Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет
«Дніпровська політехніка»

І.П. Гаркуша, В.П. Курінний

Фізика

Навчальний посібник у 7 частинах
для студентів вищих техн. закладів освіти

Ч.1. Механіка

Дніпро
НТУ «Дніпровська політехніка»
2019

ЗМІСТ

ВСТУП

§ 1 . Вектори і скаляри . Деякі операції над векторами

Фізика як точна наука має справу з величинами. Одні з них характеризуються лише своїм чисельним значенням і не мають напрямку . Вони називаються ***скалярами*** . Наприклад, довжина, час, маса, енергія, температура, електричний заряд та ін.

Інші фізичні величини визначаються не тільки числом, а й певним напрямком. ***Векторами*** *називаються величини , які характеризуються числовим значенням, напрямком у просторі і додаються геометрично - за правилом паралелограма.* Правило паралелограма пояснює рис 1.1: сума ***c*** двох векторів ***a*** і ***b*** (***c = a + b***) збігається з діагоналлю паралелограма , побудованого на векторах a і ***b*** , відкладених із загальної точки.

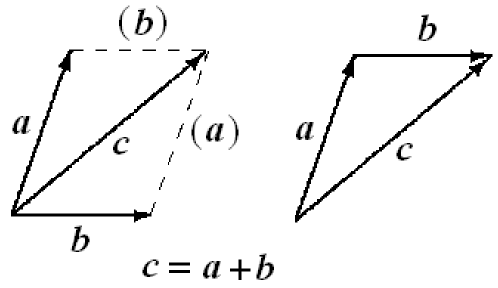


Рис. 1.1.

Рівносильне правило називається правилом трикутника. Щоб скласти вектори ***a і b***, початок ***b*** поєднується з кінцем ***a***. Вектор ***c***, проведений з початку ***a*** в кінець ***b***, є сумою векторів ***a і b***.

Вектори зустрічаються у всіх розділах фізики. Так , основні закони механіки або електромагнітної теорії найбільш зручно записуються в векторної формі.

Спрямований відрізок, який є зображенням вектора, буде одним і тим же, яку б систему координат ми не використовували при його побудові. Співвідношення між векторами також залишається незмінним при перенесенні початку відліку і повороті координатних осей. Рівняння, що виражають закони фізики в векторній формі, не залежать від вибору системи координат. Мова векторів відповідає фізичному досліду , крім того, вона є стислою і виразною. До векторних величин відносяться, наприклад, швидкість, прискорення , сила , напруженості електричних і магнітних полів і т. ін.

Числове значення вектора називається його ***модулем.***

На рисунках вектори зображуються у вигляді прямолінійних відрізків зі стрілкою на кінці , що вказує напрямок вектора. Вектор характеризується точкою прикладання його початку. Довжину відрізка в установленому масштабі вибирають такою, що дорівнює модулю вектора .

Прийнято в рукописних документах вектор записувати буквою зі стрілкою нагорі $\vec{a}$, а в друкованих - буквою напівжирного шрифту ***a***. Абсолютна величина (модуль) вектора ***a*** позначається прямими дужками |***a***| або тією ж буквою звичайного шрифту *a* .

Проекцією вектора на будь-яку вісь називається добуток модуля вектора на косинус кута між вектором і додатним напрямом осі: $a_x = a \cos\alpha$ (рис. 1.2).

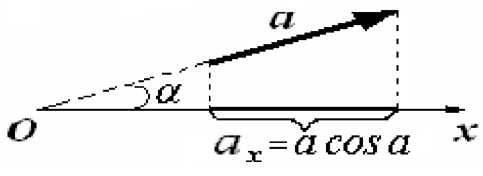


Рис. 1.2.

Виберемо на площині прямокутну систему координат xOy . Будь-який вектор $\boldsymbol{a}$, що лежить у цій площині , можна представити як суму двох векторів (рис 1.3) :

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_x + \boldsymbol{a}_y, \tag{1.1}$$

де $\boldsymbol{a}_x$ – вектор, спрямований паралельно осі *Ох,* називають *складовою вектора* по осі *Ох* , аналогічно, $\boldsymbol{a}_y$– *складова вектора по осі Оy*.

Ця процедура називається *розкладанням вектора на складові*.

Позначимо через $\boldsymbol{i}$ - вектор , спрямований вздовж осі *Ох*, довжина якого дорівнює одиниці (одиничний вектор або орт) , а через $\boldsymbol{j}$ - одиничний вектор уздовж осі *Оy* .

Кожну складову вектора $\boldsymbol{a}$ можна записати як добуток проекції вектора та одиничного вектора відповідної осі (рис. 1.3):

$$\boldsymbol{a}_x = a_x\,\boldsymbol{i}; \quad \boldsymbol{a}_y = a_y\,\boldsymbol{j}. \tag{1.2}$$

Тоді вектор $\boldsymbol{a}$ можна представити у вигляді суми :

$$\boldsymbol{a} = a_x\,\boldsymbol{i} + a_y\,\boldsymbol{j}. \tag{1.3}$$

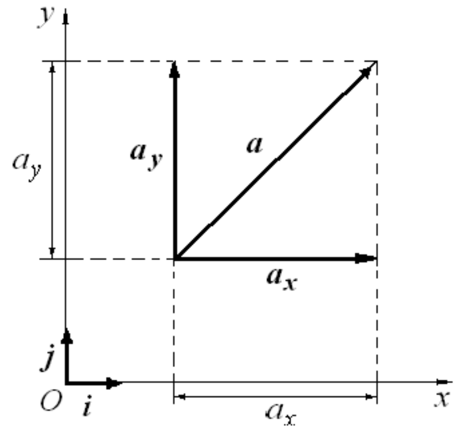


Рис. 1.3.

Модуль вектора $\boldsymbol{a}$ за теоремою Піфагора дорівнює

$$a = |\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}\ . \tag{1.4}$$

У загальному випадку , коли вектор не лежить в площині , а розміщений в просторі, його можна віднести до просторової прямокутної координатної системи.

Позначаючи орт осі *Oz* через $\boldsymbol{k}$, запишемо вектор $\boldsymbol{a}$ через його проекції на координатні осі (що звуться компонентами вектора) і орти цих осей:

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}. \tag{1.5}$$

У цьому випадку модуль вектора $\boldsymbol{a}$ дорівнює

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\ . \tag{1.6}$$

Користуючись уявленнями вектора через його проекції , підкреслимо різницю між скалярними і векторними величинами : значення скалярної величини задається одним числом , значення векторної величини представляється трьома числами (проекціями вектора на координатні осі)

Наведемо основні правила множення векторів.

