Лабораторна робота **№ 1.16**

ВИЗНАЧЕННЯ МОМЕНТА ІНЕРЦІЇ ТІЛ ДИНАМІЧНИМ МЕТОДОМ

Прилади й приналежності: 1) прилад – обертальний столик - для визначення моментів інерції тіл; 2) секундомір; 3) штангенциркуль; 4) масштабна лінійка; 5) набір досліджуваних тіл; 6) набір вантажів.

Мета роботи: визначення моменту інерції тіла за допомогою обертального столика.

Щодо моменту інерції

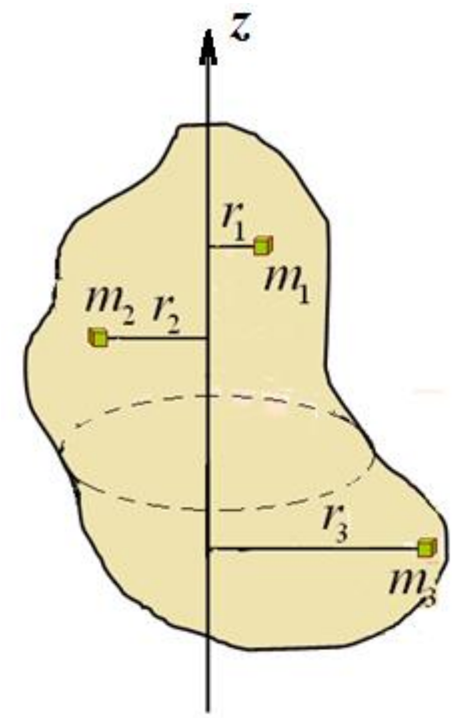

Рис. 2

У ***поступальному*** русі тіла, мірою ***інертності*** є його маса m. Тіло з більшою масою є більш інертним, сильніше «чинить опір» спробам змінити його швидкість. Наприклад, тілу з великою масою, що покоїться, важче надати швидкості, або, навпаки, масивне тіло, що рухається, важче зупинити.

А для тіла, що обертається, інертність залежить не тільки від його маси, а й від того, наскільки близько чи далеко від осі обертання знаходяться різні його частини.

Тому в механіці обертального руху вводять величини, що враховують розподіл мас у тілі.

Найпростіше поняття - момент інерції матеріальної точки відносно будь-якої осі. Він дорівнює добутку її маси m на квадрат відстані до цієї осі r:

$$I = mr^2$$

Будь-яке тіло можна представити у вигляді сукупності множини малих елементів (рис. 1), Момент інерції тіла відносно будь-якої осі дорівнює сумі моментів інерції всіх точок тіла відносно цієї ж осі, тобто сумі добутків елементарних мас m_i, на які подумки розбиваємо тіло, на квадрати відстаней r_i кожної елементарної маси від осі обертання (див. рис. 2)

$$I_z = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + ... + m_n r_n^2 = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \ . \qquad (2)$$

Тут Σ - прийнятий в математиці для короткого запису знак додавання величин тих змінних, які знаходяться праворуч від цього знака. Одиниця вимірювання момента інерції в СІ кг · м^2.

З формули (2) для моменту інерції видно, що точки, які лежать далі від осі обертання, вносять в суму значно більший внесок, ніж близькі точки.

Таким чином, момент інерції залежить не тільки від маси тіла, а й того, як ця маса розподілена за об’ємом тіла - далеко чи близько від осі.

У разі безперервного розподілу мас за об’ємом тіла ця сума зводиться до інтегралу,

$$I = \int r^2 dm = \int r^2 \rho dV,$$

де інтегрування проводиться по всьому об'єму тіла, ρ – густина матеріалу; *dV*- елементарний об'єм*; dm* = ρ*dV* – елементарна маса; *r = r (x, y, z)* - функція положення точки з координатами *x, y, z*.

Для однорідних тіл правильної геометричної форми інтегрування порівняно просте. Наприклад, момент інерції для *суцільного циліндра* радіусом *R* і масою *m* відносно осі обертання, що збігається з віссю циліндра:

$$I = \frac{1}{2} mR^2.$$

Для прямого *тонкого стержня* довжиною *l* і масою *m* відносно осі, перпендикулярної до стрижня і проходить через його центр мас:

$$I = \frac{1}{12} ml^2.$$

Для *кулі* радіусом *R* і масою *m* відносно осі, що проходить через центр кулі:

$$I = \frac{2}{5} mR^2.$$

Моменти інерції однорідних тіл найпростішої форми зведені в таблиці. Для тіл неправильної форми інтегрування ускладнюється і часто момент інерції визначають дослідним шляхом. Прикладом такого визначення є дана лабораторна робота.

