Министерство образования и науки, молодежи и спорта Украины
Государственное высшее учебное заведение
«Национальный горный университет»

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

ПО РАЗДЕЛУ

“КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ”

для студентов специальностей 0906 ГВУЗ «НГУ»

Днепропетровск

2012

Методическое пособие для самостоятельной работы по разделу "Колебания и волны" курса физики для студентов специальности 0906 ГВУЗ «НГУ».
Сост.: Л.Ф.Мостипан, И.П. Гаркуша,
Днепропетровск: ГВУЗ «НГУ», 2011 г.

МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

КОЛЕБАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ - движение, которое характеризуется повторяемостью величин, описывающих данный процесс.

1. КИНЕМАТИКА И ДИНАМИКА ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ.

ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ – колебания, которые происходят по гармоническому закону. Они описываются зависимостью

$$\begin{cases} x = A\cos(\omega t + \varphi) \\ y = A\sin(\omega t + \varphi) \end{cases}, \tag{1.1}$$

где x – смещение, A– амплитуда колебаний (максимальное смещение от положения равновесия), ω – циклическая частота, $(\omega t + \varphi_0)$ – фаза колебаний, φ – начальная фаза.

ПЕРИОД КОЛЕБАНИЯ – ВРЕМЯ, ЗА КОТОРОЕ СИСТЕМА СОВЕРШАЕТ ПОЛНЫЙ ЦИКЛ И ВОЗВРАЩАЕТСЯ В ИСХОДНОЕ СОСТОЯНИЕ.

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \tag{1.2}$$

- Тело, совершающее гармонические колебания, называется ГАРМОНИЧЕСКИМ ОСЦИЛЛЯТОРОМ.
- СКОРОСТЬ ГАРМОНИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА:

$$V = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0). \tag{1.3}$$

Максимальная скорость

$$V_{\max} = A\omega. \tag{1.4}$$

- УСКОРЕНИЕ ГАРМОНИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА:

$$a = \frac{dV}{dt} = -A\omega^2\sin(\omega t + \varphi_0). \tag{1.5}$$

Максимальное ускорение

$$a_{\max} = A\omega^2. \tag{1.5}$$

Гармонические колебания совершаются под действием КВАЗИУПРУГОЙ СИЛЫ любого происхождения.

ПРИЗНАКИ КВАЗИУПРУГОЙ СИЛЫ:

- $F_{к.у.} \sim x$ сила ПРОПОРЦИОНАЛЬНА СМЕЩЕНИЮ.

- $F_{\text{к.у.}} = -kx$ сила направлена ПРОТИВОПОЛОЖНО смещению.

ЭНЕРГИЯ ГАРМОНИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

Так как на гармонический осциллятор действует только консервативная квазиупругая сила, то выполняется ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ.

$$E = T + \Pi = \frac{\mathrm{m}\mathrm{v}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \mathrm{const}\,. \tag{1.6}$$

- ЕСЛИ КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ ТОЧКИ МАКСИМАЛЬНА, ТО ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ РАВНА НУЛЮ, И НАОБОРОТ. СУММА ИХ ОСТАЕТСЯ ПОСТОЯННОЙ И РАВНОЙ ПОЛНОЙ ЭНЕРГИИ ТОЧКИ.

Поэтому полная энергия равна:

$$E = \frac{mA^2\omega^2}{2} = \frac{kA^2}{2}\,. \tag{1.7}$$

Соотношение между коэффициентом упругости k и циклической частотой колебаний ω:

$$k = m\omega^2\,. \tag{1.8}$$

2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

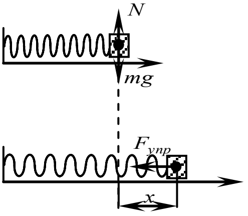
КАНОНИЧЕСКАЯ ФОРМА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ ГАРМОНИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2\mathrm{x} = 0\,, \tag{2.1}$$

где

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}\,, \tag{2.2}$$

ПРУЖИННЫЙ МАЯТНИК



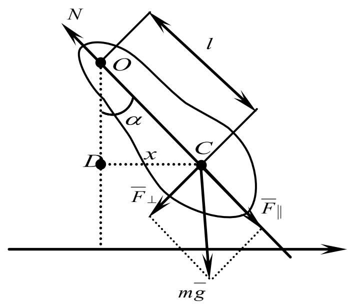
Колебания тела массой m происходят под действием силы упругости пружины, равной $F = -kx$, поэтому дифференциальное уравнение колебаний имеет вид:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0\,. \tag{2.3}$$

Сравнивая его с канонической формой, можно определить частоту и период колебаний пружинного маятника:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}\,, \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\,. \tag{2.4}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ МАЯТНИК



Физический маятник – это тело, совершающее колебания вокруг точки, не совпадающей с центром масс тела.

♦ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНАЯ СОСТАВЛЯЮЩАЯ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ - ЭТО КВАЗИУПРУГАЯ СИЛА, ВЫЗЫВАЮЩАЯ ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ ФИЗИЧЕСКОГО МАЯТНИКА.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ ФИЗИЧЕСКОГО МАЯТНИКА:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{mgl}{I} \cdot \alpha = 0 \; . \qquad (2.5)$$

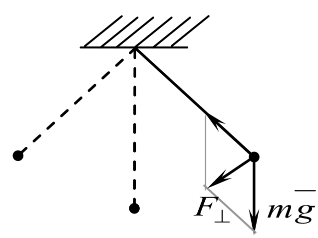
Здесь I – момент инерции маятника, l – расстояние от точки подвеса до центра масс, α – угол отклонения маятника от положения равновесия.

Частота собственных колебаний маятника ω_0 и период колебаний физического маятника:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{I}} \, , \qquad (2.6)$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}} \; . \qquad (2.7)$$

.МАТЕМАТИЧЕСКИЙ МАЯТНИК



МАТЕМАТИЧЕСКИЙ МАЯТНИК – материальная точка, подвешенная на невесомой и нерастяжимой нити.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ колебаний математического маятника:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{g}{l} \cdot \alpha = 0 \; . \qquad (2.8)$$

Период колебаний математического маятника:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \; . \qquad (2.9)$$

ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ В ЦЕПИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТОКА

Контур, в котором совершаются колебания, состоит из катушки индуктивности и конденсатора. Если активное сопротивление цепи $R = 0$, то колебания в контуре гармонические.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ ЗАРЯДА на обкладках конденсатора:

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{1}{LC}Q = 0 . \tag{2.10}$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$Q = Q_0 \sin \omega_0 t . \tag{2.11}$$

Собственная частота колебаний контура и период колебаний (формула Томсона):

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}, \ T = 2\pi\sqrt{LC} . \tag{2.12}$$

Сила тока в цепи и напряжение на обкладках конденсатора изменяются по закону:

$$I = \frac{dQ}{dt} = Q_0\omega_0 \cos \omega_0 t = I_0 \cos \omega_0 t , \tag{2.13}$$

$$U = \frac{Q}{C} = \frac{Q_0}{C}\sin\omega_0 t . \tag{2.14}$$

3. СЛОЖЕНИЕ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ.

СЛОЖЕНИЕ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ ОДНОГО НАПРАВЛЕНИЯ И ОДНОЙ ЧАСТОТЫ. МЕТОД ВЕКТОРНЫХ ДИАГРАММ

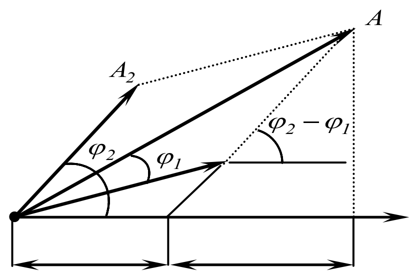
При сложении двух гармонических колебаний одного направления и одинаковой частоты

$$\begin{cases} x_1 = A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1) \\ x_2 = A_2 \cos(\omega_0 t + +\varphi_2) \end{cases}$$

получается ГАРМОНИЧЕСКОЕ КОЛЕБАНИЕ, происходящее с той же частотой и описываемое выражением

$$x = x_1 + x_2 = A\cos(\omega_0 t + \varphi) . \tag{3.1}$$

Воспользуемся методом векторных диаграмм. Суть его заключается в том, что любое колебание вида $x = A\cos(\omega t + \varphi)$ может быть изображено вектором длины A, вращающимся вокруг начала координат с угловой скоростью ω, причем в начальный момент времени угол между осью абсцисс и вектором составляет φ (см. рис.). Тогда проекция этого вектора на ось X в любой момент времени определяется выражением $x = A\cos(\omega t + \varphi)$. Таким образом задача сложения колебаний сводится к задаче сложения векторов.



