

Лабораторная работа № 1.9

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ПОМОЩЬЮ КРУТИЛЬНОГО МАЯТНИКА

Цель работы: Измерить моменты инерции твердого тела относительно осей, проходящих через центр тяжести, с помощью крутильного маятника.

Краткая теория

Моментом инерции тела относительно некоторой оси называется величина, равная сумме произведений элементарных масс m_i всех частиц тела на квадраты их расстояний r_i от той же оси:

$$I_z = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2. \quad (1)$$

Момент инерции - это мера инертности тела при вращательном движении вокруг данной оси. Момент инерции определяется относительно конкретной оси. Если изменить ось вращения, изменится и момент инерции.

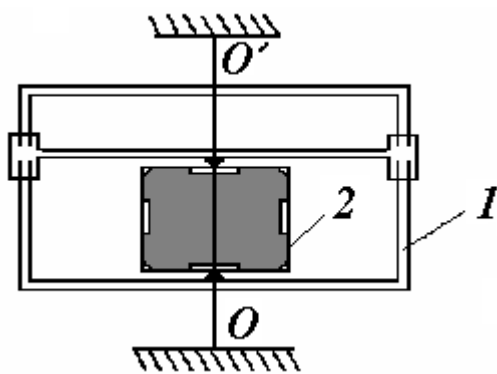


Рис. 1.

Момент инерции тела можно определить с помощью крутильного маятника. Крутильный маятник – это массивное твердое тело, подвешенное на тонкой упругой нити. Крутильный маятник, используемый в данной работе представлен на рис. 1. Он состоит из рамки 1, подвешенной на стальной вертикально натянутой проволоке. Внутри рамки крепится симметричное тело 2 так, что его центр масс лежит на оси вращения OO' . Исследуемым телом в дан-

ной работе является образец в форме параллелепипеда.

Если отклонить рамку от положения равновесия на небольшой угол φ и отпустить, то рамка будет совершать крутильные колебания, обусловленные упругими силами, возникающими в проволоке OO' .

Гармоническими крутильными колебаниями твердого тела называется периодическое вращательное движение относительно оси, проходящей через центр тяжести этого тела, при котором угол отклонения от положения равновесия изменяется с течением времени t по закону синуса или косинуса:

$$\varphi = \varphi_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right), \quad (1)$$

где φ – угловое смещение от положения равновесия в момент времени t ; φ_0 – максимальное угловое смещение (амплитуда колебаний); T – период колебаний.

Угловая скорость колебаний равна первой производной угла по времени

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \varphi_0 \frac{2\pi}{T} \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right). \quad (2)$$

При этом максимальное значение угловой скорости, которое достигается при прохождении маятником положения равновесия, равно

$$\omega_{\max} = \frac{2\pi}{T} \varphi_0 \quad (3)$$

Если пренебречь силами трения, то при отклонении крутильного маятника на угол $d\varphi$ он получает запас потенциальной энергии, равный работе внешних сил по закручиванию проволоки:

$$dE_{\text{пот}} = dA_{\text{внеш}} \quad (4)$$

Эта работа равна по модулю и противоположна по знаку работе сил упругости, возникающих в закрученной проволоке

$$dA_{\text{внеш}} = -dA_{\text{упр}} = -(M_{\text{упр}}d\varphi) \quad (5)$$

На основании закона Гука момент упругой силы пропорционален углу закручивания:

$$M = -D\varphi \quad (6)$$

где D – модуль кручения проволоки. Величина D зависит от длины проволоки, её диаметра и модуля сдвига, характеризующего упругие свойства материала проволоки. Знак минус в законе Гука означает, что момент силы направлен в сторону, противоположную направлению отсчета угла закручивания.

В итоге

$$dE_{\text{пот}} = D\varphi d\varphi \quad (7)$$

и после интегрирования получим потенциальную энергию закрученной проволоки

$$E_{\text{ном}} = \int_0^{\varphi_0} D\varphi d\varphi = \frac{D\varphi_0^2}{2} \quad (8)$$

При прохождении маятника через положение равновесия потенциальная энергия закрученной проволоки полностью превращается в кинетическую энергию вращения маятника (закон сохранения механической энергии):

$$\frac{D\varphi_0^2}{2} = \frac{I\omega_{\max}^2}{2}, \quad (9)$$

где J – момент инерции рамки.

Из последнего уравнения с учетом (3) можно определить момент инерции маятника

$$I = \frac{DT^2}{4\pi^2}. \quad (10)$$

Период колебаний маятника T можно определить опытным путем. Если за время t маятник совершил n колебаний, то период колебаний равен

$$T = \frac{t}{n}. \quad (11)$$

Таким образом, задавшись значением D и определив на опыте период крутильных колебаний, с помощью крутильного маятника можно по формуле (10) вычислить моменты инерции твердого тела относительно различных осей, проходящих через его центр тяжести.