Опис приладу і теорія методу

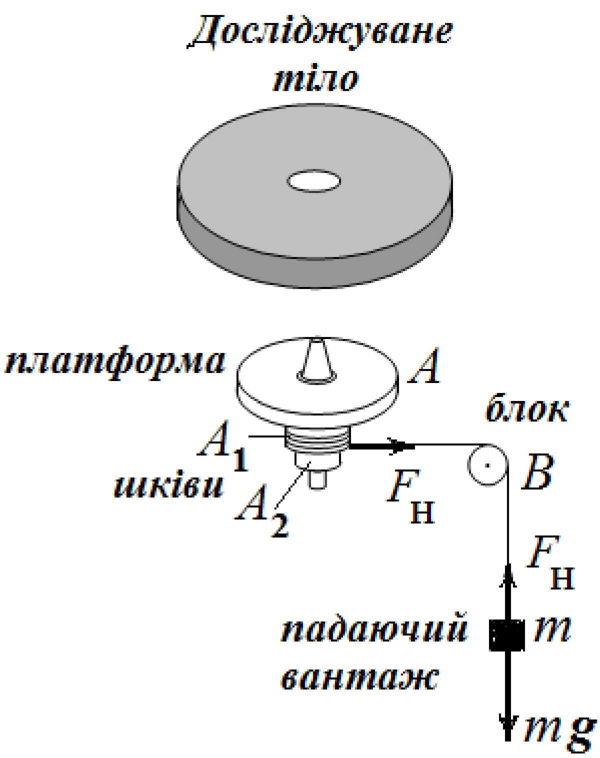

Рис. 2.

Установка для визначення моменту інерції тіл схематично зображена на рис. 2. На вертикальній осі укріплена платформа *A*, на яку поміщають досліджуване тіло. Платформа може обертатися, обертання здійснюється силою натягу нитки, яка намотана на один з шківів A_1 або A_2. Шківом називають колесо з широким ободом. На обід намотується нитка, за допомогою якої створюється обертовий момент. Нитка перекинута через блок *B*, а до вільного кінця нитки прикріплений вантаж масою *m*. Нерухомий блок *B* легко обертається і важить дуже мало, так що його завдання тільки змінювати напрямок руху нитки, на якій підвішений падаючий вантаж.

Час опускання вантажу на певну відстань *h* вимірюється таким чином. На початку обертання системи, коли підстава вантажу поєднується з верхнім поділом масштабної лінійки, включається секундомір. У момент зіткнення вантажу з підлогою секундомір зупиняється.

В роботі вивчаються два види руху твердого тіла - поступальний і обертальний. Шківи разом з досліджуваним тілом обертаються, а вантаж на нитці рухається прямолінійно, обидва рухи є прискореними.

Рівняння поступального руху вантажу (другий закон Ньютона)

$$\Sigma \boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}. \qquad (1)$$

На вантаж діють дві сили: сила тяжіння $m\boldsymbol{g}$, напрямлена донизу, і сила натягу нитки $\boldsymbol{F}_н$, напрямлена вгору. Рівнодіюча цих сил визначає рівноприскорений рух вантажу. У проекціях на вертикаль другий закон Ньютона набуде вигляду

$$mg - F_н = ma,$$

звідки сила натягу за абсолютним значенням

$$F_н = m(g - a). \qquad (2)$$

За третім законом Ньютона сила, що дорівнює за модулем силі натягу, але направлена протилежно їй, прикладена до другого з взаємодіючих тіл - до шківа (по дотичній).

Оскільки блок B обертається на своїй осі вільно, він не змінює сили натягу, а змінює лише напрямок руху нитки підвісу.

Сила натягу і створює крутний момент M_z.

Рівняння руху тіла, що обертається навколо нерухомої осі

$$M_z = I\,\varepsilon, \qquad (3)$$

де M_z – момент зовнішньої сили відносно осі обертання, I –момент інерції тіла відносно осі оберання, ε – кутове прискорення.

Обертальний момент сили, що діє на шків, дорівнює добутку сили натягу $F_н$ нитки на плече - радіус r шківа:

$$M_z = F_н\, r = m(g - a)\, r. \qquad (4)$$

Вантаж m, падаючи з прискоренням a, тягне за собою нитку, намотану на шків, тому точки обода шківа матимуть таке ж лінійне прискорення, що і падаючий вантаж.

