

Министерство образования и науки Украины
Государственное высшее учебное заведение
«Национальный горный университет»

И.П.Гаркуша

Физика

Ч. 3. Электростатика

Учебное пособие

Днепропетровск
НГУ
2013

Глава 1. Электрическое поле в вакууме

§ 1. Электрический заряд

Все тела в природе образованы из атомов и молекул, которые, в свою очередь, состоят из ядер и электронов, обладающих электрическим зарядом. Электрический заряд, подобно массе, является свойством элементарных частиц, их внутренней характеристикой.

Различают два вида электрических зарядов, условно названных *положительными и отрицательными*. Электроны являются отрицательно заряженными частицами, а протоны, входящие в состав атомного ядра, – положительными. Одноименные заряды (заряды одного знака) отталкиваются друг от друга, разноименные (заряды разных знаков) – притягиваются.

Наименьший по величине экспериментально обнаруженный в природе заряд – это заряд электрона

$$q_e = -e; \quad e \approx 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл.} \quad (1.1)$$

Электрический заряд, равный e , называется элементарным зарядом. Носителями элементарных зарядов и нейтральными, т.е. такими, заряд которых равен нулю, являются следующие элементарные частицы (таблица 1):

Таблица 1.

$+e$	протон, позитрон, положительный мюон μ^+ , положительный пион π^+
$-e$	электрон, антипротон, отрицательный мюон μ^- , отрицательный пион π^-
0	нейтрон, нейтрино, фотон, нейтральный пион π^0

В каждом атоме суммарный положительный и отрицательный заряды одинаковы, поэтому в любом элементарном объеме тела алгебраическая сумма зарядов равна нулю. Вследствие этого тела являются электрически нейтральными или незаряженными.

Однако, если оторвать электроны от одних тел и передать их другим телам, то эти тела становятся соответственно положительно и отрицательно заряженными. Например, если натирать стеклянную палочку куском резины, стекло заряжается положительно, резина в таком же количестве – отрицательно. Заряд наэлектризованной о шерсть пластмассовой палочки является отрицательным.

Электрический заряд q любого тела является целым кратным электрическому заряду e , т.е. изменяется дискретно, или, как говорят, *квантуется*:

$$q = \pm Ne, \quad (1.2)$$

где N – целое число.

Экспериментально установлено, что **суммарный электрический заряд изолированной системы остается постоянным** при всех взаимодействиях и превращениях частиц этой системы. Это утверждение называется **законом сохранения электрического заряда**.

Электрические заряды могут возникать и исчезать, однако при этом возникают или исчезают одновременно два элементарных заряда разных знаков. Например, если сталкиваются электрон с зарядом $-e$ и его античастица позитрон с зарядом $+e$, то в результате аннигиляции рождаются два гамма-фотона

$$e^{-} + e^{+} = \gamma + \gamma.$$

Полный заряд до и после реакции равен нулю.

И наоборот, пролетая вблизи атомного ядра, гамма-фотон может превратиться в пару частиц – электрон($-e$) и позитрон($+e$).

Еще одним свойством электрического заряда, установленным экспериментально, является независимость заряда от его скорости. Величина заряда, измеренная в различных инерциальных системах отсчета, является одинаковой. Это обстоятельство называют *релятивистской инвариантностью заряда*.

§ 2. Закон Кулона

Если размеры заряженных тел пренебрежимо малы по сравнению с расстояниями между ними, тела можно считать материальными точками, или *точечными зарядами*.

Французский физик Ш.Кулон экспериментально установил: *сила взаимодействия двух точечных неподвижных зарядов в вакууме пропорциональна произведению зарядов q_1 и q_2 , обратно пропорциональна квадрату расстояния r между ними и направлена по прямой, соединяющей эти заряды:*

$$F = k \frac{|q_1||q_2|}{r^2}. \quad (2.1)$$

В этой формуле коэффициент пропорциональности k в СИ равен:

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}, \quad (2.2)$$

где ϵ_0 – некоторая размерная постоянная (*электрическая постоянная*)

$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ А}^2 \cdot \text{с}^4 / \text{м}^3 \cdot \text{кг}. \quad (2.3)$$

Удобным для расчетов является приближенное значение k :

$$k = 9 \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{Кл}^2.$$

Чтобы формула давала не только значение модуля силы, но и направление силы, закон Кулона можно выразить в векторной форме:

$$\mathbf{F} = k \frac{q_1 q_2}{r^3} \mathbf{r}, \quad (2.4)$$

Здесь $\mathbf{F}$ – сила, действующая на заряд, к которому обращен вектор $\mathbf{r}$, проведенный от одного заряда к другому (рис.1). Модуль этого вектора равен расстоянию между зарядами.

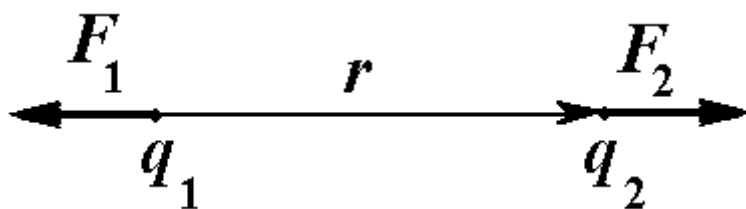


Рис.1.

При любых знаках зарядов формула (2.4) дает правильное направление силы. Так, при отталкивании (рис. 1), т.е. в случае одноименных зарядов $q_1 q_2 > 0$, и сила F_2 , действующая на заряд q_2 со стороны заряда q_1 , направлена вдоль r .

При притяжении, т.е. в случае разноименных зарядов $q_1 q_2 < 0$ векторы F_2 и r направлены в противоположные стороны (рис. 2).

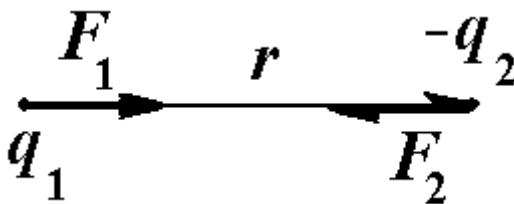


Рис. 2.

Чтобы получить силу F_1 , действующую на первый заряд q_1 , нужно провести вектор r от q_2 к q_1 и подставить его в (2.4).

§ 3. Электрическое поле. Напряженность электрического поля.

Согласно представлениям классической физики взаимодействие между зарядами осуществляется через поле. Всякий электрический заряд изменяет определенным образом свойства окружающего его пространства – создает **электромагнитное поле**. Это поле проявляет себя в том, что на помещенный в какую-либо его точку другой, «пробный» заряд действует некоторая сила, т.е. взаимодействие электрических зарядов осуществляется через «посредника» - электромагнитное поле.

Электрическое поле наряду с веществом является формой существования материи. Ему присущи энергия и импульс, поле является физической реальностью.

Поле, создаваемое *неподвижными зарядами*, не изменяется со временем и называется *электростатическим*.

(Заметим, что движущиеся заряды, кроме электрического поля создают также магнитное поле.)

Скорость распространения электромагнитного поля в пустоте равна $c \approx 300\,000$ км/с.

Для изучения поля рассматривают две его физические характеристики - силовую и энергетическую.

Помещая в соответствующую точку поля пробный заряд, можно обнаружить силу, действующую на него. Величина силы, действующей на заряд, характеризует «интенсивность» поля. Эта сила зависит как от поля, так и от самого пробного заряда.

Например, в случае поля, создаваемого неподвижным точечным зарядом q в точке, положение которой относительно заряда q определяется радиус-вектором $\mathbf{r}$, на пробный точечный заряд q_{np} в этом поле будет по закону Кулона (2.4) действовать сила

$$\mathbf{F} = k \frac{qq_{np}}{r^3} \mathbf{r} \quad (3.1)$$

Сила пропорциональна величине каждого из зарядов. Однако, отношение силы к пробному заряду $\mathbf{F}/q_{np}$ уже не зависит от величины пробного заряда, а зависит только от величин q и $\mathbf{r}$, определяющих поле в данной точке.

Напряженностью $\mathbf{E}$ электрического поля называется векторная величина, равная в каждой точке отношению силы $\mathbf{F}$, действующей на пробный заряд q_{np} , помещенный в эту точку, к величине заряда q_{np} :

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q_{np}}. \quad (3.2)$$

Вектор $\mathbf{E}$ – силовая характеристика электрического поля – численно равен и совпадает по направлению с силой, действующей со стороны поля на помещенный в рассматриваемую точку единичный положительный заряд. Отсюда вытекает простое правило – для определения направления вектора напряженности электрического поля в разных точках пространства в эти точки надо мысленно поместить плюс единицу заряда. На рис 3 показаны картины полей, создаваемых точечным положительным (рис. 3, а) и точечным отрицательным (рис. 3, б) зарядами. Вектор напряженности $\mathbf{E}$ имеет радиальное направление: он направлен от создающего поле заряда q , если это положительный заряд, и к создающему поле заряду q , если он отрицательный.

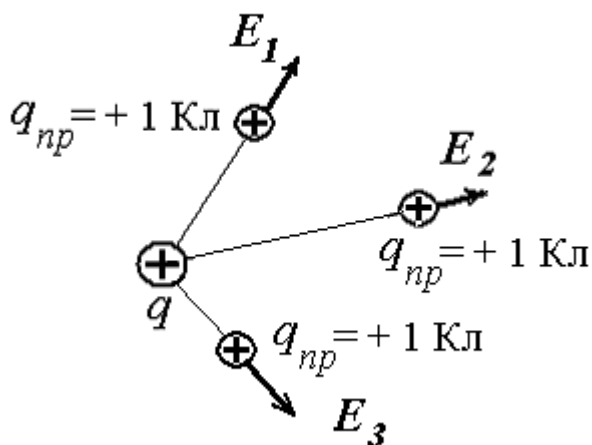


Рис. 3, а

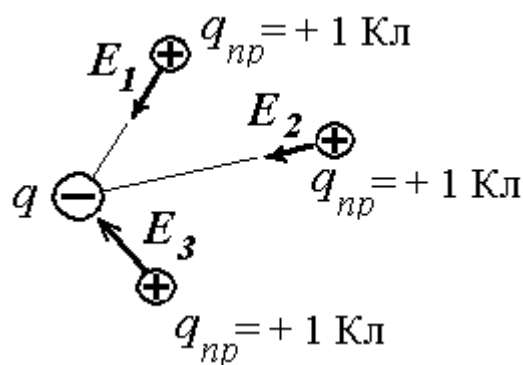


Рис. 3, б

Из формул (3.1) и (3.2) получим *напряженность поля точечного заряда q в любой точке поля*

$$\mathbf{E} = k \frac{q}{r^3} \mathbf{r}, \quad (3.3)$$

где $\mathbf{r}$ – радиус-вектор, проведенный из заряда в данную точку поля. Направлен вектор $\mathbf{E}$ вдоль радиальной прямой от заряда, если он положителен, и к заряду, если он отрицателен.

Модуль E напряженности поля точечного заряда q в точке, отстоящей на расстоянии r от него:

$$E = k \frac{|q|}{r^2} \quad (3.4)$$

Единица измерения напряженности электрического поля в СИ – ньютон на кулон или вольт на метр – равна напряженности такого поля, в котором на заряд в 1 Кл действует сила в 1 Н.

Зная напряженность электрического поля, можно найти силу, действующую на любой заряд q , помещенный в данную точку поля. В соответствии с (3.2) выражение для этой силы имеет вид

$$\mathbf{F} = q \cdot \mathbf{E} \quad (3.5)$$

Принцип суперпозиции. Опытным путем установлено, что напряженность поля, создаваемого несколькими зарядами, равна векторной сумме напряженностей полей, создаваемых каждым зарядом в отдельности:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \dots = \sum \mathbf{E}_i. \quad (3.4)$$

Сложение напряженностей электрических полей по правилу сложения векторов выражает так называемый *принцип суперпозиции (наложения друг на друга) электрических полей*.

Это означает, что присутствие других электрических зарядов никак не сказывается на поле, создаваемом данным зарядом. Отдельные заряды действуют независимо, «не мешая» друг другу, не влияют друг на друга, и поэтому суммарное поле можно определить как векторную сумму от каждого из них в отдельности.

Принцип суперпозиции позволяет рассчитать напряженность поля, созданного любым распределением неподвижных электрических зарядов.

Пример. Поле диполя. Электрическим диполем называется система двух одинаковых по модулю и противоположных по знаку точечных зарядов $+q$ и $-q$, расстояние l между которыми (плечо диполя) мало по сравнению с расстояниями r до тех точек, в которых рассматривается поле системы.

Определим напряженность электрического поля диполя:

- 1) в точке A , лежащей на продолжении плеча l на расстоянии r от его середины (при $r \ll l$) (рис. 1.п);
- 2) в точке B на перпендикуляре к плечу диполя, проведенному через его середину (рис. 2.п);
- 3) в произвольной точке C (рис 3.п).

1).

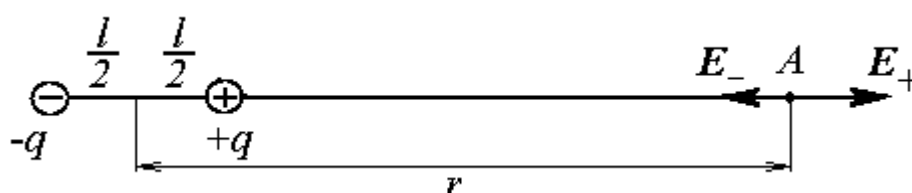


Рис. 1 п.

