Министерство образования и науки Украины
Национальный ТУ «Днепровская политехника»

Методические указания
к лабораторной работе № **1.1**

ИЗУЧЕНИЕ МЕТОДИКИ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

г. Днепр
2019

Методические указания к лабораторной работе № 1 «Изучение методики статистической обработки экспериментальных данных » по разделу «Физические основы механики» курса физики для студентов всех специальностей.

Сост.: И.П. Гаркуша,
Днепр: ТУ «ДП», 2019 г.

Лабораторная работа № 1.1

ИЗУЧЕНИЕ МЕТОДИКИ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

***Цель работы*:** ознакомиться с методами обработки результатов эксперимента и применить их к расчету удельного сопротивления проволоки.

Краткая теория.

Измеряя какую-либо физическую величину, мы получаем числа, которые указывают, сколько раз в измеряемой величине укладывается единица измерения.

Вследствие несовершенства измерительных приборов, методов измерения и наших органов чувств при измерениях неизбежно возникают *погрешности.*

Абсолютной погрешностью Δx измерения называется разность между найденным на опыте и истинным значением физической величины:

$$\Delta x = x_{изм} - x_{ист}. \tag{1}$$

Истинное значение величины узнать нельзя, а полностью избежать погрешностей измерения принципиально невозможно. Однако с помощью серии измерений и обработки их результатов можно **найти приблизительное значение измеряемой величины и указать предельные значения, между которыми она находится.** В этом и заключается смысл обработки результатов эксперимента.

Случайные погрешности подчиняются статистическим закономерностям, которые изучаются математической теорией погрешностей. Приведём без доказательства некоторые выводы этой теории.

Многократно повторяя одни и те же измерения, можно заметить, что их результаты разбросаны вокруг некоторого среднего.

Пусть в результате n измерений физической величины x получены значения $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_i, \ldots, x_n$. В качестве наилучшего значения для измеряемой величины принимают **среднее арифметическое** из всех полученных результатов (отношение суммы всех значений данных к числу слагаемых):

$$< x >= \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i . \tag{2}$$

Здесь $\sum$ — принятый в математике знак суммирования величин тех переменных, которые находятся справа от этого знака.

Для оценки точности результата измеренного значения вводится величина $S_{<x>}$, характеризующая возможное отклонение найденного среднего арифметического от истинного значения.

Она называется **стандартным отклонением (или средним квадратическим отклонением среднего арифметического)** и равна

$$S_{\langle x\rangle} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - < x >)^2}{n(n-1)}} . \tag{3}$$

Здесь x_i - результат i-го измерения;$<x>$ - среднее арифметическое полученных значений; n – число измерений.

Стоящее в числителе под корнем выражение означает, что для всех x_i от первого до последнего необходимо вычислить разности между i – ми и средними значениями, возвести эти разности в квадрат и просуммировать;

Результат измерений можно записать в виде

$$x = <x> \pm S_{<x>}. \tag{4}$$

Такая запись со знаком $\pm$ равнозначна неравенству

$$<x> - S_{<x>} \le x \le <x> + S_{<x>} \tag{5}$$

и означает, что измеряемая величина x находится внутри промежутка (интервала) шириной 2 $S_{\langle x\rangle}$.

Интервал ($\langle x\rangle - S_{\langle x\rangle}$, $\langle x\rangle + S_{\langle x\rangle}$) показан на рисунке.

Его называют **доверительным интервалом**.

Например, если для ЭДС элемента получено $E = (1{,}4 \pm 0{,}1)$ В, то это означает, что искомая величина заключена в доверительном интервале от 1,3 до 1,5 В.

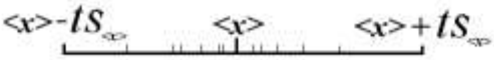
Доверительный интервал содержит истинное значение измеряемой величины с определенной вероятностью. Так, в интервал ($\langle x\rangle - S_{\langle x\rangle}$, $\langle x\rangle + S_{\langle x\rangle}$) истинное значение $x_{ист}$ попадает в α = 68% случаев. При этом α называется коэффициентом доверия или **доверительной вероятностью**. Величину α можно выражать в долях единицы или в %.