Добуток вектора а на число bдає новий вектор $\boldsymbol{c} = b\boldsymbol{a}$**,** компоненти якого дорівнюють: $c_x = b\ a_x$; $c_y = b\ a_y$; $c_z = b\ a_z$. Обчислюючи довжину нового вектора формулою (1.6), переконаємося, що вона дорівнює довжині вектора $\boldsymbol{a}$, помноженій на абсолютне значення числа b. Крім того, новий вектор зберігає напрямок, якщо $b > 0$ і змінює напрямок на протилежний, якщо $b < 0$.

Існують дві операції множення вектора на вектор.

Скалярний добуток ***a·b*** двох векторів ***a*** і ***b*** – це число, що дорівнює добутку модулів векторів на косинус кута між ними:

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}| \cos(\boldsymbol{a}\hat{}\boldsymbol{b}) = ab \cos\alpha, \tag{1.7}$$

де a та b – модулі векторів, що перемножуються, α - кут між векторами співмножниками. (Інше позначення скалярного добутку: ***ab***, іноді (***ab***)). В результаті скалярного множення вектора на вектор виходить не вектор , а число - скаляр.

Скалярний добуток виражається через проекції векторів за формулою

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \tag{1.8}$$

На відміну від скалярного множення при векторному множенні двом заданим векторам ставиться у відповідність вектор.

Векторний добуток [***ab***] двох векторів ***a*** та ***b*** дорівнює вектору ***c***, що визначається таким чином:

1) модуль векторного добутку $|\boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}| \sin(\boldsymbol{a}\hat{}\boldsymbol{b})$, або $c = ab \sin\alpha$, де a і b – модулі векторів, що перемножуються, α – кут між векторами співмножниками . Таким чином , модуль векторного добутку чисельно дорівнює площі паралелограма , побудованого на векторах, що перемножуються;

2) вектор ***c*** перпендикулярний площині , в якій лежать вектора співмножники ***a*** і ***b***.

3) вектори ***a, b, c*** утворюють праву трійку векторів: якщо головку гвинта обертати за напрямком від ***a*** до ***b***, то гвинт просунеться в напрямку вектора ***c*** (рис. 1.4).

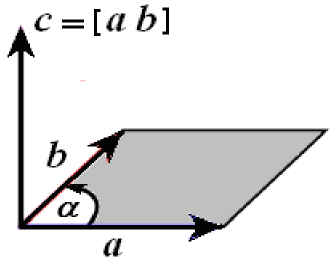


Рис. 1.4.

Векторний добуток позначається квадратними дужками (або знаком × – «множити»):

$$\boldsymbol{c} = [\boldsymbol{ab}] \qquad (\text{або } \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}).$$

Векторний добуток можна записати у вигляді визначника, який розкладається за елементами першого рядка :

$$[\boldsymbol{ab}] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \quad .(1.9)$$

Похідна векторної функції $\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}$ обчислюється за звичайними правилами диференціювання з урахуванням того , що ***i, j, k*** – постійні вектори .

$$\frac{d\boldsymbol{a}}{dt} = \frac{da_x}{dt}\boldsymbol{i} + \frac{da_y}{dt}\boldsymbol{j} + \frac{da_z}{dt}\boldsymbol{k}\,. \tag{1.10}$$

Похідна вектора ***a*** – це вектор , чиї компоненти дорівнюють похідним від відповідних компонент ***a***.

Приклад . Задані два вектори : $\boldsymbol{a} = 3\,\boldsymbol{i} - 4\,\boldsymbol{j} + 5\,\boldsymbol{k}$ і $\boldsymbol{b} = -\,\boldsymbol{i} + 2\,\boldsymbol{j} + 4\,\boldsymbol{k}$.

визначити :
1) модуль кожного вектора ;
2) скалярний добуток ***ab***;
3) векторний добуток **[*ab*]**.

1). За формулою (1.6):

$$a = \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}\,, \quad b = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{21}\,.$$

2). За формулою (1.8): $\boldsymbol{ab} = 3\cdot(-1) + (-4)\cdot 2 + 5\cdot 4 = 9$.

3) За формулою (1.9):

$$[\boldsymbol{ab}] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 3 & -4 & 5 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = (-16 - 10)\,\boldsymbol{i} - (12 + 5)\,\boldsymbol{j} + (6 - 4)\,\boldsymbol{k} = -26\boldsymbol{i} - 17\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}.$$

§ 2 . Система одиниць вимірювання фізичних величин

Зміст фізичних законів зазвичай виражається в математичній формі як залежність між чисельними значеннями досліджуваних фізичних величин .

Виміряти фізичну величину - означає порівняти її з величиною , прийнятою за одиницю , тобто порівняти з еталоном. У результаті одержують чисельне значення вимірюваної величини , разом з яким вказують одиниці виміру.

Одиниці виміру розбиваються на два класи - основні і похідні .
Основні одиниці системи СІ

Величина	*Назва*	*Позначення*
Довжина	метр	м
Маса	кілограм	кг
Час	секунда	с
Сила струму	ампер	А
Термодинамічна температура	кельвін	К
Сила світла	кандела	кд
Кількість речовини	моль	моль

Для основних фізичних величин вибирають еталони . Одиниці інших фізичних величин встановлюють, користуючись фізичними законами , що зв'язують між собою похідні фізичні величини з основними.

У фізиці найбільш широко користуються Міжнародною системою одиниць (СІ), яка є переважною для застосування в усіх галузях науки і техніки. У цій системі прийнято сім основних одиниць.

Метр дорівнює відстані, яку проходить світло у вакуумі за проміжок часу, що дорівнює $\frac{1}{299\,792\,458}$ секунди.

З цього визначення випливає , що в системі СІ швидкість світла у вакуумі прийнята рівною в точності 299 792 458 м/с.

Кілограм визначається як маса міжнародного еталону кілограма , що зберігається в Міжнародному бюро мір і ваг (у Севрі , поблизу Парижа) і представляє собою циліндричну гирю діаметром і висотою 39,17 мм з платино - іридієвого сплаву (90 % Pt, 10 % Ir).

Секунда являє собою інтервал часу, що дорівнює 9 192 631 770 періодам коливань світлової хвилі , що випромінюється при переході між надтонкими рівнями основного (квантового) стану атома цезію - 133 в спокої при 0 К за відсутності збурення зовнішніми полями**.**

Ампером називається сила постійного струму, який, проходячи по двох паралельних прямолінійних провідниках нескінченної довжини і дуже малого кругового перерізу, розміщених на відстані 1 м один від одного у вакуумі, створює силу взаємодії між ними, яка дорівнює $2 \cdot 10^{-7}$ ньютона на кожний метр довжини провідника.

Кельвін дорівнює 1 / 273,16 термодинамічної температури потрійної точки води. Початок шкали (0 К) збігається з абсолютним нулем . Перерахунок в градуси Цельсія :

$$°C = °K - 273{,}15.$$

(температура потрійної точки води дорівнює 0,01 °С).