По принципу суперпозиции:

$$\mathbf{E}_A = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_-$$

Здесь $\mathbf{E}_+$ – напряженность поля, создаваемого зарядом $+q$, а $\mathbf{E}_-$ – зарядом $-q$ в точке A . Поскольку в точке A эти векторы направлены в противоположные стороны, используя формулу (3.4) можно написать:

$$E_A = E_+ - E_- = k \frac{q}{\left(r - \frac{l}{2}\right)^2} - k \frac{q}{\left(r + \frac{l}{2}\right)^2} = k \frac{2qlr}{\left(r^2 - \frac{l^2}{4}\right)^2}.$$

По условию $r \gg l$, поэтому $r^2 \gg \frac{l^2}{4}$ и в знаменателе последней формулы можно пренебречь $\frac{l^2}{4}$ по сравнению с r^2 . Тогда для напряженности поля в точке A получим

$$E_A = k \frac{2ql}{r^3} = k \frac{2p}{r^3} \quad (3.1.п)$$

Плечом диполя называют вектор $\mathbf{l}$, направленный по оси диполя от отрицательного заряда к положительному и численно равный расстоянию между ними. Произведение абсолютной величины заряда на плечо называют электрическим моментом диполя $\mathbf{p} = q \cdot \mathbf{l}$. Тогда

$$\mathbf{E}_A = k \frac{2\mathbf{p}}{r^3},$$

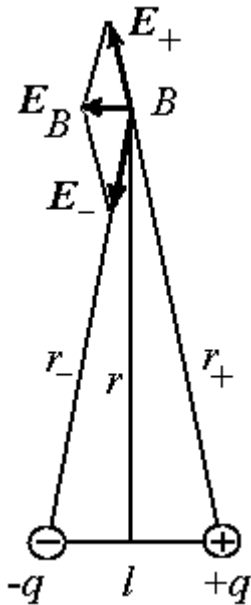


Рис. 2.п

2). Для точки B на прямой, перпендикулярной к оси диполя, векторы $\mathbf{E}_+$ и $\mathbf{E}_-$ имеют одинаковые модули, равные

$$E_+ = E_- = k \frac{q}{r^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2} \approx k \frac{q}{r^2} \quad (3.2.п)$$

Из подобия равнобедренных треугольников, опирающихся на отрезок l и на вектор $\mathbf{E}_B$, следует

$$\frac{E_B}{E_+} = \frac{l}{r_+} = \frac{l}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2}} \approx \frac{l}{r}.$$

Подставив значение E_+ (3.2.п), получим

$$E_B = k \frac{ql}{r^3} = k \frac{p}{r^3}. \quad (3.3.п)$$

Эта зависимость в векторном виде :

$$\mathbf{E}_B = -k \frac{\mathbf{p}}{r^3}. \quad (3.4.п)$$

3). Можно показать, что напряженность поля диполя в произвольной точке C определяется формулой

$$E_C = k \frac{p}{r^3} \sqrt{1 + 3\cos^2 \alpha}, \quad (3.5.п)$$

где α – угол между осью диполя и направлением на данную точку.

Отметим, что в отличие от поля одного точечного заряда, напряженность которого убывает как $\frac{1}{r^2}$, напряженность поля диполя с расстоянием от убывает как $\frac{1}{r^3}$, т.е. быстрее.

§ 4. Линии вектора напряженности. Поток напряженности.

Для графического изображения электрических полей используют линии вектора напряженности или силовые линии. Эти линии проводятся таким образом, чтобы в каждой точке касательная к линии совпадала по направлению с вектором напряженности в этой точке. Силовым линиям приписывают направление: они выходят из положительных зарядов или приходят из бесконечности. Они либо оканчиваются на отрицательных зарядах, либо уходят в бесконечность. На рисунках это направление указывают стрелками на силовой линии.

Условились густоту линий связывать с модулем напряженности поля E . А именно, через единичную площадку, перпендикулярную силовым линиям проводят столько линий, какова в этом месте величина напряженности поля. Таким образом линии проводят гуще в тех местах, где напряженность поля больше, и реже там, где она меньше.

На рис. 4 показаны силовые линии поля уединенных положительного и отрицательного точечных зарядов. Из симметрии следует, что они являются радиальными прямыми, распределенными с одинаковой густотой по всем направлениям.

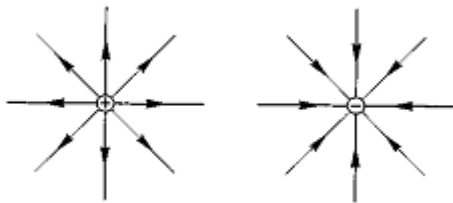


Рис. 4.

Более сложный вид имеет картина линий поля, создаваемого двумя зарядами противоположных или одинаковых знаков (рис 5)

Поле называется *однородным*, если величина и направление вектора E одинакова во

XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXДО 11 веч

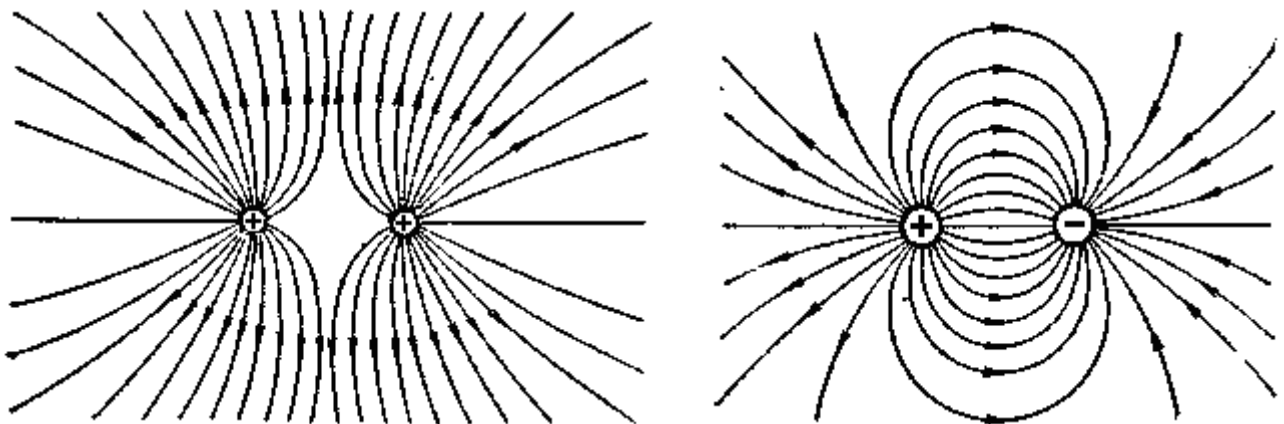


Рис. 5.

всех точках поля. Очевидно, что однородное поле изображается параллельными прямыми силовыми линиями одинаковой густоты.

Введем понятие *потока вектора напряженности* поля через поверхность.

Рассмотрим небольшую площадку, ΔS_0 , расположенную в однородном электростатическом поле перпендикулярно силовым линиям (рис. 6). Определим, какое число силовых линий пронизывает эту площадку. По договоренности густоту линий, т.е. количество линий, рассчитанное на единицу площади поверхности, ориентированной перпендикулярно к линиям, выбирают равной модулю напряженности поля E .

Тогда количество линий, пронизывающих площадку ΔS_0 будет равно

$$\Delta\Phi_E = E \Delta S_0 \quad (4.1)$$

Пусть теперь ΔS – другая площадка, силовые линии образуют с нормалью к этой площадке угол α

Площадь ΔS_0 является проекцией площади ΔS на плоскость, перпендикулярную к силовым линиям.

$$\Delta S_0 = \Delta S \cos \alpha.$$

Здесь α – угол между направлением линий напряженности и направлением нормали к площадке ΔS (рис. 6).

Как видно из рисунка, число линий, пересекающих ΔS и ΔS_0 одинаково. Поэтому количество линий, пронизывающих площадку ΔS будет также равно

$$\Delta\Phi_E = E \Delta S_0 = E \Delta S \cos \alpha$$

Величина $E \cos \alpha$ представляет собой проекцию вектора $\mathbf{E}$ на направление нормали $\mathbf{n}$ к площадке ΔS :

$$E \cos \alpha = E_n$$

Поэтому число силовых линий $\Delta\Phi$, пересекающих площадку ΔS равно

$$\Delta\Phi_E = E_n \Delta S \quad (4.2)$$

Произведение $E_n \Delta S$ носит название потока напряженности поля через поверхность ΔS . Формула (4.2) показывает, что поток вектора $\mathbf{E}$ через поверхность ΔS равен числу силовых линий, пересекающих эту поверхность.

Отметим, что поток вектора напряженности, как и число проходящих через поверхность силовых линий, есть скаляр – алгебраическая величина. Поток считается положительным, если силовые линии пересекают поверхность в направлении нормали и отрицательным – в противоположном направлении.

В случае замкнутых поверхностей под нормалью к площадке dS подразумевают обращенную наружу, т.е. внешнюю нормаль. Тогда поток, выходящий из охватываемой поверхностью области наружу, будет положительным.

Если под dS понимать вектор, направленный перпендикулярно к плоскости площадки в направлении внешней нормали и равный по величине площади этой элементарной площад-

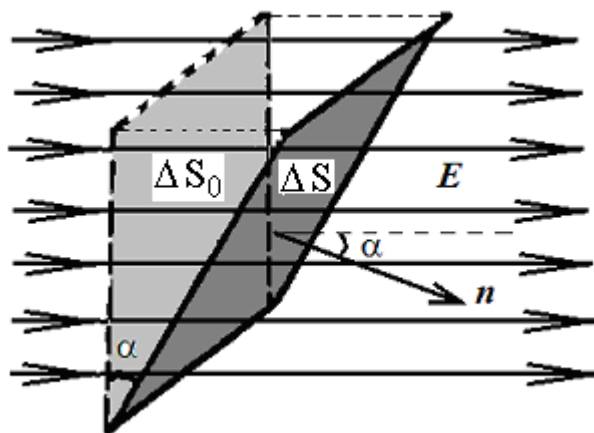


Рис. 6.

ки, то поток вектора напряженности $\mathbf{E}$ через площадку $d\mathbf{S}$ есть *скалярное произведение* векторов $\mathbf{E}$ и $d\mathbf{S}$:

$$d\Phi = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E dS \cos \alpha = E_n dS \quad (4.3)$$

Поток Φ напряженности электрического поля через произвольную поверхность S равен алгебраической сумме потоков через все малые участки этой поверхности – интегралу по поверхности

$$\Phi = \int_S E dS \cos \alpha = \int_S E_n dS = \int_S E dS_n \quad (4.4)$$

§ 5. Теорема Гаусса

Рассмотрим картину силовых линий электрического поля неподвижного точечного заряда (рис. 7). Они представляют собой симметрично расположенные радиальные прямые.

Полное число Φ линий, пересекающих сферическую поверхность радиуса r , будет равно произведению плотности линий на площадь поверхности сферы $4\pi r^2$. Плотность линий должна быть по условию равна численному значению вектора $\mathbf{E}$:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}.$$

Из этой формулы следует, что на всей поверхности сферы напряженность поля будет одинакова по величине и направлена вдоль радиуса, то есть по нормали к поверхности сферы. Следовательно, поток вектора напряженности через охватывающую заряд сферическую поверхность равен

$$\Phi = ES = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad (5.1)$$

Знак потока совпадает со знаком заряда.

Если заменить сферу произвольной замкнутой поверхностью, охватывающей заряд q (рис. 7), то очевидно, что каждая силовая линия, пересекающая сферу, пересечет и эту поверхность. Значит, поток Φ_E вектора $\mathbf{E}$ и для поверхности любой другой формы, если она замкнута и заключает внутри себя точечный заряд q , также будет равен q/ϵ_0 .

Если внутри замкнутой поверхности находится несколько зарядов, то в силу принципа суперпозиции полей суммарная напряженность поля будет представлять собой векторную сумму напряженностей полей каждого из зарядов

$$\Phi_E = \int_S \mathbf{E}_n dS = \int_S (\mathbf{E}_{1n} + \mathbf{E}_{2n} + \dots) dS = \Phi_{E1} + \Phi_{E2} + \dots \quad (5.2)$$

и, следовательно,

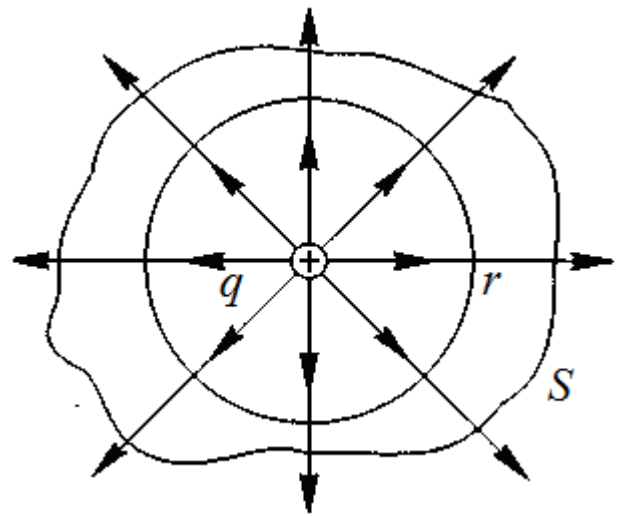


Рис. 7.

$$\Phi_E = \sum_i \frac{q_i}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_i q_i \quad (5.3)$$

Доказанное утверждение называется электростатической теоремой Гаусса: **поток вектора напряженности электрического поля в вакууме через произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме заключенных внутри этой поверхности зарядов, деленной на ε_0 .**

Заметим, что теорема Гаусса тесно связана со справедливостью закона Кулона. Вывод теоремы Гаусса использует сокращение r^2 , а это возможно из-за того, что сила взаимодействия зарядов, описываемая законом Кулона, обратно пропорциональна квадрату расстояния между зарядами. Закон Кулона и теорема Гаусса фактически представляют один и тот же закон природы.

