Министерство образования и науки, молодежи и спорта Украины
Государственное высшее учебное заведение
«Национальный горный университет»

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

ПО РАЗДЕЛУ

“ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕХАНИКИ”

для студентов специальностей 0906 ГВУЗ «НГУ»

Днепропетровск

2012

Методическое пособие для самостоятельной работы по разделу "Физические основы механики" курса физики для студентов специальности 0906 ГВУЗ «НГУ».
Сост.: Л.Ф.Мостипан, И.П. Гаркуша,
Днепропетровск: ГВУЗ «НГУ», 2011 г.

МЕХАНИКА

Механика — раздел физики, который изучает закономерности механического движения и причины, вызывающие или изменяющие это движение.

Механическое движение — изменение с течением времени взаимного расположения тел или их частей.

Классическая механика (механика Галилея—Ньютона) изучает законы движения макроскопических тел, скорости которых малы по сравнению со скоростью распространения света в вакууме. Законы движения макроскопических тел со скоростями, сравнимыми со скоростью c, изучаются **релятивистской механикой**, основанной на специальной теории относительности. Для описания движения микроскопических тел (отдельные атомы и элементарные частицы) законы классической механики неприменимы — они заменяются законами **квантовой механики**.

•Механика делится на три раздела: кинематику, динамику, статику.

Кинематика изучает движение тел, не рассматривая причин, которые это движение обусловливают.

Динамика изучает законы движения тел и причины, которые вызывают или изменяют это движение.

Статика изучает законы равновесия системы тел. Законы статики отдельно от законов динамики физика не рассматривает.

1.1. КИНЕМАТИКА

В механике для описания движения тел в зависимости от условий конкретных задач используют физические модели *(материальная точка и абсолютно твердое тело).*

Материальная точка — тело, обладающее массой, размерами которого в данной задаче можно пренебречь.

Абсолютно твердое тело — тело, которое ни при каких условиях не может деформироваться, и при всех условиях расстояние между двумя точками (или точнее между двумя частицами) этого тела остается постоянным.

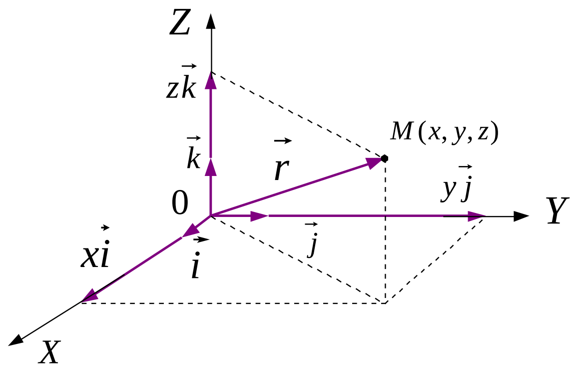
Поступательное движение — движение, при котором любая прямая, жестко связанная с движущимся телом, остается параллельной своему первоначальному положению.

Вращательное движение — движение, при котором все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной и той же прямой, называемой осью вращения.

Положение материальной точки определяется по отношению к некоторому произвольно выбранному телу, называемому **телом отсчета**.

Система отсчета — совокупность системы координат и часов, связанных с телом отсчета.

В декартовой системе координат положение точки *М* в данный момент времени по отношению к этой системе характеризуется тремя координатами х, *у* и *z* или радиусом-вектором **r**, проведенным из начала системы координат в данную точку.



$$\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z,$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные векторы направлений (орты); x, y, z – координаты точки.

При движении материальной точки ее координаты с течением времени изменяются. В общем случае ее движение определяется скалярными уравнениями,

$$x = x(t),$$
$$y = y(t),$$
$$z = z(t),$$

эквивалентными векторному уравнению

$$\vec{r} = \vec{r}(t).$$

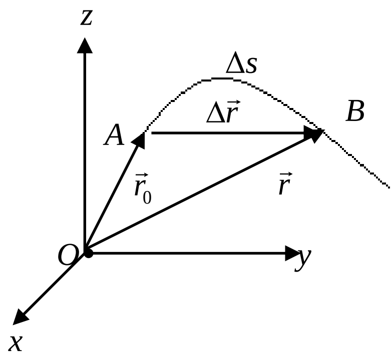
Число степеней свободы — число независимых координат, полностью определяющих положение точки в пространстве.

Если материальная точка свободно движется в пространстве, то она обладает тремя степенями свободы (координаты *x, y* и *z*), если она движется по некоторой поверхности, то двумя степенями свободы, если вдоль некоторой линии, то одной степенью свободы.

Траектория движения материальной точки — линия, описываемая этой точкой в пространстве. В зависимости от формы траектории движение может быть **прямолинейным** или **криволинейным**.

Уравнение траектории

$$f(x, y, z) = 0$$



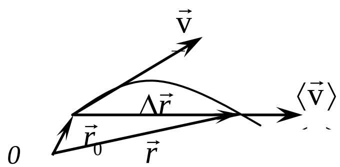
Пусть материальная точка движется вдоль произвольной траектории и отсчет времени начинается с момента, когда точка находилась в положении *A*.

Длина пути — длина участка траектории *AB,* пройденного материальной точкой с момента начала отсчета времени.

Длина пути является скалярной функцией времени.

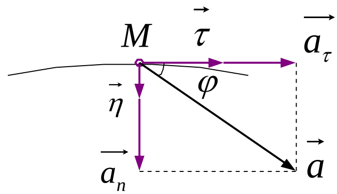
Вектор перемещения — вектор, проведенный из начального положения движущейся точки в положение ее в данный момент времени (приращение радиуса-вектора точки за рассматриваемый промежуток времени).	$\Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0$
При прямолинейном движении вектор перемещения совпадает с соответствующим участком траектории и модуль перемещения $\lvert\Delta\vec{r}\rvert$ равен пройденному пути Δs.	$\lvert\Delta\vec{r}\rvert = \Delta s$
Скорость — векторная величина, которая определяет как быстроту движения, так и его направление в данный момент времени.	
Средняя скорость движущейся точки за промежуток времени Δt — векторная величина, равная отношению перемещения к промежутку времени, в течение которого это перемещение произошло. Направление вектора средней скорости совпадает с направлением вектора перемещения.	$\langle\vec{\mathrm{v}}\rangle = \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$

Модуль средней скорости.	$\langle \mathrm{v} \rangle = \dfrac{\Delta S}{\Delta t}$
Мгновенная скорость.	$\vec{\mathrm{v}} = \lim \dfrac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$
Мгновенная скорость — векторная величина, определяемая производной радиуса-вектора движущейся точки по времени; направлена по касательной к траектории в сторону движения.	$\vec{\mathrm{v}} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} =$ $\vec{i}\mathrm{v}_x + \vec{j}\mathrm{v}_y + \vec{k}\mathrm{v}_z$

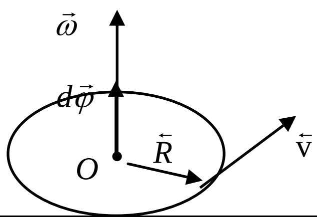


Проекции скорости точки на оси координат.	$\mathrm{v}_x = \dfrac{dx}{dt}$; $\mathrm{v}_y = \dfrac{dy}{dt}$; $\mathrm{v}_z = \dfrac{dz}{dt}$
Модуль мгновенной скорости.	$\mathrm{v} = \sqrt{\mathrm{v}_x^2 + \mathrm{v}_y^2 + \mathrm{v}_z^2}$.
Единица скорости - метр в секунду (1 м/с).	
Метр в секунду равен скорости прямолинейно и равномерно движущейся точки, при которой эта точка за время 1 с перемещается на расстояние 1 м.	
Ускорение - характеристика неравномерного движения; определяет быстроту изменения скорости по модулю и направлению.	
Среднее ускорение неравномерного движения за промежуток времени Δt - векторная величина, равная отношению изменения скорости $\Delta \mathbf{v}$ к промежутку времени, за которое это изменение произошло.	$\langle \vec{a} \rangle = \dfrac{\Delta \vec{\mathrm{v}}}{\Delta t}$
Мгновенное ускорение (ускорение). Ускорение — векторная величина, определяемая первой производной скорости по времени.	$\vec{a} = \dfrac{d\vec{\mathrm{v}}}{dt}$
Тангенциальная составляющая ускорения характеризует быстроту изменения скорости по модулю (направлена по касательной к траектории).	$a_\tau = \dfrac{d\mathrm{v}}{dt}$