Кандела дорівнює силі світла, що випускається в заданому напрямку джерелом монохроматичного випромінювання частотою $5{,}4 \cdot 10^{14}$ герц, енергетична сила світла якого в цьому напрямку становить (1/683) Вт/ср.

Моль відповідає кількості речовини , в якому міститься N_A частинок (молекул , атомів , іонів , електронів або будь-яких інших тотожних структурних частинок) .

$N_A = 6{,}02214179(30) \cdot 10^{23}$ – стала Авогадро.

Контрольні питання

1 . Яким умовам має задовольняти фізична величина , щоб вона виражалася вектором ?

2 . Наведіть графічно суму векторів ; різницю векторів .

3 . Чи змінюється довжина вектора при поворотах системи координат ?

4 . Чи залежить величина скалярного добутку від вибору системи координат ?

5 . Скалярний добуток двох векторів дорівнює нулю. Який висновок випливає звідси?

6 . Який результат скалярного добутку ***a·a*** вектора самого на себе? Векторного добутку [***aa***]?

7. Чому дорівнює векторний добуток орта ***i*** на орт ***j***?

8. Чи зміниться величина і напрямок сили при переході від правогвинтової системи координат до лівогвинтової системи?

9. Сила $\boldsymbol{F}$, що діє з боку магнітного поля $\boldsymbol{B}$ на електричний заряд q, що рухається зі швидкістю $\boldsymbol{v}$ в деякій системі відліку виражається формулою $\boldsymbol{F} = q[\boldsymbol{vB}]$. Чи зміниться величина і напрямок сили при переході до іншої системи відліку?
10. Які вимоги пред'являються до еталонів одиниць вимірювання?

Розділ 1. КІНЕМАТИКА МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

§ 3 . Основні поняття кінематики матеріальної точки

Кінематика вивчає рух тіл , не цікавлячись причинами , які його визивають, і оперує такими величинами , як переміщення , шлях , час, швидкість , прискорення.

Положення тіла в просторі можна визначити тільки по відношенню до якихось інших тіл. Тіла , які служать для визначення положення рухомого тіла , називаються тілами відліку. У повсякденній практиці природним тілом відліку служить Земля. Сукупність тіла відліку і жорстко пов'язаних з ним системи координат і годинника називається ***системою відліку***.

Однією з фізичних моделей , що використовуються в кінематиці , є матеріальна точка .

Під ***матеріальною точкою*** розуміють тіло, що має масу, розмірами якого можна знехтувати в порівнянні з розмірами інших тіл або відстанями до них в умовах даної задачі. Так , наприклад , в задачі про рух Землі навколо Сонця Землю можна розглядати як точку в фізичному сенсі , оскільки діаметр Землі набагато менше відстані від Землі до Сонця.

Надалі , кажучи про тіло або частинку , ми будемо розуміти під ними матеріальну точку.

Положення точки M в прямокутній системі координат можна задати не тільки за допомогою трьох координат x,y,z, але також за допомогою однієї векторної величини $\boldsymbol{r}$ - ***радіус-вектора*** точки M, проведеного в цю точку з початку системи координат (рис. 3 1).

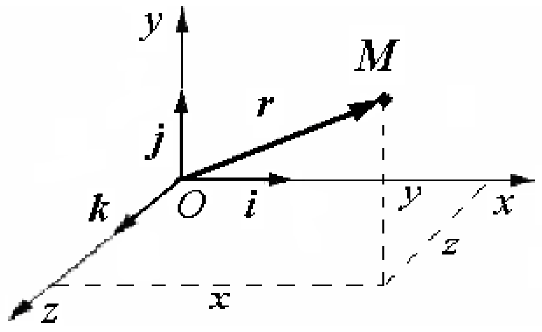


Рис.3.1.

Проекції (або компоненти) радіус - вектора x, y, z дорівнюють координатам точки M.

Якщо $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ - одиничні вектори (орти) осей прямокутної (декартової) системи координат, то

$$\boldsymbol{r} = x\,\boldsymbol{i} + y\,\boldsymbol{j} + z\,\boldsymbol{k}. \tag{3.1}$$

Під час руху частинки її радіус-вектор і координати змінюються з часом t. Тому для завдання закону руху матеріальної точки необхідно вказати або вид функціональної залежності всіх трьох її координат від часу:

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t), \qquad (3.2)$$

або залежність від часу радіус-вектора цієї точки:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t). \qquad (3.3)$$

Три скалярних рівняння (3.2) або еквівалентне до них одне векторне рівняння (3.3) називаються *кінематичними рівняннями руху матеріальної точки* .

Лінія , яку описує точка при своєму русі , називається ***траєкторією .*** Траєкторією є положення кінців радіус - вектора $\boldsymbol{r}$ у всі моменти часу.

Залежно від форми траєкторії розрізняють прямолінійний і криволінійний рухи точки . Якщо всі ділянки траєкторії точки лежать в одній площині , то рух точки називають плоским.

Рівняння (3.2) і (3.3) задають траєкторію точки в так званій параметричної формі. Роль параметра відіграє час t . Вирішуючи ці рівняння спільно і виключаючи з них час t, можна визначити рівняння траєкторії в явному вигляді $f(x,y) = 0$.

Приклад. Рівняння руху матеріальної точки задані в параметричної формі $x = a\sin\omega t, y = b\cos\omega t.$ Визначити рівняння руху у вигляді $f(x,y) = 0$.

З першого рівняння виразимо $\sin\omega t = \dfrac{x}{a}$. Тоді $\cos\omega t = \sqrt{1-\sin^2\omega t} = \sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}$. Підставивши це значення в друге рівняння, знайдемо: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$. Точка рухається по еліпсу.

Розглянемо рух частинки уздовж довільної кривої з початкової точки *1* траєкторії в кінцеву точку *2* (рис.3.2).

Вектор $\Delta\boldsymbol{r}$, проведений з початкового положення частинки в кінцеве положення, називається ***переміщенням.***

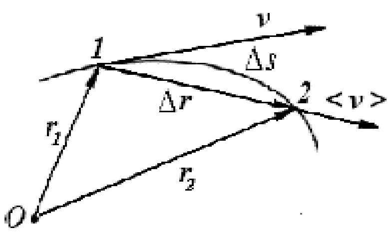


Рис.3.2.

З рисунка випливає, що за правилом трикутника додавання векторів $\boldsymbol{r}_1 + \Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2$ или $\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$.

Іншими словами, переміщення $\Delta\boldsymbol{r}$ дорівнює збільшенню (від кінцевого значення відняти початкове) радіус-вектора частинки за час Δt руху.

Від переміщення слід відрізняти пройдений частинкою шлях.

