Лабораторна робота № **1.5**

Визначення моменту інерції хрестоподібного маятника Обербека

Прилади: 1) хрестоподібний маятник Обербека (з набором вантажів) ,. 2) електронний секундомір (вмонтований в прилад).

Метою роботи є: 1) визначення моменту інерції маятника; 2) порівняння знайденого в досліді моменту інерції з його значенням, обчисленим теоретично.

Теоретичний вступ

Розглянемо тверде тіло, наприклад, диск, який може обертатися навколо закріпленої осі. На рис. 1 вісь обертання *OZ* проходить через центр диска перпендикулярно до його площини.

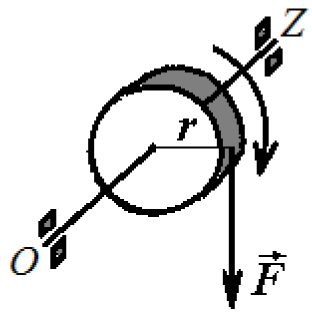


Рис. 1.

Сили, які паралельні осі обертання, не можуть призвести обертання тіла, а можуть лише зрушити тіло уздовж цієї осі. Тому обертати можуть тільки сили, що лежать в площині, перпендикулярній до осі обертання. Наприклад, сила ***F***, яка прикладена за дотичною до бічної поверхні диска.

Моментом M_z ***сили*** відносно осі *OZ* називається скалярна величина, що дорівнює ***добутку*** модуля ***сили*** на її ***плече,*** тобто на довжину перпендикуляра, проведеного від осі до прямої, уздовж якої діє сила. У нашому випадку плече сили ***F*** дорівнює радіусу *r* диска, тобто момент сили

$$M_z = Fr. \tag{1}$$

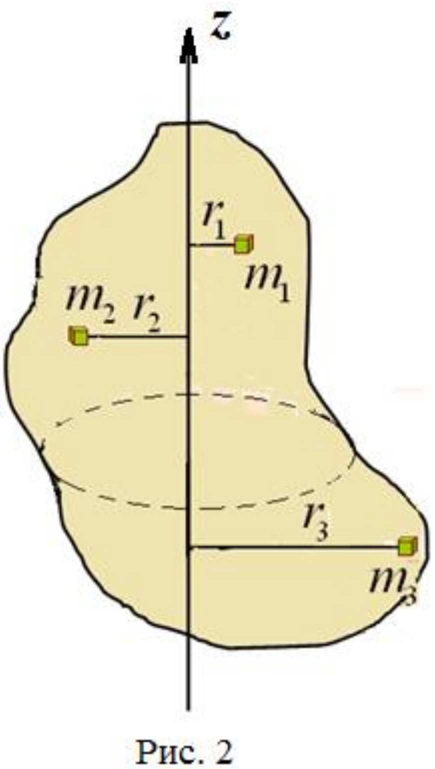


Рис. 2

У ***поступальному*** русі тіла, мірою ***інертності*** є його маса *m*. Тіло з більшою масою є більш інертним, сильніше «чинить опір» спробам змінити його швидкість. Наприклад, тілу з великою масою, що покоїться, важче надати швидкості, або, навпаки, масивне тіло, що рухається, важче зупинити.

В ***обертальному*** русі твердого тіла ***інертність*** (тобто здатність зберігати кутову швидкість обертання) визначається моментом інерції I_Z.

Моментом інерції *матеріальної точки* масою *m*, що знаходиться на відстані *r* від осі обертання, називається величина, що дорівнює добутку маси цієї точки на квадрат відстані її від осі обертання, тобто

$$I = mr^2.$$

Момент інерції *тіла* відносно деякої осі Z дорівнює сумі моментів інерції матеріальних точок, з яких складається тіло, тобто сумі добутків елементарних мас m_i, на які подумки розбиваємо тіло, на квадрати відстаней r_i кожної елементарної маси від осі обертання (див. рис. 2)

$$I_z = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + ... + m_n r_n^2 = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \ . \tag{2}$$

Тут Σ - прийнятий в математиці для короткого запису знак додавання величин тих змінних, які знаходяться праворуч від цього знака. Одиниця вимірювання моменту інерції в СІ кг·м^2.

З формули (2) для моменту інерції видно, що точки, які лежать далі від осі обертання, вносять в суму значно більший внесок, ніж близькі точки.

Таким чином, момент інерції залежить не тільки від маси тіла, а й того, як ця маса розподілена за об'ємом тіла - далеко чи близько від осі.