Нормальная составляющая ускорения характеризует быстроту изменения скорости по направлению (направлена к центру кривизны траектории) [R — радиус кривизны траектории в данной точке].	$a_n = \dfrac{v^2}{R}$



Полное ускорение при криволинейном движении.	$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau$, $a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}$
Проекции ускорения на оси координат.	$a_x = \dfrac{dv_x}{dt}$; $a_y = \dfrac{dv_y}{dt}$; $a_z = \dfrac{dv_z}{dt}$
Единица ускорения — **метр на секунду в квадрате** (1 м/с^2) — ускорение такого равнопеременного движения, при котором за 1 с скорость тела изменяется на 1 м/с.	
Равномерное прямолинейное движение — движение с постоянной по модулю и направлению скоростью.	
Кинематическое уравнение равномерного движения материальной точки вдоль оси x [x_0 — начальная координата, t — время].	$x = x_0 \pm vt$
Скорость точки при равномерном движении.	v = const и a = 0.
Равноускоренное движение — движение с ускорением, постоянным по модулю и направлению.	
Кинематическое уравнение равнопеременного движения (a = const) вдоль оси x [v — начальная скорость, t — время].	$x = x_0 + v_0 t + \dfrac{at^2}{2}$
Скорость точки при равнопеременном движении. [v$_0$ — начальная скорость, a — ускорение, t — время движения].	$v = v_0 \pm at.$

<table>
<tr><td>Длина пути, пройденного точкой за промежуток времени от t_1 до t_2.</td><td>$$s=\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{v}(t)dt$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Угловая скорость — векторная величина, характеризующая быстроту вращения тела.</td></tr>
<tr><td>Угловая скорость равномерного вращательного движения— отношение угла поворота ко времени, за которое поворот произошел
[T— период вращения, n — частота вращения].</td><td>$$\omega=\frac{\varphi}{t}=\frac{2\pi}{T}=2\pi n$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Период вращения — время, за которое точка совершает один полный оборот, т. е. поворачивается на угол 2π.
Частота вращения — число полных оборотов, совершаемых телом при равномерном его движении по окружности, в единицу времени.</td></tr>
<tr><td>Угловая скорость — псевдовектор, определяемый первой производной угла поворота тела по времени.
Вектор $\vec{\omega}$ направлен вдоль оси вращения, в сторону, определяемую по правилу правого винта.

</td><td>$$\vec{\omega}=\frac{d\vec{\varphi}}{dt}$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Псевдовектор, или аксиальный вектор, — вектор, направление которого связывают с направлением вращения. Этот вектор не имеет определенной точки приложения: он может откладываться из любой точки оси вращения.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Единица угловой скорости — радиан в секунду (1 рад/с).
Радиан в секунду равен угловой скорости равномерно вращающегося тела, все точки которого за 1 с поворачиваются относительно оси на угол 1 рад.</td></tr>
<tr><td>Угловое ускорение — вектор, определяемый первой производной угловой скорости по времени.
При вращении тела вокруг неподвижной оси вектор углового ускорения направлен вдоль оси вращения в сторону вектора элементарного приращения угловой скорости. При ускоренном движении вектор $\vec{\varepsilon}$ сонаправлен вектору $\vec{\omega}$, при замедленном — противонаправлен ему.</td><td>$$\vec{\varepsilon}=\frac{d\vec{\omega}}{dt}.$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Единица углового ускорения — радиан на секунду в квадрате (1 рад/с^2).
Радиан на секунду в квадрате равен угловому ускорению равноускоренно вращающегося тела, при котором оно за 1 с изменяет угловую скорость на 1 рад/с.</td></tr>
<tr><td>Формулы, выражающие связь между линейными и</td><td>$s=\varphi R$, $\mathrm{v}=\omega R$;</td></tr>
</table>

угловыми величинами: [R — расстояние от оси вращения].	$a_\tau = \varepsilon R;\ a_n = \omega^2 R$
Кинематическое уравнение равномерного вращения [φ_0 — начальное угловое перемещение, t— время].	$\varphi_0 = \varphi_0 \pm \omega t,$
Угловая скорость при равномерном вращении.	φ=const, ε=0
Кинематическое уравнение равнопеременного вращения (ε = const) [ω_0 — начальная угловая скорость, t — время].	$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon^2 t}{2}$

1.2. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ И ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

В качестве первого закона динамики Ньютон сформулировал закон, установленный еще Галилеем: *материальная точка (тело) сохраняет состояние покоя шли равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока воздействие со стороны других тел не выведет ее (его)* из *этого состояния*.

Первый закон Ньютона (закон инерции): *существуют такие системы отсчета, относительно которых поступательно движущиеся тела сохраняют свою скорость постоянной, если на них не действуют другие тела*.

Первый закон Ньютона утверждает существование инерциальных систем отсчета.

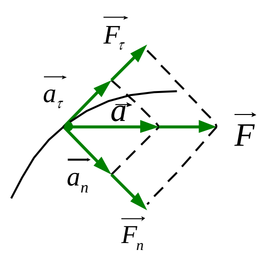
Инерциальная система отсчета — система отсчета, относительно которой свободная материальная точка, *не подверженная воздействию других тел,* движется равномерно и прямолинейно, или, как говорят, по инерции.

Инертность тел — свойство, присущее всем телам и заключающееся в том, что тела оказывают сопротивление изменению его скорости (как по модулю, так и по направлению).

Масса тела — физическая величина, являющаяся мерой его инерционных (**инертная масса**) и гравитационных (**гравитационная мас**са) свойств. В настоящее время можно считать доказанным, что инертная и гравитационная массы равны друг другу (с точностью, не меньшей 10^{-12} их значения).

Сила — векторная величина, являющаяся мерой механического воздействия на тело со стороны других тел или полей, в результате которого тело приобретает ускорение или изменяет свою форму и размеры.

В каждый момент времени *сила характеризуется числовым значением, направлением в пространстве и точкой приложения*.

Импульс материальной точки — векторная величина, численно равная произведению массы материальной точки на ее скорость и имеющая направление скорости.	$\vec{p} = m\vec{v}$
Второй закон Ньютона: *ускорение, приобретаемое материальной точкой (телом), пропорционально вызывающей его силе, совпадает с ней по направлению и обратно пропорционально массе материальной точки (тела).*	$\vec{a} = \dfrac{\vec{F}}{m}$ или $\vec{F} = m\vec{a} = m\dfrac{d\vec{v}}{dt}$
Более общая формулировка второго закона Ньютона: *скорость изменения импульса материальной точки равна действующей на нее силе.*	$\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$
Единица силы — **Ньютон** (Н) — сила, которая массе 1 кг сообщает ускорение 1 м/с^2 в направлении действия силы.	1 Н = 1 кг·м/с^2
Принцип независимости действия сил: *если на материальную точку действует одновременно несколько сил, то каждая из этих сил сообщает материальной точке ускорение согласно второму закону Ньютона, как будто других сил не было*.	
Согласно этому принципу, силы и ускорения можно разлагать на составляющие, использование которых приводит к существенному упрощению решения задач.	$F_\tau = ma_\tau = m\dfrac{dv}{dt}$, $F_n = ma_n = m\dfrac{v^2}{R}$
На рисунке действующая сила $\vec{F} = m\vec{a}$ разложена на два компонента: тангенциальную силу $\vec{F}_\tau$ (направлена по касательной к траектории) и нормальную силу $\vec{F}_n$ (направлена по нормали к центру кривизны траектории). Если на материальную точку действует одновременно несколько сил, то, согласно принципу независимости действия сил, под F во втором законе Ньютона понимают результирующую силу.	
Третий закон Ньютона: *всякое дей-*	

ствие материальных точек (тел) друг на друга имеет характер взаимодействия; силы, с которыми действуют друг на друга материальные точки, всегда равны по модулю, противоположно направлены и действуют вдоль прямой, соединяющей эти точки. [F_{12} —сила, действующая на первую материальную точку со стороны второй; F_{21} — сила, действующая на вторую материальную точку со стороны первой. Эти силы приложены к *разным* материальным точкам (телам), всегда действуют *парами* и являются силами *одной природы]*.	$\vec{F}_{12} = \vec{F}_{21}$
Закон Гука: *сила упругости пропорциональна удлинению тела и направлена в сторону, противоположную направлению перемещений частиц тела при деформации.* [*x* — удлинение тела, *к* — коэффициент пропорциональности, называемый **жесткостью** пружины].	$F_{\text{упр}} = -kx$
Единица жесткости — Ньютон на метр (Н/м). **Ньютон на метр** — динамическая жесткость линейной механической системы, при которой вынуждающая гармоническая сила с амплитудой 1 Н вызывает в этой системе гармонические колебания с амплитудой 1 м.	