§ 6. Применение теоремы Гаусса для нахождения напряженности полей

1. Поле бесконечной равномерно заряженной плоскости

Пусть бесконечная плоскость заряжена с постоянной *поверхностной плотностью зарядов* σ , которая определяется формулой

$$\sigma = \frac{dq}{dS}, \quad (6.1)$$

где dq – заряд, расположенный на малом участке поверхности площадью dS . Для определенности выберем положительный заряд.

Поскольку плоскость бесконечна и заряжена однородно, следует полагать, что напряженность в любой точке поля должна быть перпендикулярна к плоскости, направлена от нее (выбран случай положительно заряженной плоскости), а густота линий везде одна и та же (рис. 8).

Эта плоскость является плоскостью симметрии поля, в симметричных относительно плоскости точках напряженность должна быть одинакова по величине и противоположна по направлению.

Для применения теоремы Гаусса выберем замкнутую поверхность в виде цилиндрической поверхности с образующими, перпендикулярными к плоскости, и основаниями ΔS , параллельными плоскости и расположенными на одинаковом расстоянии от нее.

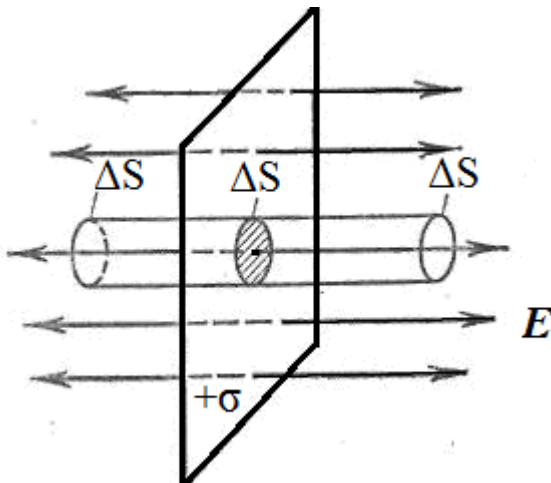


Рис. 8.

Поток вектора напряженности поля через цилиндрическую часть поверхности равен нулю, так как линии напряженности поля скользят вдоль этой поверхности и не пересекают ее.

Внутри построенной таким образом замкнутой поверхности оказывается участок заряженной плоскости ΔS , на котором находится заряд

$$\Delta q = \sigma \Delta S. \quad (6.2)$$

При вычислении потока вектора E через замкнутую поверхность необходимо

учитывать, что силовые линии пронизывают две площадки ΔS – лежащие вправо и влево от плоскости. Следовательно, поток через них равен

$$\Phi_E = E \cdot 2\Delta S. \quad (6.3)$$

С другой стороны, тот же поток по теореме Гаусса равен заряду внутри, деленному на ϵ_0 :

$$2E\Delta S = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma \Delta S,$$

откуда напряженность поля с каждой стороны от равномерно заряженной плоскости в вакууме

$$E_{\text{плоск}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}. \quad (6.4)$$

Следовательно, поле бесконечной заряженной плоскости не зависит от расстояния до нее и перпендикулярно к плоскости.

2. Напряженность поля двух бесконечных параллельных плоскостей, заряженных разноименно с поверхностными плотностями зарядов $+\sigma$ и $-\sigma$ (модель плоского конденсатора).

Изобразим на рис. 9 сплошными силовые линии, начинающиеся на положительных зарядах левой поверхности, и штриховыми – входящие в правую поверхность, несущую отрицательный заряд.

Напряженность поля каждой отдельной плоскости равна по модулю $\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$. В пространстве между

плоскостями напряженности совпадают по направлению, по принципу суперпозиции напряженности полей складываются и общая напряженность равна

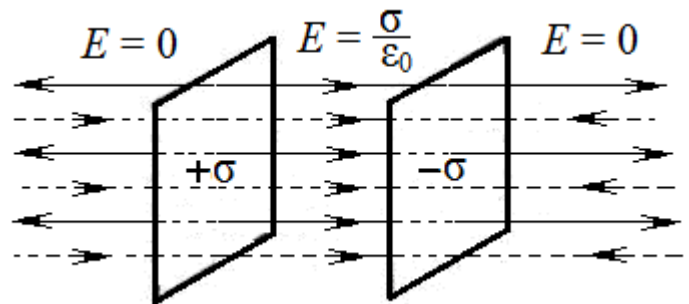
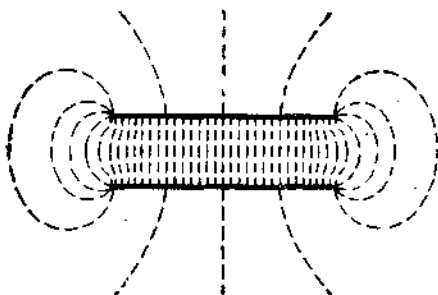


Рис. 9.

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (6.5)$$

Напряженность поля вне пластин равна нулю, так как по абсолютному значению напряженности равны, а по направлению противоположны – поля взаимно уничтожаются.



Ри. 10.

Таким образом, поле оказывается сосредоточенным между пластинами. Напряженность поля во всех точках этой области одинакова по величине и по направлению. Она направлена от положительно заряженной плоскости к отрицательной по нормали к ним. Такое поле является однородным, а ли-

нии напряженности представляют собой совокупность параллельных равноотстоящих прямых. Подобным рассмотренному случаю является поле заряженного плоского конденсатора (рис. 10), хотя он имеет конечные размеры. Однородность поля нарушается только вблизи краев пластин.

3. Напряженность поля равномерно заряженной нити

Рассмотрим бесконечную прямолинейную нить, вдоль которой равномерно распределен заряд с линейной плотностью заряда

$$\tau = \frac{dq}{dl}. \quad (6.6)$$

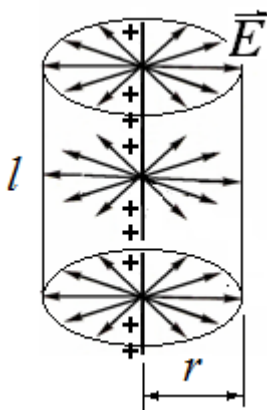


Рис. 11.

Поле бесконечной равномерно заряженной нити симметрично: линии напряженности являются радиальными прямыми, лежащими в плоскостях, перпендикулярных нити.

Чтобы найти напряженность электрического поля на расстоянии r от нити, окружим ее замкнутой цилиндрической поверхностью так, чтобы сама нить являлась осью цилиндра.

Учитывая, что силовые линии пронизывают только боковую поверхность цилиндра и скользят по его основаниям, определим поток вектора $\vec{E}$:

$$\Phi_E = ES_{\text{бок}} = E \cdot 2\pi r l \quad (6.7)$$

Поскольку заряд, охватываемый замкнутой поверхностью, в данном случае равен

$$q = \tau l,$$

применим теорему Гаусса:

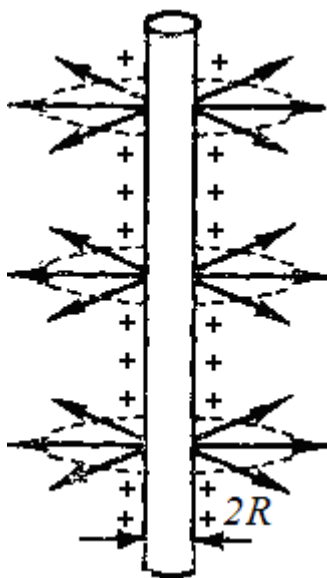


Рис. 12.

$$\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0},$$

$$E \cdot 2\pi r l = \frac{\tau \cdot l}{\epsilon_0}.$$

Откуда

$$E_{\text{нити}} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r}. \quad (6.8)$$

Такой же вид имеет поле бесконечного равномерно заряженного цилиндра (рис.12). Если радиус цилиндра R , поверхностная плотность заряда σ , то заряд, приходящийся на элемент длины dl цилиндра равен

$$dq = \sigma \cdot 2\pi R dl,$$

а количество заряда, приходящегося на единицу длины цилиндра – линейная плотность заряда τ :

$$\tau = \frac{dq}{dl} = \frac{\sigma 2\pi R dl}{dl} = \sigma 2\pi R.$$

Тогда

$$E_{\text{цилиндра}}(r) = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{\sigma R}{\epsilon_0 r} \quad (r \geq R) \quad (6.9).$$

Если $r < R$, то гауссова коаксиальная с заряженной поверхностью замкнутая цилиндрическая поверхность радиуса r не охватывает зарядов, вследствие чего $E(r) = 0$. То есть внутри заряженной бесконечно длинной цилиндрической поверхности поле отсутствует.

4. Напряженность поля равномерно заряженой сферической поверхности.

Пусть заряд q равномерно распределен в вакууме по поверхности сферы радиуса R (рис. 13) с поверхностной плотностью зарядов σ :

$$\sigma = \frac{q}{S_{\text{сферы}}} = \frac{q}{4\pi R^2}.$$

Поле такой заряженной сферы будет центрально симметрично относительно центра сферы.

Это означает, что векторы напряженности $\mathbf{E}$ будут направлены радиально, а величина напряженности зависит только от расстояния r от центра сферы.

В качестве замкнутой гауссовой поверхности выберем также сферическую поверхность радиуса $r > R$, описанную вокруг заряженной сферы с тем же центром.

Поскольку для всех точек поверхности напряженность поля $\mathbf{E}$ перпендикулярна поверхности, поток вектора $\mathbf{E}$ определится так:

$$\Phi_E = E(r) \cdot 4\pi r^2 \quad (6.10)$$

По теореме Гаусса поток равен заряду внутри гауссовой сферы, деленному на ϵ_0 :

$$E(r) 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0},$$

откуда

$$E_{\text{сферы}}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \quad (r \geq R) \quad (6.11)$$

Эта формула совпадает с формулой напряженности поля точечного заряда q , помещенного в центре сферы.

Если радиус вспомогательной поверхности r меньше радиуса R заряженной сферы, то такая поверхность не будет охватывать зарядов. Вследствие этого из теоремы Гаусса следует, что внутри равномерно заряженной сферической поверхности поле отсутствует, $\mathbf{E} = 0$.

5. Напряженность поля равномерно заряженного по объему шара.

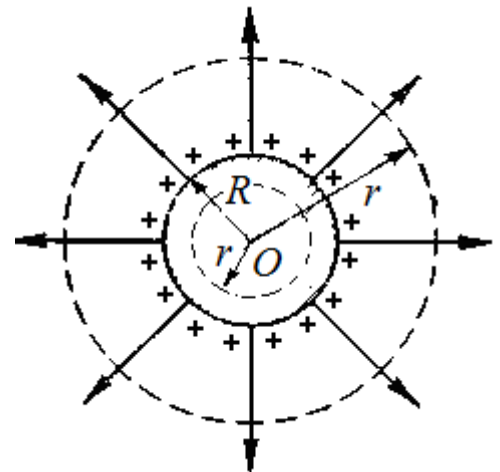


Рис.13.

Пусть заряд q равномерно распределен в вакууме по объему шара радиуса R с объемной плотностью зарядов ρ :

$$\rho = \frac{q}{V_{\text{шара}}} = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3}.$$

Определим напряженность электрического поля внутри шара в точке M на расстоянии $r < R$ от центра. Для этого проведем через точку M вспомогательную концентрическую сферу радиуса r .

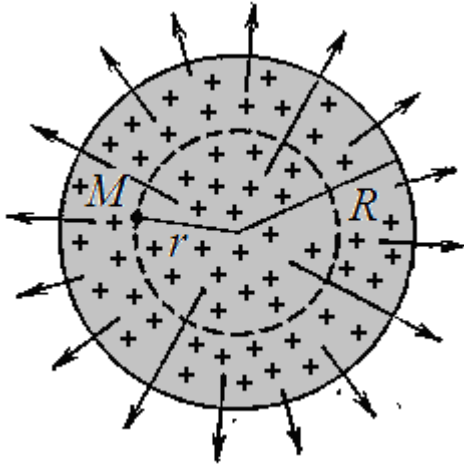


Рис.14.

Вспомогательная поверхность охватывает заряд

$$q_1 = \rho V_1 = \rho \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Только этот заряд q_1 создает поток вектора напряженности Φ_E через поверхность вспомогательной сферы площадью $S = 4\pi r^2$. Поэтому

$$\Phi_E = ES = E4\pi r^2 = \frac{q_1}{\varepsilon_0} = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi r^3}{\varepsilon_0}.$$

Отсюда

$$E_{\text{шара}} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho}{4\pi r^2 \varepsilon_0} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r = \frac{qr}{4\pi \varepsilon_0 R^3}. \quad (r < R) \quad (6.12)$$

Для точек, лежащих вне шара ($r > R$), вспомогательная поверхность охватывает весь заряд q и поле равномерно заряженного шара совпадает с полем точечного заряда, помещенного в центр шара:

$$E = \frac{q}{4\pi \varepsilon_0 r^2}. \quad (r \geq R). \quad (6.13)$$

§ 7. Работа перемещения заряда в электрическом поле. Потенциал поля

Пусть электростатическое поле создается неподвижным точечным зарядом q . Определим, какую работу выполняют силы поля при перемещении заряда q_1 из точки 1 в точку 2 этого поля (рис. 15).

Сила $\mathbf{F}_i$, действующая со стороны поля на заряд q_1 , различна в разных точках поля. Поэтому разобьем мысленно криволинейный путь $1 \rightarrow 2$ на элементарные прямолинейные участки dS , в пределах которых силу можно считать постоянной.

По определению элементарная работа силы на i -м участке равна

$$dA_i = \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{S}_i \cdot \cos \alpha_i,$$

где α_i — угол между направлением силы $\mathbf{F}_i$ и элементарного перемещения $d\mathbf{S}_i$.

