v \rangle^2. \quad (60.18)$$

В качестве средней скорости теплового движения берется средняя квадратическая скорость

$$\langle v \rangle = v_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}.$$

Тогда окончательно

$$\frac{K}{\sigma} = 3 \frac{k^2}{e^2} T. \quad (60.19)$$

Соотношение (60.19) выражает закон Видемана – Франца (60.13), если значение эмпирической величины C положить равной

$$C = 3 \left(\frac{k}{e} \right)^2. \quad (60.20)$$

Вычисленное по этой формуле значение $C = 2,23 \cdot 10^{-8}$ (Дж/Кл·К)³ несколько меньше найденного на опыте, но достаточно близко к нему. Таким образом, теоретическое выражение (60.19) хорошо согласуется с результатами опытов.

Недостатки классической электронной теории электропроводности металлов. Достоинством классической электронной теории является ее физическая наглядность. Выводы теории хорошо согласовывались с экспериментальными законами Ома и Джоуля – Ленца и позволяли объяснить природу проводимости металлов.

Однако классическая электронная теория не могла объяснить некоторые важные свойства металлов.

1. Экспериментально установлено, что удельное сопротивление металлических проводников прямо пропорционально абсолютной температуре, $\rho \sim T$, или электропроводность металлических проводников обратно пропорциональна абсолютной температуре, $\sigma \sim \frac{1}{T}$. В классической электронной теории

$$\sigma = \frac{ne^2 \langle \lambda \rangle}{2m \langle v \rangle}, \text{ кроме того } \langle v \rangle \sim \sqrt{T}, \text{ следовательно } \sigma \sim \frac{1}{\sqrt{T}}, \text{ что противоре-}$$

чит опытными данными.

2. По закону Дюлонга и Пти молярная теплоемкость твердых кристаллических тел (металлов и диэлектриков) равна $3R$. Этот закон достаточно хорошо выполняется и для диэлектриков, и для металлов, что непонятно с точки зрения электронной теории.

В металлах, с точки зрения электронной теории, молярная теплоемкость должна складываться из молярной теплоемкости кристаллической решетки ($3R$) и молярной теплоемкости одноатомного электронного газа ($3R/2$) и, следовательно, быть около $4,5R$. Отсутствие электронной составляющей теплоемкости металлов классическая теория объяснить не может.

3. Если подставить экспериментально определенную проводимость в формулу (60.8) и определить длину свободного пробега $\langle \lambda \rangle$ электрона, получим, что она на два порядка превышает период кристаллической решетки металла. То есть приходится допустить, что электрон пробегает без столкновений с ионами решетки сотни межузловых расстояний, что не соответствует классической электронной теории.

Эти расхождения теории и опыта объясняются тем, что движение электронов в металлах подчиняется законам квантовой теории.

Пример 60.3. Электронная теория раскрывает механизм выделения тепла электрическим током в металлах. Электроны ускоряются электрическим полем, сталкиваются с ионами кристаллической решетки, а накопленная электронами энергия передается ионам и нагревает металл.

Пусть скорость электрона до соударения с ионом решетки равна v , его масса известна: $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг. Скорость иона до соударения полагаем равной нулю, после соударения обозначим через u . Масса M иона, например, иона меди, тоже известна:

$$M = \frac{\mu}{N_A} = \frac{64 \cdot 10^{-3}}{6,02 \cdot 10^{23}} \approx 10^{-25} \text{ кг.}$$

В классической электронной теории предполагается, что в конце свободного пробега электрон сталкивается с ионом решетки, отдает ему накопленную в поле энергию, и его дрейфовая скорость падает до нуля.

Теоретически возможны два типа соударений электронов с ионом – абсолютно упругое и абсолютно неупругое. Определим отношение $\frac{\Delta W_e}{W_e}$ энергии, потерянной электроном при одном соударении, к его первоначальной кинетической энергии в обоих случаях.

Из законов сохранения энергии и импульса следует [1], что в случае абсолютно *упругого* удара скорость иона после удара

$$u = \frac{2m_e v}{m_e + M}.$$

Энергия ΔW_e , потерянная электроном при столкновении с ионом, равна энергии, которую получил ион.

$$\Delta W_e = W_{\text{иона}} = \frac{Mu^2}{2} = \frac{2Mm_e^2 v^2}{(m_e + M)^2}.$$

Кинетическая энергия электрона $W_e = \frac{m_e v^2}{2}$.