Лінійне прискорення вантажу a дорівнює тангенціальному прискоренню точок циліндричної поверхні шківа. Зв'язок тангенціального прискорення з кутовим прискоренням шківа:

$$a = \varepsilon\, r. \qquad (5)$$

Прискорення a може бути знайдено з формули шляху при рівноприскореному русі без початкової швидкості. Якщо h - шлях, пройдений падаючим вантажем за час t, то

$$h = \frac{at^2}{2}.$$

Звідки

$$a = \frac{2h}{t^2}. \qquad (6)$$

З огляду на зв'язок лінійного a й кутового ε прискорень, виразимо кутове прискорення точки на ободі шківа через її лінійне прискорення і радіус шківа r:

$$\varepsilon = \frac{a}{r} = \frac{2h}{rt^2}. \qquad (7)$$

Підставивши формули (4), (6), (7) в (3), отримаємо ***розрахункову формулу для моменту інерції,*** який визначається динамічним методом

$$I = mr^2\left(\frac{gt^2}{2h} - 1\right). \qquad (8)$$

Це **робоча формула**. Сюди входять всі величини, які вимірюються на досліді:

m - маса вантажу, прив'язаного до нитки;
r - радіус шківа, на який намотана нитка;
t - час опускання вантажу;
h - висота опускання вантажу.

Нехай спочатку вантаж розкручує порожню платформу. Визначимо час t_0 опускання вантажу.

Далі на платформу помістимо дерев'яний диск, момент інерції якого треба визначити. Тепер, коли той же самий вантаж розкручує платформу разом з диском, знову вимірюємо час t_1 опускання вантажу. Скористаємося тим, що момент інерції I всієї системи дорівнює сумі моменту інерції шківів і моменту інерції диска (властивість адитивності):

$$I = I_{\text{шківів}} + I_{\text{диска}}.$$

Ця рівність є наслідком принципу *адитивності моменту інерції*, який стверджує : момент інерції тіла дорівнює сумі моментів інерції його частин.

Виразимо звідси момент інерції диска і скористаємося формулою (8)

$$I_{\text{диска}} = I - I_{\text{шківів}} = \frac{mr^2 g}{2h}(t_1^2 - t_0^2). \qquad (9)$$

Ця формула є робочою.

Тут t_0 - час опускання вантажу, коли розкручується порожня платформа;

t_1 - час опускання вантажу з досліджуваним тілом .

Вимірювання.

1. Визначити за допомогою масштабної лінійки висоту h опускання вантажу на нитці.
2. Штангенциркулем виміряти радіуси шківів r_1 і r_2.
3. Визначити масу m вантажу (маси складових вантажу вибиті на їх поверхнях).

Значення h, r_1 і r_2, вказані на приладі. Дані занести в таблицю.

4. Намотати нитку на **великий шків** і перекинути її через блок. Виміряти 3 рази час t_0**,** протягом якого вантаж, розкручуючи *порожню платформу*, опуститься з висоти h.

5. Покласти на пристрій дерев'яний диск і виміряти 3 рази час t_1 опускання вантажу, що розкручує платформу з диском.
6. Замінити дерев'яний диск металевим колесом зі спицями і визначити час t_1 опускання вантажу 3 рази.
7. Повторити всі досліди п. 4, 5, 6, намотуючи нитку на **малий шків.**
8. За формулою (9) обчислити моменти інерції дерев'яного диска і металевого колеса.

Таблиця

№ п/п	Шків	r, м	h, м	m, кг	t_0, с	Дерев'яний диск					Металеве кільце				
						t_1	J_i	$\langle J\rangle$	ΔJ	E	t_1	J_i	$\langle J\rangle$	ΔJ	E
1	Великий														
2															
3															
4	Малий														
5															
6															

Контрольні питання.

1. Що називається моментом інерції тіла відносно даної осі? Наведіть формули моментів інерції тіл найпростішої форми. Чи залежить момент інерції диска від його товщини?
2. Порівняйте формули $\mathbf{F} = m\boldsymbol{a}$ и $\mathbf{M} = I\boldsymbol{\varepsilon}$. У чому полягає аналогія між цими виразами?
3. У чому суть динамічного методу визначення моменту інерції?
4. У чому полягає властивість адитивності моменту інерції? Покажіть, що вона випливає з визначення моменту інерції.
5. Значеннями яких величин нехтують при вимірюванні?

Література.

1. Кучерук І.М. та ін. Загальний курс фізики. Навч. посібник Т.1. Механіка. Молекулярна фізика і термодинаміка. – К.:Техніка.,1999 – 536 с.
2. В. М. Барановський, П. В. Бережний, І. Т. Горбачук та ін. Загальна фізика: Лабораторний практикум.: Навч. посібник. За заг. ред. І. Т. Горбачука. – К. Вища школа., 1992 – 509с.
3. І.П.Гаркуша, В.П.Курінний. Фізика. Навч. посібник у 7 частинах.Ч.1 Механіка. Д. НТУ Дніпровська політехніка, 2019.