Результирующая амплитуда A и начальная фаза φ определяются из рисунка:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1), \quad , \tag{3.2}$$

$$tg\alpha = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}. \tag{3.3}$$

В частном случае, когда $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm 2\pi n$, ($n$ = 0, 1, 2 ,…) результирующая амплитуда равна сумме амплитуд $A = A_1 + A_2$.

Этим методом можно найти результат сложения любого числа колебаний.

БИЕНИЯ

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ИЗМЕНЕНИЯ АМПЛИТУДЫ КОЛЕБАНИЙ, ВОЗНИКАЮЩИЕ ПРИ СЛОЖЕНИИ ДВУХ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ С БЛИЗКИМИ ЧАСТОТАМИ, НАЗЫВАЮТСЯ БИЕНИЕМ.

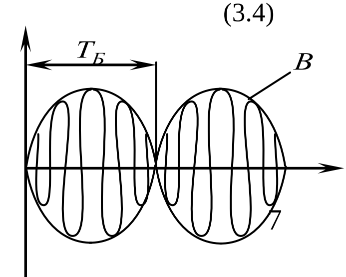
Для простоты примем, что складываются два колебания с одинаковой амплитудой:

$$\begin{cases} x_1 = A\cos\omega t, \\ x_2 = A\cos(\omega + \Delta\omega)t. \end{cases}$$

При этом выполняется условие $\Delta\omega \ll \omega$.

Результирующее колебание

$$X = (2A\cos\frac{\Delta\omega t}{2})\cos\omega t \tag{3.4}$$



представляет собой произведение двух колебаний:

- колебания с частотой, близкой к ω - $X' = \cos\omega t$;
- колебания с малой частотой $\Delta\omega$.

$$X'' = (2A\cos\frac{\Delta\omega t}{2}) . \qquad (3.5)$$

Второе колебание можно рассматривать, как медленно и периодически изменяющуюся АМПЛИТУДУ.

ПЕРИОД БИЕНИЙ - это расстояние между двумя ближайшими узлами биений:

$$T_Б = \frac{2\pi}{\Delta\omega} . \qquad (3.6)$$

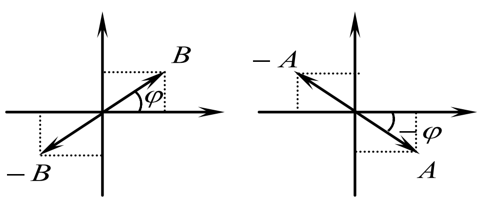
СЛОЖЕНИЕ ВЗАИМНО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫХ КОЛЕБАНИЙ. ФИГУРЫ ЛИССАЖУ.

При сложении двух взаимно перпендикулярных колебаний с одинаковыми частотами

$$\begin{cases} x = A\sin\omega\cdot t, \\ y = B\sin(\omega\cdot t + \varphi) \end{cases} \qquad (3.7)$$

уравнение траектории, по которой движется точка, имеет вид:

$$\frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy}{AB}\cdot\cos\varphi + \frac{x^2}{A^2} = \sin^2\varphi . \qquad (3.8)$$



- При φ=0

$$y = \pm\left(\frac{B}{A}\right)x$$

– это уравнение прямой линии.

- При φ=π/2 уравнение траектории имеет вид:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$$

– это уравнение эллипса.

- Если $A=B$, из последнего выражения получаем уравнение окружности.
- ЗАМКНУТАЯ ТРАЕКТОРИЯ, ПРОЧЕРЧИВАЕМАЯ ТОЧКОЙ, СОВЕРШАЮЩЕЙ КОЛЕБАНИЯ ВО ВЗАИМНО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫХ НАПРАВЛЕНИЯХ, НАЗЫВАЕТСЯ ФИГУРОЙ ЛИССАЖУ.

4. ЗАТУХАЮЩИЕ КОЛЕБАНИЯ

Тело совершает ЗАТУХАЮЩИЕ КОЛЕБАНИЯ, если на него действуют

КВАЗИУПРУГАЯ СИЛА $\mathbf{F}_{ку} = -k\mathbf{x}$ и

СИЛА СОПРОТИВЛЕНИЯ $\mathbf{F}_c = -b\mathbf{v}$,

где b – коэффициент сопротивления, $\mathbf{v}$ – скорость движения тела; знак «–» показывает, что сила сопротивления направлена в сторону, противоположную движению.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ЗАТУХАЮЩИХ КОЛЕБАНИЙ (КАНОНИЧЕСКАЯ ФОРМА)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \cdot \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0. \tag{4.1}$$

Здесь $\beta = \dfrac{b}{2m}$ - коэффициент затухания; ω_0 - собственная частота колебаний (без затухания).

Решение этого уравнения имеет вид:

$$x = Ae^{-\beta t} \sin \omega t. \qquad (4.2):$$

Частота ЗАТУХАЮЩИХ колебаний (при $\beta < \omega_0$) равна

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}. \tag{4.3}$$

Амплитуда затухающих колебаний изменяется по закону

$$A = A_0 e^{-\beta t}. \tag{4.4}$$

ЛОГАРИФМ ОТНОШЕНИЯ ДВУХ АМПЛИТУД, РАЗДЕЛЁННЫХ ПО ВРЕМЕНИ НА ОДИН ПЕРИОД, НАЗЫВАЕТСЯ ЛОГАРИФМИЧЕСКИМ ДЕКРЕМЕНТОМ ЗАТУХАНИЯ.

$$\ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \theta. \tag{4.5}$$

$$\theta = \ln e^{\beta T} = \beta T. \tag{4.6}$$

ВРЕМЯ РЕЛАКСАЦИИ

$$\tau = \frac{1}{\beta} \tag{4.7}$$

это время, в течение которого амплитуда уменьшается в e раз.

ДОБРОТНОСТЬ СИСТЕМЫ - это величина, равная

$$D = \frac{\pi}{\theta}. \tag{4.8}$$

Чем больше добротность системы, тем медленнее затухают колебания.

ЗАТУХАЮЩИЕ КОЛЕБАНИЯ В ЦЕПИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТОКА

Затухающие колебания наблюдаются в колебательном контуре с омическим сопротивлением, на котором происходит выделение тепла. Энергия колебаний рассеивается в пространстве, поэтому колебания затухают.

- ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ЗАТУХАЮЩИХ КОЛЕБАНИЙ ЗАРЯДА НА ОБКЛАДКАХ КОНДЕНСАТОРА В КОЛЕБАТЕЛЬНОМ КОНТУРЕ.

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{LC} Q = 0 . \qquad (4.9)$$

Сравниваем это уравнение с канонической формой и определяем:

- собственную частоту колебаний контура

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} , \qquad (4.10)$$

- период собственных колебаний (при отсутствии затухания)

$$T_0 = 2\pi\sqrt{LC} , \qquad (4.11)$$

- коэффициент затухания

$$\beta = \frac{R}{2L} , \qquad (4.12)$$

- логарифмический декремент затухания

$$\theta = \beta T = \frac{R}{2L} \cdot 2\pi\sqrt{LC} = \pi R\sqrt{\frac{C}{L}} . \qquad (4.13)$$

Решение полученного дифференциального уравнения (5.13) имеет вид:

$$Q = Q_0 e^{-\beta \cdot t} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0) , \qquad (4.14)$$

где Q_0- заряд на обкладках конденсатора в начальный момент времени, ω-частота затухающих колебаний, которая определяется по формуле

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} . \qquad (5.19)$$

Закон изменения НАПРЯЖЕНИЯ на обкладках конденсатора и СИЛЫ ТОКА в контуре с течением времени можно установить, зная, что

$$U(t) = \frac{Q}{C} , \quad I(t) = \frac{dQ}{dt} .$$

Поделив полученное для заряда уравнение (5.18) на C, получим ЗАКОН ИЗМЕНЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЯ на обкладках конденсатора:

$$\frac{Q}{C} = \frac{Q_0}{C} e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi_0) = U_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi_0).$$

Продифференцировав по времени уравнение (5.18), получим ЗАКОН ИЗМЕНЕНИЯ ТОКА В КОНТУРЕ:

$$I = Q_0 e^{-\beta t}\left[-\beta\sin(\omega t + \varphi_0) - \omega\cos(\omega t + \varphi_0)\right].$$

5. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Колебания, происходящие под действием ВЫНУЖДАЮЩЕЙ СИЛЫ, изменяющейся по гармоническому закону $F_{вын.} = F_0 \cos\Omega t$, НАЗЫВАЮТСЯ ВЫНУЖДЕННЫМИ.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_{вын.}}{m} = \frac{F_0}{m}\cos\Omega t\,. \qquad (5.1)$$

После начала действия вынуждающей силы через очень короткий промежуток времени колебания будут происходить с частотой вынуждающей силы Ω.