Сила упругости — сила, возникающая в результате деформации тела и направленная в сторону, противоположную перемещениям частиц тела при деформации.

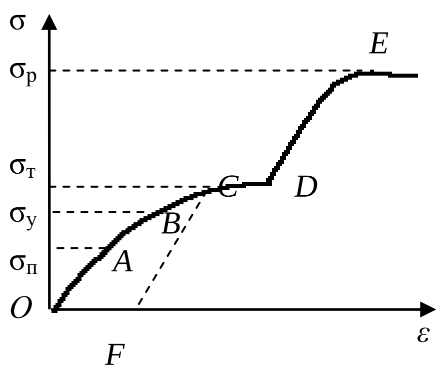
Деформация твердого тела — изменение под действием сил размеров и объема тела, сопровождающееся чаще всего изменением формы тела.

Упругая деформация — деформация, при которой после прекращения действия внешних сил тело принимает первоначальные размеры и форму

Пластическая (остаточная) деформация — деформация, которая сохраняется в теле после прекращения действия внешних сил.

Напряжение при упругой деформации [*F* — растягивающая (сжимающая) сила, перпендикулярная поперечному сечению тела; *S* — площадь поперечного сечения].	$\sigma = \dfrac{F}{S}$

Относительное продольное растяжение (сжатие) [Δl — изменение длины тела при растяжении (сжатии); l — длина тела до деформации].	$\varepsilon = \dfrac{\Delta l}{l}$
Относительное поперечное растяжение (сжатие) [Δd— изменение диаметра стержня при растяжении (сжатии); d — диаметр стержня].	$\varepsilon' = \dfrac{\Delta d}{d}$
Относительное поперечное сжатие (растяжение) [ε— коэффициент продольного растяжения (сжатия); μ — коэффициент Пуассона].	$\varepsilon' = \varepsilon\mu$
Закон Гука для продольного растяжения (сжатия) [E—модуль Юнга].	$\sigma = E\varepsilon$



Экспериментальная зависимость σ от ε для металлического образца. Линейная зависимость, установленная Гуком, выполняется лишь в очень узких пределах до **предела пропорциональности** ($\sigma_п$). При дальнейшем увеличении напряжения деформация еще *упругая* (хотя зависимость σ(ε) уже не линейна) и до **предела упругости** (σ_y) остаточные деформации не возникают. За пределом упругости в теле возникают остаточные деформации и график, описывающий возвращение тела в первоначальное состояние после прекращения действия силы, изобразится не кривой *BO,* а прямой *CF*.

Предел текучести $\sigma_т$ — напряжение, при котором появляется заметная остаточная деформация (= 0,2%) (точка *C* на кривой). В области *CD* деформация возрастает без увеличения напряжения, т.е. тело как бы "течет". Эта область называется **областью текучести** (или **областью пластических деформаций**). Материалы, для которых область текучести значительна, называются **вязкими**, для которых же она практически отсутствует, — **хрупкими**. При дальнейшем растяжении (за точку *B)* происходит разрушение тела. **Предел прочности** σ_p — максимальное напряжение, возникающее в теле до разрушения.

Сила всемирного тяготения [F — сила притяжения (сила всемирного тяготения); (G— гравитационная постоянная].	$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Закон всемирного тяготения: *между любыми двумя материальными точками действует сила взаимного притяжения, прямо пропорциональная произведению масс этих точек и обратно пропорциональная квадрату расстояния между ними*

Силы тяготения всегда являются силами притяжения и направлены вдоль прямой, проходящей через взаимодействующие тела.

Сила тяжести — сила, которая действует на тело массой m, находящееся в системе отсчета, связанной с Землей [m — масса тела; g — ускорение свободного падения].	$$\vec{P} = m\vec{g}$$

Вес тела — сила, с которой тело вследствие тяготения к Земле действует на опору (или подвес), удерживающую тело от свободного падения.

Сила тяжести действует всегда, а вес проявляется только в том случае, когда на тело кроме силы тяжести действуют еще •другие силы, вследствие чего тело движется с ускорением $\vec{a}$, отличным от $\vec{g}$.

Невесомость – состояние тела, при котором оно движется только под действием силы тяжести.

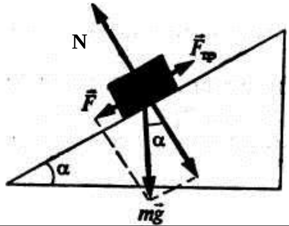
Внешнее трение — трение, возникающее в плоскости касания двух соприкасающихся тел при их относительном перемещении.

Внутреннее трение — трение между частями одного и того же тела, например между различными слоями жидкости или газа, скорости которых изменяются от слоя к слою.

Сила трения — сила сопротивления, действующая на тело и направленная противоположно относительному перемещению данного тела.

Сила трения покоя — сила, возникающая на границе соприкосновения тел при отсутствии относительного движения тел.

Максимальная сила трения покоя пропорциональна силе N нормального давления [μ - коэффициент трения]	$$F_{\text{тр-max}} = \mu N$$
Сила трения скольжения пропорциональна силе N нормального давления. [μ - коэффициент трения скольжения, зависящий от свойств соприкасающихся поверхностей]	$$F_{\text{тр}} = \mu N$$



Сила трения качения [R — радиус катящегося тела; μ — коэффициент трения качения]	$$F_{тр} = \frac{\mu_k N}{R}$$

Механическая система — совокупность материальных точек (тел), рассматриваемых как единое целое

Внутренние силы — силы взаимодействия между материальными точками механической системы.

Внешние силы — силы, с которыми на материальные точки механической системы действуют внешние тела.

Замкнутая система — механическая система тел, на которую не действуют внешние силы.

Закон сохранения импульса: в *замкнутой системе тел геометрическая сумма импульсов тел остается постоянной при любых взаимодействиях тел этой системы между собой* [m_1, m_2 — масса тел, v_1 , v_2 и v'_1, v'_2 — соответственно скорости тел до и после взаимодействия].	$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}'_1 + m_2\vec{v}'_2$$
Более общая формулировка закона сохранения импульса: *импульс замкнутой системы сохраняется, т. е. не изменяется с течением времени* [n — число материальных точек (тел), входящих в систему].	$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i = \text{const}$$

Закон сохранения импульса является следствием определенного свойства симметрии пространства — его однородности.

Однородность пространства заключается в том, что при параллельном переносе в пространстве замкнутой системы тел как целого ее *физические свойства* и законы движения *не изменяются, иными словами, не зависят от выбора положения начала координат инерциальной системы отсчета*.

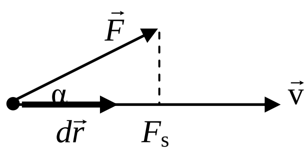
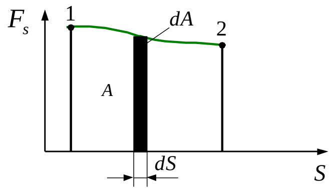
Центр масс — точка, через которую должна проходить линия действия силы, чтобы тело двигалось поступательно.