Таким образом, доверительный интервал это – интервал значений измеряемой величины, который с заданной надежностью (доверительной вероятностью) накроет истинное значение этой величины.

Если требуется иметь большую уверенность в том, что $x_{ист}$ находится внутри доверительного интервала, последний необходимо расширить. Если расширить доверительный интервал, например, в 2 раза,

то вероятность того, что неизвестное значение окажется внутри этого интервала, возрастет до α = 95%. Следовательно, если доверительный интервал увеличивается, то возрастает вероятность того, что истинное значение величины попадает в рассматриваемый интервал. Однако, с расширением доверительного интервала возрастает абсолютная и относительная погрешность измерения.

Мы рассмотрели варианты доверительных интервалов, полуширина которых составляла $S_{\langle x\rangle}$ и 2 $S_{\langle x\rangle}$. Построим теперь доверительный интервал, полуширина которого равна $t\, S_{\langle x\rangle}$.



Здесь стандартное отклонение $S_{\langle x\rangle}$ умножается на некоторое число t. Это число (оно называется *коэффициентом Стьюдента,* Стьюдент – псевдоним английского математика У. С. Госсета) зависит от выбираемой экспериментатором доверительной вероятности α и количества n проведенных им опытов. Коэффициенты Стьюдента $t_{\alpha,n}$. рассчитаны в теории вероятностей и сведены в таблицу 1.

Таблица 1.

n / α	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0,8	3,08	1,89	1,64	1,53	1,48	1,44	1,42	1,40	1,38
0,9	6,31	2,92	2,35	2,13	2,02	1,94	1,89	1,86	1,83
0,95	12,7	4,30	3,18	2,78	2,57	2,45	2,36	2,31	2,26
0,98	31,8	6,96	4,54	3,75	3,36	3,14	3,00	2,90	2,82
0,99	63,7	9,92	5,84	4,60	4,03	3,71	3,50	3,36	3,25

Так, например, при доверительной вероятности α = 0,9 (или 90%) и числе опытов n = 5 коэффициент Стьюдента составляет $t_{\alpha,n}$ = 2,13.

Полуширина такого **доверительного интервала** (или абсолютная **погрешность $\Delta\langle x\rangle$** среднего значения измеряемой величины) равна

$$\Delta\langle x\rangle = t_{\alpha,n}\, S_{\langle x\rangle}. \qquad (6)$$

Относительной погрешностью измерения E называется отношение полуширины доверительного интервала к среднему значению измеряемой величины

$$E = \frac{\Delta < x >}{< x >}\cdot 100\%. \qquad (7)$$

В итоге **окончательный результат** записывают в виде

$$x = (\langle x\rangle \pm \Delta\langle x\rangle) \text{ единиц измерения, при } \alpha = \ldots \qquad (8)$$

Эта запись означает, что в результате измерений найдено среднее значение $\langle x\rangle$ с предельной погрешностью $\Delta\langle x\rangle$, т.е. что с вероятностью $\alpha = \ldots$ истинное значение измеряемой величины будет лежать в пределах от $\langle x\rangle - \Delta\langle x\rangle$ до $\langle x\rangle + \Delta\langle x\rangle$.

Во всех последующих лабораторных работах, которые вам придется выполнять***, необходимо придерживаться единой методики обработки результатов измерений, а именно:***
(данные каждого шага заносят в таблицу)

1. Проводят n независимых опытов и определяют n значений искомой величины $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$.
2. Рассчитывают среднее арифметическое значение искомой величины:

$$< x >= \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i .$$

3.Рассчитывают отклонение каждого результата от среднего значения:

$$\Delta x_i = x_i - < x > .$$

4. Определяют стандартное отклонение среднего

$$S_{\langle x\rangle} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - < x >)^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \Delta x_3^2 + \ldots}{n(n-1)}} .$$