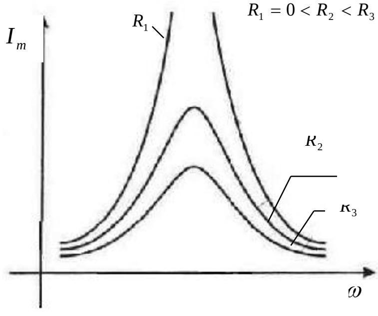
АМПЛИТУДА ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ равна

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right) + 4\beta^2\Omega^2}}\,. \qquad (5.2)$$

ЯВЛЕНИЕ ВОЗРАСТАНИЯ АМПЛИТУДЫ КОЛЕБАНИЙ ПРИ СОВПАДЕНИИ ЧАСТОТЫ ВНЕШНЕГО ВОЗДЕЙСТВИЯ С ЧАСТОТОЙ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ОСЦИЛЛЯТОРА НОСИТ НАЗВАНИЕ РЕЗОНАНСА.

Более точно, резонанс наступает при ЧАСТОТЕ ВЫНУЖДАЮЩЕЙ СИЛЫ, равной

$$\Omega_{рез.} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}\,. \qquad (5.3)$$



Чем меньше коэффициент затухания, тем сильнее резонанс.

АМПЛИТУДА ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ПРИ РЕЗОНАНСНОЙ ЧАСТОТЕ

$$A_{рез} = \frac{F_0}{m}\cdot\frac{1}{2\beta\omega_0}\,. \qquad (5.4)$$

Высота резонансного пика $A_{рез}$ и его ширина зависят от величины коэффициента затухания. Под шириной резонансного пика понимают сдвиг частот $\Omega - \omega_0$, приводящий к уменьшению амплитуды вдвое по сравнению с резонансной. Ширина резонансного пика обратно пропорциональна добротности контура.

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ В ЦЕПИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТОКА

Чтобы получить вынужденные колебания, надо разомкнуть колебательный контур и к контактам подать переменное напряжение $U = U_0 \cos \Omega t$.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + 2\beta\frac{dQ}{dt} + \omega_0^2 Q = \frac{U_m}{L}\cos\Omega t. \qquad (5.5)$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$Q = Q_0 \cos(\Omega t + \varphi). \qquad (5.6)$$

Сила тока в контуре изменяется по закону:

$$I = \frac{dQ}{dt} = -Q_0\Omega\sin(\Omega t + \varphi_0) = I_0\cos(\Omega t - \varphi). \qquad (5.7)$$

Амплитуда тока $I_0 = Q_0\Omega$ и начальная фаза находятся по формулам:

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\Omega L - \frac{1}{LC}\right)^2}}; \qquad (5.8)$$

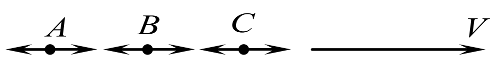
$$\mathrm{tg}\varphi_0 = \frac{R}{\Omega L - \frac{1}{\Omega C}} = \frac{2\beta\cdot\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}. \qquad (5.9)$$

6. МЕХАНИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ.

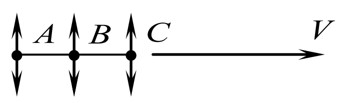
ВОЛНА – ЭТО ПРОЦЕСС РАСПРОСТРАНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ.

Различают два типа волн.

ПРОДОЛЬНЫЕ – волны, в которых колебания частиц происходят вдоль направления распространения волны.



ПОПЕРЕЧНЫЕ – волны, в которых колебания частиц происходят перпендикулярно скорости распространения волны.



ФРОНТ ВОЛНЫ - ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ МЕСТО ТОЧЕК, ДО КОТОРЫХ КОЛЕБАНИЯ РАСПРОСТРАНИЛИСЬ К ОПРЕДЕЛЕННОМУ МОМЕНТУ ВРЕМЕНИ.

Для изотропной среды волновой фронт представляет собой сферу.

Волновой фронт всегда перпендикулярен скорости распространения волны.

ФАЗОВАЯ СКОРОСТЬ ВОЛНЫ - СКОРОСТЬ СМЕЩЕНИЯ ТОЧЕК, В КОТОРЫХ ФАЗА КОЛЕБАНИЙ ИМЕЕТ ДАННОЕ ОПРЕДЕЛЕННОЕ ЗНАЧЕНИЕ.

Расстояние, которое проходит волна за время T, равное периоду колебаний, называется ДЛИНОЙ ВОЛНЫ λ.

$$\lambda = vT. \tag{6.1}$$

ВОЛНОВОЕ ЧИСЛО k ПОКАЗЫВАЕТ ИЗМЕНЕНИЕ ФАЗЫ КОЛЕБАНИЙ, ПРИХОДЯЩЕЕСЯ НА ЕДИНИЦУ ДЛИНЫ В НАПРАВЛЕНИИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛНЫ.

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta x}. \tag{6.2}$$

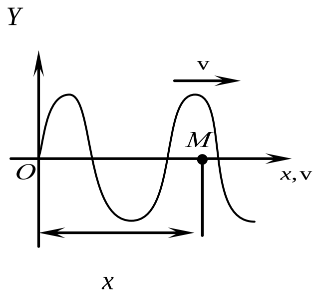
УРАВНЕНИЕ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ

Рассмотрим случай синусоидальной волны, распространяющейся вдоль оси X, причем величина смещения точек среды от положения равновесия y зависит только от координаты x. Фронт волны в этом случае будет представлять собой плоскость, перпендикулярную оси X.

УРАВНЕНИЕ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ:

$$Y_M = A\sin\omega\left(t - \frac{x}{V}\right) = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{T}\cdot\frac{x}{V}\right). \tag{6.3}$$

Здесь A – амплитуда колебаний источника волны, x — расстояние от источника волны до исследуемой точки, v – скорость распространения волны (фазовая скорость), Y – смещение исследуемой точки.



• УРАВНЕНИЕ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ ОПРЕДЕЛЯЕТ СМЕЩЕНИЕ ТОЧКИ, НАХОДЯЩЕЙСЯ НА РАССТОЯНИИ X ОТ ИСТОЧНИКА КОЛЕБАНИЙ, В ЛЮБОЙ МОМЕНТ ВРЕМЕНИ.

Уравнение плоской волны можно записать в более удобном виде, если использовать ВОЛНОВОЕ ЧИСЛО

$$Y = A\sin(\omega t - kx). \tag{6.4}$$

В общем случае произвольного направления распространения волны уравнение плоской синусоидальной волны может быть записано в виде

$$Y = A\sin(\omega\cdot t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r}), \tag{6.5}$$

где **k**- волновой вектор, **r**-радиус-вектор точки.

ВОЛНОВОЙ ВЕКТОР РАВЕН ПО ВЕЛИЧИНЕ ВОЛНОВОМУ ЧИСЛУ И НАПРАВЛЕН В СТОРОНУ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛНЫ В ДАННОЙ ТОЧКЕ.

7. ЭФФЕКТ ДОПЛЕРА

ЭФФЕКТ ДОПЛЕРА – ИЗМЕНЕНИЕ ЧАСТОТЫ КОЛЕБАНИЙ, ВОСПРИНИМАЕМОЙ НАБЛЮДАТЕЛЕМ, ПРИ ДВИЖЕНИИ НАБЛЮДАТЕЛЯ И ИСТОЧНИКА.

Рассмотрим распространение волн в неподвижной среде, считая, что движение наблюдателя и источника происходит вдоль соединяющей их прямой. Пусть источник испускает волны частотой ν_0, скорость распространения которых равна v. Скорость движения источника $U_{ист}$, скорость движения наблюдателя $U_{набл}$.

При СБЛИЖЕНИИ источника и наблюдателя частота колебаний, воспринимаемая наблюдателем, равна:

$$\nu = \nu_0 \frac{\text{v} + U_{набл}}{\text{v} - U_{ист}}. \tag{7.1}$$

При УДАЛЕНИИ источника и наблюдателя

$$\nu = \nu_0 \frac{\text{v} - U_{набл}}{\text{v} + U_{ист}}. \tag{7.2}$$

8. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ ВОЛН. СТОЯЧИЕ ВОЛНЫ.