Шлях Δs – скалярна величина, що дорівнює довжині ділянки траєкторії, пройденого частинкою за проміжок часу Δt. Модуль вектора переміщення $|\Delta\boldsymbol{r}|$ між двома точками в загальному випадку не збігається зі шляхом. Наприклад, при русі частинки по колу за один оборот переміщення дорівнює нулю, а пройдений частинкою шлях - довжині кола. Тільки при нескінченно малому переміщенні, а також у разі прямолінійного руху з незмінною за напрямком швидкістю $|\Delta\boldsymbol{r}| = \Delta s$.

§ 4. Швидкість

Введемо поняття ***швидкості*** частинки. Нехай за проміжок часу Δt частинка перемістилася з точки *1* у точку *2* (рис. 3.2). Відношення вектора переміщення $\Delta\boldsymbol{r}$ до величини інтервалу часу Δt називають ***середньою швидкістю*** $<\boldsymbol{v}>$ руху точки за час Δt (середнє значення позначається за допомогою кутових дужок)

$$<\boldsymbol{v}>=\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t} \tag{4.1}$$

При поділі вектора $\Delta\boldsymbol{r}$ на скаляр Δt виходить вектор $<\boldsymbol{v}>$, напрямок якого збігається з напрямком переміщення $\Delta\boldsymbol{r}$.

Тому вектор середньої швидкості $<\boldsymbol{v}>$ напрямлений так само, як вектор переміщення $\Delta\boldsymbol{r}$, тобто уздовж хорди, що стягує дугу.

Якщо у виразі (4.1) перейти до границі при $\Delta t \to 0$, то отримаємо вираз для швидкості частинки в момент проходження її через точку *1* траєкторії (її називають також *миттєвою швидкістю або просто швидкістю в даний момент часу*):

$$\boldsymbol{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\dot{\boldsymbol{r}}\,. \tag{4.2}$$

(У фізиці похідні за часом позначають не штрихом, а точкою над буквою).

Швидкістю *називається векторна величина, що характеризує швидкість і напрямок руху і дорівнює похідній радіус-вектора за часом.*

У процесі зменшення проміжку часу Δt, точка *2* наближається до точки *1* (рис 3.2). При цьому довжина дуги Δs зближується з довжиною хорди, яка дорівнює $|\Delta\boldsymbol{r}|$. Граничним станом січної є дотична до траєкторії в точці *1*. Тому *вектор швидкості рухомої точки спрямований за дотичною до траєкторії в кожній точці траєкторії в бік руху.*

Числове значення швидкості можна визначити з рівняння(4.2)

$$v=|\boldsymbol{v}|=\frac{|d\boldsymbol{r}|}{dt}=\frac{ds}{dt}=\dot{s} \tag{4.3}$$

Іншими словами, модуль швидкості дорівнює похідній шляху за часом.

Часто користуються скалярною величиною $v_{ср}$, яка зветься середньою шляховою швидкістю нерівномірного руху на даній ділянці Δs траєкторії. Якщо шлях Δs пройдений за скінченний проміжок часу Δt , то *середньою шляховою швидкістю* називають відношення

$$v_{ср}=\frac{\Delta s}{\Delta t} \tag{4.4}$$

Оскільки $\Delta s = |\Delta\boldsymbol{r}|$ тільки у випадку прямолінійного руху з незмінною за напрямком швидкістю, то в загальному випадку середня шляхова швидкість не дорівнює модулю середньої швидкості:

$$v_{cp} \neq |<\boldsymbol{v}>| \qquad (4.5)$$

За правилом диференціювання векторів (враховуємо, що ***i, j, k*** - постійні):

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}} = \dot{x}\boldsymbol{i} + \dot{y}\boldsymbol{j} + \dot{z}\boldsymbol{k}\,. \qquad (4.6)$$

Вектор швидкості, як і всякий вектор, можна задавати трьома компонентами по осях координат

$$\boldsymbol{v} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} + v_z\boldsymbol{k}\,. \qquad (4.7)$$

Порівнюючи останні два вирази, отримаємо, що проекції вектора швидкості дорівнюють першим похідним за часом від відповідних координат матеріальної точки

$$v_x = \dot{x}, v_y = \dot{y}, v_z = \dot{z}. \qquad (4.8)$$

Модуль вектора швидкості за загальним правилом обчислення модуля вектора дорівнює

$$v = \sqrt{\left(\dot{x}\right)^2 + \left(\dot{y}\right)^2 + \left(\dot{z}\right)^2}\,. \qquad (4.9)$$

Покажемо тепер, як можна обчислити шлях, пройдений частинкою з незмінним за напрямком рухом від моменту часу t_1 до моменту часу t_2 . Розіб'ємо шлях *s*, пройдений частинкою, на нескінченно малі ділянки *ds*. З формули (4.3) випливає, що $ds = v\,dt$. Тут *v* - модуль швидкості на проміжку *dt* . Весь шлях *s* , пройдений частинкою, дорівнює сумі нескінченно малих шляхів *ds*, тобто дорівнює визначеному інтегралу від модуля швидкості за часом:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt\,. \qquad (4.10)$$

Оскільки модуль швидкості завжди є додатним $v \geq 0$, то шлях s з плином часу може тільки зростати або бути постійним, якщо частинка нерухома.

§ 5. Прискорення

Швидкість частинки може змінюватися як за величиною, так і за напрямком. Щоб охарактеризувати зміну швидкості з часом вводиться поняття прискорення.

Прискоренням *називається векторна величина* $\boldsymbol{a}$*, яка характеризує швидкість зміни швидкості рухомої точки і дорівнює першій похідній від швидкості за часом:*

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}. \tag{5.1}$$

Розглянемо частинку, що рухається за деякою криволінійною траєкторією. (рис.5.1).

Вектор швидкості в будь-якій точці траєкторії, в тому числі і в точках A і B, спрямований по дотичній до неї. Нехай частинка в положенні A в момент часу t має швидкість $\boldsymbol{v}$. За час Δt частинка перейде в положення B і набуває швидкість $\boldsymbol{v}_1$, яка відрізняється від $\boldsymbol{v}$ як за величиною, так і за напрямком (вектор швидкості повернувся і став довшим).

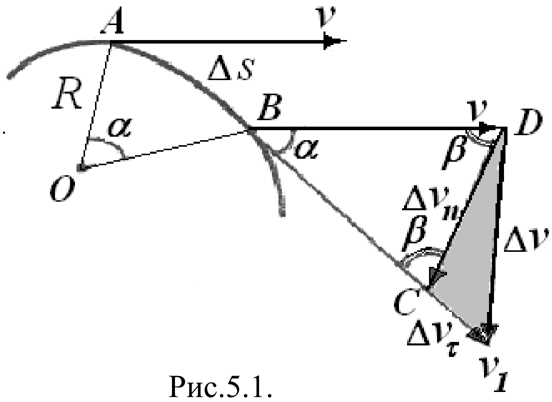


Рис.5.1.