Центр масс системы материальных точек — воображаемая точка С, положение которой характеризует распределение массы этой системы.	

Радиус-вектор точки *C* [m_i и r_i — соответственно масса и радиус-вектор *i*-й материальной точки; *n* — число материальных точек в системе, *m* - масса системы].	$\vec{r}_C = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{m}$
Закон движения центра масс: *центр масс системы движется как материальная точка, в которой сосредоточена масса всей системы и на которую действует сила, равная геометрической сумме всех внешних сил, действующих на систему.*	$m\dfrac{d\vec{v}_c}{dt} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n$
Уравнение движения тела переменной массы на примере движения ракеты [*m* и v — соответственно масса и скорость ракеты в момент времени *t*, *F*— внешняя сила, $F_р$. – реактивная сила. Если *u* (скорость истечения газов) относительно ракеты противоположна v по направлению, то ракета ускоряется, а если совпадает с *u* , то тормозится].	$m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \vec{u}\dfrac{dm}{dt}$ или $m\vec{a} = \vec{F} + \vec{F}_p$
Реактивная сила	$\vec{F}_p = -\vec{u}\dfrac{dm}{dt}$
Формула Циолковского.	$v = u \ln \dfrac{m_0}{m}$
Из формулы Циолковского следует, что: 1) чем больше конечная масса *m* ракеты, тем больше должна быть стартовая масса m_0 ракеты; 2) чем больше скорость истечения *u* газов, тем больше может быть конечная масса при данной стартовой массе ракеты. Эти выражения получены для нерелятивистских движений, т. е. для случаев, когда скорости v и *u* малы по сравнению со скоростью *c* распространения света в вакууме.	

1.3. РАБОТА И ЭНЕРГИЯ

Энергия — универсальная мера различных форм движения и взаимодействия.	
Работа силы — количественная характеристика процесса обмена энергией между взаимодействующими телами.	
Если тело движется прямолинейно и на него действует постоянная сила	

F, которая составляет некоторый угол α с направлением перемещения, то работа этой силы равна произведению проекции силы F_s на направление перемещения ($F_s = F \cdot \cos\alpha$), умноженной на перемещение точки приложения силы.	$A = F_s s = F \cdot s \cdot \cos\alpha$
Если $\alpha < \pi/2$, то работа силы положительна. Если $\alpha > \pi/2$, то работа силы отрицательна. При $\alpha = \pi/2$ (сила направлена перпендикулярно перемещению) работа силы равна нулю. Работа — величина скалярная.	
Элементарная работа силы F на перемещении ds [α — угол между векторами $\vec{F}$ и $d\vec{r}$, $ds = \lvert d\vec{r} \rvert$ — элементарный путь; F_s — проекция вектора на вектор $d\vec{r}$].	$dA = \vec{F} d\vec{r} = F \cos\alpha ds = F_s ds$
	
Работа, совершаемая переменной силой на пути s	$A = \int_1^2 F_s ds = \int_1^2 F \cos\alpha ds$
Зная зависимость F_s от s вдоль траектории 1—2, можно вычислить этот интеграл. Искомая работа A на графике численно равна площади закрашенной фигуры.	
Единица работы — Джоуль (Дж). **Джоуль** — работа, совершаемая силой 1 Н на пути 1 м.	1 Дж=1 Н·м
Мощность — физическая величина, характеризующая скорость совершения работы.	$N = \frac{A}{t}$
Средняя мощность за промежуток времени t.	$N = \frac{\Delta A}{\Delta t}$
Мгновенная мощность равна скалярному произведению вектора силы на вектор скорости, с которой движется точка приложения этой силы.	$N = \frac{dA}{dt} = \vec{F}\vec{v} = F v \cos\alpha$
Единица мощности – Ватт (Вт). **Ватт** – мощность, при которой за	1Вт=1Дж/с

время 1с совершается работа 1Дж.	
Кинетическая энергия механической системы — энергия механического движения этой системы.	
Кинетическая энергия тела массой *m,* движущегося со скоростью v, определяется работой, которую надо совершить, чтобы сообщить телу данную скорость.	$T = \frac{mv^2}{2}$
Теорема о кинетической энергии: *работа равнодействующей сил, приложенных к телу, равна изменению кинетической энергии тела.*	$A = T_2 - T_1$
Приращение кинетической энергии частицы на элементарном перемещении равно элементарной работе на том же перемещении.	$dA = dT$
Потенциальная энергия — механическая энергия системы тел, определяемая их взаимным расположением и характером сил взаимодействия между ними. Потенциальная энергия определяется с точностью до некоторой произвольной постоянной. Это не отражается на физических законах, так как в них входит или разность потенциальных энергий в двух положениях тела, или производная $E`$ по координатам. Поэтому потенциальную энергию тела в каком-то определенном положении считают равной нулю (выбирают нулевой уровень отсчета), а энергию тела в других положениях отсчитывают относительно нулевого уровня.	
Потенциальное поле — поле, в котором работа, совершаемая действующими силами при перемещении тела из одного положения в другое, не зависит от того, по какой траектории это перемещение произошло, а зависит только от начального и конечного положений. Тело, находясь в потенциальном поле сил, обладает потенциальной энергией.	
Консервативная сила — сила, работа которой при перемещении точки (тела) зависит только от начального и конечного положений точки (тела) в пространстве.	
Консервативная система — механическая система, на тела которой действуют только консервативные силы.	
Диссипативная сила — сила, работа которой при перемещении точки (тела) из одного положения в другое зависит от траектории перемещения точки (тела).	
Диссипативная система — система, в которой механическая энергия постепенно уменьшается за счет преобразования в другие (немеханические) формы энергии. Этот процесс получил название **диссипации (рассеяния) энергии.**	

Работа консервативных сил при элементарном (бесконечно малом) изменении конфигурации системы равна приращению потенциальной энергии, взятому со знаком минус, так как работа совершается за счет уменьшения потенциальной энергии [C — постоянная интегрирования].	$dA = -d\Pi$, $\vec{F}d\vec{r} = -d\Pi$, $\Pi = -\int \vec{F}d\vec{r} + C$, $A = \Pi_1 - \Pi_2$
В случае консервативных сил	$\vec{F} = -\operatorname{grad} \Pi$, $\vec{F} = -\left(\vec{\mathbf{i}}\frac{\partial \Pi}{\partial x} + \vec{\mathbf{j}}\frac{\partial \Pi}{\partial y} + \vec{\mathbf{k}}\frac{\partial \Pi}{\partial z}\right)$
Потенциальная энергия тела, поднятого над поверхностью Земли на высоту h [g — ускорение свободного падения].	$\Pi = mgh$
Потенциальная энергия упругодеформированного тела.	$\Pi = \frac{1}{2}kx^2$
Полная механическая энергия системы — энергия механического движения и взаимодействия (равна сумме кинетической и потенциальной энергий).	$E = T + \Pi$
Закон сохранения полной механической энергии: *полная механическая энергия системы тел остается неизменной при любых движениях тел системы.*	$E = T + \Pi = \text{const}$
Более общая формулировка закона сохранения механической энергии: *в системе тел, между которыми действуют только консервативные силы, полная механическая энергия сохраняется, т. е. не изменяется со временем,* или *в консервативных системах полная механическая энергия сохраняется.*	
Закон сохранения энергии является следствием определенного свойства симметрии — однородности времени. **Однородность времени** — инвариантность физических законов относительно выбора начала отсчета времени.	
Удар (соударение) — это столкновение двух или более тел, при котором взаимодействие длится очень короткое время.	
Коэффициент восстановления — отношение нормальных составляющих относительной скорости тел после v_n' и до удара v_n.	$\varepsilon = \frac{v_n'}{v_n}$