Если имеется несколько источников колебаний, то возникающие волны распространяются независимо, просто накладываясь одна на другую. Иначе говоря, при сложении волн справедлив ПРИНЦИП СУПЕРПОЗИЦИИ:

СМЕЩЕНИЕ ЧАСТИЦЫ, ВОЗНИКАЮЩЕЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ НАЛОЖЕНИЯ НЕСКОЛЬКИХ ВОЛН, ЯВЛЯЕТСЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ СУММОЙ СМЕЩЕНИЙ, ОБУСЛОВЛЕННЫХ КАЖДОЙ ИЗ ЭТИХ ВОЛН В ОТДЕЛЬНОСТИ.

ВОЛНЫ С ОДИНАКОВОЙ ЧАСТОТОЙ И ПОСТОЯННЫМ СДВИГОМ ФАЗ НАЗЫВАЮТСЯ КОГЕРЕНТНЫМИ.

СЛОЖЕНИЕ КОГЕРЕНТНЫХ ВОЛН, ПРИ КОТОРОМ НАБЛЮДАЕТСЯ УСТОЙЧИВОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ В ПРОСТРАНСТВЕ МАКСИМУМОВ И МИНИМУМОВ АМПЛИТУДЫ, НАЗЫВАЕТСЯ ИНТЕРФЕРЕНЦИЕЙ.

Примером интерференции механических волн является образование СТОЯЧЕЙ ВОЛНЫ при наложении двух встречных волн.

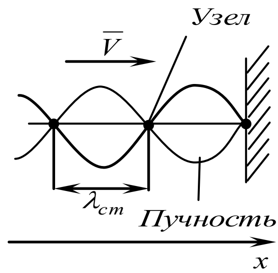
Пусть волна распространяется в направлении оси X (бегущая волна), затем отражается от препятствия (отраженная волна).

Бегущая волна описывается уравнением

$$\xi_1 = A\sin(\omega t - kx), \tag{8.1}$$

отраженная –

$$\xi_2 = A\sin(\omega t + kx). \tag{8.2}$$



Здесь x – координата точки (расстояние от источника), ξ – смещение точки, k – волновое число.

Результирующее смещение любой точки

$$\xi(M) = \xi_1 + \zeta_2 .$$

$$\xi = 2A\sin(\omega t)\cdot\cos(kx). \tag{8.3}$$

Таким образом, в каждой точке с заданной координатой x имеют место гармонические колебания с частотой ω и постоянной АМПЛИТУДОЙ, равной

$$B = 2A \cos kx . \tag{8.4}$$

В частности, в точках, для которых выполняется условие $kx = \pi n$ (так называемых ПУЧНОСТЯХ) колебания происходят с максимальной амплитудой ($cos(kx) = \pm 1$), равной $B_{\max} = 2A$.

Координаты ПУЧНОСТЕЙ определяются по соотношению

$$x_{\max} = n\frac{\pi}{k} = n\frac{\pi\lambda}{2\pi} = n\frac{\lambda}{2}. \tag{8.5}$$

Обозначим $\frac{\lambda}{2} = \lambda_{ст}$ – это длина стоячей волны.

Тогда координаты максимумов интерференции двух волн (или координаты пучностей) определяются соотношением

$$x_{\max} = n\lambda_{ст} . \tag{8.6}$$

МАКСИМУМЫ РАСПОЛАГАЮТСЯ НА РАССТОЯНИИ, РАВНОМ ДЛИНЕ СТОЯЧЕЙ ВОЛНЫ.

В точках, для которых выполняется условие

$$B_{\min} = kx = (2n+1)\frac{\pi}{2},$$

колебания вообще не происходят (так называемые УЗЛЫ).

Координаты узлов можно определить из условия минимума интерференции

$$x_{\min} = (2n+1)\frac{\pi}{2k} = (2n+1)\frac{\pi\lambda}{4\pi} = \frac{(2n+1)\lambda_{ст}}{2}. \tag{8.7}$$

КООРДИНАТЫ МИНИМУМОВ РАВНЫ НЕЧЁТНОМУ ЧИСЛУ ПОЛУВОЛН.

Если волна распространяется в твердом теле (например, в стержне, струне), при отражении от более плотной среды всегда образуется узел, а при отражении от менее плотной среды - пучность. Наоборот, когда стоячая волна образуется в столбе воздуха (духовые музыкальные инструменты), то при отражении от более плотной среды получается пучность, а от менее плотной - узел.

9. ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ

Уравнение плоской бегущей волны является решением дифференциального ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ, которое имеет вид:

$$\frac{d^2\xi}{dx^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{d^2\xi}{dt^2}. \qquad (9.1)$$

Решением этого волнового уравнения есть одномерное УРАВНЕНИЕ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ.

$$\xi = A\sin(\omega t - kx).$$

Встретившись теперь в какой-либо практической задаче с уравнением такого вида, мы можем утверждать, даже не производя никаких выкладок, что его решением независимо от физического смысла величины ξ будет плоская синусоидальная волна, распространяющаяся вдоль оси X с фазовой скоростью v.

10. ЗВУКОВЫЕ ВОЛНЫ.

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ.

ЗВУКОВЫЕ ВОЛНЫ – распространяющееся изменение давления воздуха или другой среды, частота которого лежит в диапазоне: $\nu = (16 \div 20000)$ Гц.

Поскольку распространение волны означает распространение колебаний в пространстве, ВМЕСТЕ С ВОЛНОЙ ПЕРЕНОСИТСЯ И ЭНЕРГИЯ ЭТИХ КОЛЕБАНИЙ.

Полная энергия механических колебаний частицы массой m равна

$$\varepsilon_i = \frac{kA^2}{2} = \frac{m\omega^2 A^2}{2}. \qquad (10.1)$$

Здесь m – масса осциллятора, k – коэффициент упругости, ω – циклическая частота колебаний, A – амплитуда колебаний, ε_i – энергия одного осциллятора.

Если в единице объема содержится n осцилляторов, то приходящаяся на единицу объема энергия волны или ПЛОТНОСТЬ ЭНЕРГИИ ВОЛНЫ равна

$$w = n\varepsilon_i = nm\frac{\omega^2 A^2}{2} = \rho\frac{\omega^2 A^2}{2}, \qquad (10.2)$$

где $\rho = n\cdot m$ - плотность среды.

ПЛОТНОСТЬ ПОТОКА ЭНЕРГИИ ВОЛНЫ - ЭТО ЭНЕРГИЯ, ПЕРЕНОСИМАЯ ВОЛНОЙ ЗА ЕДИНИЦУ ВРЕМЕНИ ЧЕРЕЗ ЕДИНИЧНУЮ ПЛОЩАДКУ, ПЕРПЕНДИКУЛЯРНУЮ НАПРАВЛЕНИЮ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛНЫ.

ПЛОТНОСТЬ ПОТОКА ЭНЕРГИИ ВОЛНЫ РАВНА ПЛОТНОСТИ ЭНЕРГИИ ВОЛНЫ, УМНОЖЕННОЙ НА СКОРОСТЬ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛНЫ.

Понятие потока энергии волны впервые было введено русским физиком Н.А.Умовым. При описании распространения энергии часто используют понятие ВЕКТОРА УМОВА.

ВЕКТОР УМОВА, ЧИСЛЕННО РАВЕН ПЛОТНОСТИ ПОТОКА ЭНЕРГИИ ВОЛНЫ; ОН НАПРАВЛЕН ТАК ЖЕ, КАК И СКОРОСТЬ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛНЫ.

$$\mathbf{I} = w\mathbf{v}. \qquad (10.3)$$

Единицы измерения плотности потока энергии в СИ

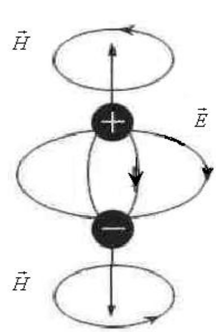
$$[I] = \frac{Дж}{м^2 \cdot с} = \frac{Вт}{м^2}.$$

Для звуковых волн величина I называется СИЛОЙ ЗВУКА. Кроме того, используется еще показатель УРОВЕНЬ СИЛЫ ЗВУКА, который определяется как

$$\beta = 10\lg\frac{I}{I_0}, \qquad (10.4)$$

где I – сила звука; I_0 – нулевой уровень силы звука; равный $I_0 = 10^{-12}$ Вт/м^2. Уровень силы звука измеряется в децибеллах (дБ).

12. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ.