Перенесемо вектор $\boldsymbol{v}$ паралельно самому собі в точку B, і побудуємо векторний трикутник, в якому $\Delta\boldsymbol{v}$ – приріст вектора швидкості:

$$\boldsymbol{v} + \Delta\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1. \tag{5.2}$$

Відношення приросту швидкості $\Delta\boldsymbol{v}$ до проміжку часу Δt, протягом якого відбулося це збільшення, виражає середнє прискорення:

$$<\boldsymbol{a}> = \frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}. \tag{5.3}$$

Вектор, середнього прискорення $<\boldsymbol{a}>$ співпадає за напрямком з вектором $\Delta\boldsymbol{v}$.

Миттєве прискорення в точці A отримаємо, обчислюючи границю середнього прискорення при прямуванні проміжку часу Δt до нуля:

$$\boldsymbol{a} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \dot{\boldsymbol{v}} = \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \ddot{\boldsymbol{r}}. \tag{5.4}$$

Як і швидкість зміни будь-якої фізичної величини, прискорення визначається першою похідною вектора $\boldsymbol{v}$ за часом t, а, отже, другою похідною радіус – вектора $\boldsymbol{r}$ за часом.

Розкладемо вектор $\Delta\boldsymbol{v}$ на дві складових $\Delta\boldsymbol{v_n}$ і $\Delta\boldsymbol{v_\tau}$ так, щоб $BC = BD = v$.

$$\Delta\boldsymbol{v} = \Delta\boldsymbol{v_n} + \Delta\boldsymbol{v_\tau}\,. \tag{5.5}$$

З рисунка видно, що складова $\Delta\boldsymbol{v_\tau}$ показує, наскільки довше став направлений відрізок, що зображає вектор швидкості в точці B. Іншими словами, ця частина приросту вектора швидкості визначає зміну швидкості тільки за модулем.

У разі рівномірного руху модуль швидкості не змінюється, $v_1 = v$ і $\Delta\boldsymbol{v_\tau} = 0$.

Інша складова $\Delta\boldsymbol{v_n}$ показує, наскільки повернувся вектор швидкості при незмінному модулі. Ця складова існує і при рівномірному русі частинки по колу. Очевидно, що $\Delta\boldsymbol{v_n} = 0$ тільки в тому випадку, коли рух частинки є прямолінійним.

При $\Delta t \to 0$ $\alpha \to 0$. Якщо кут α спрямувати до нуля, то в рівнобедреному трикутнику BCD кут $\beta \to \pi/2$, и вектор $\Delta\boldsymbol{v_n}$ стає перпендикулярним до вектора швидкості $\boldsymbol{v}$.

Таким чином, вектор прискорення можна представити у вигляді суми двох взаємно перпендикулярних векторів:

$$\boldsymbol{a} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{v}_\tau + \Delta\boldsymbol{v}_n}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{v}_\tau}{\Delta t} + \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{v}_n}{\Delta t} = \boldsymbol{a}_\tau + \boldsymbol{a}_n\,. \tag{5.6}$$

Вектор $\boldsymbol{a}_\tau$ називається ***тангенціальним прискоренням***. Воно характеризує швидкість зміни швидкості тільки за величиною і направлено по дотичній до траєкторії. Модуль вектора $\boldsymbol{a}_\tau$ дорівнює похідної модуля швидкості за часом:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}\,. \tag{5.7}$$

Друга складова - вектор $\boldsymbol{a}_n$ – називається ***нормальним прискоренням*** і характеризує швидкість зміни швидкості тільки за напрямком. Це прискорення завжди перпендикулярно до напрямку швидкості. Для обчислення модуля нормального прискорення припустимо, що точка B (рис. 5.1) досить близька до точки A , кут $\alpha \to 0$, тому Δs можна вважати дугою кола радіуса R. При цьому за величиною дуга мало відрізняється від хорди AB. Тоді з подібності трикутників OAB і BDC отримаемо:

$$\frac{\Delta v_n}{v} = \frac{AB}{R} \text{ і } \Delta v_n = \frac{v}{R}AB\,.$$

Таким чином,

$$a_n = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v_n}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{AB}{\Delta t}\frac{v}{R} = \frac{v^2}{R}\,. \tag{5.8}$$

Повне прискорення a матеріальної точки дорівнює векторній сумі її тангенціального і нормального прискорень (рис.5.2):

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_\tau + \boldsymbol{a}_n. \tag{5.9}$$

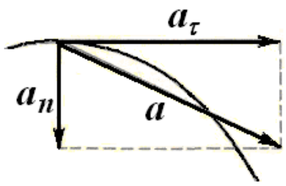


Рис.5.2.

Модуль повного прискорення обчислюється за теоремою Піфагора

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2} \tag{5.10}$$

У разі прямолінійного (наприклад, уздовж осі Ox) руху з постійним прискоренням (a_x = const) з (5.7) можна отримати

$$dv_x = a_x\, dt,$$

звідки інтегруванням отримуємо

$$v_x = \int dv_x = \int a_x\, dt + C_1,$$
$$v_x = a_x\, t + C_1.$$

Враховуючи, що $dx = v_x dt$, отримуємо координату матеріальної точки

$$x = \int v_x(t)dt = \int (a_x\, t + C_1)dt = \frac{a_x t^2}{2} + C_1 t + C_2.$$

Тут C_1 і C_2 – сталі інтегрування. Вони визначаються з початкових умов, а саме: при $t = 0$ початкова швидкість $v_x = v_{0x}$. Отже, $C_1 = v_{0x}$. Покладемо також, що при $t = 0$ $x = 0$, тобто в момент початку відліку часу частинка перебувала на початку відліку шляху. Тоді $C_2 = 0$.

Якщо індекс, що позначає проекції векторів на вісь, опустити, можна отримати практично важливі вирази для швидкості і шляху (вважаємо, що напрямок руху не змінюється) *рівнозмінного прямолінійного руху:*

$$\begin{aligned} v &= v_0 + at, \\ s &= v_0 t + \frac{at^2}{2}, \\ v^2 - v_0^2 &= 2as. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Приклад. Невелике тіло кинуто з початковою швидкістю v_0 = 30 м/с под кутом α = 60 º до горизонту. Нехтуючи опором повітря, визначити швидкість, нормальне і тангенціальне прискорення, а також радіус кривизни траєкторії через t_1 = 2 с після початку польоту.

