

Министерство образования и науки, молодежи и спорта Украины
Государственное высшее учебное заведение
«Национальный горный университет»

Методические указания
к лабораторной работе № **1.0**

**СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ
ДЛЯ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ
ПО МЕХАНИКЕ**

г. Днепропетровск
2013

1.1. КИНЕМАТИКА

В механике для описания движения тел в зависимости от условий конкретных задач используют физические модели (*материальная точка и абсолютно твердое тело*).

Материальная точка — тело, обладающее массой, размерами которого в данной задаче можно пренебречь.

Абсолютно твердое тело — тело, которое ни при каких условиях не может деформироваться, и при всех условиях расстояние между двумя точками (или точнее между двумя частицами) этого тела остается постоянным.

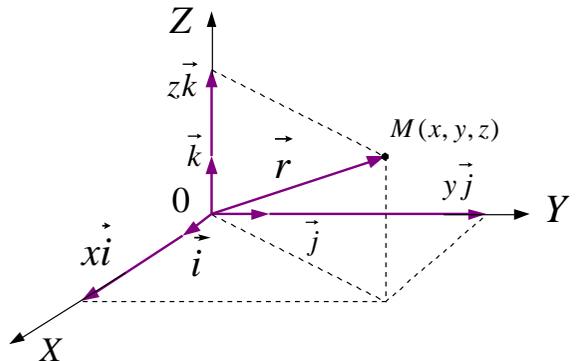
Поступательное движение — движение, при котором любая прямая, жестко связанная с движущимся телом, остается параллельной своему первоначальному положению.

Вращательное движение — движение, при котором все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной и той же прямой, называемой осью вращения.

Положение материальной точки определяется по отношению к некоторому произвольно выбранному телу, называемому **телом отсчета**.

Система отсчета — совокупность системы координат и часов, связанных с телом отсчета.

В декартовой системе координат положение точки M в данный момент времени по отношению к этой системе характеризуется тремя координатами x , y и z или радиусом-вектором \vec{r} , проведенным из начала системы координат в данную точку.



$$\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z,$$

где \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} — единичные векторы направлений (орты); x , y , z — координаты точки.

Траектория движения материальной точки — линия, описываемая этой точкой в пространстве. В зависимости от формы траектории движение может быть **прямолинейным** или **криволинейным**.

Пусть материальная точка движется вдоль произвольной траектории и отсчет времени начинается с момента, когда точка находилась в положении A .

Длина пути — длина участка траектории AB , пройденного материальной точкой с момента начала отсчета времени.

Длина пути является скалярной функцией времени.

Вектор перемещения — вектор, проведенный из начального положения движущейся точки в положение ее в данный момент времени (приращение радиуса - вектора точки за рассматриваемый промежуток времени).

$$\Delta \vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0$$

При прямолинейном движении вектор перемещения совпадает с соответствующим участком траектории и модуль перемещения $|\Delta \vec{r}|$ равен пройденному пути Δs :

$$|\Delta \vec{r}| = \Delta s = \Delta x = x_2 - x_1.$$

Скорость — векторная величина, которая определяет как быстроту движения, так и его направление в данный момент времени.

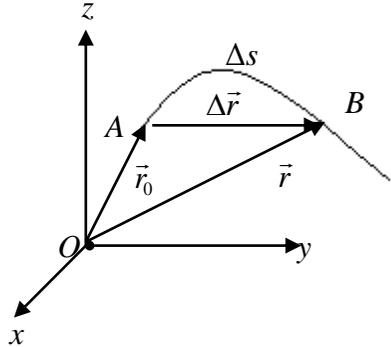
Средняя скорость движущейся точки за промежуток времени Δt — векторная величина, равная отношению перемещения к промежутку времени, в течение которого это перемещение произошло.

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1}$$

Направление вектора средней скорости совпадает с направлением вектора перемещения.

Мгновенная скорость $\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$

Мгновенная скорость — векторная величина, определяемая производной радиуса - вектора движущейся точки по времени; направлена по касательной к траектории в сторону движения



$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{i}v_x + \vec{j}v_y + \vec{k}v_z$$

Ускорение - характеристика неравномерного движения; определяет быстроту изменения скорости по модулю и направлению.