5. Задают доверительную вероятность α. Обычно доверительную вероятность полагают равной 0,90; 0,95; 0,98; 0,99. По выбранному значению доверительной вероятности α и для выполненного количества измерений n по таблице определяют коэффициент Стьюдента $t_{\alpha,n}$.
6. Вычисляют полуширину доверительного интервала (**абсолютную погрешность среднего**)

$$\Delta\langle x\rangle = t_{\alpha,n}\; S_{\langle x\rangle}.$$

7. Определяют относительную погрешность

$$E = \frac{\Delta < x >}{< x >}\cdot 100\%.$$

8. Окончательный результат измерения записывают в виде:

$$x = (\langle x\rangle \pm \Delta\langle x\rangle) \text{ единиц измерения, при } \alpha = \ldots$$

Пример 1. Для измерения периода T колебаний маятника студент пользовался секундомером. Он включал его, когда маятник достигал максимального отклонения, и останавливал по прошествии одного полного колебания.

Получены такие результаты измерений периода (в секундах):

3,43; 3,41; 3,50; 3,40; 3,45; 3,44; 3,42.

Как видим, результаты измерений отличаются друг от друга на несколько сотых или десятых долей секунды, т.е. содержат случайную погрешность.

Разброс результатов измерений может быть вызван нажатием кнопки секундомера то ли чуть раньше, то ли позже, чем нужно. На движение маятника могут влиять: силы трения в месте закрепления подвеса, случайные воздушные потоки и т.п.

Пользуясь стандартной методикой и правилами округления, определяем (далее все в секундах):

1. Среднее арифметическое значение периода:

$$<T>=\frac{3{,}43+3{,}41+3{,}50+3{,}40+3{,}45+3{,}44+3{,}42}{7}\approx 3{,}44\,.$$

2. Отклонение каждого результата от среднего значения ΔT_i :

$$\Delta T_1 = 3{,}43 - 3{,}44 = -\,0{,}01;$$
$$\Delta T_2 = 3{,}41 - 3{,}44 = -\,0{,}03;$$
$$\Delta T_3 = 3{,}50 - 3{,}44 = +\,0{,}06;$$
$$\Delta T_4 = 3{,}40 - 3{,}44 = -\,0{,}04;$$
$$\Delta T_5 = 3{,}45 - 3{,}44 = +\,0{,}01;$$
$$\Delta T_6 = 3{,}44 - 3{,}44 = 0;$$
$$\Delta T_7 = 3{,}42 - 3{,}44 = -\,0{,}02.$$

3. Стандартное отклонение среднего:

$$S_{\langle T\rangle}=\sqrt{\frac{\Delta T_1^2+\Delta T_2^2+\Delta T_3^2+\ldots}{n(n-1)}}=$$

$$=\sqrt{\frac{(-0{,}01)^2+(-0{,}03)^2+(0{,}06)^2+(-0{,}04)^2+(0{,}01)^2+(-0{,}02)^2}{7\cdot 6}}=$$

$$=\sqrt{\frac{0{,}0001+0{,}0009+0{,}0036+0{,}0016+0{,}0001+0{,}0004}{42}}=$$

$$\sqrt{\frac{0{,}0067}{42}}\approx 0{,}01.$$

4. Зададим доверительную вероятность, например, $\alpha =$ 0,9 (верим своим измерениям на 90 %) и для 7 измерений по таблице находим коэффициент Стьюдента:

$$t_{\alpha,n} = 1{,}94.$$

5. Вычислим абсолютную погрешность среднего

$$\Delta\langle T\rangle = t_{\alpha,n}\ S_{\langle T\rangle} = 1{,}94\cdot 0{,}01 \approx 0{,}02.$$

6. Находим относительную погрешность

$$E=\frac{\Delta<T>}{<T>}\cdot 100\%=\frac{0{,}02}{3{,}44}\cdot 100\%=0{,}6\%\,.$$

7. Записываем окончательный результат измерения:

$$T = (3{,}44 \pm 0{,}02)\ c \text{ при } \alpha = 0{,}9.$$

В качестве другого примера применения изложенной методики предлагается вычислить удельное сопротивление проволоки и оформить результат по стандарту.