Искомое отношение

$$\frac{\Delta W_e}{W_e} = \frac{4m_e M}{(m_e + M)^2}. \quad (\text{П. 60.2})$$

В случае абсолютно *неупругого* удара скорость иона вместе с «прилипшим» к нему электроном

$$u = \frac{m_e v}{m_e + M}.$$

Отношение переданной иону энергии к первоначальной энергии электрона

$$\frac{\Delta W_e}{W_e} = \frac{(m_e + M)u^2}{2} \cdot \frac{2}{m_e v^2} = \frac{m_e}{m_e + M}. \quad (\text{П. 60.3})$$

С учетом того, что масса электрона гораздо меньше массы иона, $m_e \ll M$, в *обоих случаях* получаем

$$\frac{\Delta W_e}{W_e} \approx \frac{m_e}{M} = \frac{9,1 \cdot 10^{-31}}{10^{-25}} \approx 10^{-5}.$$

Таким образом, доля энергии, потерянной в результате столкновения электрона с ионом очень мала и не зависит от характера (упругого или неупругого) столкновения.

Контрольные вопросы

1. Какие условия необходимы для появления и существования электрического тока в проводящей среде?
2. Как связаны между собой векторная характеристика тока – плотность тока и скалярная характеристика – сила тока?
3. Какой вид имеет электрическое поле проводника с током?
4. Какие силы называются сторонними? Какова их роль в цепи постоянного тока? Почему для получения постоянного тока необходима замкнутая электрическая цепь?
5. От чего зависит точность измерений сопротивлений с помощью моста Уитстона?
6. Как связано напряжение на включенном источнике с его ЭДС? Можно ли вольтметром измерить ЭДС источника тока?
7. Совпадает ли напряжение с разностью потенциалов на неоднородном участке цепи?
8. Сформулируйте закон Ома для однородного участка цепи; для неоднородного участка цепи; для замкнутой цепи.
9. Как из закона Ома для неоднородного участка цепи получить закон Ома для замкнутой цепи?
10. Работа каких сил определяет работу электрического тока?
11. При какой нагрузке источник тока развивает максимальную полезную мощность?
12. Какие законы используют при выводе правил Кирхгофа?
13. Разветвленная цепь содержит a узлов, и в ней можно выделить b простых контуров. Сколько независимых уравнений можно составить, используя первое правило Кирхгофа? Второе правило Кирхгофа?
14. Каковы основные положения классической электронной теории проводимости металлов? Каковы недостатки этой теории?
15. Каковы скорости теплового и дрейфового движения электронов в металле?
16. Какова природа электрического сопротивления с точки зрения классической электронной теории проводимости металлов?
17. Почему при малой скорости упорядоченного движения электронов ток к потребителю доходит по проводам практически мгновенно?

Рекомендованная литература

1. Савельев И.В. Курс физики. В 3-х т. Т 1: Механика. Молекулярная физика. – М.: «Наука», 1989, – 352 с., Т.2: Электричество. Колебания и волны. Волновая оптика. – М. : «Наука», 1989, 464 с.
2. Кучерук І. М., Горбачук І.Т, Луцик П.П. Загальний курс фізики. У 3 т. Т.1: Механіка. Молекулярна фізика і термодинаміка. – К.; «Техніка», 1999, – 536 с. Т.2:Електрика і магнетизм. – К.; «Техніка», 2006, – 452 с.
3. Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс физики. – М.: «Высш. шк.», 1989, – 609 с.
4. Трофимова Т.И. Курс физики. – М.: «Академия», 2005, – 560 с.
5. Иродов И.Е. Физика макросистем. Основные законы. – 2-е изд., дополн. - М.: «Лаборатория базовых знаний», 2001.– 208 с. Электромагнетизм. Основные законы. 4-е издание, исправленное. М.:БИНОМ. Лаборатория знаний, 2003. – 320 с.
6. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т.2. Термодинамика и молекулярная физика. – М.: «Наука», 1977-1980.– 552 с.Т. 3. Электричество. М.: «Наука», 1977, – 687 с.
7. И.К.Кикоин, А.К.Кикоин. Молекулярная физика. Учебное пособие. М.:Физматгиз. 1963. – 500 с.
8. Калашников Н.П.,Смондырев М.А. Основы физики. Учебник для вузов. В 2-х томах. Т. 1. М.: Дрофа. 2003.– 400 с., Т. 2. М.: Дрофа. 2004. – 432 с.
9. Бушок Г.Ф., Левандовский В.В.,Півень. Курс фізики. Навч. Посібник. У 2 кн. Кн.. 1. Фізичні основи механіки. Електрика і магнетизм. – 2-ге вид. –К.:Либідь, 2001 – 448 с. Бушок Г.Ф., Є.Ф.Венгер. Курс фізики. У 2 кн.: Кн.2. Оптика. Фізика атома і атомного ядра. Молекулярна фізика і термодинаміка. – К.:«Либідь», 2001. – 448с.
10. Чертов А.Г. Воробьев А.А. Задачник по физике. – М.: «Физмат лит», 2005 – 640 с.
11. Гаркуша І.П., Горбачук І.Т., Курінний В.П. та ін. Загальний курс фізики: Збірник задач – К.: «Техніка», 2004,– 560 с.