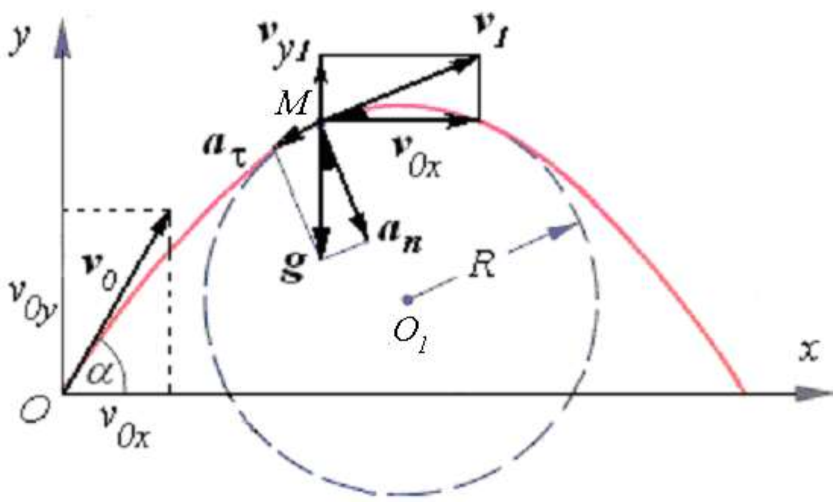


Рис. 5.3.

Виберемо систему координат таким чином, щоб вісь *Ox* була горизонтальною, вісь *Oy* - вертикальною (рис. 5.3).

Якщо знехтувати опором повітря, то прискорення тіла, що рухається в однорідному полі тяжіння поблизу поверхні Землі, є постійним, дорівнює g = 9,81 м/с^2, є повним прискоренням і направлено за вертикаллю вниз.

Відповідно до принципу незалежності рухів складний криволінійний рух можна розглядати як сукупність двох прямолінійних рухів: уздовж осі *Ox* - рівномірний, уздовж осі *Oy* – рівнозмінний (рівносповільнений на ділянці підйому і рівноприскорений на ділянці спуску).

У вибраній системі координат проекції прискорення, швидкості і координат тіла як функції часу мають вигляд:

$$a_x = 0, \quad v_x = v_0 \cos\alpha = \text{const}, \quad x = (v_0 \cos\alpha)\cdot t;$$
$$a_y = -g, \quad v_y = v_0 \sin\alpha - gt, \quad y = (v_0 \sin\alpha)\cdot t - gt^2/2.$$

Нормальна і тангенціальна компоненти прискорення в точці *M* можуть бути визначені з рисунка:

$$a_n = g\cos\alpha_1, \quad a_\tau = g\sin\alpha_1.$$

Кут α_1, який утворює в момент часу t_1 вектор швидкості $\boldsymbol{v}_1$ з горизонтом, можна визначити з трикутника швидкостей (рис. 5.3):

$$tg\alpha_1 = \frac{v_{y1}}{v_{0x}} = \frac{v_0 \sin\alpha - gt_1}{v_0 \cos\alpha} = 0{,}424, \qquad \alpha_1 = 23\ ^\circ.$$

Підставивши числові значення, отримаємо

$$a_\text{n} = 9{,}03 \text{ м/с}^2, \ a_\tau = 3{,}83 \text{ м/с}^2.$$

Відповідно компоненти і модуль швидкості в цей момент часу дорівнюють

$$v_{0x} = 15 \text{ м/с}, \ v_{y1} = 6{,}36 \text{ м/с}, \ v = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{y1}^2} = 16.29 \text{ м/с}.$$

Використовуючи зв'язок (5.8) нормального прискорення з радіусом кривизни, знаходимо

$$R = v^2/a_n = 29{,}4 \text{ м}.$$

§ 6. Кінематика обертального руху

Переходячи від механіки матеріальної точки до механіки твердого тіла , не можна не враховувати розмірів і форми тіла. Для спрощення завдання розглядають *модель абсолютно твердого тіла*. У цій моделі відстань між будь-якими двома точками не змінюється в процесі руху , тобто деформаціями тіла нехтують.

Основними видами руху твердого тіла є *поступальний і обертальний* рух . Довільний рух твердого тіла можна представити у вигляді сукупності поступального руху всього тіла і обертання його навколо осі, що проходить через центр мас. Рух , при якому будь-яка пряма , пов'язана з рухомим тілом , залишається паралельною самій собі (рис 6.1) , називається ***поступальним.*** Прикладами поступального руху є рух кабіни ліфта , кузова автомобіля на прямолінійній горизонтальній ділянці дороги і т.п.

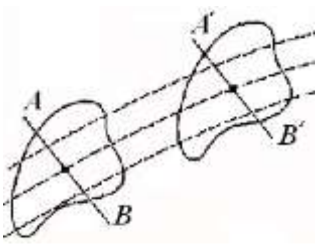


Рис. 6.1.

При поступальному русі всі точки твердого тіла мають в будь-який момент часу однакові швидкості і прискорення і описують траєкторії однакової форми , тільки зміщені по відношенню один до одного. Визначивши рух будь-якої з точок твердого тіла , можна визначити рух всіх інших його точок .

Інший вид руху твердого тіла - ***обертання навколо нерухомої осі***. При такому русі всі точки тіла рухаються по колах , розміщеним в площинах , перпендикулярних до осі обертання. Центри кіл лежать на осі обертання (рис. 6.2) .

Прикладами обертання навколо нерухомої осі є обертання маховиків, коліс, валів і т.п.

Кола, які описують точки, мають різний радіус і, отже, точки тіла мають різні переміщення, швидкості і прискорення. Тим не менш, можна описати обертальний рух усіх точок тіла однаковим чином.

Для цього використовують кут повороту $\Delta\varphi$ навколо осі, який для всіх точок твердого тіла однаковий (рис. 6.2).

Якщо тіло обертається **рівномірно**, тобто за рівні проміжки часу Δt тіло повертається на рівні кути $\Delta\varphi$, тоді величина

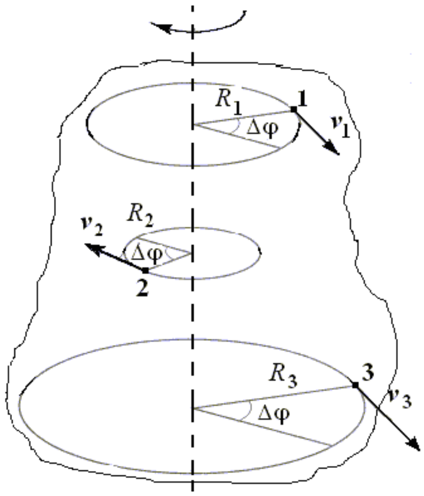


Рис. 6.2.

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \qquad (6.1)$$

визначить кут повороту в одиницю часу. Цю величину, що характеризує швидкість обертання твердого тіла навколо осі, називають ***кутовою швидкістю обертання ω тіла.***

При рівномірному обертанні залишається постійною її величина.

Позначимо час, за який тіло здійснює один оберт (поворот на кут 2π), через T. Його називають періодом обертання.

Отже, кутова швидкість рівномірного обертання

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \qquad (6.2)$$

Використовується також кількість обертів тіла за одну секунду (частота обертання) $n = \frac{1}{T}$, тоді $\omega = 2\pi\, n$.