Среднее ускорение неравномерного движения за промежуток времени Δt - векторная величина, равная отношению изменения скорости $\Delta \vec{v}$ к промежутку времени, за которое это изменение произошло:

$$\langle \vec{a} \rangle = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}.$$

Мгновенное ускорение (ускорение) — векторная величина, определяемая первой производной скорости по времени

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}.$$

Тангенциальная составляющая ускорения характеризует быстроту изменения скорости по модулю (направлена по касательной к траектории):

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}$$

Нормальная составляющая ускорения характеризует быстроту изменения скорости по направлению (направлена к центру кривизны траектории):

$$a_n = \frac{v^2}{R}$$

[R — радиус кривизны траектории в данной точке].

Полное ускорение при криволинейном движении:

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau, \quad a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}.$$

Равномерное прямолинейное движение — движение с постоянной по модулю и направлению скоростью.

Кинематическое уравнение равномерного движения материальной точки вдоль оси x :

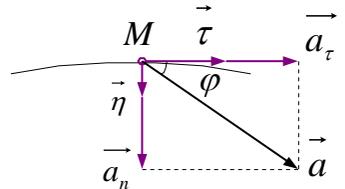
$$x = x_0 \pm vt$$

[x_0 — начальная координата, t — время].

Скорость точки при равномерном движении $v = \text{const}$ и $a = 0$.

Равноускоренное движение — движение с ускорением, постоянным по модулю и направлению.

Кинематическое уравнение равнопеременного движения ($a = \text{const}$) вдоль оси x :



$$x = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

[v_0 — начальная скорость, t — время].

Скорость точки при равнопеременном движении:

$$v = v_0 \pm at.$$

[v_0 — начальная скорость, a — ускорение, t — время движения].

Длина пути, пройденного точкой за промежуток времени от t_1 до t_2

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt.$$

Угловая скорость — векторная величина, характеризующая быстроту вращения тела.

Угловая скорость — отношение угла поворота ко времени, за которое поворот произошел.

Угловая скорость равномерного вращательного движения:

$$\omega = \frac{\varphi}{t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi n,$$

[T — период вращения, n — частота вращения].

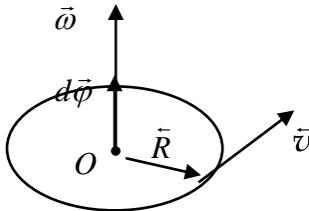
Период вращения — время, за которое точка совершает один полный оборот, т. е. поворачивается на угол 2π .

Частота вращения — число полных оборотов, совершаемых телом при равномерном его движении по окружности, в единицу времени.

Мгновенная угловая скорость — псевдовектор, определяемый первой производной угла поворота тела по времени:

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}.$$

Вектор $\vec{\omega}$ направлен вдоль оси вращения по правилу правого винта, т. е. так же, как и вектор $d\vec{\varphi}$.



Псевдовектор, или аксиальный вектор, — вектор, направление которого связывают с направлением вращения. Этот вектор не имеет определенной точки приложения: он может откладываться из любой точки оси вращения.

Угловое ускорение — вектор, определяемый первой производной угловой скорости по времени:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}.$$

При вращении тела вокруг неподвижной оси вектор углового ускорения направлен вдоль оси вращения в сторону вектора элементарного приращения угловой скорости. При ускоренном движении вектор $\vec{\varepsilon}$ сонаправлен вектору $\vec{\omega}$, при замедленном — противоположен ему.

Формулы, выражающие связь между линейными и угловыми величинами:

$$s = \varphi R, \quad v = \omega R; \quad a_{\tau} = \varepsilon R; \quad a_n = \omega^2 R$$

[R — расстояние от оси вращения].

Кинематическое уравнение равномерного вращения:

$$\varphi_0 = \varphi_0 \pm \omega t,$$

[φ_0 — начальное угловое перемещение, t — время].

Угловая скорость при равномерном вращении: $\varphi = \text{const}$, $\varepsilon = 0$.