Линия удара — прямая, проходящая через точку соприкосновения тел и нормальная к поверхности их соприкосновения.	
Центральный удар — удар, при котором тела до удара движутся вдоль прямой, проходящей через их центры масс.	
Скорости тел, массы которых m_1 и m_2, после абсолютно упругого прямого центрального удара [предполагается, что при прямом центральном ударе векторы скоростей шаров до (v_1, v_2) и после (v'_1, v'_2) удара лежат на прямой линии, соединяющей их центры. Проекции векторов скорости на эту линию равны модулям скоростей].	$v'_1 = \dfrac{v_1(m_1 - m_2) + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2}$, $v'_2 = \dfrac{v_2(m_2 - m_1) + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2}$
Абсолютно неупругий удар — столкновение двух тел, в результате которого тела объединяются, двигаясь дальше как единое целое.	
Скорость движения тел после абсолютно неупругого центрального удара.	$\vec{v} = \dfrac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}$
Изменение кинетической энергии шаров при центральном абсолютно неупругом ударе (разность кинетической энергии тел до и после удара).	$\Delta T = \dfrac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}(v_1 - v_2)^2$

1.4. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

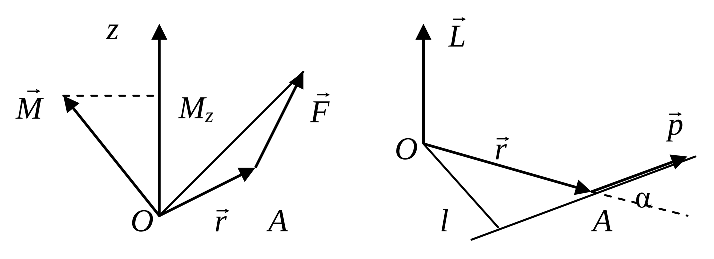
Момент инерции материальной точки относительно данной оси — скалярная величина, равная произведению массы точки на квадрат расстояния от этой точки до оси [m — масса точки; r — расстояние от точки до оси].	$J_z = mr^2$
Момент инерции системы (тела) относительно оси — физическая величина, равная сумме произведений масс n материальных точек системы на квадраты их расстояний до рассматриваемой оси [r_i расстояние материальной точки массой m_i, до оси].	$J_z = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i r_i^2$
Момент инерции в случае непрерывного распределения масс [интегрирование производится по всему объему тела. В данном случае r — функция положения точки с координатами x, y, z]	$J_z = \int r^2 dm.$

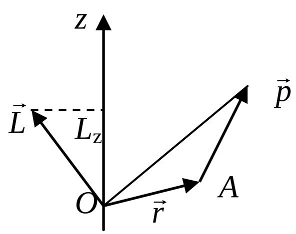
Моменты инерции некоторых однородных тел

Таблица 1

Тело	Положение оси вращения	Момент инерции
Однородный тонкий стержень массой m и длиной l	Проходит через центр масс стержня перпендикулярно стержню	$\frac{1}{12}ml^2$
	Проходит через конец стержня перпендикулярно стержню	$\frac{1}{3}ml^2$
Тонкое кольцо, обруч, труба радиусом R и массой m	Ось симметрии	mR^2
Круглый однородный диск, цилиндр радиусом R и массой m	То же	$\frac{1}{2}mR^2$
Однородный шар радиусом R и массой m	Проходит через центр шара	$\frac{2}{5}mR^2$

Теорема Штейнера: *момент инерции тела относительно любой оси вращения равен моменту его инерции J_c относительно параллельной оси, проходящей через центр масс C тела, сложенному с произведением массы m тела на квадрат расстояния a между осями*.	$J = J_C + ma^2$
Кинетическая энергия тела, вращающегося относительно оси z [J_z — момент инерции тела относительно оси z; ω — его угловая скорость].	$T = \frac{J_z\omega^2}{2}$
Кинетическая энергия тела, катящегося по плоскости без скольжения [m — масса тела; v_c — скорость центра масс тела; J_C — момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр масс; ω — угловая скорость тела].	$T = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{I_c\omega^2}{2}$
Момент силы от относительно неподвижной точки O — физическая величина, определяемая векторным произведением радиуса-вектора $\vec{r}$, проведенным из точки O в точку приложения силы $\vec{F}$, на эту силу [$\vec{M}$ — псевдовектор, его направление	$\vec{M} = [\vec{r}\vec{F}]$

совпадает с направлением поступательного движения правого винта при его вращении от $\vec{r}$ к $\vec{F}$].	
Модуль момента силы [α — угол между $\vec{r}$ и $\vec{F}$; $r\sin\alpha = l$ — кратчайшее расстояние между линией действия силы и точкой приложения силы – плечо силы].	$M = Fr\sin\alpha = Fl$
Момент силы относительно неподвижной оси *z* — скалярная величина M_z, равная проекции на эту ось вектора $\vec{M}$ момента силы, определенного относительно произвольной очки О данной оси *z*. Значение момента M_z не зависит от выбора положения точки *O* на оси *z*.	
Если ось *z* совпадает с направлением вектора $\vec{M}$, то момент силы можно записать в виде вектора, направленного вдоль оси.	$\vec{M}_z = \left[\vec{r}\vec{F}\right]_z$
Работа при вращении тела [*d*φ — угол поворота тела; M_z - момент силы относительно оси *z*].	$dA = M_z d\varphi$
Момент импульса материальной точки *A* относительно неподвижной точки *O* — физическая величина, определяемая векторным произведением радиуса-вектора $\vec{r}$, проведенного из *O* в точку *A,* на вектор импульса $\vec{p}$ [$\vec{p} = m\vec{v}$ — импульс материальной точки; $\vec{L}$ — псевдовектор, его направление совпадает с направлением поступательного движения правого винта при его вращении от $\vec{r}$ к $\vec{p}$].	$\vec{L} = \left[\vec{r}\vec{p}\right] = \left[\vec{r}m\vec{v}\right]$
	
Модуль вектора момента импульса	

<table>
<tr><td>[α — угол между векторами $\vec{r}$ и $\vec{p}$, l — плечо вектора $\vec{p}$ относительно точки O].</td><td>$$L = rp\sin\alpha = mvr\sin\alpha = pl$$</td></tr>
<tr><td>Момент импульса твердого тела относительно оси z
[r_i — расстояние от оси z до отдельной частицы тела; $m_i v_i$ — импульс этой частицы, J_z — момент инерции тела относительно оси z, ω — его угловая скорость].</td><td>$$L_z = \sum_{i=1}^{n} m_i \mathrm{v}_i r_i = J_z \omega$$</td></tr>
<tr><td>Уравнение (закон) динамики вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси: производная момента импульса твердого тела относительно оси равна моменту сил относительно той же оси
[ε— угловое ускорение; J_z — момент инерции тела относительно оси z].</td><td>$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt},$$ $$M_z = \frac{d(J_z\omega)}{dt} = J_z\varepsilon$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Момент импульса относительно неподвижной оси z — скалярная величина L_z, равная проекции на эту ось вектора момента импульса, определенного относительно произвольной точки O данной оси. Значение момента импульса L_z не зависит от положения точки O на оси z.</td></tr>
<tr><td colspan="2">
</td></tr>
<tr><td>Закон сохранения момента импульса:
момент импульса замкнутой системы сохраняется, т.е. не изменяется с течением времени.</td><td>$$L_z = J_z\omega = const$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Закон сохранения момента импульса — фундаментальный закон природы. Он связан со свойством симметрии пространства — его изотропностью.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Изотропность — инвариантность физических законов относительно выбора направления осей координат системы отсчета (относительно поворота замкнутой системы в пространстве на любой угол).</td></tr>
</table>

Сопоставление основных величин и уравнений, определяющих вращение тела вокруг неподвижной оси и его поступательное движение (табл. 2).