Тогда полная работа электрических сил на всем пути выразится суммой элементарных работ, т.е. интегралом

$$A = \int_1^2 F dS \cos \alpha .$$

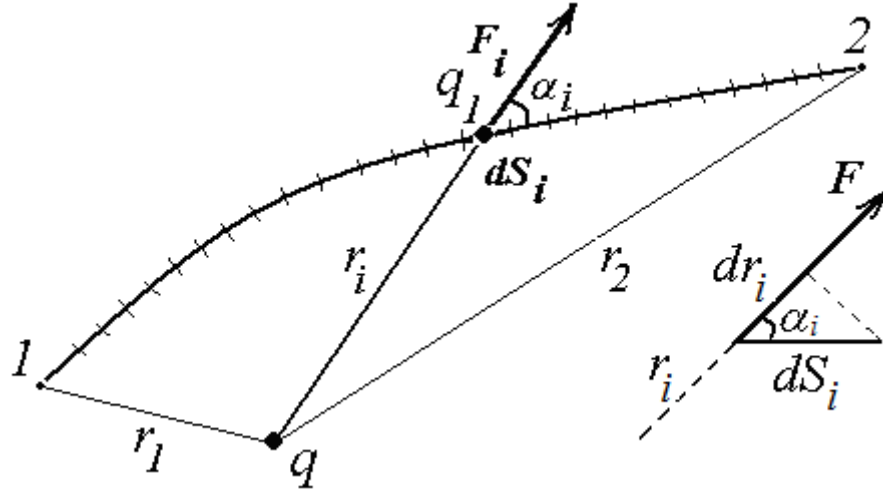


Рис. 15.

Как видно из рисунка

$$dS_i \cdot \cos \alpha_i = dr_i,$$

где dr_i – проекция элемента длины контура dS_i на направление радиус-вектора r_i .

Выразим силу F через напряженность E электрического поля

$$F = Eq_1.$$

Тогда элементарная работа на i -м участке

$$dA_i = F_i \cdot dS_i \cdot \cos \alpha_i = E_i \cdot q_1 \cdot dr_i = kqq_1 \frac{dr_i}{r_i^2}, \quad (7.1)$$

и полная работа

$$A = kqq_1 \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = kqq_1 \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right). \quad (7.2)$$

Из формулы (7.2) следует:

1). Работа не зависит от формы пути, по которому происходит движение заряда q_1 , а зависит только от начального и конечного положений зарядов (от r_1 и r_2).

2). В том случае, когда движение заряда происходит по замкнутому пути, т.е. конечная точка перемещения совпадает с начальной, работа равна нулю. Работу, совершаемую силами поля над зарядом q_1 при обходе по замкнутому контуру, можно представить как

$$\oint_L q_1 E dl \cos \alpha = 0 .$$

Кружок у знака интеграла указывает на интегрирование по замкнутому контуру. После сокращения на постоянную величину q_1 , получим

$$\oint_L E_l dl = 0. \quad (7.3)$$

Здесь через E_l обозначена проекция вектора $\mathbf{E}$ на направление элементарного перемещения $d\mathbf{S}$.

Такой круговой интеграл называется *циркуляцией вектора напряженности вдоль замкнутого контура L* .

Поля, которые удовлетворяют условиям 1) и 2) называются *потенциальными*.

В таких полях работа сил поля совершается за счет убыли потенциальной энергии. Поэтому работу (7.2) можно представить как разность значений потенциальной энергии W , которыми обладает заряд q_1 в точках 1 и 2 :

$$A_{12} = k \frac{qq_1}{r_1} - k \frac{qq_1}{r_2} = W_{p1} - W_{p2}. \quad (7.4)$$

Отсюда для потенциальной энергии заряда q_1 в поле заряда q получаем

$$W_p = k \frac{qq_1}{r} + \text{const} \quad (7.5)$$

Как и в механике, потенциальная энергия определяется не однозначно, а с точностью до произвольной постоянной const . Это связано с тем, что физический смысл имеет только разность потенциальных энергий в двух точках пространства, выражающая работу, производимую при переходе из одной точки в другую. При нахождении же этой разности произвольная постоянная исключается.

Значение const обычно выбирается таким образом, чтобы при удалении заряда на бесконечность ($r = \infty$) потенциальная энергия (7.5) обращалась в нуль. Для этого необходимо положить произвольную постоянную $\text{const} = 0$.

При этом условии получается, что

$$W_p = k \frac{qq_1}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_1}{r} \quad (7.6)$$

Потенциальная энергия (7.6) есть энергия взаимная. Оба взаимодействующих заряда входят в выражение (7.6) симметрично. Поэтому с одинаковым правом можно считать, что либо заряд q_1 находится в электрическом поле заряда q , либо заряд q находится в электрическом поле заряда q_1 .

Величина

$$\varphi = \frac{W_p}{q_1}, \quad (7.7)$$

численно равная потенциальной энергии, которой обладает в данной точке поля единичный положительный заряд, называется *потенциалом* поля в данной точке. Потенциал является энергетической характеристикой поля.

Подставляя в (7.7) значение потенциальной энергии (7.6), получаем для потенциала поля точечного заряда выражение

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}. \quad (7.8)$$

Используя понятие потенциала, выражение для работы, совершаемой полем при перемещении заряда q_1 из точки 1 в точку 2 можно записать в виде

$$A = q_1 (\varphi_1 - \varphi_2). \quad (7.9)$$

Работа, совершаемая электростатическим полем при перемещении заряда, равна произведению величины заряда на разность потенциалов начальной и конечной точек пути.

Если заряд q_1 из точки с потенциалом φ_1 удаляется на бесконечность (где по условию потенциал равен нулю), работа сил поля будет равна

$$A_{1\infty} = q_1 \varphi_1.$$

Тогда можно дать второе определение потенциала.

Потенциал численно равен работе, которую совершают силы поля над единичным положительным зарядом при удалении его из данной точки на бесконечность:

$$\varphi_1 = \frac{A_{1\infty}}{q_1} \quad (7.10)$$

Такую же по величине работу необходимо совершить против сил электрического поля при перенесении единичного положительного заряда из бесконечности в данную точку поля.

Если поле создается системой зарядов, то в силу принц суперпозиции его потенциал равен сумме потенциалов полей каждого из зарядов в отдельности:

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i \quad (7.11)$$

Потенциалы измеряются в вольтах. Разность потенциалов между двумя точками поля равна одному вольту, если при переносе заряда, равного 1 Кл, из одной точки в другую, поле совершает работу в 1 Дж.

$$1 \text{ В} = 1 \text{ Дж/Кл}.$$

Пример 1. Электрическое поле создается двумя зарядами $q_1 = 4$ мкКл и $q_2 = -2$ мкКл, находящимися на расстоянии $a = 10$ см друг от друга. Определить работу A сил поля при перемещении заряда $q = 50$ нКл из точки 1 в точку 2 поля (рис. 3.п).

Работа перемещения заряда из одной точки поля в другую равна произведению заряда на разность потенциалов этих точек

$$A = q(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Для определения потенциалов φ_1 и φ_2 точек 1 и 2 поля применим принцип суперпозиции электрических полей: потенциал электрического поля, созданного двумя зарядами в некоторой точке, равен алгебраической сумме потенциалов, создаваемых отдельными зарядами q_1 и q_2 . Тогда

$$\varphi_1 = kq_1/(a/2) + kq_2/(a/2) = 2k(q_1 + q_2)/a;$$

$$\varphi_2 = kq_1/(a\sqrt{2}) + kq_2/a = k(q_1/\sqrt{2} + q_2)/a.$$

После преобразований окончательно имеем

$$A = kq(q_1(2 - \frac{1}{\sqrt{2}}) + q_2)/a$$

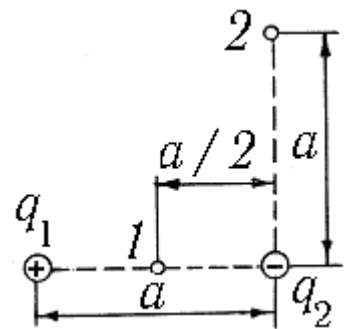


Рис. 3.п

В расчетах потенциалов знаки зарядов учитываются автоматически, т.е. в последнюю формулу надо подставить $q_2 = -2 \cdot 10^{-6}$ Кл.

Подставим числа

$$A = 9 \cdot 10^9 \cdot 50 \cdot 10^{-9} \left(4 \cdot 10^{-6} \left(2 - \frac{1}{1,41} \right) - 2 \cdot 10^{-6} \right) / 0,1 \approx 1,43 \cdot 10^{-2} \text{ Дж} = 14,3 \text{ мДж}.$$

Пример 2. К закрепленной частице, заряд которой $q_1 = 2$ нКл, из бесконечности со скоростью $v = 0,1$ м/с приближается заряженная частица, масса которой $m = 40$ мг и заряд $q = 1$ нКл. На какое наименьшее расстояние r они сблизятся?

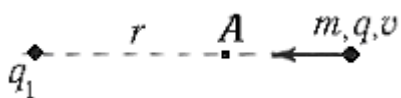


Рис. 4 п.

В точке A неподвижный заряд q_1 создает электрическое поле с потенциалом

$$\varphi_A = k \frac{q_1}{r}.$$

Тогда потенциальная энергия взаимодействия зарядов в точке A

$$W_p = q\varphi_A = \frac{kqq_1}{r}.$$

Потенциальная энергия движущейся частицы в бесконечности равна нулю. По закону сохранения энергии в момент остановки подвижной частицы в точке A начальная кинетическая энергия переходит в потенциальную энергию кулоновского отталкивания

$$\begin{aligned} \frac{mv^2}{2} &= \frac{kqq_1}{r}, \\ r &= \frac{2kqq_1}{mv^2}. \end{aligned}$$

Подставляя числа, найдем

$$r = \frac{2 \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-9} \cdot 2 \cdot 10^{-9}}{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot (0,1)^2} = 9 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 9 \text{ см}$$

§ 8. Эквипотенциальные поверхности. Связь между напряженностью и потенциалом

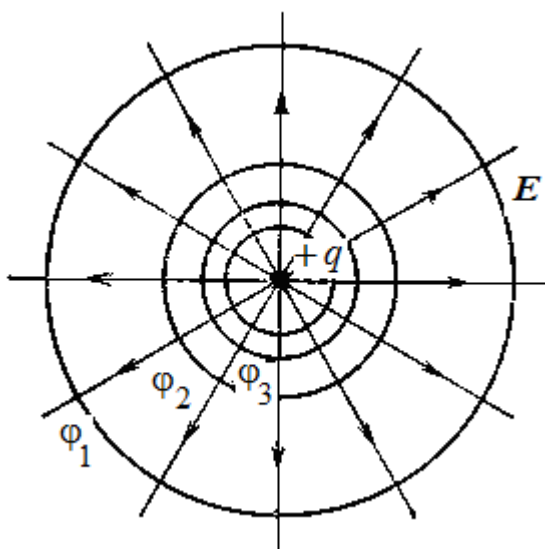


Рис. 16.

Для графического изображения поля наряду с силовыми линиями используют *эквипотенциальные поверхности*. Геометрическое место точек, имеющих равный потенциал, называется поверхностью равного потенциала или эквипотенциальной поверхностью $\varphi = \text{const}$.

В случае уединенного точечного заряда, как следует из формулы (7.8)

$\varphi = \text{const}$ при $r = \text{const}$, т.е. эквипотенциальные поверхности представляют собой концентрические сферы.

На плоскости эти поверхности вырождаются в концентрические окружности (рис. 16).

При перемещении заряда по эквипо-

тенциальной поверхности поле, как следует из выражения $A = q_1 (\varphi_1 - \varphi_2)$, не совершает над ним работы, т.к. $(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$.

Тогда из формулы работы $A_i = F_i \cdot dS_i \cdot \cos \alpha_i$ следует, что $\cos \alpha_i = 0$, т.е. силовые линии поля всюду перпендикулярны эквипотенциальным поверхностям.

Взаимная перпендикулярность силовых линий поля и эквипотенциальных поверхностей справедлива не только для поля точечного заряда, но и для сколь угодно сложных электростатических полей.

Обе характеристики поля – векторная напряженность E и скалярная потенциал φ связаны между собой.

Чтобы установить связь потенциала с напряженностью поля рассмотрим две точки поля 1 и 2, принадлежащие двум близким эквипотенциальным поверхностям $\varphi_1 = \text{const}$ и $\varphi_2 = \text{const}$ (рис. 17).

Предположим, что пробный заряд переходит из точки 1 в точку 2 вдоль прямолинейного отрезка Δl . Обе точки нужно выбрать достаточно близко друг от друга, чтобы можно было считать напряженность поля, и, следовательно, силу, действующую на пробный заряд, на отрезке Δl постоянной.

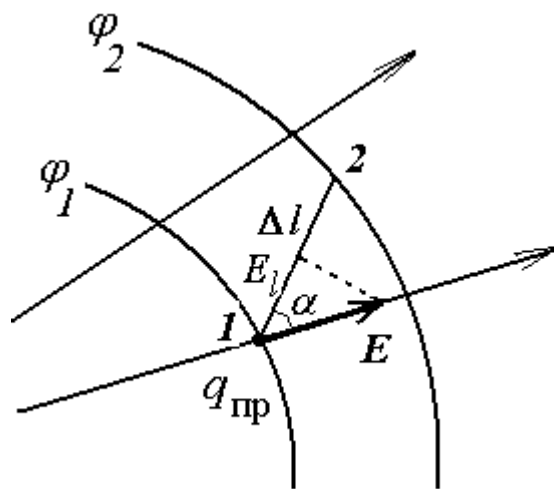


Рис.17.

Для работы электростатического поля по перемещению пробного заряда $q_{пр}$ на пути Δl можно написать два выражения.

С одной стороны, работа силы $F = q_{пр} E$ на перемещении Δl равна

$$A = q_{пр} E \Delta l \cos \alpha = q_{пр} E_l \Delta l.$$

Как видно из рис. 17 $E_l = E \cos \alpha$ – это проекция вектора E на направление отрезка Δl .