Цю властивість моменту інерції можна ілюструвати за допомогою т. зв. *хрестоподібного маятника* (рис. 3). У його середній частині укріплюються спиці, і є отвір для осі. Таке колесо обертається за допомогою підшипника навколо горизонтальній осі. Уздовж укріплених радіально чотирьох спиць, можуть переміщатися вантажі - насадки, закріплені на спицях за допомогою гвинтів.

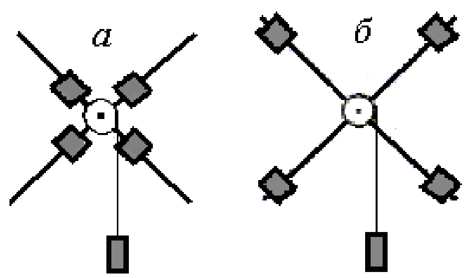


Рис. 3.

На обід колеса (званий шківом) намотується нитка.

До вільного кінця нитки підвішується масивне тіло. При падінні масивного тіла рух через нитку передається шківу, і хрестовина починає обертатися.

На рисунках 3 *а* і 3 *б* маса хрестовини з вантажами одна і та ж. Але вона порізному розподілена в двох дослідах. Чим далі від осі обертання знаходяться вантажі, тим більшою є сума добутків мас на квадрати їх відстаней від осі - момент інерції (2). Іншими словами, момент інерції хрестовини у випадку 3 *б* є ***більшим.***

Дослід показує, що у випадку 3 *б* розкрутити хрестовину під дією одного і того ж масивного тіла на нитці важче, ніж у випадку *а*.

Для розкручування стрижнів з вантажами до однієї і тієї ж кутової швидкості у випадку 3 б потрібно ***більше часу***, ніж у випадку 3 *а*.

Нагадаємо, що другий закон Ньютона для поступального руху тіла має вигляд $m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$ (*добуток маси тіла на його прискорення дорівнює силі, діє на тіло*). Іншими словами, прискорення, що набувається тілом під дією сили, пропорційно частці від ділення сили на масу тіла:

$$\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{F}}{m}.$$

Схожим чином записується рівняння динаміки обертального руху твердого тіла відносно нерухомої осі:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{M_z}{I}. \qquad (3)$$

З зіставлення формул механіки поступального руху і обертання навколо нерухомої осі слід, що роль лінійного прискорення a грає кутове прискорення ε, роль маси m - момент інерції I, сили $\boldsymbol{F}$ - момент сили M_Z.

Підсумовуючи, можна сказати, що ***момент інерції*** твердого тіла відносно будь-якої нерухомої осі є ***мірою інертності*** цього тіла в обертанні навколо даної осі: чим більше момент інерції тіла, тим менше кутове прискорення воно набуває під дією одного і того ж моменту зовнішніх сил (див. формулу (3)).

Опис експериментальної установки

Застосований в цій роботі хрестоподібний маятник Обербека складається з циліндричної муфти з двома шківами різного розміру. Муфта обертається на осі, укріпленій горизонтально на стійці. В муфту угвинчені хрестоподібно чотири стрижні під прямим кутом один до одного (фото 1). Переміщаючи тягарі-насадки m_0 уздовж стрижнів, можна змінювати момент інерції маятника.

Маятник приводиться в обертання за допомогою падаючих тягарів різної маси m, що прикріплюються до кінця намотаною на той чи інший шків нитки.

Нагорі вертикальної стійки розміщений малоінерційний шків (коліщатко нерухомого блоку), що змінює напрямок руху нитки, на якій підвішений падаючий тягар. На стійці закріплені також верхній датчик початку відліку часу вертикального руху падаючого тягаря і нижній датчик закінчення відліку часу руху цього тягаря.