При нерівномірному обертанні миттєве значення кутової швидкості визначається за загальним правилом: швидкість зміни кута повороту є похідною за часом від кута повороту:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}. \qquad (6.3)$$

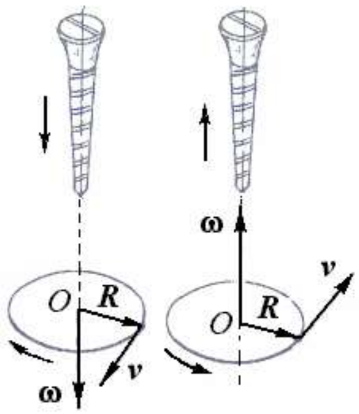


Рис. 6.3.

Щоб охарактеризувати не тільки швидкість, а й напрям обертання, домовилися *вважати кутову швидкість вектором* **ω** і направляти його вздовж осі обертання за *правилом правого гвинта*.

Кутовій швидкості приписується той напрям (на рисунку вгору або вниз), в якому буде рухатися (угвинчуватися або вигвинчуватися) гвинт або шуруп, якщо його головку обертати в напрямі обертання (рис.6.3).

Оскільки напрям кутової швидкості **ω** за домовленістю зв'язується з напрямом обертання, вектор **ω** називають **псевдовектором** або аксіальним вектором (від англ. axis – вісь).

Одиницею кутової швидкості служить радіан за секунду (рад/с або просто1/с = c^{-1})

Приклади. 1. Земля обертається навколо своєї осі з заходу на схід, вектор ω має напрям від південного полюса до північного. Величина кутової швидкості

$$\omega_{\text{Землі}} = \frac{2\pi}{24 \cdot 3600c} = 7{,}3 \cdot 10^{-5} c^{-1}.$$

2. Ротор гіроскопа обертається, роблячи n = 5 000 об/мин. кутова швидкість обертання становить $\omega = 2\pi n \approx 523$ *рад/с* = 523 c^{-1}.

Кутова швидкість при русі тіла навколо нерухомої осі може змінюватися. Зміна кутової швидкості з часом характеризується ***кутовим прискоренням***, також аксіальним вектором, визначеним як похідна за часом від кутової швидкості:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \dot{\boldsymbol{\omega}}. \qquad (6.4)$$

Кутове прискорення вимірюється в радіанах в секунду за секунду (рад/с^2 або с$^{-2}$). Як і кутова швидкість, кутове прискорення також направлено вздовж осі обертання.

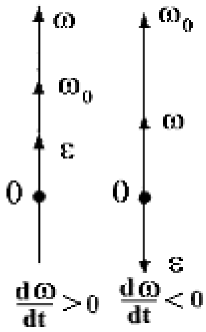


Рис .6.4.

У разі обертання тіла навколо нерухомої осі вектор **ω** може змінюватися тільки за модулем. При прискореному обертанні в цьому випадку вектор **ε** спрямований вздовж осі в той самий бік, що і **ω**, при уповільненому - в протилежний бік (рис. 6.4).

Можна помітити, що всі рівняння обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі аналогічні за формою рівнянням поступального руху. Досить замінити лінійні величини *s*,*v* і *a* на відповідні кутові φ, ω і ε, як виходять співвідношення для тіла, що обертається.

При обертанні з постійним кутовим прискоренням:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t,$$
$$\varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}, \qquad (6.5)$$
$$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\varepsilon\varphi.$$

§ 7. Зв'язок кутових і лінійних швидкостей і прискорень

Кожна з точок тіла, яке обертається, рухається з певною лінійною швидкістю ***v***, спрямованій по дотичній до відповідного кола. Але ця ж точка, беручи участь в обертанні тіла, має і кутову швидкість **ω** (рис.7.1).

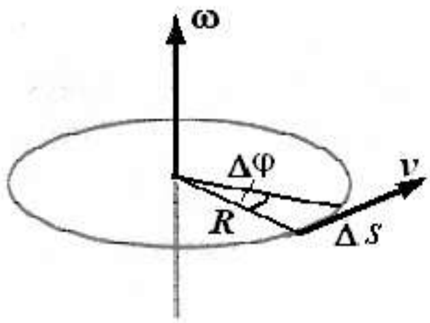


Рис. 7.1.

Встановимо зв'язок лінійних величин (***v*** та ***a***) з кутовими (**ω** та **ε**).

Відомо, що кути можна вимірювати як в градусах, так і в радіанах (у системі СІ).

Один радіан (рад) дорівнює куту між двома радіусами кола, довжина дуги між якими дорівнює радіусу (рис. 7.2).

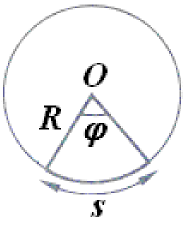


Рис. 7.2.

Тоді довільний кут φ в радіанах виразиться співвідношенням.

$$\varphi = \frac{s}{R}. \qquad (7.1)$$

Якщо *s* = 2π*R* – довжина кола радіуса *R*, то φ = 2π рад = 360°. Звідси випливає, що 1 рад ≈ 57,3° .

З визначення радіана випливає, що довжина дуги Δ*s*, якій відповідає центральний кут Δφ, дорівнює Δs = *R* Δφ . Підставимо це співвідношення у вираз для модуля лінійної швидкості

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{R\Delta\varphi}{\Delta t}=R\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}=R\omega\,. \qquad (7.2)$$

Таким чином, зв'язок між модулями лінійної та кутової швидкостей:

$$v = \omega R\,. \qquad (7.3)$$

Відповідно, модулі тангенціального і нормального прискорень виражаються через кутові величини:

$$a_\tau=\frac{dv}{dt}=\frac{d(\omega R)}{dt}=R\frac{d\omega}{dt}=R\varepsilon\,. \qquad (7.4)$$

$$a_n=\frac{v^2}{R}=\omega^2 R\,. \qquad (7.5)$$

Нормальне прискорення точок твердого тіла, що обертається, часто називають *доцентровим прискоренням*.

Повне прискорення a також лінійно залежить від R:

$$a=\sqrt{a_n^2+a_\tau^2}=R\sqrt{\varepsilon^2+\omega^4}\,. \qquad (7.6)$$

Приклад. Компакт-диск в комп'ютері рівномірно обертається, здійснюючи n = 3000 об/хв, Радіус диска R ~ 6 см.

Тоді його кутова швидкість $\omega = 2\pi\, n$ = 314 с$^{-1}$, лінійна швидкість точок на краю диска $v = \omega R$ = 314·0,06 = 18,84 м/с, прискорення цих точок

$$a = \omega^2 R = (314)^2\cdot 0{,}06 \approx 5{,}9\cdot 10^3 \text{ м/с}^2.$$

Встановимо тепер зв'язок між векторами $\boldsymbol{v}$ і $\boldsymbol{\omega}$.