Таблица 2

Поступательное движение		*Вращательное движение*	
Масса	m	Момент инерции	J
Скорость	$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$	Угловая скорость	$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$.
Ускорение	$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$	Угловое ускорение	$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$
Сила	$\vec{F}$	Момент силы	$\vec{M}$ или M_z
Импульс	$\vec{p} = m\vec{v}$	Момент импульса	$L_z = J_z\omega$
Основное уравнение динамики	$\vec{F} = m\vec{a}$ $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$	Основное уравнение динамики	$M_z = J_z\varepsilon$ $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$
Работа	$dA = F_s ds$	Работа вращения	$dA = M_z d\varphi$
Кинетическая энергия	$T = \frac{mv^2}{2}$	Кинетическая энергия вращения	$T = \frac{J_z\omega^2}{2}$

Неинерциальная система отсчета — система отсчета, движущаяся относительно инерциальной системы с ускорением.

Силы инерции — силы, обусловленные ускоренным движением системы отсчета относительно измеряемой системы.

Если учесть силы инерции, то второй закон Ньютона справедлив для любой системы отсчета: *произведение массы на ускорение в рассматриваемой системе отсчета равно сумме всех сил, действующих на данное тело (включая и силы инерции).*

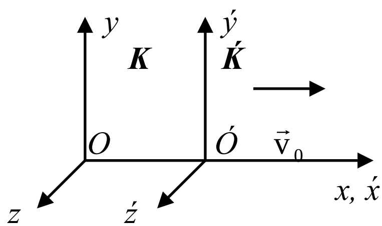
Силы инерции $\vec{F}_{\text{ин}}$ при этом должны быть такими, чтобы вместе с силами $\vec{F} = m\vec{a}$, обусловленными воздействием тел друг на друга, они сообщали телу ускорение $\vec{a}'$, каким оно обладает в неинерциальных системах отсчета [$\vec{a}$ — ускорение тела в инерциальной системе отсчета].	$m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}_{\text{ин}}$, $m\vec{a}' = m\vec{a} + \vec{F}_{\text{ин}}$

1.6. СПЕЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Постулаты Эйнштейна, лежащие в основе специальной теории относительности.

I. **Принцип относительности**: *никакие опыты (механические, электрические, оптические), проведенные внутри данной инерциальной системы отсчета, не дают возможности обнаружить, покоится ли эта система или движется равномерно и прямолинейно;* все законы природы инвариантны по отношению к переходу от одной инерциальной системы отсчета к другой.

II. **Принцип инвариантности скорости света**: *скорость света в вакууме не зависит от скорости движения источника света или наблюдателя и одинакова во всех инерциальных системах отсчета.*

Преобразования Лоренца. Предполагается, что система отсчета K движется со скоростью v_0 в положительном направлении оси x системы отсчета K', причем оси x и x' совпадают, а оси y и y' и z и z' параллельны; c — скорость распространения света в вакууме. 	$\displaystyle x' = \frac{x + v_0 t}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}},$ $y' = y,$ $z' = z,$ $\displaystyle t' = \frac{t - \frac{v_0 x}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}}.$
Релятивистское замедление хода часов [Δt_0 — промежуток времени между двумя событиями, отсчитанный движущимися вместе с телом часами, Δt — промежуток времени между теми же событиями, отсчитанный по покоящимся часам].	$\displaystyle \Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}}$
Релятивистское (Лоренцево) сокращение длины [l_0 — длина стержня, измеренная в системе отсчета, относительно которой стержень покоится (собственная длина); l — длина стержня, измеренная в системе отсчета, относительно которой он движет-	$\displaystyle l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}$

ся со скоростью v_0].	
Релятивистский закон сложения скоростей [v' — скорость тела относительно K', v — того же тела относительно K. Предполагается, что система отсчета K' движется со скоростью v_0 в положительном направлении оси x системы отсчета K, причем оси x' и x совпадают, y' и y, z' и z параллельны].	$v = \dfrac{v'+v_0}{1+\dfrac{v_0 v'}{c^2}}$
Интервал s_{12} между событиями (инвариантная величина) [t_{12} — промежуток времени между событиями 1и 2; l_{12} — расстояние между точками, где произошли события].	$s_{12}^2 = c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = \mathrm{inv}$
Релятивистский импульс	$p = mv = \dfrac{m_0 v}{\sqrt{1-\dfrac{v_0^2}{c^2}}}$
Основной закон релятивистской динамики [p— релятивистский импульс частицы].	$\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$
Закон взаимосвязи массы и энергии (фундаментальный закон природы): *полная энергия системы равна произведению ее массы на квадрат скорости света в вакууме*. **[**T – кинетическая энергия частицы; $m_0c^2 = E_0$ – ее энергия покоя. Частица называется релятивистской, если скорость частицы сравнима со скоростью света, и классической, если $v_0 << c$.].	$E = mc^2 = m_0c^2 + T$
Формула, выражающая связь между энергией и импульсом релятивистской частицы.	$E^2 - p^2c^2 = m_0^2c^4$

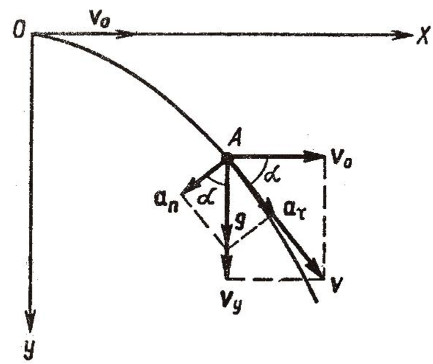
ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. *С башни в горизонтальном направлении брошено тело с начальной скоростью υ_0 = 10 м/с. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить: 1)время и высоту подъема тела;2) скорость и радиус кривизны его траектории для момента времени t = 2 с после начала движения.*

<u>**Решение.**</u> Предположим, что через t = 2 с после начала движения тело находится в точке A. Проведем в этой точке по касательной к траектории вектор мгновенной скорости и разложим его на горизонтальную $\vec{v}_x$ и вер-

тикальную $\vec{v}_y$ составляющие. Тело участвует в двух взаимно перпендикулярных движениях: равномерном прямолинейном движении вдоль оси *Ox* (со скоростью $v_x = v_0$=const) и равноускоренном вдоль оси *Oy* (со скоростью $v_y = gt$). Следовательно, скорость тела в точке *A*

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + g^2t^2}\ .$$



Так как горизонтальная составляющая скорости камня постоянна, то горизонтальная составляющая ускорения равна нулю. Поэтому полное ускорение камня все время направлено вертикально вниз и равно ускорению свободного падения:

$$a = g = \sqrt{a_\tau^{\ 2} + a_n^{\ 2}}\ .$$

Разложим вектор $\vec{g}$ на нормальное $\vec{a}_n$ и тангенциальное $\vec{a}_\tau$ ускорения. Из рисунка видно, что

$$a_n = g\cos\alpha = \frac{gv_0}{\sqrt{v_0^2 + g^2t^2}}.$$

С другой стороны, $a_n = v^2/R$, откуда

$$R = \frac{v^2}{a_n} = \frac{(v_0^2 + g^2t^2)^{3/2}}{gv_0}\ .$$

Вычисляя, получаем: 1) v = 22м/с; 2) R = 109 м.

Пример 2. *Скорость материальной точки изменяется по закону* $\vec{v} = (2+3t)\vec{i} + 10t^2\vec{j}$ *. Определить:1) модуль перемещения; 2) модуль скорости; 3) модуль ускорения в момент времени t = 2 с после начала движения*.

Решение. Скорость материальной точки задана в задаче как вектор. Модуль вектора скорости равен

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(2+3t)^2 + (10t^2)^2}.$$

Компоненты вектора скорости есть производные по времени от компонент радиус-вектора

$$\vec{\mathbf{v}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}\ .$$

Из соотношения $v_x = \dfrac{dx}{dt}$ следует, что

$$x_2 - x_1 = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{v}_x dt = \int_0^t (2+3t)dt = 2t + \frac{3t^2}{2}.$$

Аналогично находится

$$y_2 - y_1 = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{v}_y dt = \int_0^t 10 \cdot t^2 dt = \frac{10t^3}{3}.$$

Модуль перемещения

$$|\Delta \vec{\mathbf{r}}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(2+3t)^2 + (10t^2)^2}.$$

Ускорение определяется производной от вектора скорости по времени, то есть

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} = \frac{d(2+3t)}{dt}\vec{i} + \frac{d(10t^2)}{dt}\vec{j} = 3\vec{i} + 20t\vec{j}.$$

Модуль вектора ускорения найдем по формуле

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{9 + (20t)^2}.$$

Подставив числовые значения, получим:

Δr = 28,48 м; $\mathrm{v} = \sqrt{(2+3\cdot 2)^2 + (10\cdot 2^2)^2} = 40{,}79$ м/с; $a = \sqrt{9 + (20\cdot 2)^2} =$ 40,11 м/с^2.