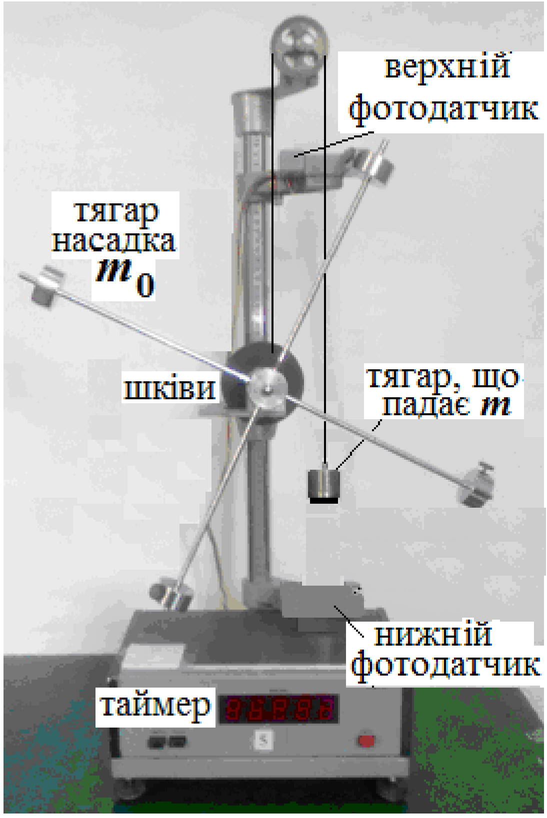


Фото 1

Теорія досліду

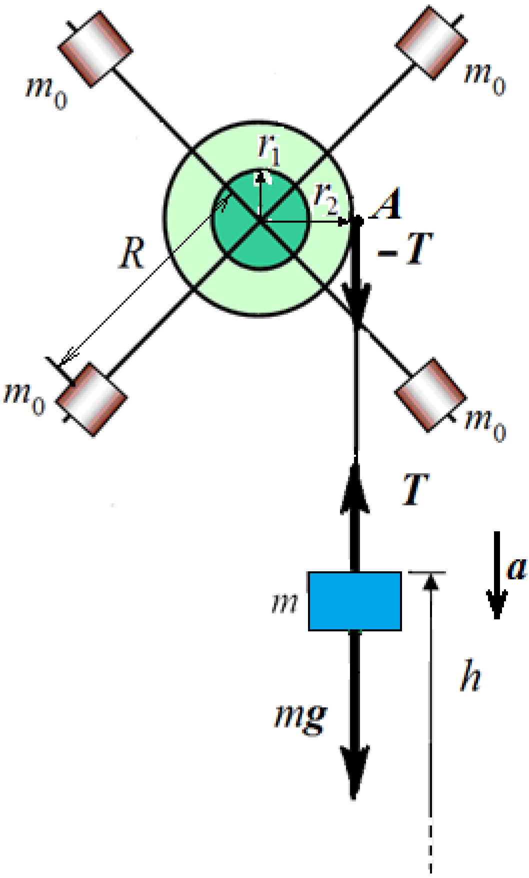


Рис .4

На рис. 4 показані сили, що діють на тіла в даній задачі. На падаючий тягар масою m, підвішений на нитці, діють дві сили (рис. 4): $m\boldsymbol{g}$ - сила тяжіння - вертикально вниз і $\boldsymbol{T}$ - сила натягу нитки - вертикально вгору. За другим законом Ньютона добуток маси тіла на прискорення дорівнює сумі прикладених сил:

$$m\boldsymbol{a} = m\boldsymbol{g} + \boldsymbol{T}.$$

Під дією цих сил падаючий тягар рухається вниз поступально з прискоренням $\boldsymbol{a}$. Запишемо другий закон Ньютона в проекціях на вертикаль

$$ma = mg - T. \qquad (4)$$

За третім законом Ньютона сила, рівна за модулем силі натягу $\boldsymbol{T}$, але спрямована протилежно їй, прикладена до другого з взаємодіючих тіл - до шківа (по дотичній). Вона позначена на рисунку - $\boldsymbol{T}$.

Ця сила і створює обертовий момент M_z

$$M_z = Tr\ , \qquad (5)$$

(для простоти індекси z в подальших формулах опущені).

Моментом сил тертя нехтуємо.

Прискорення a може бути знайдено з формули шляху для рівноприскореного руху без початкової швидкості. Якщо h - шлях, пройдений падаючим тягарем за час t, то

$$h = \frac{at^2}{2},$$

звідки

$$a = \frac{2h}{t^2}. \qquad (6)$$

З рівнянь (4), (5) і (6) знаходимо значення обертового моменту M

$$M = mr(g - \frac{2h}{t^2}). \qquad (7)$$

Тягар m, падаючи з прискоренням a, захоплює за собою нитку, намотану на шків, тому точки обода шківа матимуть таке ж лінійне прискорення, що і падаючий тягар. Нитку вважаємо нерозтяжною.