В соответствии с представлениями классической электродинамики электромагнитные волны создаются электрическими зарядами, которые движутся с ускорением. Простейшей такой системой есть гармонический осциллятор - электрический диполь, момент **p** (расстояние между зарядами) которого изменяется по гармоническому закону :

$$p = p_0 \sin\omega t\ .$$

Между зарядами возникает переменное электрическое поле $\mathbf{E}$. В свою очередь, заряды, которые движутся (электрический ток), создают переменное магнитное поле **H**. Колебания электрического вектора **E** и магнитного **H** происходят тоже по гармоническому закону

$$E = E_0 \sin\omega \cdot t \quad \text{и} \quad H = H_0 \sin\omega \cdot t .$$

Используя уравнения Максвелла в дифференциальной форме для частного случая, когда свободные электрические заряды в среде отсутствуют (то есть плотность заряда ρ=0 и плотность тока j=0) и все величины зависят только от координаты x и времени t, можно получить следующие соотношения между составляющими напряженностей электрического и магнитного полей:

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t}, \tag{12.1}$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = -\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}. \tag{12.2}$$

Дифференцируя первое из этих уравнений по x, а второе по t и исключая H_z, получаем:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}, \tag{12.3}$$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2}. \tag{12.4}$$

Введя обозначение

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}}, \tag{12.5}$$

мы можем записать полученные соотношения в виде

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}, \tag{12.6}$$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2}. \tag{12.7}$$

Видно, что это волновые уравнения, следовательно, как электрическое, так и магнитное поле, изменяясь во времени, образуют электромагнитную волну, которая распространяется в пространстве со скоростью v,определяемой уравнением (12.5). Для вакуума ε=μ=1 и, следовательно, электромагнитные волны распространяются в вакууме со скоростью

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 3 \cdot 10^8 \frac{м}{с}, \tag{12.8}$$

равной скорости света в вакууме c. В произвольной среде скорость распространения электромагнитной волны может быть записана в виде

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\ \mu}}. \tag{12.9}$$

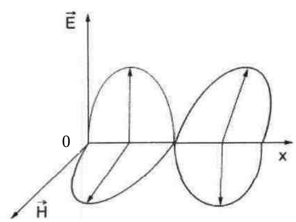
Поскольку ПОКАЗАТЕЛЬ ПРЕЛОМЛЕНИЯ среды определяется как отношение скорости света в вакууме к скорости света в данной среде

$$n = \frac{c}{v}, \tag{12.10}$$

то мы получаем связь показателя преломления с электрическими и магнитными свойствами среды:

$$n = \sqrt{\varepsilon\mu}. \tag{12.11}$$

Мы видели, что если электромагнитная волна распространяется вдоль оси x, то отличными от нуля будут составляющие E_y электрического и H_z магнитного полей. Таким образом, колебания происходят в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны, и, следовательно, электромагнитные волны являются ПОПЕРЕЧНЫМИ.



Расчет показывает, что колебания электрического и магнитного полей совпадают по фазе, а их амплитуды связаны соотношением

$$\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon} \cdot E = \sqrt{\mu_0\mu} \cdot H. \tag{12.12}$$

Решением волнового уравнения, как известно, есть уравнение плоской волны.

Поэтому для произвольной точки x мы можем записать

$$E = E_0 \sin\omega\left(t - \frac{x}{v}\right), \tag{12.13}$$

$$H = H_0 \sin\omega\left(t - \frac{x}{v}\right). \tag{12.14}$$

Эти формулы являются уравнением электромагнитной волны, которая распространяется в одном из направлений, в данном случае в направлении оси x.

Считая, что $\omega = \frac{2\pi}{T}$, уравнение волны можно записать также в виде

$$E = E_0 \sin 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}) = E_0 \sin(\omega t - kx)\,, \qquad (12.15)$$

$$H = H_0 \sin 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}) = H_0 \sin(\omega t - kx)\,, \qquad (12.16)$$

где $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ – волновое число.

ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ. ВЕКТОР ПОЙНТИНГА

Энергия электромагнитной волны складывается из энергии электрического и магнитного полей.

Плотность энергии электрического и магнитного полей равны

$$w_e = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2}\,, \qquad (12.17)$$

$$w_m = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2}\,. \qquad (12.18)$$

Следовательно, полная плотность энергии электромагнитной волны

$$w = \frac{\mu_0 \mu \cdot H^2}{2} + \frac{\varepsilon_0 \varepsilon \cdot E^2}{2}. \qquad (12.19)$$

Преобразуем это уравнение, учитывая связь E и H (формула (12.12)).

$$w = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon} \cdot E \cdot \sqrt{\mu_0 \mu} \cdot H + \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon} \cdot E \cdot \sqrt{\mu_0 \mu} \cdot H\right) =$$

$$= \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu} \cdot EH = \frac{1}{v} EH\,. \qquad (12.20)$$

Для плотности потока энергии электромагнитной волны I, учитывая справедливое для любых волн соотношение $I = w \cdot v$, получаем

$$I = \frac{1}{v} EH \cdot v = EH\,. \qquad (12.21)$$

Учитывая взаимную ориентацию векторов ***E***, ***H*** и ***υ***, можно ввести вектор, характеризующий не только плотность потока энергии электромагнитной волны, но и направление этого потока (вектор Пойнтинга):

$$\mathbf{I} = [\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}]. \qquad (12.22)$$

ВЕКТОР ПОЙНТИНГА РАВЕН ПО ВЕЛИЧИНЕ ПЛОТНОСТИ ПОТОКА ЭНЕРГИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ, А ЕГО НАПРАВЛЕНИЕ СОВПАДАЕТ С НАПРАВЛЕНИЕМ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛНЫ.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. *Точка совершает гармонические колебания с частотой ν=10 Гц. В момент времени, принятый за начальный, точка имела максимальное смещение: x_{max}= 1 мм. Написать уравнение колебаний точки и начертить их график.*

<u>Решение.</u> Уравнение колебаний точки можно записать в виде

$$x = A\sin(\omega t + \varphi_1), \tag{1}$$

где A — амплитуда колебаний; ω — циклическая частота; t — время; φ_1 — начальная фаза.

По определению, амплитуда колебаний

$$x_{\max} = A. \tag{2}$$

Циклическая частота ω связана с частотой ν соотношением

$$\omega = 2\pi\nu. \tag{3}$$

Для момента времени t=0 формула (1) примет вид

$$x_{\max} = A\sin\varphi_1,$$

откуда начальная фаза

$$\varphi_1 = \arcsin\frac{x_{\max}}{A} = \arcsin 1,$$

или

$$\varphi_1 = (2k+1)\frac{\pi}{2}, \text{ где } k=0,1,2,...$$

Изменение фазы на 2π не изменяет состояния колеблющейся точки, поэтому можно принять

$$\varphi_1 = \pi/2. \tag{4}$$

С учетом равенств (2)— (4) уравнение колебаний примет вид

$x = A\sin(2\pi\nu t + \varphi_1)$, или $x = A\cos 2\pi\nu t$,

где A=1 мм=10^{-3}м, ν=10Гц, φ=π/2.

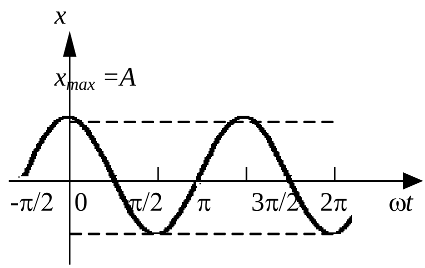


Рис. 1

График соответствующего гармонического колебания приведен на рисунке 1.

Пример 2. *Частица массой m=0,01кг совершает гармонические колебания с периодом T=2 с. Полная энергия колеблющейся частицы E=0,1 мДж. Определить амплитуду A колебаний и наибольшее значение F_{max}, силы, действующей на частицу.*

<u>Решение.</u> Для определения амплитуды колебаний воспользуемся выражением полной энергии частицы:

$$E = \tfrac{1}{2} m\omega^2 A^2 ,$$

где $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$. Отсюда амплитуда

$$A = \frac{T}{2\pi}\sqrt{\frac{2E}{m}}. \qquad (1)$$

Так как частица совершает гармонические колебания, то сила, действующая на нее, является квазиупругой и, следовательно, может быть выражена соотношением

$$F = -kx ,$$

где k—коэффициент квазиупругой силы; x— смещение колеблющейся точки.