С другой стороны, работа перемещения заряда в электростатическом поле

$$A = q_{пр} (\varphi_1 - \varphi_2).$$

Приравняем оба выражения для работы. После сокращения на величину пробного заряда получим

$$E_l \Delta l = (\varphi_1 - \varphi_2).$$

Отсюда

$$E_l = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\Delta l} = - \frac{\Delta \varphi}{\Delta l} \quad (8.1)$$

Минус в этой формуле обусловлен тем, что $\Delta \varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ – это *приращение* потенциала (от конечного значения отнимается начальное), а $\varphi_1 - \varphi_2 = - \Delta \varphi$ – это *убыль* потенциала.

Переходя в выражении (8.1) к пределу при условии, что перемещение Δl стремится к нулю, получим

$$E_l = - \frac{\partial \varphi}{\partial l} \quad (8.2)$$

Производная $\frac{\partial \varphi}{\partial l}$ выражает *быстроту изменения потенциала в данном направлении*. Следовательно, *проекция вектора напряженности электростатического поля на произвольное направление численно равна скорости убывания потенциала поля на единицу длины в этом направлении*.

Символ частной производной показывает, что дифференцирование производится только по l , считая другие переменные постоянными.

Вдоль силовой линии $\cos \alpha = 1$, в этом случае E_l и $\left| \frac{\partial \varphi}{\partial l} \right|$ достигают максимального значения, равного $|E|$. Если $\mathbf{n}$ – нормаль к эквипотенциальным поверхностям, то

$$E = -\frac{\partial \varphi}{\partial n}. \quad (8.3)$$

Таким образом, потенциал изменяется наиболее быстро в направлении силовой линии. Знак минус в уравнениях (8.2) и (8.3) указывает на то, что вектор $\mathbf{E}$ напряженности поля направлен в сторону наиболее быстрого убывания потенциала.

Поскольку направление перемещения можно выбирать произвольно, проекции вектора напряженности на координатные оси будут иметь вид:

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (8.4)$$

Выразим вектор $\mathbf{E}$ через его составляющие:

$$\mathbf{E} = E_x \mathbf{i} + E_y \mathbf{j} + E_z \mathbf{k} = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \mathbf{k} \right). \quad (8.5)$$

Здесь $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ – единичные векторы координатных осей. Вектор, определяемый выражением (8.5), называется **градиентом потенциала** и обозначается как $\text{grad } \varphi$.

Градиентом некоторой скалярной величины, являющейся функцией пространственных координат, является вектор, направленный в сторону наиболее быстрого возрастания этой величины и численно равный скорости ее роста в этом направлении. Поэтому связь между напряженностью и потенциалом электростатического поля можно представить как

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi. \quad (8.6)$$

Напряженность в какой-либо точке электростатического поля равна градиенту потенциала в этой точке, взятому с обратным знаком.

Формула (8.2) позволяет по известным значениям φ найти напряженность поля в каждой точке. Можно решить и обратную задачу – по заданным значениям $\mathbf{E}$ в каждой точке найти разность потенциалов между двумя произвольными точками поля. Из (8.2) следует

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 E_l dl. \quad (8.7)$$

Интеграл можно брать по любой линии, соединяющей точки 1 и 2, поскольку работа сил поля не зависит от пути.

§ 9. Вычисление разности потенциалов некоторых простейших полей

1. Поле равномерно заряженной плоскости и плоского конденсатора.

Напряженность поля равномерно заряженной бесконечной плоскости определяется формулой

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0},$$

где σ – поверхностная плотность заряда. Поле плоскости ортогонально к ней.

Согласно выражению (8.7), связывающему разность потенциалов с напряженностью электрического поля, разность потенциалов между точками, отстоящими от плоскости на расстояния x_1 и x_2 равна

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{x_1}^{x_2} E dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} dx = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} (x_2 - x_1). \quad (9.1)$$

Для электростатического поля в вакууме между двумя параллельными плоскостями, заряженными разноименно (поле плоского конденсатора) (рис 18) получим разность потенциалов (называемую *напряжением*) между двумя бесконечными заряженными пластинами (обкладками конденсатора)

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_0^d \frac{\sigma}{\varepsilon_0} dx = \frac{\sigma d}{\varepsilon_0} \quad (9.2)$$

2. Поле равномерно заряженной бесконечной нити

Напряженность такого поля определяется формулой

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \frac{\tau}{r}.$$

Следовательно, разность потенциалов между двумя точками поля, лежащими на расстояниях r_1 и r_2 от нити (рис. 19), равна

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} E dr = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}. \quad (9.3)$$

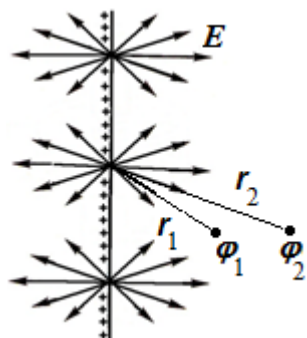


Рис. 19.

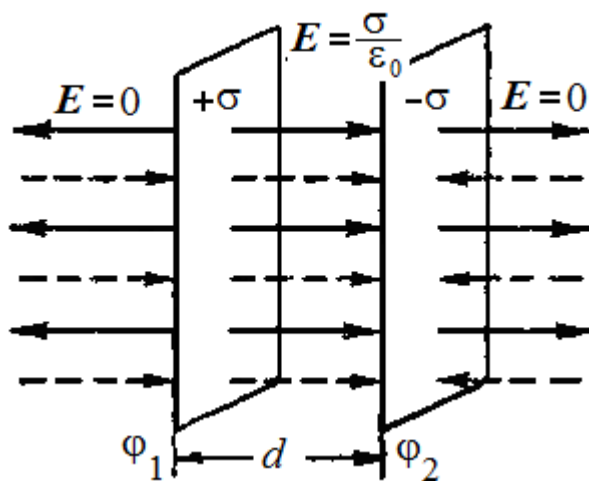


Рис.18.

Глава 2. Электрическое поле в диэлектриках

Диэлектрики

§ 10. Типы диэлектриков. Диполь во внешнем электрическом поле

Все вещества в природе можно условно *разделить на две категории*: проводники – хорошо пропускающие электрический ток, и диэлектрики (изоляторы) – практически не пропускающие ток. Промежуточное положение занимают полупроводники, пропускающие ток при определенных условиях.

С точки зрения классической физики в металлических проводниках имеется много так называемых свободных электронов, оторвавшихся от ионов кристаллической решетки. Включение сколь угодно малого внешнего электрического поля вызывает направленное движение электронов – электрический ток.

Диэлектрики – это вещества, плохо проводящие электрический ток. Это объясняется тем, что в диэлектриках, в отличие от металлов, практически отсутствуют свободные электроны, все электроны связаны с атомами. Электрическое поле не отрывает электроны от атомов, а только смещает их на малые (порядка межатомных) расстояния, т.е. на расстояния порядка 10^{-7} - 10^{-8} см.

Все диэлектрики можно разделить на такие три группы.

1. Диэлектрики с полярными молекулами.

Молекулы некоторых веществ, например жидкостей – воды H_2O , соляной кислоты HCl , бензола C_6H_6 и др., твердых тел – H_2S , газов – SO_2 , обладают собственным дипольным моментом.

Это означает, что в таких молекулах центры «тяжести» положительных и отрицательных зарядов смещены друг относительно друга. Подобные молекулы называются **полярными**.

Электрическое поле полярной молекулы можно представить как поле некоторого эквивалентного электрического диполя с постоянным дипольным моментом $\mathbf{p} = q\mathbf{l}$, где l – расстояние между электрическими центрами.

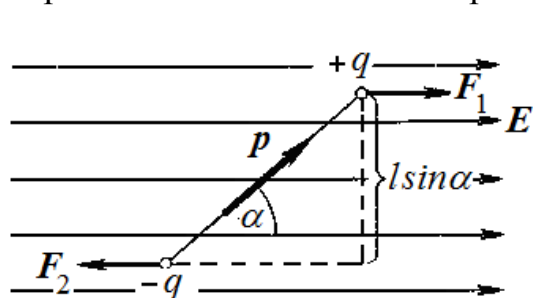


Рис. 20.

Рассмотрим поведение жесткого электрического диполя, помещенного в однородное электрическое поле.

Пусть вектор $\mathbf{p}$ его дипольного момента направлен под углом α к направлению внешнего поля $\mathbf{E}$. Диполь называют жестким, если в электрическом поле расстояние l между его зарядами не изменяется. Электрический момент диполя равен численно $p = ql$ и направлен от отрицательного заряда к положительному.

Электрический момент диполя равен численно $p = ql$ и направлен от отрицательного заряда к положительному.

На положительный заряд $+q$ действует сила, совпадающая по направлению с вектором $\mathbf{E}$ и равная $\mathbf{F}_1 = q\mathbf{E}$, а на отрицательный заряд – противоположного направления и равная $\mathbf{F}_2 = -q\mathbf{E}$.

На диполь действует пара сил $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$. Механический вращающий момент этой пары численно равен произведению модуля силы на плечо пары $l \sin \alpha$:

$$M = Fl \sin \alpha = qEl \sin \alpha = pE \sin \alpha. \quad (10.1)$$

Вектор $\mathbf{M}$ момента равен векторному произведению векторов $\mathbf{p}$ и $\mathbf{E}$

$$\mathbf{M} = [\mathbf{p}\mathbf{E}]. \quad (10.2)$$

Момент $\mathbf{M}$ стремится повернуть диполь так, чтобы его момент $\mathbf{p}$ установился по направлению поля.

Для того, чтобы повернуть диполь на некоторый угол, нужно совершить определенную работу.

$$dA = M d\alpha = pE \sin \alpha d\alpha. \quad (10.3)$$

Эта работа затрачивается на увеличение потенциальной энергии W , которой обладает диполь в электрическом поле

$$dW = dA = pE \sin \alpha d\alpha. \quad (10.4)$$

Интегрируя, получаем

$$W = -pE \cos \alpha + \text{const} = -\mathbf{p}\mathbf{E} + \text{const} \quad (10.5)$$

Если положить $\text{const} = 0$, то энергия диполя равна нулю тогда, когда диполь устанавливается перпендикулярно полю ($\alpha = \pi/2$). Минимальное значение энергии, равное $-pE$, получается, когда $\alpha = 0$, т. е. когда диполь ориентирован своим моментом вдоль поля.

Это соответствует положению устойчивого равновесия. При отклонении диполя от этого положения снова возникает механический момент, который возвращает диполь в первоначальное положение.

Когда внешнее электрическое поле отсутствует, дипольные моменты молекул в полярных диэлектриках из-за наличия теплового движения ориентированы хаотически (рис. 21).

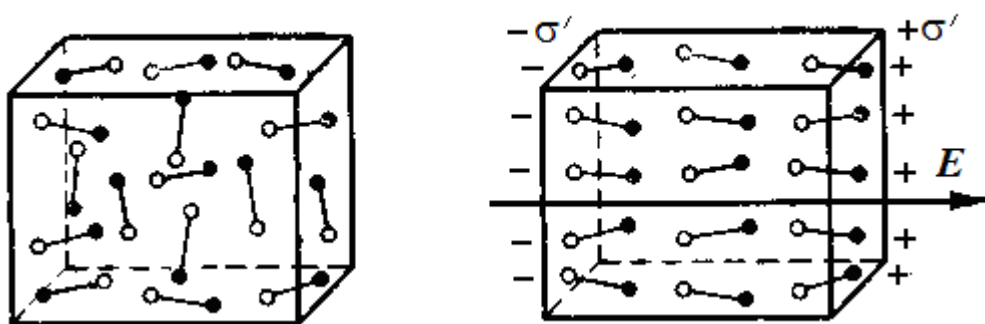


Рис. 21.

При наличии внешнего поля наиболее устойчивым является состояние, соответствующее минимуму потенциальной энергии, т.е. состояние, при котором дипольные моменты молекул $\mathbf{p}$ были параллельны напряженности поля $\mathbf{E}$.

Вследствие совместного действия обоих факторов (сил поля и хаотического теплового движения) в диэлектрике преобладает ориентация дипольных моментов полярных молекул в направлении поля (рис 21).

Процесс смещения связанных заряженных частиц диэлектрика под действием внешнего электрического поля называется **поляризацией диэлектрика**.

В рассматриваемом случае внешнее поле вызывает поляризацию, выстраивая, ориентируя дипольные моменты молекул по направлению поля. Такая поляризация называется **ориентационной**.

Тепловое движение, разумеется, мешает выстраиванию молекул, так что ориентационная поляризация уменьшается с ростом температуры.

2. Диэлектрик с неполярными молекулами

Каждая молекула (или атом) диэлектрика имеет положительно заряженные ядра и отрицательно заряженные электроны, которые движутся вокруг ядер. Положительные заряды всех ядер равны по абсолютной величине заряду всех электронов, и поэтому молекула вещества в целом электрически нейтральна.

Ко второй группе можно отнести диэлектрики, в молекулах которых центры положительных и отрицательных частиц совпадают (рис.22).

Молекулы таких диэлектриков называются **неполярными**. В частности, к диэлектрикам этой группы принадлежат водород H_2 , азот N_2 , кислород O_2 , окись углерода CO , CCl_4 , парафин, бензол и ряд других углеводородов. В отсутствие внешнего электрического поля дипольный момент таких молекул равен нулю.

Если во внешнее поле внести диэлектрик с неполярными молекулами, то электронные орбиты деформируются, и поэтому смещается электрический центр отрицательных частиц относительно центра положительных частиц. Неполярные молекулы становятся полярными (рис.22). В этом состоит механизм **электронной** поляризации.