Кинематическое уравнение равнопеременного вращения ($\varepsilon = \text{const}$):

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon^2 t^2}{2},$$

[ω_0 — начальная угловая скорость, t — время].

1.2. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ И ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

В качестве первого закона динамики Ньютон сформулировал закон, установленный еще Галилеем: материальная точка (тело) сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока воздействие со стороны других тел не выведет ее (его) из этого состояния.

Первый закон Ньютона (закон инерции): существуют такие системы отсчета, относительно которых поступательно движущиеся тела сохраняют свою скорость постоянной, если на них не действуют другие тела.

Первый закон Ньютона утверждает существование инерциальных систем отсчета.

Инерциальная система отсчета — система отсчета, относительно которой свободная материальная точка, *не подверженная воздействию других тел*, движется равномерно и прямолинейно, или, как говорят, **по инерции**.

Инертность тел — свойство, присущее всем телам и заключающееся в том, что тела оказывают сопротивление изменению его скорости (как по модулю, так и по направлению).

Масса тела — физическая величина, являющаяся мерой его инерционных (**инертная масса**) и гравитационных (**гравитационная масса**) свойств. В настоящее время можно считать доказанным, что инертная и

гравитационная массы равны друг другу (с точностью, не меньшей 10^{-12} их значения).

Сила — векторная величина, являющаяся мерой механического воздействия на тело со стороны других тел или полей, в результате которого тело приобретает ускорение или изменяет свою форму и размеры.

В каждый момент времени **сила характеризуется числовым значением, направлением в пространстве и точкой приложения.**

Импульс материальной точки — векторная величина, численно равная произведению массы материальной точки на ее скорость и имеющая направление скорости:

$$\vec{p} = m\vec{v}.$$

Второй закон Ньютона: ускорение, приобретаемое материальной точкой (телом), пропорционально вызывающей его силе, совпадает с ней по направлению и обратно пропорционально массе материальной точки (тела):

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \text{ или } \vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt}.$$

Более общая формулировка второго закона Ньютона: скорость изменения импульса материальной точки равна действующей на нее силе:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}.$$

Если на материальную точку действует одновременно несколько сил, то, согласно принципу независимости действия сил, под F во втором законе Ньютона понимаются **резльтирующую** силу.

Третий закон Ньютона: *всякое действие материальных точек (тел) друг на друга имеет характер взаимодействия; силы, с которыми действуют друг на друга материальные точки, всегда равны по модулю, противоположно направлены и действуют вдоль прямой, соединяющей эти точки:*

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}.$$

[F_{12} — сила, действующая на первую материальную точку со стороны второй; F_{21} — сила, действующая на вторую материальную точку со стороны первой. Эти силы приложены к *разным* материальным точкам (телам), всегда действуют *парами* и являются силами *одной природы*].

Механическая система — совокупность материальных точек (тел), рассматриваемых как единое целое

Внутренние силы — силы взаимодействия между материальными точками механической системы.

Внешние силы — силы, с которыми на материальные точки механической системы действуют внешние тела.

Замкнутая система — механическая система тел, на которую не действуют внешние силы.

Закон сохранения импульса: в замкнутой системе тел геометрическая сумма импульсов тел остается постоянной при любых взаимодействиях тел этой системы между собой :

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2 .$$

$[m_1, m_2$ — масса тел, v_1, v_2 и v'_1, v'_2 — соответственно скорости тел до и после взаимодействия].

Более общая формулировка закона сохранения импульса: импульс замкнутой системы сохраняется, т. е. не изменяется с течением времени :

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = \text{const} ,$$

$[n$ — число материальных точек (тел), входящих в систему].

1.3. РАБОТА И ЭНЕРГИЯ

Энергия — универсальная мера различных форм движения и взаимодействия.

Работа силы — количественная характеристика процесса обмена энергией между взаимодействующими телами.