Максимальной сила будет при максимальном смещении x_{max}, равном амплитуде:

$$F_{max} = kA . \qquad (2)$$

Коэффициент k выразим через период колебаний:

$$k = m\omega^2 = m\frac{4\pi^2}{T^2} . \qquad (3)$$

Подставив выражения (1) и (3) в (2) и произведя упрощения, получим

$$F_{max} = 2\pi\frac{\sqrt{2mE}}{T} .$$

Произведем вычисления:

$$A= \frac{2}{2\cdot 3{,}14}\sqrt{\frac{2\cdot 10^{-4}}{10^{-2}}}\text{м} = 0{,}045\text{м} = 45\text{мм} ,$$

$$F_{max}= \frac{2\cdot 3{,}14}{2}\sqrt{2\cdot 10^{-2}\cdot 10^{-4}}\,\text{Н} = 4{,}44\cdot 10^{-3}\,\text{Н} = 4{,}44\text{мН} .$$

Пример 3. *Складываются два колебания одинакового направления, выраженные уравнениями*

$$x_1 = A_1\cos\frac{2\pi}{T}(t+\tau_1);\quad x_2 = A_2\cos\frac{2\pi}{T}(t+\tau_2) ,$$

где A_1=3см, A_2=2см, τ_1 =1/6 с, τ_2 =1/3 с, T=2с. Построить векторную диаграмму сложения этих колебаний и написать уравнение результирующего колебания.

Решение. Для построения векторной диаграммы сложения двух колебаний одного направления надо зафиксировать какой-либо момент времени. Обычно векторную диаграмму строят для момента времени t=0. Преобразовав оба уравнения к канонической форме $x = A\cos(\omega t+\varphi)$, получим

$$x_1 = A_1\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{2\pi}{T}\tau_1\right);\ \ x_2 = A_2\cos\left(\frac{2\pi}{T} + \frac{2\pi}{T}\tau_2\right).$$

Отсюда видно, что оба складываемых гармонических колебания имеют одинаковую циклическую частоту

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Начальные фазы первого и второго колебаний соответственно равны

$$\varphi_1 = \frac{2\pi}{T}\tau_1;\ \ \varphi_2 = \frac{2\pi}{T}\tau_2.$$

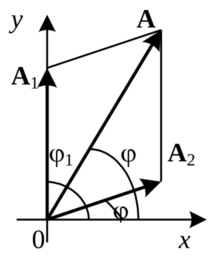


Рис. 2

Произведем вычисления:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2}c^{-1} = 3{,}14c^{-1},$$

$$\varphi_1 = \frac{2\pi}{2}\cdot\frac{1}{6}\text{рад} = 30°;\varphi_2 = \frac{2\pi}{2}\cdot\frac{1}{3}\text{рад} = 60°.$$

Изобразим векторы $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$. Для этого отложим отрезки длиной A_1=3см и A_2=2см под углами φ_1=30° и φ_2=60° к оси *Ox*. Результирующее колебание будет происходить с той же частотой ω и амплитудой *A*, равной геометрической сумме амплитуд A_1 и A_2.

Согласно теореме косинусов,

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

Начальную фазу результирующего колебания можно также определить непосредственно из векторной диаграммы:

$$\varphi = arctg\,\frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}.$$

Произведем вычисления:

$$A = \sqrt{3^2 + 2^2 + 2\cdot3\cdot2\cos(60° - 30°)}\text{см} = 4{,}84\text{см},$$

$$\varphi = arctg\,\frac{3\sin30° + 2\sin60°}{3\cos30° + 2\cos°} = arctg0{,}898 = 42° = 0{,}735\text{рад}.$$

Так как результирующее колебание является гармоническим, имеет ту же частоту, что и слагаемые колебания, то его можно записать в виде

$$x = A\cos(\omega t + \varphi),$$

где *A*=4,84см, ω=3,14с⁻', φ=0,735рад.

Пример 4. *Материальная точка массой m = 5 г совершает гармонические колебания с частотой ν = 0,5 Гц. Амплитуда колебаний A = 3 см. Определить:*

1) скорость v *точки в момент времени, когда смещение x = 1,5 см;*

2) максимальную силу F_{max}*, действующую на точку;*

3) полную энергию E колеблющейся точки.

Решение. 1. Уравнение гармонического колебания имеет вид

$$x = A\cos(\omega t + \varphi), \tag{1}$$

а формулу скорости получим, взяв первую производную по времени от смещения:

$$\mathrm{v} = \frac{dx}{dt} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi). \tag{2}$$

Чтобы выразить скорость через смещение, надо исключить из формул (1) и (2) время. Для этого выразим из уравнений (1) и (2):

$$\cos(\omega t + \varphi) = \frac{x}{A}, \quad \sin(\omega t + \varphi) = -\frac{\mathrm{v}}{A\omega}.$$

Учитывая, что $\cos^2(\omega t + \varphi) + \sin^2(\omega t + \varphi) = 1$, получим

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{\mathrm{v}^2}{A^2\omega^2} = 1, \text{ или } \frac{x^2}{A^2} + \frac{\mathrm{v}^2}{4\pi^2\nu^2 A^2} = 1.$$

Решив последнее уравнение относительно v, найдем

$$\mathrm{v} = \pm 2\pi\nu\sqrt{A^2 - x^2}.$$

Выполнив вычисления по этой формуле, получим
v = ± 8,2 см / с.

Знак плюс соответствует случаю, когда направление скорости совпадает с положительным направлением оси *x*, знак минус – когда направление скорости совпадает с отрицательным направлением оси *x*.

2. Силу, действующую на материальную точку, найдем по второму закону Ньютона:

$$F = ma, \tag{3}$$

где *a* – ускорение точки, которое получим, взяв производную по времени от скорости:

$$a = \frac{d\mathrm{v}}{dt} = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi),$$

или

$$a = -4\pi^2\nu^2 A\cos(\omega t + \varphi).$$

Подставив выражение ускорения в формулу (3), получим

$$F = -4\pi^2\nu^2 mA\cos(\omega t + \varphi).$$

Сила максимальна, когда $\cos(\omega t + \varphi) = 1$, то есть

$$F_{max} = 4\pi^2\nu^2 mA .$$

Подставив в это уравнение значения величин π, ν, m и A, найдем F_{max} = 1,49 мН.

3. Полная энергия колеблющейся точки есть сумма кинетической и потенциальной энергий, вычисленных для любого момента времени.

Проще всего вычислить полную энергию в момент, когда кинетическая энергия достигает максимального значения. В этот момент потенциальная энергия равна нулю. Поэтому полная энергия E колеблющейся точки равна максимальной кинетической энергии T_{max}:

$$E = T_{max} = \frac{m\text{v}_{max}^2}{2} . \qquad (4)$$

Максимальную скорость определим из формулы (2), положив $\cos(\omega t + \varphi) = 1$:

$$\text{v}_{max} = 2\pi\nu A .$$

Подставив выражение скорости в формулу (4), найдем

$$E = 2\pi^2 m\nu^2 A^2 .$$

Подставив значения величин в эту формулу и произведя вычисления, получим

$$E = 2 \cdot 3{,}14^2 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}5^2 \left(3 \cdot 10^{-2}\right)^2 = 22{,}1 \cdot 10^{-6}\,(\text{Дж}) = 22{,}1(\text{мкДж}) .$$

Пример 5. *Плоская волна распространяется вдоль прямой со скоростью υ=20м/с. Две точки, находящиеся на этой прямой на расстояниях x_1=12м и x_2=15м от источника волн, колеблются с разностью фаз Δφ= 0,75 π. Найти длину волны λ, написать уравнение волны и найти смещение указанных точек в момент t=1,2с, если амплитуда колебаний A=0,1 м.*

<u>Решение</u>. Точки, находящиеся друг от друга на расстоянии, равном длине волны λ, колеблются с разностью фаз, равной 2 π ; точки, находящиеся друг от друга на любом расстоянии Δ*x,* колеблются с разностью фаз, равной

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi\Delta x}{\lambda} = \frac{2\pi(x_2 - x_1)}{\lambda} .$$

Решая это равенство относительно λ, получаем

$$\lambda = \frac{2\pi(x_2 - x_1)}{\Delta\varphi} . \qquad (1)$$

Подставив числовые значения величин, входящих в выражение (1), и выполнив арифметические действия, получим

$$\lambda = \frac{2\pi(15-12)}{0{,}75\pi}\,\text{м} = 8\text{м}.$$

Для того чтобы написать уравнение плоской волны, надо еще найти циклическую частоту ω.

Так как $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ ($T = \dfrac{\lambda}{v}$ — период колебаний), то

$$\omega = \frac{2\pi v}{\lambda}.$$

Произведем вычисления:

$$\omega = \frac{2\pi \cdot 20}{8} с^{-1} = 5\pi\pi^{-1}.$$

Зная амплитуду A колебаний, циклическую частоту ω и скорость v распространения волны, можно написать уравнение плоской волны для данного случая:

$$y = A\cos\omega\left(t - \frac{x}{v}\right), \qquad (2)$$

где A =0,1 м, ω= 5 π с$^{-1}$, v =20 м/с.