З огляду на зв'язок лінійного a й кутового ε прискорень, виразимо кутове прискорення точки A на ободі шківа через її лінійне прискорення і радіус шківа r:

$$\varepsilon = \frac{a}{r} = \frac{2h}{rt^2}. \qquad (8)$$

Далі, користуючись основним рівнянням (3) динаміки обертального руху твердого тіла відносно закріпленої осі

$$M = I\varepsilon,$$

з (7) і (8) отримуємо ***розрахункову формулу для моменту інерції*** хрестоподібного маятника

$$I = mr^2(\frac{gt^2}{2h} - 1). \qquad (9)$$

Вимірюючи час t, протягом якого падаючий тягар масою m зі стану спокою опуститься на відстань h, за цією формулою можна визначити момент інерції I маятника.

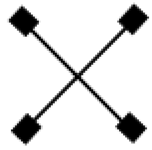
Порядок виконання роботи

Завдання 1. Визначення моменту інерції хрестоподібного маятника при двох положеннях вантажів (на кінцях стрижнів і зсунутих до муфти).

1. **Закріпити насадки ближче до кінців стрижнів** ($R \approx$ 20-25 см). Кожен раз, закріплюючи насадки на стрижнях, необхідно перевірити, чи правильно збалансована система, тобто чи знаходиться вона в байдужій рівновазі. Включити прилад кнопкою «Мережа».
2. Задати висоту h падіння тягаря m_1 по відмітці на вертикальній стійці.
3. На кінець нитки прикріпити тягар m_1. Обертанням хрестовини намотати нитку на шків радіуса r_1 і підняти тягар вгору. Нитка при намотування має знаходитися з правого боку шківа. Радіуси шківів r_1 і r_2 вказані в таблиці.
4. Маятник Обербека готовий до досліду, тобто тягар знаходиться у вихідному положенні, коли він піднятий вгору до верхнього фотодатчика так, щоб нижня основа тягаря знаходилася поблизу оптичної осі датчика. Притримуючи рукою хрестовину, встановити падаючий тягар по позначці.
5. Двічі натиснути кнопку «Пуск» і одночасно відпустити хрестовину.
6. Після проходження тягарем нижнього фотодатчика записати час t опускання тягаря m_1 з висоти h. Натиснути кнопку «Скидання».
7. Змінити масу падаючого тягаря, підвішеного до нитки - прив'язати по черзі тягарі m_2 і m_3 і повторити досліди.
8. Потім нитку перекинути на інший шків (радіуса r_2) і повторити всі досліди.

9. **Зсунути насадки до значень** $R \approx 7$ - 10 см і повторити вимірювання за пунктами 1 - 8.

8. Результати вимірювань заносити в таблицю і розрахувати моменти інерції з розсунутими (Таблиця 1) і зсунутими (Таблиця 2) насадками.

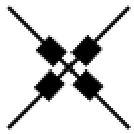


Таблиця 1.

Шків r_1 =					$\langle I \rangle$	ΔI_i	$S_{\langle I \rangle}$	$t_{\alpha,n}$	$\Delta\langle I \rangle$	E %
N п/п	m, кг	h,м	t, с	I по (9)						
1.	m_1 = 0,051			I_1		ΔI_1				
2.	m_2 = 0,101			I_2		ΔI_2				
3.	m_3 = 0,151			I_3	$I = \dfrac{I_1 + I_2 + \ldots + I_6}{6}$	ΔI_3	Дивись Додаток	За таблицею Стьюдента з Додатку		
Шків r_2 =										
4.	m_1 = 0,051			I_4		ΔI_4				
5.	m_2 = 0,101			I_5		ΔI_5				
6.	m_3 = 0,151			I_6		ΔI_6				

$I = \langle I \rangle \pm \Delta\langle I \rangle$ (кг·м^2) за α =

Таблиця 2.



Шків r_1 =					$\langle I \rangle$	ΔI_i	$S_{\langle I \rangle}$	$t_{\alpha,n}$	$\Delta\langle I \rangle$	E %
N п/п	m, кг	h,м	t, с	I по (9)						
1.	m_1 = 0,051			I_1		ΔI_1				
2.	m_2 = 0,101			I_2		ΔI_2				
3.	m_3 = 0,151			I_3	$\langle I \rangle = \dfrac{I_1 + I_2 + \ldots + I_6}{6}$	ΔI_3	Дивись Додаток	За таблицею Стьюдента з Додатку		
Шків r_2 =										
4.	m_1 = 0,051			I_4		ΔI_4				
5.	m_2 = 0,101			I_5		ΔI_5				
6.	m_3 = 0,151			I_6		ΔI_6				