Описание крутильного маятника

Схема установки представлена на рис. 2: 1 – миллисекундомер, 2 – счетчик числа колебаний, 3 – рамка маятника, 4 – фотоэлектрический датчик, 5 – электромагнит, 6 – шкала.

В рамке 3 исследуемое тело 7 закрепляют при помощи подвижной балки 8, которая перемещается по направляющим стержням между неподвижными балками. Балка 8 устанавливается путем затягивания гаек на зажимных втулках, помещенных на подвижной балке. Стальная плита служит основанием фотоэлектрическому датчику 4, электромагниту 5 и шкале 6. Положение электромагнита можно изменять на плите относительно фотоэлектрического датчика.

После нажатия кнопки "ПУСК" электромагнит отключается и рамка совершает крутильные колебания. При этом стрела рамки пересекает световой луч фотоэлектрического датчика, а импульсы, переданные датчиком, подсчитываются миллисекундомером и высвечиваются на цифровых табло в виде числа колебаний и продолжительности колебаний. После нажатия кнопки "СТОП" миллисекундомер отключается.

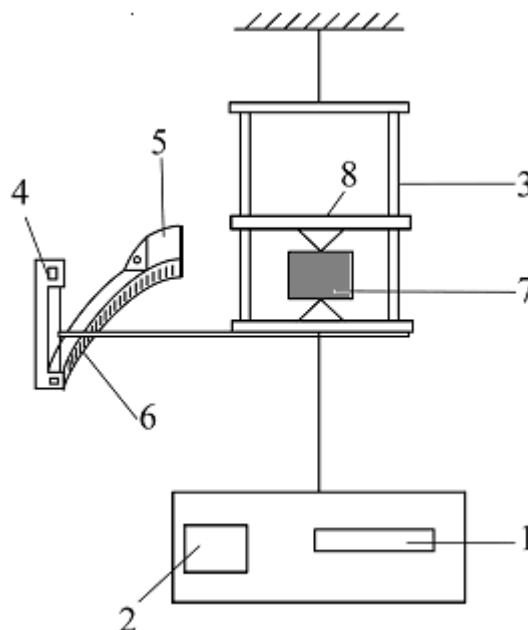


Рис. 2.

Порядок выполнения работы

Вначале определяют период колебаний T_0 ненагруженной рамки. Затем укрепляют исследуемое тело в рамке и определяют период колебаний T системы "рамка + тело".

Так как момент инерции является аддитивной величиной, т.е. момент инерции системы равен сумме моментов ее элементов, $I = I_0 + I_{\text{тела}}$, то момент инерции тела определяется по формуле

$$I_{\text{тела}} = I - I_0 = \frac{D}{4\pi^2} (T^2 - T_0^2) \quad (12)$$

1. Отклоняют рамку маятника так, чтобы её стрела приблизилась к электромагниту, который остановит рамку в заданном положении. Электромагнит включается нажатием кнопки "СБРОС" и фиксирует в заданном положении выведенную на равновесия рамку.
2. Нажимают кнопку "ПУСК".
3. После того как маятник сделает 10-20 полных колебаний, нажимают кнопку "СТОП". Если измерение времени колебаний t проводится для $n = 10$ колебаний, то клавишу "Стоп" нажимают при высвечивании на индикаторе цифры 9.
4. Записывают показания цифровых индикаторов, опыт повторяют 3 раза.
5. По формуле (11) вычисляют период T_0 колебаний ненагруженной рамки.
6. Укрепляют груз в рамке с помощью подвижной балки так, чтобы ось вращения проходила через центр тяжести **поперек груза** и производят измерения периода колебаний T по пунктам 1 - 5
7. Затем по формуле (12) вычисляют момент инерции тела $I_{\text{тела}}$ относительно данной оси. Значение модуля кручения проволоки D указано на приборе.
8. Изменяют момент инерции системы путем установки в рамку груза так, чтобы ось вращения проходила через центр тяжести **вдоль груза** и, повторив все измерения по пунктам 1- 7, вычисляют момент инерции $I_{\text{тела}}$ относительно другой оси.

Таблица

№ п/п		n	$t, \text{с}$	$T, \text{с}$	$\langle T \rangle, \text{с}$	$I_{\text{тела}}, \text{кг} \cdot \text{м}^2$
1	Пустая рамка					
2						
3						
4	Рамка +груз, ось поперек					
5						
6						
7	Рамка +груз, ось вдоль					
8						
9						

Контрольные вопросы

1. Что называется моментом инерции твердого тела?
2. Чему равна потенциальная энергия упругой деформации?
3. Какова методика измерений момента инерции твердого тела с помощью крутильного маятника?
4. Почему момент инерции образца, имеющего форму параллелепипеда, различный в зависимости от прохождения осей, например «вдоль» или «поперек» тела? Какой из них больше и почему? Каков был бы ответ на этот вопрос, если бы образец имел форму куба?