Такие наведенные диполи называют упругими (квазиупругими), в отличие от жестких полярных молекул.

При внесении неполярного диэлектрика в электрическое поле все наведенные дипольные моменты располагаются цепочками вдоль линий напряженности. Вследствие этого грани диэлектрика приобретают разноименные заряды – диэлектрик поляризуется.

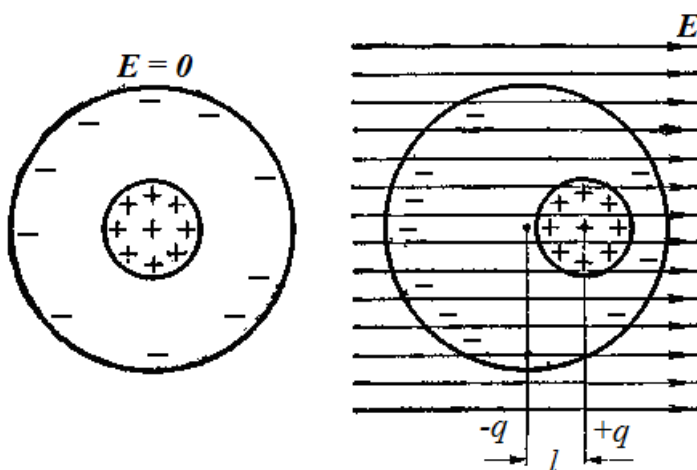


Рис.22.

3. Ионные диэлектрики

К третьей группе диэлектриков принадлежат **ионные кристаллы**, в которых в пространственных решетках правильно чередуются положительные и отрицательные ионы (например, NaCl, KCl, CsCl). В таких кристаллах нельзя выделить отдельные молекулы, их можно рассматривать как совокупность двух ионных решеток, вставленных друг в друга (рис. 23).

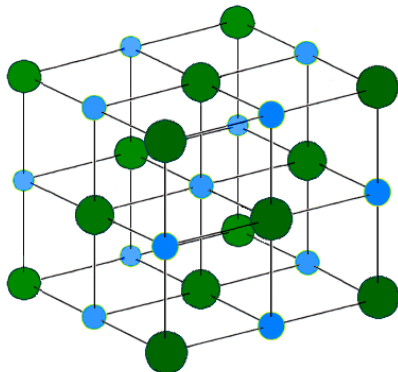


Рис. 23

На рисунке маленькие шарики – ионы натрия, большие – ионы хлора. Все кристаллы поваренной соли имеют одинаковую кубическую форму.

Когда внешнее электрическое поле отсутствует, электрические силы взаимодействия заряженных ионов в узлах решетки взаимно уравниваются, и на каждой грани кристалла располагается одинаковое количество положительных и отрицательных ионов. Если такой кристалл внести в электрическое поле, то под действием сил поля положительные ионы смещаются в направлении вектора напряженности, а все отрицательные ионы – в противоположном направлении.

Поэтому на противоположных гранях кристалла преобладают ионы одного знака, и кристалл будет поляризованным.

§ 11. Поляризуемость. Диэлектрическая восприимчивость

Для количественно оценки поляризации диэлектрика вводится понятие **вектора поляризации (поляризуемости)**. Под поляризуемостью понимают сумму электрических дипольных моментов молекул единицы объема поляризованного диэлектрика, иными словами, поляризуемость определяется электрическим дипольным моментом единицы объема поляризованного диэлектрика.

$$\mathbf{P} = \frac{\sum \mathbf{p}_i}{\Delta V}, \quad (11.1)$$

где $\mathbf{p}_i$ – дипольный момент i –й молекулы, а суммирование производится по всем молекулам, содержащимся в объеме ΔV .

Опыт показывает, что внешнее электрическое поле либо создает дипольные моменты, ориентированные по полю (упругая поляризация), либо ориентирует дипольные моменты молекул (ориентационная поляризация), вследствие чего диэлектрик приобретает макроскопический дипольный момент.

Следовательно, поляризуемость $\mathbf{P}$ должна быть пропорциональна напряженности внешнего поля

$$\mathbf{P} = \kappa \epsilon_0 \mathbf{E}, \quad (11.2)$$

где коэффициент κ носит название **диэлектрической восприимчивости**. Эта величина характеризует способность среды к поляризации.

Зная величину поляризуемости, можно определить поверхностную плотность избыточных, так называемых **поляризационных зарядов**, появляющихся во внешнем электрическом поле на поверхности диэлектрика.

Рассмотрим образец диэлектрика в виде наклонной призмы с площадью основания S и ребром l , помещенный в электрическое поле, параллельное его боковому ребру (рис.24). На одном из оснований призмы появляются отрицательные заряды с поверхностной плотностью $-\sigma'$, а на другой – положительные заряды с поверхностной плотностью $+\sigma'$. Очевидно, что полный дипольный момент призмы равен произведению величины поляризационного заряда $q' = \sigma' \cdot S$, возникающего на ее торцах, на расстояние между ними l :

$$P = \sigma' \cdot S \cdot l.$$

Согласно определению можно записать, что поляризуемость (электрический момент единицы объема) равна

$$P = \frac{q'l}{V} = \frac{\sigma'Sl}{V}$$

Если α – угол между направлением нормали к основанию призмы и вектором P , то объем призмы равен

$$V = Sh = Sl \cos \alpha$$

Подставив значение объема призмы, получим

$$P = \frac{\sigma'Sl}{Sl \cos \alpha},$$

откуда

$$\sigma' = P \cos \alpha = P_n \quad (11.3)$$

Поверхностная плотность поляризационных зарядов равна проекции вектора поляризуемости P на внешнюю нормаль n к рассматриваемой поверхности диэлектрика.

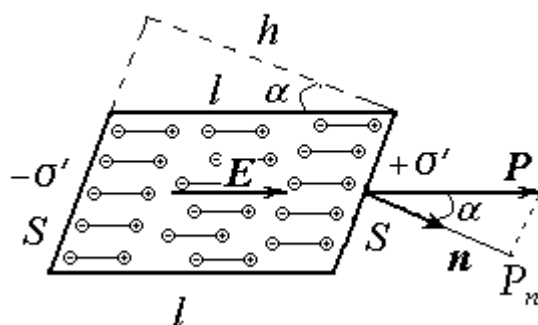


Рис. 24.

§ 12. Электрическое смещение Диэлектрическая проницаемость

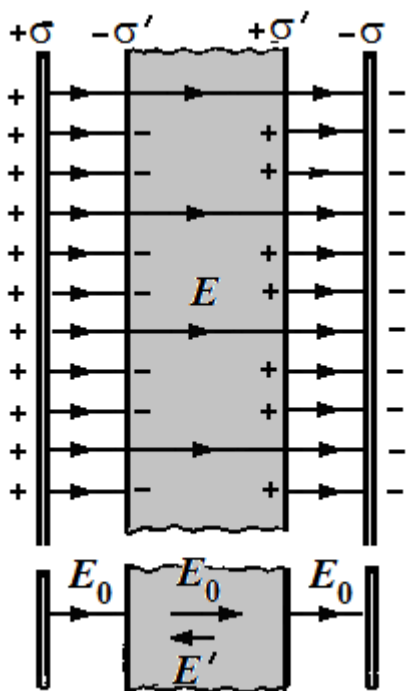


Рис. 25.

Чтобы выяснить физический смысл диэлектрической проницаемости ϵ , рассмотрим поле, создаваемое в вакууме двумя бесконечными разноименно заряженными пластинами, заряженными с поверхностной плотностью свободных зарядов $+\sigma$ и $-\sigma$.

Предположим, что между ними помещен слой однородного диэлектрика (рис.25).

Под действием поля диэлектрик поляризуется, т.е. происходит смещение положительных зарядов по полю и отрицательных – против поля.

В результате поляризации поверхности диэлектрика также приобретают поверхностные заряды $+\sigma'$ и $-\sigma'$, причем около положительной заряженной плоскости будет находиться отрицательно заряженная поверхность диэлектрика.

Из рис.25 видно, что электрическое поле E' связанных зарядов направлено противоположно внешнему полю E_0 , созданному свободными зарядами.

Согласно принципу суперпозиции напряженность поля E внутри диэлектрика есть сумма этих двух полей:

$$E = E_0 + E', \quad (12.1)$$

или в проекциях

$$E = E_0 - E'. \quad (12.2)$$

Оба поля создаются двумя бесконечными заряженными плоскостями и равны соответственно $E_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ и $E' = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0}$. Поэтому

$$E = \frac{\sigma - \sigma'}{\varepsilon_0}. \quad (12.3)$$

Поскольку напряженность поля внутри диэлектрика меньше, чем вне его, то часть линий вектора напряженности, начинающихся (или заканчивающихся) на свободных зарядах, заканчиваются (соответственно, начинаются) на связанных зарядах (рис.25).

Таким образом, вектор напряженности, проходя через воздушный зазор между плоскостями и диэлектриком, испытывает скачкообразное изменение. Это создает неудобство при расчете электростатических полей.

Связанные заряды появляются на поверхностях диэлектрика под действием поля, созданного свободными зарядами. Поэтому первичным источником поля в диэлектрике являются именно свободные заряды.

Результирующее поле в диэлектрике E равно векторной сумме поля свободных зарядов и поля поляризационных связанных зарядов. Но поверхностная плотность связанных зарядов, определяющая поле связанных зарядов, в свою очередь зависит от напряженности результирующего поля в диэлектрике

$$\sigma' = P_n = \kappa \varepsilon_0 E_n.$$

Возникает затруднение, разрешить которое можно путем введения вспомогательной величины D , источниками которой являются *только свободные заряды*.

Эту величину D называют **электрическим смещением** поля и определяют по формуле:

$$D = \varepsilon_0 E + P \quad (12.4)$$

С учетом соотношения $P = \kappa \varepsilon_0 E$ выражение для электрического смещения приобретает вид

$$D = \varepsilon_0 E + \kappa \varepsilon_0 E = \varepsilon_0 (1 + \kappa) E = \varepsilon \varepsilon_0 E, \quad (12.5)$$

где безразмерная величина

$$\varepsilon = 1 + \kappa \quad (12.6)$$

называется **диэлектрической проницаемостью** рассматриваемого вещества.

Как было доказано ранее, поверхностная плотность связанных зарядов равна нормальной составляющей вектора поляризации

$$\sigma' = P_n = \kappa \varepsilon_0 E_n.$$

Поскольку поле внутри диэлектрика перпендикулярно к его поверхности, $E_n = E$ и $\sigma' = \kappa \epsilon_0 E$. Подставляя это значение в формулу (12.3), получим

$$E = E_0 - \frac{\sigma'}{\epsilon_0} = E_0 - \kappa E,$$

откуда

$$E = \frac{E_0}{1 + \kappa} = \frac{E_0}{\epsilon} \dots\dots\dots (12.4)$$

Таким образом, *величина диэлектрической проницаемости показывает, во сколько раз напряженность электрического поля в диэлектрике меньше, чем напряженность поля, которое создается тем же расположением свободных зарядов в вакууме.*

У газов диэлектрическая проницаемость близка к единице, у твердых диэлектриков не превышает 10, а у жидких диэлектриков не превышает 100. Особый класс диэлектриков – сегнетоэлектрики – имеют аномально большие значения $\epsilon \sim 10^4$.

Умножив (12.4) на $\epsilon \epsilon_0$, получим электрическое смещение D внутри диэлектрика:

$$D = \epsilon \epsilon_0 E = \epsilon_0 E_0. \quad (12.5)$$

Следовательно, *внутри диэлектрика электрическое смещение совпадает с электрическим смещением внешнего поля.*

Электрическое смещение D описывает поле, создаваемое свободными зарядами. Однако связанные заряды, возникающие в диэлектрике, могут вызвать перераспределение свободных зарядов, создающих поле. Поэтому вектор D характеризует электростатическое поле, создаваемое свободными зарядами (т.е. в вакууме), но при таком их распределении в пространстве, какое имеется при наличии диэлектрика.

Глава 3. Проводники в электрическом поле

§ 13. Равновесие зарядов на проводнике

Тела, в которых имеется большое количество свободных зарядов называются проводниками. В проводниках электрические заряды могут свободно перемещаться под действием сколь угодно малой силы. Жидкости и газы в обычном состоянии являются плохими проводниками электричества. Если же газ ионизовать, а в жидкости растворить какую-либо соль, кислоту или щелочь (такой проводящий раствор будет называться электролитом), то проводимость их увеличивается.

Если проводниками являются жидкости и газы, то в них движутся как положительные, так и отрицательные заряженные частицы: положительные и отрицательные ионы и электроны.

В металлах же, которые являются лучшими проводниками, чем жидкости и газы, проводимость обусловлена только движением электронов. Положительно заряженные ионы металла образуют кристаллическую ре-

шутку и удерживаются вблизи положений равновесия силами взаимодействия с «газом свободных электронов». Электронный газ образуется за счет одного или нескольких электронов, отданных каждым атомом

Рассмотрим незаряженный металлический проводник, внесенный во внешнее электрическое поле (рис. 26).

Под действием поля свободные заряды начнут перемещаться и будут продолжать двигаться до тех пор, пока дополнительное поле E' , вызванное разделением зарядов внутри проводника (рис.27), не скомпенсирует полностью внешнее поле E_0 так, чтобы

$$E' + E_0 = 0. \quad (13.1)$$

Только в этом случае будет отсутствовать сила, действующая на заряды, а значит, прекратится их направленное движение. При равновесии зарядов их

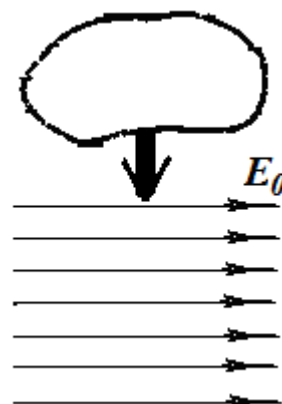


Рис. 26.