Если тело движется прямолинейно и на него действует постоянная сила F , которая составляет некоторый угол α с направлением перемещения, то работа этой силы равна произведению проекции силы F_s на направление перемещения ($F_s = F \cdot \cos \alpha$), умноженной на перемещение точки приложения силы:

$$A = F_s s = F \cdot s \cdot \cos \alpha .$$

Элементарная работа силы F на перемещении ds :

$$dA = \vec{F} d\vec{r} = F \cos \alpha ds = F_s ds$$

$[\alpha$ — угол между векторами \vec{F} и $d\vec{r}$, $ds = |d\vec{r}|$ — элементарный путь; F_s — проекция вектора \vec{F} на вектор $d\vec{r}$].

Мощность — физическая величина, характеризующая скорость совершения работы:

$$N = \frac{A}{t} .$$

Мгновенная мощность равна скалярному произведению вектора силы на вектор скорости, с которой движется точка приложения этой силы:

$$N = \frac{dA}{dt} = \vec{F} \vec{v} = Fv \cos \alpha .$$

Кинетическая энергия механической системы — энергия механического движения этой системы.

Кинетическая энергия тела массой m , движущегося со скоростью v , определяется работой, которую надо совершить, чтобы сообщить телу данную скорость:

$$T = \frac{mv^2}{2}.$$

Теорема о кинетической энергии: работа равнодействующей сил, приложенных к телу, равна изменению кинетической энергии тела.

$$A = T_2 - T_1.$$

Потенциальная энергия — механическая энергия системы тел, определяемая их взаимным расположением и характером сил взаимодействия между ними.

Потенциальная энергия определяется с точностью до некоторой произвольной постоянной. Это не отражается на физических законах, так как в них входит или разность потенциальных энергий в двух положениях тела, или производная E' по координатам. Поэтому потенциальную энергию тела в каком-то определенном положении считают равной нулю (выбирают нулевой уровень отсчета), а энергию тела в других положениях отсчитывают относительно нулевого уровня.

Потенциальное поле — поле, в котором работа, совершаемая действующими силами при перемещении тела из одного положения в другое, не зависит от того, по какой траектории это перемещение произошло, а зависит только от начального и конечного положений.

Тело, находясь в потенциальном поле сил, обладает потенциальной энергией.

Консервативная сила — сила, работа которой при перемещении точки (тела) зависит только от начального и конечного положений точки (тела) в пространстве.

Диссипативная сила — сила, работа которой при перемещении точки (тела) из одного положения в другое зависит от траектории перемещения точки (тела).

Работа консервативных сил равна приращению потенциальной энергии, взятому со знаком минус, так как работа совершается за счет уменьшения потенциальной энергии:

$$A = P_1 - P_2.$$

Потенциальная энергия тела, поднятого над поверхностью Земли на высоту h :

$$P = mgh$$

[g — ускорение свободного падения].

Потенциальная энергия упругодеформированного тела:

$$P = \frac{1}{2}kx^2.$$

Полная механическая энергия системы — энергия механического движения и взаимодействия (равна сумме кинетической и потенциальной энергий):

$$E = T + \Pi .$$

Закон сохранения механической энергии: в системе тел, между которыми действуют только консервативные силы, полная механическая энергия сохраняется, т. е. не изменяется со временем:

$$E = T + \Pi = \text{const} .$$

1.4. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

Момент инерции материальной точки относительно данной оси — скалярная величина, равная произведению массы точки на квадрат расстояния от этой точки до оси :

$$J_z = mr^2$$

[m — масса точки; r — расстояние от точки до оси].

Момент инерции системы (тела) относительно оси — физическая величина, равная сумме произведений масс n материальных точек системы на квадраты их расстояний до рассматриваемой оси :

$$J_z = \sum_{i=1}^n \Delta m_i r_i^2$$

[r_i расстояние материальной точки массой m_i , до оси].