Чтобы найти смещение y указанных точек, достаточно в уравнение (2) подставить значения t и x:

$$y_1 = 0{,}1\cos 5\pi\left(1{,}2 - \frac{12}{20}\right) = 0{,}1\cos 3\pi = -0{,}1(м);$$

$$y_2 = 0{,}1\cos 5\pi\left(1{,}2 - \frac{15}{20}\right) = 0{,}1\cos 2{,}25\pi = 0{,}071(м).$$

Пример 6. *На концах тонкого стержня длиной l = 1 м и массой m_3 = 400 г укреплены шарики малых размеров массами m_1 = 200 г и m_2 = 300 г. Стержень колеблется около горизонтальной оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его середину (точка 0 на рис. 3). Определить период T колебаний, совершаемых стержнем.*

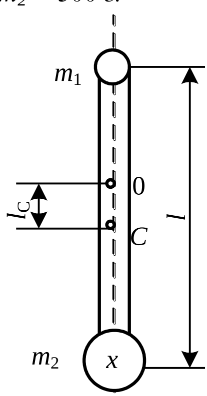


Рис. 3

Решение. Период колебаний физического маятника, каким является стержень с шариками, определяется соотношением

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{m\, g\, l_c}},$$

где J – момент инерции маятника относительно оси колебаний; m – его масса; l_c – расстояние от центра масс маятника до оси.

Момент инерции данного маятника равен сумме моментов инерции шариков J_1 и J_2 и стержня J_3 **:**

$$J = J_1 + J_2 + J_3.$$

Принимая шарики за материальные точки, выразим моменты их инерций:

$$J_1 = m_1\left(\frac{l}{2}\right)^2; J_2 = m_2\left(\frac{l}{2}\right)^2.$$

Так как ось проходит через середину стержня, то его момент инерции относительно этой оси $J_3 = \frac{1}{12}m_3 l^2$. Подставив полученные выражения J_1, J_2 и J_3 в формулу (2), найдем общий момент инерции физического маятника:

$$J = m_1\left(\frac{l}{2}\right)^2 + m_2\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \frac{1}{12}m_3 l^2 = \frac{1}{12}l^2\left(3m_1 + 3m_2 + m_3\right).$$

Произведя вычисления по этой формуле, найдем

$J = 0{,}158$ кг$\cdot$м^2.

Масса маятника состоит из масс шариков и массы стержня:

$m = m_1 + m_2 + m_3 = 0{,}9$кг.

Расстояние l_c центра масс маятника от оси колебаний найдем, исходя из следующих соображений. Если ось x направить вдоль стержня и начало координат совместить с точкой 0, то искомое расстояние l равно координате центра масс маятника, т. е.

$$l_c = x_c = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} = \frac{m_1\left(-\frac{l}{2}\right) + m_2\left(\frac{l}{2}\right) + m_3\cdot 0}{m_1 + m_2 + m_3}, \text{ и}$$

$$l_c = \frac{\left(m_2 - m_1\right)l}{2\left(m_1 + m_2 + m_3\right)} = \frac{(m_2 - m_1)l}{3m}.$$

Подставив значения величин m_1, m_2, m_3, l и произведя вычисления, найдем

$l_c = 5{,}55$ см.

Произведя расчеты по формуле (1), получим период колебаний физического маятника:

$$T = 2\cdot 3{,}14\sqrt{\frac{0{,}158}{0{,}9\cdot 9{,}81\cdot 5{,}55\cdot 10^{-2}}.} = 11{,}2\text{с}.$$

Пример 7. *Материальная точка участвует одновременно в двух взаимно перпендикулярных гармонических колебаниях, уравнения которых* $x = A_1\cos(\omega t + \varphi)$, $y = A_2\cos\frac{\omega}{2t}$, *где* $A_1 = 1$ *см,* $A_2 = 2$ *см,* $\omega = \pi\ c^{-1}$. *Найти уравнение траектории точки. Построить траекторию с соблюдением масштаба и указать направление движения точки.*

Решение. Чтобы найти уравнение траектории точки, исключим время t из заданных уравнений. Для этого воспользуемся формулой

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}.$$

В данном случае $\alpha = \omega t$, поэтому

$$y = A_2 \cos\frac{\omega}{2}t = A_2\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}.$$

Так как по условию $\cos\omega t = \dfrac{x}{A_1}$, то уравнение траектории

$$y = A_2\sqrt{\frac{1+\dfrac{x}{A_1}}{2}}. \qquad (1)$$

Полученное выражение представляет собой уравнение параболы, ось которой совпадает с осью Ox. Из уравнений в условии задачи следует, что смещение точки по осям координат ограничено и заключено в пределах от –1 до +1 см по оси Ox и от –2 до +2 см по оси Oy**.**

Для построения траектории найдем по уравнению (1) значения y**,** соответствующие ряду значений x, удовлетворяющих условию $|x| \le 1$ см**,** и составим таблицу:

x, см	–1	–0,75	–0,5	0	+0,5	+1
y, см	0	±0,707	±1	±1,41	±1,73	±2

Начертив координатные оси и выбрав масштаб, нанесем на плоскость xOy найденные точки. Соединив их плавной кривой, получим траекторию точки, совершающей колебания в соответствии с уравнениями движения (1) и (2).

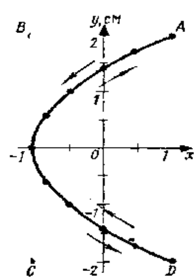


Рис. 4

Для того чтобы указать направление движения точки, проследим за тем, как изменяется ее положение с течением времени. В начальный момент $t = 0$ координаты точки равны $x(0) = 1$ см и $y(0) = 2$ см. В последующий момент времени, например при $t_1 = 1$ с, координаты точек изменятся и станут равными $x(1) = -1$ см, $y(t) = 0$**.** Зная положения точек в начальный и последующий (близкий) моменты времени, можно указать направление движения точки по траектории. На рисунке это направление движения указано стрелкой (от точки A к началу координат). После того, как в момент $t_2 = 2$с колеблющаяся точка достигнет точки D, она будет двигаться в обратном направлении.

Пример 8. *На расстоянии $l = 4$ м от источника плоской волны частотой $\nu = 440$ Гц перпендикулярно ее лучу расположена стена. Определить расстояния от источника волны до точек, в которых будут первые три узла и три пучности стоячей волны, возникшей в результате сложения бегущей и отраженной от стены волн. Скорость волны* v = *440м/с.*

Решение. Выберем систему координат так, чтобы ось x была направлена вдоль луча бегущей волны и начало *0* координат совпадало с точкой, находящейся на источнике MN плоской волны (рис. 5). С учетом этого уравнение бегущей волны запишется в виде

$$\xi_1 = A\cos(\omega t - kx).$$

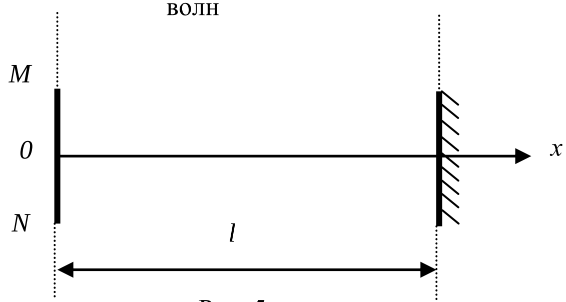


Рис. 5

Поскольку в точку с координатой x волна возвратится, пройдя дважды расстояние $l - x$, и при отражении от стены, как среды более плотной, изменит фазу на π, то уравнение отраженной волны может быть записано в виде

$$\xi_2 = A\cos(\omega t - k[x + 2(l - x)] + \pi).$$

После очевидных упрощений получим

$$\xi_2 = A\cos[\omega t - k(2l - x)].$$

Сложив ξ_1 и ξ_2, найдем уравнение стоячей волны:

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = A\cos(\omega t - kx) - A\cos[\omega t - k(2l - x)].$$

Воспользовавшись формулой разности косинусов, найдем

$$\xi = -2A\sin k(l - x)\sin(\omega t - kl).$$

Так как выражение $A\sin k(l - x)$ не зависит от времени, то, взятое по модулю, оно может рассматриваться как амплитуда стоячей волны:

$$A_{cm} = |2A\sin k(l - x)|.$$

Зная выражение амплитуды, можем найти координаты узлов и пучностей.