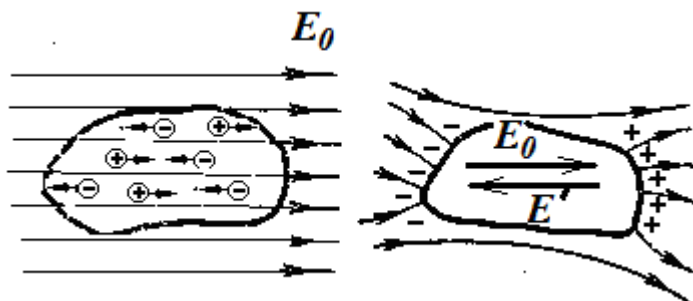


Рис.27.

направленное движение внутри проводника прекращается. В состоянии равновесия напряженность электрического поля внутри проводника равна нулю.

Поскольку внутри проводника $E = 0$, из соотношения

ния $\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 E_n dn$ следует, что для произвольных точек 1 и 2, взятых

внутри проводника, $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$. Иными словами, в состоянии равновесия потенциал всех точек внутри проводника одинаков.

$$\varphi = \text{const} \quad (13.2)$$

Заметим, что время, в течение которого в проводнике происходит перераспределение зарядов и устанавливается равновесие, для обычных металлов чрезвычайно мало, например, для меди $\sim 10^{-19}$ с.

Следующее условие равновесия зарядов на проводнике: *напряженность поля на поверхности проводника должна быть в каждой точке направлена по нормали к поверхности:*

$$E = E_n. \quad (13.3)$$

В противном случае под действием тангенциальной составляющей напряженности электроны продолжали бы перемещаться вдоль поверхности, что также противоречит условию равновесия.

Учитывая, что силовые линии всегда перпендикулярны к эквипотенциальной поверхности, заключаем, что в случае равновесия зарядов поверхность проводника будет эквипотенциальной.

Перераспределение зарядов в проводнике под влиянием внешнего электрического поля называется **электростатической индукцией**. Возникающие при этом на проводнике заряды, численно равные друг другу, но противоположные по знакам, называются *индуцированными* или *наведенными* зарядами.

§ 14. Электрическое поле заряженного проводника

Если проводнику **сообщить некоторый заряд q** , то он распределяется так, чтобы соблюдались условия равновесия.

Представим себе произвольную замкнутую поверхность, полностью заключенную в пределах тела. Поскольку при равновесии зарядов поле в каждой точке внутри проводника отсутствует, поток вектора напряженности $\mathbf{E}$ через эту поверхность равен нулю. Согласно теореме Гаусса алгебраическая сумма зарядов внутри поверхности также будет равна нулю. Это справедливо для произвольной поверхности. Следовательно, при равновесии *ни в каком месте внутри проводника не может быть избыточных зарядов* – все они располагаются на поверхности проводника с некоторой поверхностной плотностью σ .

Это происходит потому, что одноименные заряды отталкиваются и стремятся расположиться как можно дальше друг от друга.

Значит, удаление вещества из некоторого объема внутри проводника никак не отразится на равновесном распределении зарядов.

Практическим применением этого свойства проводников является электростатическая защита (экранировка) чувствительных приборов и людей от действия внешних электрических полей, при которой они окружаются проводящей оболочкой (обычно ее выполняют в виде густой металлической сетки).

Рассмотрим небольшую цилиндрическую поверхность, образованную нормальными к поверхности проводника и основаниями dS , одно из которых расположено внутри, а другое – вне проводника (рис.28).

Поток напряженности через внутреннюю часть поверхности равен нулю, т.к. внутри проводника поле $\mathbf{E} = 0$. Вне проводника в непосредственной близости к нему напряженность поля $\mathbf{E}$ направлена по нормали к поверхности. Внутрь цилиндра попадает свободный заряд σdS . Применяя к цилиндрической поверхности теорему Гаусса, получим для напряженности поля вблизи поверхности проводника

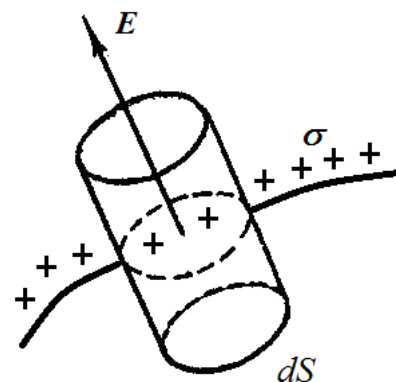


Рис. 28

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon \epsilon_0}. \quad (14.1)$$

Плотность зарядов зависит от кривизны поверхности, она растет на выступах и остриях и убывает на вогнутых участках. На острие заряженного проводника поверхностная плотность может стать настолько большой, что заряды начинают «стекать», образуя так называемый электрический ветер.

§ 15. Емкость уединенного проводника

Рассмотрим проводник, заряд которого равен q , а потенциал поверхности (одинаковый во всех ее точках) равен φ . Заряд q распределяется по поверхности таким образом, чтобы всюду внутри проводника выполнялись условия равновесия – напряженность поля равнялась бы нулю.

Сообщим проводнику дополнительно еще такой же заряд q . Поскольку внутри проводника поле по-прежнему должно остаться равным нулю, дополнительный заряд распределяется по поверхности **точно таким же образом**, как и прежний, создаст всюду точно такое же поле и изменит потенциал каждой точки на такую же величину φ

Необходимо при этом, чтобы проводник был уединенным, удаленным от других тел. Иначе перемещение зарядов вне проводника может привести к перераспределению зарядов и в нем самом.

Таким образом, заряд и потенциал уединенного проводника пропорциональны друг другу

$$q = C\varphi \quad (15.1)$$

Коэффициент C называется емкостью проводника.

Емкость уединенного проводника численно равна величине заряда, который нужно сообщить этому проводнику, чтобы изменить его потенциал на единицу:

$$C = \frac{q}{\varphi} \quad (15.2)$$

В СИ единицей емкости является фарада (Ф) – емкость проводника, потенциал которого изменяется на 1 В, если сообщить ему заряд в 1 Кл.

Емкость – характеристика проводника, количественная мера его способности удерживать электрический заряд. Чем больше емкость, тем больший заряд может накопить проводник при данном φ . Емкость определяется геометрическими размерами проводника, его формой и электрическими свойствами окружающей среды (ее диэлектрической проницаемостью) и не зависит от материала проводника.

В качестве примера подсчитаем *емкость уединенного проводящего шара*, помещенного в среду с диэлектрической проницаемостью ϵ . Поскольку напряженность поля вне шара

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{q}{r^2},$$

то, пользуясь выражением

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 E_n dn,$$

получаем для потенциала шара

$$\varphi = \int_R^\infty E dr = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \int_R^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{1}{R} \quad (15.3)$$

так что

$$C = \frac{q}{\varphi} = 4\pi\epsilon\epsilon_0 R. \quad (15.4)$$

Емкость уединенного шара пропорциональна его радиусу и диэлектрической проницаемости среды, окружающей шар.

Пример. Подсчитаем электроемкость Земли, считая ее уединенным сферическим проводником радиусом $R \approx 6\,400$ км. Диэлектрическая проницаемость ϵ окружающей среды практически равна единице. По формуле (15.4)

$$C = 4 \cdot 3,14 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 6,4 \cdot 10^6 \text{ Ф} \approx 7,1 \cdot 10^{-6} \text{ Ф} = 710 \text{ мкФ}.$$

Уединенные проводники имеют значительно меньшую электроемкость. Следовательно, фарада – очень большая величина. Поэтому на практике пользуются дольными единицами: микрофарада (мкФ), нанофарада (нФ), пикофарада (пФ), фемтофарада (фФ).

Понятие электроемкости применимо только к проводникам, так как для них существует равновесное распределение зарядов по объему тела, при котором все точки проводника имеют один и тот же потенциал. Если же заряд сообщается изолятору, то он не растекается по нему и поэтому в различных местах изолятора потенциал различен (в зависимости от расстояний до того места, где находится подведенный заряд).

§ 16. Конденсаторы

Наличие вблизи проводника других тел изменяют его электроемкость, т.к. потенциал проводника зависит и от электрических полей, создаваемых зарядами, наведенными в окружающих телах вследствие электростатической индукции.

Рассмотрим заряженный, например, положительно $+q$, проводник A и приблизим к нему незаряженный проводник

B . Под действием поля, создаваемого заряженным проводником A , в проводнике B возникнут индуцированные заряды. На ближнем конце проводника B возникнет индуцированный заряд другого знака, чем заряд проводника A , в данном случае отрицательный $-q$. Одноименный с q положительный заряд $+q$ возникнет на дальнем конце проводника B (рис.29).

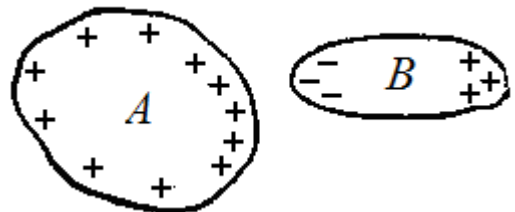


Рис. 29.

Теперь потенциал проводника A будут создавать не только его собственные заряды $+q$, но и индуцированные в проводнике B . Оба индуцированных заряда $-q$

и $+q$ равны по абсолютному значению. Они оба будут влиять на потенциал проводника A , но большее влияние окажут те заряды, которые расположены к нему ближе, в данном случае $-q$.

В итоге при поднесении к заряженному проводнику A незаряженного проводника B потенциал проводника A станет меньше. Согласно формуле емкости

$C = \frac{q}{\varphi}$ это означает увеличение емкости проводника A .

Система двух проводников, емкость которых увеличена за счет их взаимного расположения, называется конденсатором.

Конденсаторы изготавливают в виде двух проводников, *называемых обкладками*, разделенных тонким слоем диэлектрика. Обкладки несут одинаковые по величине, но противоположные по знаку заряды.

Обкладкам придают такую форму, чтобы поле было сосредоточено внутри конденсатора. Емкость конденсатора (взаимная емкость его обкладок)

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2}, \quad (16.1)$$

где q – заряд одной из обкладок $\varphi_1 - \varphi_2$ – разность потенциалов (напряжение) между обкладками. Емкость конденсатора практически не зависит от наличия окружающих тел и может достигать очень большой величины при малых геометрических размерах.

Определим емкость **плоского конденсатора**. Он состоит из двух параллельных металлических пластин, разделенных слоем диэлектрика (рис. 30).

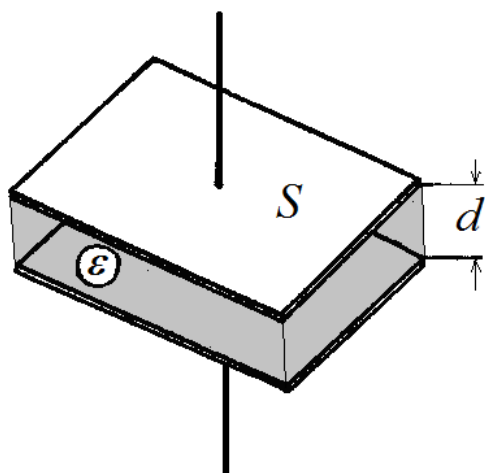


Рис. 30.

Пластины заряжены равными по абсолютному значению зарядами противоположного знака. Получить такие заряды можно, либо соединив на короткое время пластины с полюсами источника, либо зарядив одну пластину и заземлив другую (рис. 31).

В последнем случае на внутренней поверхности второй пластины индуцируется заряд, равный по абсолютному значению, но противоположный по знаку заряду первой пластины, а одноименный заряд, возникший на наружной поверхности второй пластины, уйдет в Землю.

Если расстояние d между пластинами мало по сравнению с их размерами, можно пренебречь краевыми эффектами и считать поле внутри конденсатора однородным и воспользо-

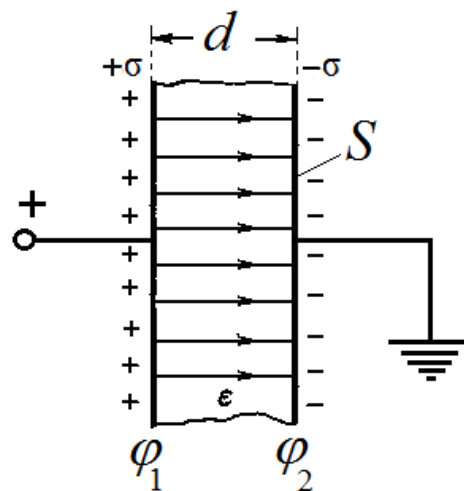


Рис. 31.

ваться выражением для напряженности поля двух бесконечных разноименно заряженных плоскостей. Учитывая, что диэлектрик ослабляет поле в ϵ раз, для напряженности поля в плоском конденсаторе получим

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon\epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon\epsilon_0 S}, \quad (16.2)$$

где S – ‘площадь обкладки. Ранее было выведено выражение (9.2) для разности потенциалов (напряжения) между обкладками

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\sigma d}{\epsilon\epsilon_0} = \frac{qd}{\epsilon\epsilon_0 S}.$$

Следовательно, емкость плоского конденсатора

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{\epsilon\epsilon_0 S}{d}. \quad (16.3)$$

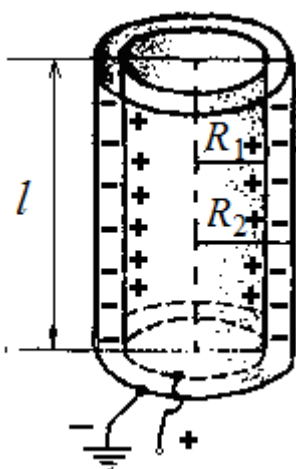


Рис. 32.