Пример 3. *Тело вращается вокруг неподвижной оси по закону* $\varphi = A + Bt + Ct^2$, *где* A = *10 рад,* B = *20 рад/с,* C = *– 2 рад/с*^{2}. *Найти полное ускорение точки, находящейся на расстоянии* r = *0,1 м от оси вращения, для момента времени* t = *4 с.*

Решение. Все точки вращающегося тела описывают окружности. Полное ускорение $\vec{a}$ точки, движущейся по окружности, может быть найдено как векторная сумма тангенциального ускорения $\vec{a}_\tau$, направленного по касательной к траектории, и нормального ускорения $\vec{a}_n$, направленного к центру кривизны траектории (рис. 1.1):

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau .$$

Так как векторы $\vec{a}_\tau$ и $\vec{a}_n$ взаимно перпендикулярны, то модуль ускорения

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}. \qquad (1)$$

Используем формулы, выражающие связь линейных и угловых величин,

$$a_\tau = \varepsilon r, \; a_n = \omega^2 r,$$

где ω— модуль угловой скорости тела; ε — модуль его углового ускорения.

Тогда

$$a = \sqrt{\varepsilon^2 r^2 + \omega^4 r^2} = r\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \qquad (2)$$

Модуль угловой скорости ω найдем, взяв первую производную от угла поворота по времени:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = B + 2\,Ct.$$

Для момента времени t = 4 с модуль угловой скорости ω = [20 + 2(–2)4] рад/с = 4 рад/с.

Угловое ускорение найдем, взяв первую производную от угловой скорости по времени:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 2C = -4 \text{ рад/с}^2.$$

Подставляя значения ω, ε и r в формулу (2), получаем

$$a = 0{,}1\sqrt{(-4)^2 + 4^4} \text{ м/с}^2 = 1{,}65 \text{ м/с}^2.$$

Пример 4. *При выстреле из пружинного пистолета вертикально вверх пуля массой m = 20 г поднялась на высоту h = 5 м. Определить жесткость k пружины пистолета, если она была сжата на x = 10 см. Массой пружины и силами трения пренебречь.*

Решение. Рассмотрим систему пружина — пуля. Так как на тела системы действуют только консервативные силы (тяжести и упругой деформации пружины), то для решения задачи можно применить закон сохранения механической энергии. Согласно ему полная механическая энергия системы в начальном состоянии (в данном случае перед выстрелом) равна полной энергии в конечном состоянии (когда пуля поднялась на высоту h), т. е.

$$T_1 + \Pi_1 = T_2 + \Pi_2, \qquad (1)$$

где T_1, T_2, Π_1 и Π_2 — кинетические и потенциальные энергии системы в начальном и конечном состояниях.

Так как кинетические энергии пули в начальном и конечном состояниях равны нулю, то равенство (1) примет вид

$$\Pi_1 = \Pi_2. \qquad (2)$$

Примем потенциальную энергию пули в поле сил тяготения Земли, когда пуля покоится на сжатой пружине, равной нулю, а высоту подъема пули будем отсчитывать от торца сжатой пружины. Тогда энергия системы в начальном состоянии будет равна потенциальной энергии сжатой пружины, т. е.

$$\Pi_1 = \frac{kx^2}{2},$$

а в конечном состоянии – потенциальной энергии пули на высоте h, т. е.

$$\Pi_2 = mgh.$$

Подставив выражения Π_1 и Π_2 в формулу (2), найдем

$$k = \frac{2mgh}{x^2}. \qquad (3)$$

Проверим, дает ли полученная формула единицу жесткости *k*. Для этого в правую часть формулы (3) вместо величин подставим единицы их измерения:

$$\frac{[m][g][h]}{[x]^2} = \frac{1\text{кк}\cdot 1\text{м}\cdot\text{с}^{-2}\cdot 1\text{м}}{1\text{м}^2} = 1\frac{\text{Н}}{\text{м}}.$$

Убедившись, что полученная единица является единицей жесткости (1 Н/м), подставим в формулу (3) значения величин и произведем вычисления:

$$k = \frac{2\cdot 0{,}02\cdot 9{,}81\cdot 5}{(0{,}1)^2}\frac{\text{Н}}{\text{м}} = 196\frac{\text{Н}}{\text{м}}.$$

Пример 5. *Шар массой m_1, движущийся горизонтально с некоторой скоростью* v_1, *столкнулся с неподвижным шаром массой m_2. Удар прямой, центральный, абсолютно упругий. Какую долю ε своей кинетической энергии первый шар передал второму?*

<u>Решение.</u> Доля энергии, переданной первым шаром второму, выразится соотношением

$$\varepsilon = \frac{T_2}{T_1} = \frac{m_2 u_2^2}{m_1 v_1^2} = \frac{m_2}{m_1}\left(\frac{u_2}{v_1}\right)^2, \qquad (1)$$

где T_1 – кинетическая энергия первого шара до удара; u_2 и T_2 – скорость и кинетическая энергия второго шара после удара.

Как видно из формулы (1), для определения ε надо найти u_2. Так как удар шаров абсолютно упругий, то механическая энергия тел не переходит в другие виды энергии, выполняются законы сохранения импульса и механической энергии:

$$m_1 v_1 = m_1 u_1 + m_2 u_2; \qquad (2)$$

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}, \qquad (3)$$

Здесь v – скорости тел до удара ($v_2 = 0$), *u* – после удара. Решим совместно уравнения (2) и (3):

$$u_2 = \frac{2m_1 v_1}{m_1 + m_2}.$$

Подставив выражение u_2 в формулу (1) и сократив на v_1 и m_1, получим

$$\varepsilon = \frac{m_2}{m_1}\left[\frac{2m_1 v_1}{v_1(m_1 + m_2)}\right]^2 = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}.$$

Из найденного соотношения видно, что доля переданной энергии зависит только от масс сталкивающихся шаров.

Пример 6. *Сила тяги автомобиля изменяется с расстоянием по закону $F = A + Bs + Cs^2$, где A = 1 кН, B = 0,5 кН/м , C = 0,3 кН/м^2. Определить работу силы тяги на участке пути s = 10 м и среднюю мощность автомобиля, если разгон длился t = 2 с.*

Решение. Работа, совершаемая переменной силой, на пути s

$$A = \int_s F_s ds = \int_s F\cos\alpha ds ,$$

где α – угол между направлениями силы и перемещения. Очевидно, что сила тяги действует вдоль перемещения, поэтому α = 0, cos α = 1. Интегрируя, получим

$$A = \int_0^{s_1} \left(A + Bs + Cs^2\right) ds = As_1 + B\frac{s_1^2}{2} + C\frac{s_1^3}{3} .$$

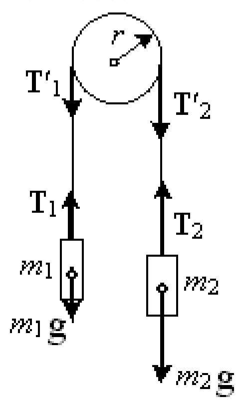
Подставляя числа, найдем $A = 1{,}35 \cdot 10^5$ Дж.

Средняя мощность, развиваемая автомобилем

$$< N >= \frac{A}{t} .$$

Вычисляя, получим $\langle N \rangle$ = 67,5 кВт.