$I = \langle I \rangle \pm \Delta\langle I \rangle$ (кг·м^2) за α =

ДОДАТОК

Алгоритм обробки експерименту

1. Проводять n незалежних дослідів і визначають n значень шуканої величини $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$..
2. Розраховують середнє арифметичне значення шуканої величини:

$$< x >= \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \ .$$

3.Рассчітивают відхилення кожного результату від середнього значення:

$$\Delta x_i = x_i - < x > .$$

4. Визначають середнє квадратичне відхилення середнього

$$S_{\langle x \rangle} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - < x >)^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \Delta x_3^2 + \ldots}{n(n-1)}} \ .$$

5. Задають довірчу ймовірність α. Зазвичай довірчу ймовірність вважають рівною 0,90; 0,95; 0,98; 0,99. За обраним значенням довірчої ймовірності α і для виконаного кількості вимірювань n за таблицею визначають коефіцієнт Стьюдента $t_{\alpha,\, n}$.
6. Обчислюють півширину довірчого інтервалу (***абсолютну похибку середнього***)

$$\Delta<x> = \ t_{\alpha,n}\ S_{<x>}.$$

7. Визначають відносну похибку

$$E = \frac{\Delta < x >}{< x >} \cdot 100\% .$$

8. Остаточний результат вимірювання записують у вигляді:

$x = (<x> \pm \Delta<x>)$ одиниць виміру, за $\alpha = \ldots$

Таблиця коефіцієнтів Стьюдента $t_{\alpha,n}$.

α \ n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0,8	3,08	1,89	1,64	1,53	1,48	1,44	1,42	1,40	1,38
0,9	6,31	2,92	2,35	2,13	2,02	1,94	1,89	1,86	1,83
0,95	12,70	4,30	3,18	2,78	2,57	2,45	2,36	2,31	2,26
0,98	31,80	6,96	4,54	3,75	3,36	3,14	3,00	2,90	2,82
0,99	63,70	9,92	5,84	4,60	4,03	3,71	3,50	3,36	3,25

Завдання 2. (Виконується за вказівкою викладача при наявності часу). *Порівняння значення моменту інерції, знайденого в досліді, з теоретичним.*

З даних першого досліду визначають середнє значення моменту інерції I системи при розставлених насадках. Потім знайдене значення I порівнюють з його теоретичним значенням.

Відповідно до теорії, момент інерції $I_{\text{теор}}$ маятника дорівнює сумі моментів інерції порожньої хрестовини і чотирьох насадок, маса яких m_0.

$$I_{\text{теор}} = I_{\text{хр}} + 4m_0R^2, \qquad (11)$$

R - відстань від осі обертання до центра мас насадок.

Момент інерції $I_{хр}$ хрестовини маятника - це момент інерції двох великих взаємно перпендикулярних стрижнів, які утворюють хрест, відносно осі, що проходить через їх середину

$$I_{xp} = 2 \cdot \frac{1}{12} m_{cm} l^2 . \qquad (12)$$

Тут $m_{ст}$ - маса стрижня, l - його довжина написані на приладі.

Теоретичне значення моменту інерції обчислюють за формулами (11) і (12).

$$I_{теор} = \frac{1}{6} m_{ст} l^2 + 4 m_0 R^2 . \qquad (13)$$

Контрольні питання

1. Що називається моментом інерції тіла відносно даної осі? Чому дорівнює момент сили відносно осі? Яка роль моменту інерції у обертальному русі?
2. Напишіть основний закон динаміки тіла при обертанні навколо нерухомої осі. Порівняйте формули $\boldsymbol{I\varepsilon} = \boldsymbol{M}$ і $m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$. У чому полягає аналогія між цими виразами?
3. Момент якої сили змушує маятник обертатися?
4. Як можна змінити момент інерції маятника.
5. Як можна змінити момент обертальної сили (2 способи).
6. Виведіть робочу формулу (9).
7. Порівняйте виміряні на досліді значення моменту інерції маятника зі зсунутими і розсунутими насадками. Зробіть висновок.

Література.

1. Кучерук І.М. та ін. Загальний курс фізики. Навч. посібник Т.1. Механіка. Молекулярна фізика і термодинаміка. – К.:Техніка.,1999 – 536 с.
2. Загальна фізика: Лабораторний практикум.:Навч. посібник За заг. ред.. І.Т.Горбачука. – К. : Вища шк.. 1992. – 509 с.
3. В. М. Барановський, П. В. Бережний, І. Т. Горбачук та ін. Загальна фізика: Лабораторний практикум.: Навч. посібник. За заг. ред. І. Т. Горбачука. – К. Вища школа., 1992 – 509с.