Пример 2. Измерение удельного сопротивления нихромовой проволоки

Удельное сопротивление ρ проволоки, изготовленной из однородного материала и имеющей всюду одинаковую толщину, может быть определено из формулы сопротивления $R = \rho \dfrac{l}{S}$:

$$\rho = \frac{RS}{l},$$

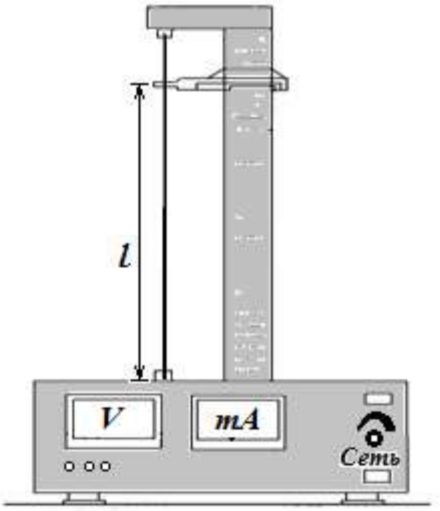
где R – сопротивление измеряемого отрезка проволоки; l – его длина; S – площадь поперечного сечения проволоки.

Длину проволоки l измеряют с помощью мерной шкалы прибора, площадь поперечного сечения вычисляют, определив диаметр проволоки d,

$$S = \frac{\pi d^2}{4}.$$

Электрическое сопротивление R можно определить по закону Ома, измерив силу тока I и падение напряжения U на проволоке амперметром и вольтметром:

$$R = \frac{U}{I}.$$



Следовательно, удельное сопротивление проволоки может быть вычислено по формуле:

$$\rho = \frac{\pi d^2 U}{4Il}. \qquad (9)$$

Экспериментальная установка показана на рисунке.

Порядок измерений

1. Перемещая подвижный кронштейн, установить длину l проволоки, указанную преподавателем (≈ 45 см).
2. Включить установку, нажав кнопку "СЕТЬ".
3. Поворачивая рукоятку амперметра, установить заданное преподавателем значение силы тока I (110 - 115 мА). Записать в таблицу соответствующие показания вольтметра.
4. Меняя силу тока, проделать опыт три - пять раз.
5. Изменить длину проволоки и повторить те же измерения.
6. Данные измерений занести в таблицу.

Таблица 2.

№ п/п	d, м	l, м	I, А	U, В	ρ_i, Ом·м	$<\rho>$, Ом·м	$\Delta\rho_i$, Ом·м	$(\Delta\rho_i)^2$	$S_{<\rho>}$, Ом·м	α	$t_{\alpha,n}$	$\Delta\rho$, Ом·м	E, %
1.	$4{,}7\cdot10^{-4}$									Выбирается произвольно	по таблице		
2.													
3.													
4.													
5.													
6.													

7. Вычислить удельное сопротивление ρ_i для каждого измерения по формуле (9).
8. Получив несколько значений ρ_i, произвести математическую обработку результатов измерения согласно пунктам 1 - 7. приведенной выше методики
9. Записать окончательный результат в виде

$$\rho = (<\rho> \pm \Delta <\rho>)\ \text{Ом}\cdot\text{м} \quad \text{при} \quad \alpha = \ldots$$

Контрольные вопросы

1 .В чем заключается смысл обработки данных эксперимента? Что называется абсолютной и относительной погрешностью?

2. Каков смысл доверительной вероятности и доверительного интервала?

3. Как изменяется погрешность измерения с увеличением коэффициента доверия?

4. Проанализируйте таблицу коэффициентов Стьюдента. Как изменяются коэффициенты Стьюдента с увеличением числа опытов? Каким образом увеличение числа опытов влияет на точность измерений?

5. Каков смысл записи $\rho = \langle\rho\rangle \pm \Delta\langle\rho\rangle$, при $\alpha = 0{,}95$?

Составил И.П.Гаркуша