Цилиндрический конденсатор состоит из двух расположенных один внутри другого коаксиальных проводящих цилиндров, разделённых диэлектриком (рис.32). Можно, пользуясь формулами (9.3) и (16.1), аналогично показать для цилиндрического конденсатора, имеющего длину l и радиусы R_1 и R_2 :

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{2\pi\epsilon\epsilon_0 l}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \quad (16.4)$$

В электролитических цилиндрических конденсаторах в качестве диэлектрика используют тонкую оксидную пленку, образующуюся на поверхности одного из электродов (металлического) – анода, а в роли второго электрода – катода – выступает электролит. За счет очень малой толщины оксидной пленки $R_2/R_1 \rightarrow 1$, и, как следует из формулы (16.4), емкость C достигает значительной величины.

Также существуют миниатюрные танталовые электролитические конденсаторы. Они имеют довольно малые размеры и предназначены для монтажа на печатных платах миниатюрных плееров, мобильных телефонов, материнских платах ноутбуков и компьютеров.

§ 17. Соединение конденсаторов

При практическом использовании конденсаторы часто объединяют в батареи.

При **параллельном** соединении обкладки конденсаторов соединяют в две группы, потенциалы которых φ_1 и φ_2 (рис. 33).

Разность потенциалов между обкладками всех конденсаторов одинакова и равна $\varphi_1 - \varphi_2$. При зарядании такой батареи сообщенный ей заряд q частично попадает на обкладки всех конденсаторов.

Суммарный заряд батареи равен сумме зарядов отдельных конденсаторов:

$$q = q_1 + q_2 + q_2 + \dots + q_n \quad (17.1)$$

Таким образом, в случае параллельного соединения конденсаторов

$$C_{\text{пар}} = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{q_1}{\varphi_1 - \varphi_2} + \frac{q_2}{\varphi_1 - \varphi_2} + \dots + \frac{q_n}{\varphi_1 - \varphi_2} = C_1 + C_2 + \dots + C_n \quad (17.2)$$

При параллельном соединении емкость батареи равна сумме емкостей отдельных конденсаторов.

Параллельное соединение применяют для того, чтобы получить большую емкость, чем емкость одного конденсатора.

При **последовательном** соединении конденсаторов обкл отдельных конд имеют заряды, численно равные, но противоположные по знаку

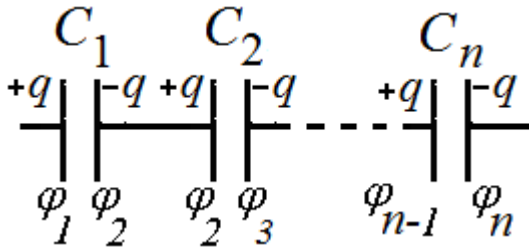


Рис. 34

Если первой обкладке сообщить заряд $+q$, то на второй обкладке батареи появится индуцированный заряд $-q$. Поскольку эта обкладка соединена с первой обкладкой второго конденсатора, и образует с ней единый проводник, то согласно закону сохранения заряда, на последней появится заряд $+q$. В свою очередь, это приведет к появлению заряда $-q$ на другой об-

кладке второго конденсатора и т.д. В результате все последовательно соединенные конденсаторы будут заряжены одинаково. При этом батарее сообщен только заряд q .

Полная разность потенциалов на клеммах всей батареи $\varphi_1 - \varphi_n$ равна сумме разностей потенциалов между обкладками каждого из конденсаторов

$$\varphi_1 - \varphi_n = (\varphi_1 - \varphi_2) + (\varphi_2 - \varphi_3) + \dots + (\varphi_{n-1} - \varphi_n). \quad (17.3)$$

Согласно определению емкости

$$C_{\text{посл}} = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_n}.$$

Или

$$\frac{1}{C_{\text{посл}}} = \frac{\varphi_1 - \varphi_n}{q} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{q} + \frac{\varphi_2 - \varphi_3}{q} + \dots + \frac{\varphi_{n-1} - \varphi_n}{q} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n} \quad (17.4)$$

При последовательном соединении конденсаторов складываются обратные величины емкостей.

В частности, для двух последовательно соединенных конденсаторов

$$C_{\text{посл}} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}. \quad (17.5)$$

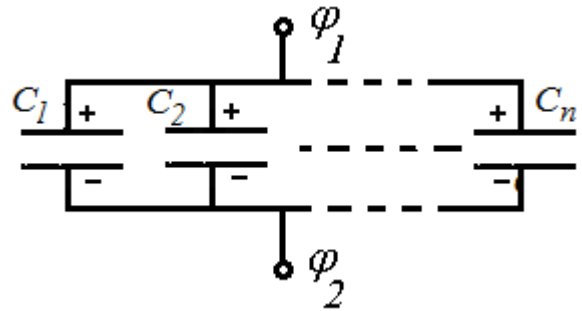


Рис. 33.

Пример. Плоский воздушный конденсатор был заряжен до разности потенциалов $U_0 = 300$ В и отключен от источника напряжения. Расстояние между обкладками конденсатора $d = 2$ см. После этого в конденсатор параллельно его обкладкам ввели проводящую пластину толщиной $d_{пл} = 1$ см, размеры которой равны размерам обкладок. Определить разность потенциалов между обкладками конденсатора с проводящей пластиной.

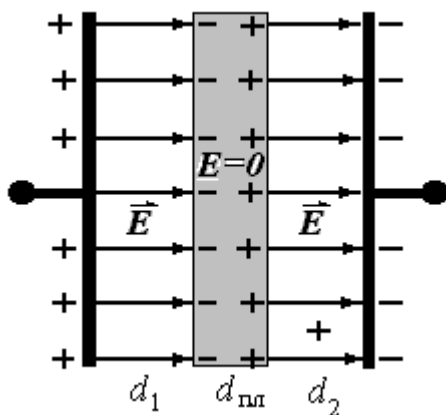


Рис. 5.п.

При внесении незаряженного проводника в электрическое поле носители заряда начинают двигаться: положительные в направлении внешнего поля, отрицательные - в противоположную сторону. Вследствие этого на внешних поверхностях пластины возникают заряды противоположного знака, называемые индуцированными. Поле этих зарядов направлено противоположно внешнему полю. По принципу суперпозиции электрическое поле внутри пластины является суммой поля конденсатора и поля, создаваемого индуцированными зарядами.

Напряженность поля в любой точке внутри пластины становится равной нулю (условие равновесия зарядов). Все линии напряженности электрического поля в зазоре конденсатора разрываются, они заканчиваются на отрицательных

индуцированных зарядах и вновь начинаются на положительных зарядах.

Потенциал внутри пластины является постоянным. Это позволяет рассматривать конденсатор с проводящей пластиной внутри как систему двух последовательно включенных конденсаторов C_1 и C_2 ..

а). Если толщина пластины $d_{пл}$ намного меньше, чем d , то $d \approx d_1 + d_2$, а емкости соответственно равны

$$C_1 = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{d_1}, \quad C_2 = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{d_2}.$$

Общая емкость C определится из соотношения

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{d_1}{\epsilon_0 \epsilon S} + \frac{d_2}{\epsilon_0 \epsilon S} = \frac{d}{\epsilon_0 \epsilon S} = \frac{1}{C_0},$$

где C_0 – емкость конденсатора без пластины. Таким образом, при любом положении *тонкой* пластины емкость конденсатора не меняется, $C = C_0$.

б) Если проводящая пластина имеет определенную толщину $d_{пл}$, то $d = d_1 + d_{пл} + d_2$. Общая емкость двух образовавшихся последовательно соединенных конденсаторов может быть найдена из соотношения

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{d_1}{\epsilon_0 \epsilon S} + \frac{d_2}{\epsilon_0 \epsilon S} = \frac{d - d_{пл}}{\epsilon_0 \epsilon S}.$$

Откуда

$$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{d - d_{пл}}.$$

Заряд конденсатора, отключенного от источника напряжения, не меняется.

$$q = C_0 U_0 = CU.$$

Тогда $U = \frac{C_0}{C} U_0 = \frac{d - d_{пл}}{d} U_0$. $U = 150$ В.



Рис. 6.п.

§ 18. Энергия взаимодействия электрических зарядов

Рассмотрим систему, состоящую из расположенных на расстоянии r друг от друга зарядов q_1 и q_2 . Величина

$$W = q_1 \frac{q_2}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r} = q_1\varphi_1 \quad (18.1)$$

(через φ_1 обозначен потенциал поля заряда q_2 в той точке, где находится заряд q_1), как известно, равна потенциальной энергии заряда q_1 в поле заряда q_2 , то есть энергии электростатического взаимодействия этих зарядов. Очевидно, однако, что выражение для потенциальной энергии можно также записать в виде

$$W = q_2 \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r} q_1 = q_2\varphi_2. \quad (18.2)$$

Здесь φ_2 - потенциал поля заряда q_1 в точке, где находится заряд q_2 . Чтобы подчеркнуть тот факт, что энергией обладает не каждый заряд в отдельности, а система взаимодействующих зарядов, можно записать выражение для энергии взаимодействия в виде

$$W = \frac{1}{2}(q_1\varphi_1 + q_2\varphi_2). \quad (18.3)$$

В общем случае системы, состоящей из n зарядов, энергия их взаимодействия

$$W = \frac{1}{2}(q_1\varphi_1 + q_2\varphi_2 + \dots + q_n\varphi_n) = \frac{1}{2}\sum q_i\varphi_i, \quad (18.4)$$

где φ_i – потенциал, создаваемый в той точке, где находится q_i , всеми зарядами, кроме i -го.

§ 19. Энергия системы заряженных проводников. Энергия конденсатора

Рассмотрим уединенный проводник с зарядом q , потенциалом φ и электроемкостью C . Чтобы увеличить заряд этого проводника на dq , необходимо перенести из бесконечности на него дополнительный заряд dq , совершив против сил электростатического поля работу

$$dA = \varphi dq = C \varphi d\varphi. \quad (19.1)$$

Чтобы зарядить проводник от нулевого потенциала до потенциала, равного φ , надо совершить полную работу

$$A = \int_0^\varphi C \varphi d\varphi = \frac{C\varphi^2}{2}. \quad (19.2)$$

В силу закона сохранения энергии увеличение потенциальной энергии проводника равно совершенной над ним работе, так что, полагая потенциальную энергию незаряженного проводника равной нулю, мы получаем для энергии заряженного уединенного проводника выражение

$$W = \frac{C\varphi^2}{2} = \frac{q\varphi}{2} = \frac{q^2}{2C}. \quad (19.3)$$

В случае *системы проводников*, находящихся в электростатическом поле, полная потенциальная энергия может быть получена суммированием энергий отдельных проводников, т.е.

$$W = \frac{1}{2} \sum q_i \varphi_i$$

где q_i - заряд; φ_i - потенциал i -го проводника в поле всех остальных зарядов.

Применяя формулу (18.4) к случаю *конденсатора*, получаем (учитывая, что заряды обкладок равны по величине и противоположны по знаку)

$$W = \frac{1}{2} ((+q)\varphi_1 + (-q)\varphi_2) = \frac{1}{2} q(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{1}{2} qU, \quad (19.4)$$

где U - разность потенциалов между обкладками конденсатора.

§ 20. Плотность энергии электростатического поля

Возникает вопрос, являются ли носителями энергии электростатического поля сами заряды или электрическое поле, создаваемое ими ?

В дальнейших разделах курса будет показано, что переменные во времени электрические и магнитные поля могут существовать обособленно, независимо от возбуждавших их зарядов и распространяются в пространстве в виде электромагнитных волн. Такие волны способны переносить энергию, что подтверждает вывод о том, что *носителем энергии является поле*.

Если это так, то с любым объемом пространства, в котором существует электрическое поле, связана определенная его энергия. Назовем величину

$$w = \frac{W}{V}, \quad (20.1)$$

равную энергии электрического поля, приходящейся на единицу занимаемого им объема, **объемной плотностью энергии** электрического поля.

Для того чтобы определить, чему равна плотность энергии электростатического поля, рассмотрим плоский конденсатор. С учетом того, что емкость плоского конденсатора

$$C = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 S}{d}$$

а разность потенциалов между его обкладками

$$U = Ed$$

где E - напряженность поля между обкладками, выражение (EE) для энергии конденсатора можно представить в виде

$$W = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon \varepsilon_0 S}{d} (Ed)^2 = \frac{1}{2} \varepsilon \varepsilon_0 E^2 Sd = \frac{1}{2} \varepsilon \varepsilon_0 E^2 V. \quad (20.2)$$

Таким образом, энергия электростатического поля конденсатора прямо пропорциональна объему, заключенному между его обкладками, и объемная плотность энергии

$$w = \frac{W}{V} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}. \quad (20.3)$$

Можно показать, что это выражение справедливо не только для поля конденсатора, но и в общем случае произвольного электрического поля.

Пример. Определить силу притяжения пластин заряженного плоского конденсатора. Площадь пластин S , заряд на каждой пластине q . Конденсатор заряжен и отключен от источника электрической энергии.

При сближении пластин на расстояние Δd сила притяжения F выполняет работу

$$\Delta A = F \cdot \Delta d.$$

Вследствие сближения пластин конденсатора объем его поля уменьшается. Объемная

плотность энергии поля $w = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}$ при этом не изменяется, т.к. напряженность поля E не зависит от расстояния между обкладками, а зависит только от плотности зарядов на обкладках. Следовательно, энергия поля конденсатора уменьшается на величину

$$\Delta W = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} S \Delta d.$$

Из закона сохранения энергии вытекает, что $\Delta A = \Delta W$, или

$$F \Delta d = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} S \Delta d,$$

откуда $F = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} S$. Подставляя значение напряженности электрического поля плоского конденсатора

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon\varepsilon_0 S},$$

получим

$$F = \frac{q^2}{2\varepsilon\varepsilon_0 S}.$$