Пример 7. *Через блок в виде сплошного диска, имеющего массу m = 80г, перекинута тонкая гибкая нить, к концам которой подвешены грузы с массами m_1 = 100 г и m_2 = 200 г. Определить ускорение, с которым будут двигаться грузы, если их предоставить самим себе. Трением и массой нити пренебречь.*



Решение. Рассмотрим силы, действующие на кажд отдельности. На каждый груз действуют две силы: сила натяжения нити. Напишем для каждого груза уравнен закон Ньютона) в проекциях на вертикаль. Для первого г

$$T_1 - m_1 g = m_1 a; \qquad (1)$$

для второго груза

$$m_2 g - T_2 = m_2 a . \qquad (2)$$

Согласно основному уравнению динамики враща вращающий момент M, приложенный к диску, равен пр инерции I диска на его угловое ускорение ε:

$$M = I\varepsilon. \qquad (3)$$

Определим вращающий момент. Силы натяжения нитей действуют не только на грузы, но и на диск. По третьему закону Ньютона силы T'_1 и T'_2, приложенные к ободу диска, равны соответственно силам T_1 и T_2 , но по направлению им противоположны. При движении грузов диск ускоренно вращается по часовой стрелке, следовательно, $T'_2 > T'_1$.

Вращающий момент, приложенный к диску,

$$M = (T'_2 - T'_1)r.$$

Подставив в формулу (3) выражения M, углового ускорения $\varepsilon = a/r$, и момента инерции блока (сплошного диска) $I = (½)mr^2$, получим

$$(T'_2 - T'_1)r = \frac{mr^2}{2}\frac{a}{r}. \qquad (4)$$

Согласно третьему закону Ньютона, с учетом невесомости и нерастяжимости нити,

$$T'_1 = T_1,\ T'_2 = T_2.$$

Воспользовавшись этим, подставим в уравнение (4) вместо T'_1 и T'_2 выражения T_1 и T_2, получив их предварительно из уравнений (1) и (2),

$$(m_2 g - m_2 a)r - (m_1 g + m_1 a)r = \frac{mr^2 a}{2r}.$$

После сокращения на r и перегруппировки членов найдем

$$a = \frac{(m_2 - m_1)g}{m/2 + m_2 + m_1}.$$

После подстановки числовых значений, получим a = 2,88 м/с^2.

Пример 8. *Маховик в виде сплошного диска радиусом R = 0,2 м и массой m = 50 кг раскручен до частоты вращения n_1 = 480 мин$^{-1}$ и предоставлен сам себе. Под действием сил трения маховик остановился через t = 50 с. Найти момент M сил трения.*

Решение. Для решения задачи воспользуемся основным уравнением динамики вращательного движения в виде

$$dL_z = M_z dt, \qquad (1)$$

где dL_z — изменение проекции на ось Oz момента импульса маховика, вращающегося относительно оси Oz, совпадающей с геометрической осью маховика, за интервал времени dt; M_z — момент внешних сил (в данном случае момент сил трения), действующих на маховик относительно оси Oz.

Момент сил трения можно считать не изменяющимся с течением времени ($M_z = const$), поэтому интегрирование уравнения (1) приводит к выражению

$$\Delta L_z = M_z \Delta t. \qquad (2)$$

При вращении твердого тела относительно неподвижной оси изменение проекции момента импульса равно

$$\Delta L_z = J_z \Delta\omega, \qquad (3)$$

где J_z – момент инерции маховика относительно оси Oz; $\Delta\omega$ – изменение угловой скорости маховика.

Приравняв правые части равенств (2) и (3), получим $M_z \Delta t = J_z \Delta\omega$, откуда

$$M_z = J_z \frac{\Delta\omega}{\Delta t}. \qquad (4)$$

Момент инерции маховика в виде сплошного диска определяется по формуле

$$J_z = \frac{mr^2}{2}.$$

Изменение угловой скорости $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ выразим через конечную n_2 и начальную n_1 частоту вращения, пользуясь соотношением $\omega = 2\pi n$:

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = 2\pi(n_2 - n_1).$$

Подставив в формулу (4) выражения J_z и $\Delta\omega$, получим

$$M_z = \frac{\pi m r^2 (n_2 - n_1)}{\Delta t}. \qquad (5)$$

Проверим, дает ли расчетная формула единицу момента силы (Н·м). Для этого в правую часть формулы вместо символов величин подставим их единицы:

$$\frac{[m][R^2][n]}{[t]} = \frac{1\text{кг} \cdot 1\text{м}^2 \cdot 1\text{с}^{-1}}{1\text{с}} = 1\text{Н} \cdot \text{м}.$$

Подставим в (5) числовые значения величин и произведем вычисления, учитывая, что $n_1 = 480$ мин$^{-1}$= 480/60 с$^{-1}$ = 8 с$^{-1}$.

$$M_z = \frac{3{,}14 \cdot 50 \cdot (0{,}2)^2 \cdot (0 - 8)}{50} \text{Н} \cdot \text{м} = -1\text{Н} \cdot \text{м}.$$

Знак минус показывает, что момент сил трения оказывает на маховик тормозящее действие.

Пример 9. *Платформа в виде сплошного диска радиусом R = 1,5 м и массой m_1 = 180 кг вращается около вертикальной оси с частотой n =10 мин$^{-1}$. В центре платформы стоит человек массой m_2 = 60 кг. Какую линейную скорость* v *относительно пола помещения будет иметь человек, если он перейдет на край платформы?*

Решение. Согласно условию задачи, момент внешних сил относительно оси вращения *Oz*, совпадающей с геометрической осью платформы, можно считать равным нулю. При этом условии проекция L_z момента импульса системы платформа – человек остается постоянной:

$$L_z = J_z\omega = \text{const}, \qquad (1)$$

где J_z – момент инерции платформы с человеком относительно оси *z*, ω – угловая скорость платформы.

Момент инерции системы равен сумме моментов инерции тел, входящих в состав системы, поэтому в начальном состоянии $J_z = J_1 + J_2$, а в конечном состоянии $J_z' = J_1' + J_2'$

С учетом этого равенство (1) примет вид

$$(J_1 + J_2)\omega = (J_1' + J_2')\omega', \qquad (2)$$

где значения моментов инерции J_1 и J_2 платформы и человека, соответственно, относятся к начальному состоянию системы; J_1' и J_2' – к конечному.

Момент инерции платформы относительно оси Oz при переходе человека не изменяется: $J_1 = J'_1 = ½\, m_1R^2$. Момент инерции человека относительно той же оси будет изменяться. Если рассматривать человека как материальную точку, то его момент инерции J_2 в начальном состоянии (в центре платформы) можно считать равным нулю. В конечном состоянии (на краю платформы) момент инерции человека $J'_2 = m_2R^2$.

Подставим в формулу (2) выражения моментов инерции, начальной угловой скорости вращения платформы с человеком ($\omega = 2\pi n$) и конечной угловой скорости ($\omega' = \mathrm{v}/R$, где v — скорость человека относительно пола):

$$\left(\frac{1}{2}m_1R^2+0\right)\cdot 2\pi n=\left(\frac{1}{2}m_1R^2+m_2R^2\right)\frac{\mathrm{v}}{R}.$$

После сокращения на R^2 и простых преобразований находим скорость:

$$\mathrm{v}=\frac{2\pi nRm_1}{m_1+2m_2}.$$

Произведем вычисления

$$\mathrm{v}=\frac{2\cdot 3{,}14\cdot\frac{1}{6}\cdot 1{,}5\cdot 180}{180+2\cdot 60}\,\text{ì/ñ}=1\,\text{ì/ñ}\ .$$

Пример 10. *Определить, какая кинетическая энергия должна быть сообщена ракете массой m_0 = 1,5 т, чтобы она приобрела скорость*
v = *120 Мм/с.*

Решение. Кинетическая энергия ракеты

$$T = (m - m_0)c^2,$$

где $m = m_0/\sqrt{1-\mathrm{v}^2/c^2}$.

Из этих выражений получаем, что

$$T=m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{v}^2/c^2}}-1\right).$$

Вычисляя, получаем $T = 1{,}23\cdot 10^{19}$ Дж.