Узлы возникнут в тех точках, где амплитуда стоячей волны равна нулю:

$$|2A\sin k(l - x)| = 0.$$

Это равенство выполняется для точек, координаты x_n которых удовлетворяют условию

$$k(l - x_n) = n\pi (n = 0,1,2,\cdots). \qquad (1)$$

Но $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ или, так как $\lambda = \dfrac{v}{\nu}$,

$$k = \frac{2\pi\nu}{\mathrm{v}}. \qquad (2)$$

Подставив это выражение k в (1), получим

$$2\pi\nu(l - x_n) = n\pi\mathrm{v},$$

откуда координаты узлов

$$x_n = l - \frac{n\mathrm{v}}{2\nu}.$$

Подставив сюда значения l, v, ν и n = 0, 1, 2, найдем координаты первых трех узлов:
x_0 = 4 м; x_1 = 3,61 м; x_2 = 3,23 м.

Пучности возникнут в тех точках, где амплитуда стоячей волны максимальна:

$$2A\sin k(l - x) = 2A.$$

Это равенство выполняется для точек, координаты x_n' которых удовлетворяют условию

$$k(l - x') = (2n + 1)\frac{\pi}{2} \quad (n = 0,1,2,3,\cdots).$$

Выразив здесь k по (2), получим

$$4\nu x_n' = 4\nu l - (2n + 1)\mathrm{v},$$

откуда координаты пучностей

$$x_n' = l - \frac{(2n + 1)\mathrm{v}}{4\nu}.$$

Подставив сюда значения l, v, ν и n = 0, 1, 2, найдем координаты первых трех пучностей:
x_0' = 3,81 м, x_1' = 3,42 м, x_2' = 3,04 м.

Пример 9. *Разность потенциалов на обкладках конденсатора в колебательном контуре изменяется со временем по закону* $U = 100\sin 1000\pi t$. *Электроемкость конденсатора C = 0,5 мкФ. Определить период собственных колебаний, индуктивность, энергию контура и максимальную силу тока, текущего по катушке индуктивности.*

Решение. Напряжение на конденсаторе изменяется по гармоническому закону

$$U = U_0 \sin\omega_0 t,$$

где U_0 – амплитудное (максимальное) значение напряжения на обкладках конденсатора; ω_0 – собственная циклическая частота колебаний, которая связана с периодом соотношением

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}.$$

Отсюда находим

$$T = \frac{2\pi}{1000\,\pi c^{-1}} = 0{,}002\,с.$$

Период собственных колебаний в контуре определяется по формуле Томсона $T = 2\pi\sqrt{LC}$, откуда $L = T^2/4\pi^2 C$.

Определим индуктивность $L = \dfrac{2\cdot 10^{-6}\,с^2}{4\cdot 3{,}14^2\cdot 0{,}5\cdot 10^{-6}\,Ф} = 0{,}2Г,$.

Полная энергия контура равна сумме энергий электрического и магнитного полей

$$W = W_э + W_м = \frac{CU^2}{2} + \frac{LI^2}{2},$$

и равна либо максимальной энергии поля конденсатора $W_{ý\max} = \dfrac{CU_{\max}^2}{2}$,

либо максимальной энергии катушки индуктивности $W_{ì\ \max} = \dfrac{LI_{\max}{}^2}{2}$.

$$W = 0{,}5\cdot 10^{-6}\,Ф\cdot 100^2\,В/2 = 2{,}5\cdot 10^{-3}\,Дж.$$

Зная полную энергию, можно определить максимальную силу протекающего по катушке индуктивности тока:

$$I_{\max} = \sqrt{\frac{2W}{L}}\ ; I_{\max} = \sqrt{\frac{2\cdot 2.5\cdot 10^{-3}\,Дж}{0.2Г.}} = 0{,}15А.$$

Пример 10. *Тело совершает колебания с частотой ν = 50 Гц. Логарифмический декремент затухания λ равен 0,01. Определить: 1) время, за которое амплитуда колебаний тела уменьшится в 20 раз; 2) число полных колебаний тела, чтобы произошло подобное уменьшение амплитуды.*

Решение. Амплитуда затухающих колебаний

$$A = A_0 e^{-\beta t}, \tag{1}$$

где A_0 – амплитуда колебаний в момент $t = 0$, β – коэффициент затухания.

Логарифмический декремент затухания $\lambda = \beta T$ ($T = 1/\nu$– условный период затухающих колебаний). Тогда $\beta = \lambda\nu$ и выражение (1) можно записать в виде

$$A = A_0 e^{-\lambda\nu t},$$

откуда искомое время

$$t = \frac{1}{\lambda\nu}\ln\left(\frac{A_0}{A}\right).$$

Число искомых полных колебаний

$$N = t/T = t\nu.$$

Вычислив, получим 1) t = 6с; 2) N = 300.

Пример 11. *Колебательный контур состоит из катушки индуктивностью L = 25 мГн, конденсатора емкостью C = 10 мкФ и резистора. Определить сопротивление резистора, если известно, что амплитуда тока в контуре уменьшилась в e раз за 16 полных колебаний*.

Решение. Число колебаний, совершаемых за время уменьшения амплитуды силы тока в e раз

$$N_e = \tau/T,$$

где $\tau = 1/\beta$ – время релаксации, $T = 2\pi / \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ – условный период затухающих колебаний ($\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ – собственная частота контура, $\beta = R/(2L)$ – коэффициент затухания).

Подставляя эти выражения в (1), получим

$$N_e = \frac{\frac{2L}{R}\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{4L}{R^2C} - 1}\ .$$

Отсюда искомое сопротивление:

$$R = 2\sqrt{\frac{L}{C(1 + 4\pi^2 N^2)}}\ .$$

Вычисляя, получим R = 0,995 Ом.

Пример 12. *Определить энергию, переносимую плоской синусоидальной электромагнитной волной, распространяющейся в вакууме, за t = 1 с через поверхность площадью $S_{пл}$ = 1м^2, расположенную перпендикулярно направлению распространения волны. Амплитуда напряженности электрического поля волны E_0 = 5 мВ/м. Период волны T<<t.*

Решение. Плотность потока энергии (или интенсивность излучения) электромагнитных волн, т. е. количество энергии, переносимой за единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную направлению распространения волны, определяется вектором Пойнтинга

$$\mathbf{S} = [\mathbf{EH}],$$

где $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ – векторы напряженности электрического и магнитного полей в электромагнитной волне.

Учитывая, что $\mathbf{E} \perp \mathbf{H}$, получим для модуля вектора

$$S = EH.$$

Так как величины E и H в каждой точке электромагнитной волны меняются со временем по закону синуса, находясь в одинаковых фазах, то мгновенное значение величины S равно

$$S = (E_0 \sin \omega t)(H_0 \sin \omega t) = E_0 H_0 \sin^2 \omega t. \qquad (1)$$

Таким образом, величина S является функцией времени. Согласно определению плотности потока энергии, имеем

$$S = \frac{1}{S_{ïё}} \frac{dW}{dt} \qquad (2)$$

где dW — энергия, переносимая волной через площадку $S_{пл}$ за время dt.

Из выражений (2) и (1) получим выражение для энергии, переносимой за бесконечно малый промежуток времени dt:

$$dW = SS_{пл} dt = S_{пл} E_0 H_0 (\sin^2 \omega t) dt. \qquad (3)$$

Для определения dW необходимо знать величину H_0, которая может быть найдена из соотношения

$$\frac{\varepsilon\varepsilon_0 E_0^2}{2} = \frac{\mu\mu_0 H_0^2}{2}.$$

Отсюда

$$H_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}} E_0.$$

По условию, $\varepsilon = \mu = 1$, тогда

$$H_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_0. \qquad (4).$$

Подставляя (4) в (3), получим

$$dW = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_0^2 S_{пл} (\sin^2 \omega t) dt.$$

Энергию, переносимую волной за время t, найдем интегрированием полученного выражения

$$W = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_0{}^2 S_{пл} \int_0^t (\sin^2 \omega t) dt = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_0{}^2 S_{пл} \frac{t}{2}\left(1 - \frac{\sin 2\omega t}{2\omega t}\right).$$

По условию задачи$T << t$, или $2\pi/\omega << t$, $2\pi << \omega t$. При очень больших значениях ωt вторым слагаемым в скобке можно пренебречь – значения синуса при любом аргументе не превосходят единицу, а в знаменателе стоит очень большая величина. Тогда

$$W = \frac{t}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_0{}^2 S_{пл}.$$

Подставляя числовые значения, получим $W = 3{,}25 \cdot 10^{-8}$ Дж .