Момент инерции в случае непрерывного распределения масс:

$$J_z = \int r^2 dm.$$

[интегрирование производится по всему объему тела. В данном случае r — функция положения точки с координатами x, y, z]

Моменты инерции некоторых однородных тел

Таблица 1

Тело	Положение оси вращения	Момент инерции
Однородный тонкий стержень массой m и длиной l	Проходит через центр масс стержня перпендикулярно стержню	$\frac{1}{12} ml^2$
	Проходит через конец стержня перпендикулярно стержню	$\frac{1}{3} ml^2$
Тонкое кольцо, обруч, труба радиусом R и массой	Ось симметрии	mR^2

m		
Круглый однородный диск, цилиндр радиусом R и массой m	То же	$\frac{1}{2}mR^2$
Однородный шар радиусом R и массой m	Проходит через центр шара	$\frac{2}{5}mR^2$

Кинетическая энергия тела, вращающегося относительно оси z :

$$T = \frac{J_z \omega^2}{2}$$

[J_z — момент инерции тела относительно оси z ; ω — его угловая скорость].

Кинетическая энергия тела, катящегося по плоскости без скольжения:

$$T = \frac{m v_c^2}{2} + \frac{I_c \omega^2}{2}$$

[m — масса тела; v_c — скорость центра масс тела; J_c — момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр масс; ω — угловая скорость тела].

Момент силы относительно неподвижной оси z — скалярная величина M_z , равная произведению модуля силы на плечо

$$M_z = Fl$$

[плечо силы - кратчайшее расстояние между линией действия силы и осью вращения.]

Работа при вращении тела:

$$dA = M_z d\varphi$$

[$d\varphi$ — угол поворота тела; M_z - момент силы относительно оси z].

Момент импульса материальной точки A относительно неподвижной точки O — физическая величина, определяемая векторным произведением радиус-вектора \vec{r} , проведенного из O в точку A , на вектор импульса \vec{p} :

$$\vec{L} = [\vec{r}\vec{p}] = [\vec{r}m\vec{v}]$$

[$\vec{p} = m\vec{v}$ — импульс материальной точки; \vec{L} — псевдовектор, его направление совпадает с направлением поступательного движения правого винта при его вращении от \vec{r} к \vec{p}].

Модуль вектора момента импульса:

$$L = rp \sin \alpha = mvr \sin \alpha = pl$$

[α — угол между векторами \vec{r} и \vec{p} , l — плечо вектора \vec{p} относительно точки O].

Момент импульса твердого тела относительно оси z :

$$L_z = \sum_{i=1}^n m_i v_i r_i = J_z \omega$$

[r_i — расстояние от оси z до отдельной частицы тела; $m_i v_i$ — импульс этой частицы, J_z — момент инерции тела относительно оси z , ω — его угловая скорость].

Уравнение (закон) динамики вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси: производная момента импульса твердого тела относительно оси равна моменту сил относительно той же оси:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}, \quad M_z = \frac{d(J_z \omega)}{dt} = J_z \varepsilon$$

[ε — угловое ускорение; J_z — момент инерции тела относительно оси z].

Закон сохранения момента импульса:

момент импульса замкнутой системы сохраняется, т.е. не изменяется с течением времени:

$$L_z = J_{z1} \omega_1 = J_{z2} \omega_2 = const.$$

Сопоставление основных величин и уравнений, определяющих вращение тела вокруг неподвижной оси и его поступательное движение (табл. 2).

Таблица 2

Поступательное движение		Вращательное движение	
Масса	m	Момент инерции	J
Скорость	$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$	Угловая скорость	$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$
Ускорение	$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$	Угловое ускорение	$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$
Сила	\vec{F}	Момент силы	\vec{M} или M_z
Импульс	$\vec{p} = m\vec{v}$	Момент импульса	$L_z = J_z \omega$
Основное уравнение динамики	$\vec{F} = m\vec{a}$ $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$	Основное уравнение динамики	$M_z = J_z \varepsilon$ $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$
Работа	$dA = F_s ds$	Работа вращения	$dA = M_z d\varphi$
Кинетическая энергия	$T = \frac{mv^2}{2}$	Кинетическая энергия вращения	$T = \frac{J_z \omega^2}{2}$

Литература.

1. І. М. Кучерук та ін. Загальний курс фізики. Т.1. К. 1999.
2. И. В. Савельев. Курс физики. Т.1 . М. 1989.