Точка A обертається по колу радіуса R. Положення точки A визначається за допомогою радіус – вектора $\boldsymbol{r}$, проведеного з початку координат точки O, що лежить на осі обертання Oz (рис. 7.3).

З рисунка видно, що $R = r \sin\alpha$.

Підставивши це значення в (7.3), отримаємо

$$v = \omega\, r \sin\alpha.$$

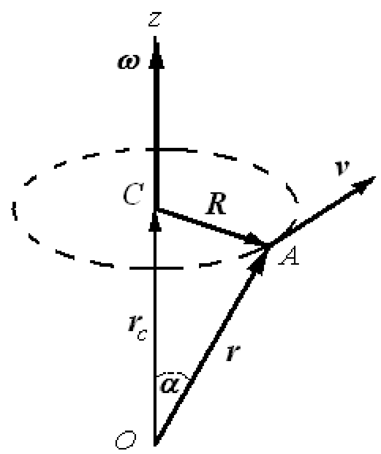


Рис. 7.3

Оскільки $\boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{\omega}$ і $\boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{r}$, це дає підставу представити лінійну швидкість $\boldsymbol{v}$ будь-якої частинки A твердого тіла у вигляді векторного добутку $\boldsymbol{\omega}$ на $\boldsymbol{r}$:

$$\boldsymbol{v} = [\boldsymbol{\omega}\, \boldsymbol{r}]. \qquad (7.7)$$

З рисунка також випливає, що $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_c + \boldsymbol{R}$. Тоді

$$\boldsymbol{v} = [\boldsymbol{\omega}\, (\boldsymbol{r}_c + \boldsymbol{R})] = [\boldsymbol{\omega}\, \boldsymbol{r}_c] + [\boldsymbol{\omega}\, \boldsymbol{R}].$$

Перший доданок дорівнює нулю, оскільки векторний добуток колінеарних векторів дорівнює нулю. Отже,

$$\boldsymbol{v} = [\boldsymbol{\omega}\, \boldsymbol{R}]. \qquad (7.8)$$

Вектор $\boldsymbol{R}$ - радіус-вектор частинки A відносно точки C осі обертання - перпендикулярний до осі обертання і направлений від неї, а його модуль дорівнює радіусу кола, вздовж якого рухається матеріальна точка.

Кут між векторами-співмножники дорівнює π/2, тому модуль векторного добутку $v = \omega R \sin(\pi/2) = \omega R$.

Обертаючи головку гвинта від першого співмножника векторного добутку **ω** до другого співмножника $\boldsymbol{R}$ за годинниковою стрілкою, отримаємо напрям вектора $\boldsymbol{v}$ – на рис.7.4 по дотичній від нас.

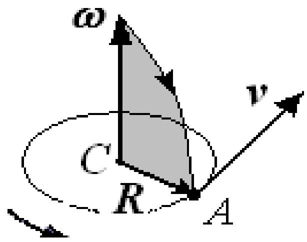


Рис. 7.4.

Приклад. Колесо радіусом R = 0,1 м обертається так, що залежність кута повороту радіуса колеса від часу описується рівнянням

$$\varphi(t) = A \sin(Bt) + Ct^2, \text{ где } A = 1 \text{ рад}, B = 3 \text{ с}^{-1}, C = 2 \text{ рад/с}^2.$$

Визначити через час $t_1 = 2\pi/3$ с після початку руху: кутову ω і лінійну v швидкості, кутове ε, тангенціальне a_τ, нормальне a_n і повне прискорення a цих точок; кут β між векторами тангенціального $\boldsymbol{a}_\tau$ та повного $\boldsymbol{a}$ прискорення.

Миттєва кутова швидкість дорівнює за модулем першій похідній від кута повороту за часом:

$$\omega(t) = \frac{d\varphi}{dt} = AB\cos(Bt) + 2Ct$$

Миттєва лінійна швидкість точок на ободі колеса

$$v(t) = \omega(t)R = (AB\cos(Bt) + 2Ct)R.$$

Модулі прискорень: кутового

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = -AB^2\sin(Bt) + 2C,$$

тангенціального

$$a_\tau = (-AB^2\sin(Bt) + 2C)R,$$

нормального

$$a_n = \omega^2 R = (AB\cos(Bt) + 2Ct)^2 R,$$

повного

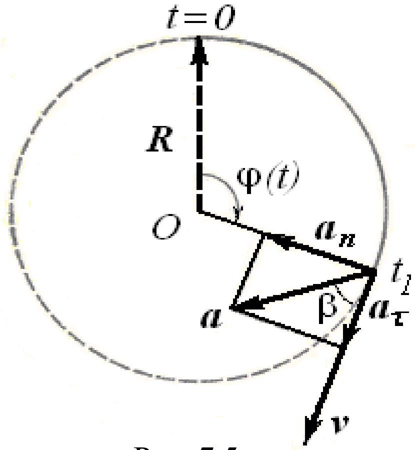


Рис. 7.5.

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}\ .$$

Кут β між векторами $\boldsymbol{a}_\tau$ та $\boldsymbol{a}$ можна визначити з співвідношення (рис. 7.5)

$$tg\beta = \frac{a_n}{a_\tau}.$$

Підставивши числа, визначимо для моменту часу час $t_1 = 2\pi/3$ с:

$\omega(t_1) = 11{,}38$ рад/с, $v(t_1) = 1{,}14$ м/с, $\varepsilon\,(t_1) = 4$ рад/с^2, $a_\tau = 0{,}4$ м/с^2,

$a_n = 12{,}94$ м/с^2, $a = 12{,}95$ м/с^2, $\beta = arctg\dfrac{12{,}94}{0{,}4} = 88{,}23^\circ$

Контрольні питання

1. У якому випадку тіло можна вважати матеріальною точкою?
2. У якому випадку модуль переміщення дорівнює шляху матеріальної точки?
3. Рухаючись по колу, точка описала півколо. Чи збігаються середня шляхова швидкість і модуль середньої швидкості?
4. Чи можливий випадок, коли середня швидкість $<v>$ за деякий проміжок часу дорівнює нулю, а середня шляхова швидкість $v_{ср}$ відмінна від нуля? навпаки, $v_{ср} = 0$, при цьому $<\boldsymbol{v}> \neq 0$?
5. Чи може повне прискорення при криволінійному русі бути спрямоване по дотичній? По нормалі?
6. Як орієнтоване повне прискорення матеріальної точки при криволінійному русі?
7. Який фізичний зміст має розкладання вектора прискорення матеріальної точки на тангенціальну і нормальну складові?
8. Тіло кинуто під кутом до горизонту. Опором повітря нехтують. Як змінюється повне прискорення тіла?
9 Точка рухається на площині по криволінійній траєкторії. Відомі компоненти швидкості як функції часу: $v_x(t)$, $v_y(t)$. Як визначити шлях, пройдений точкою за деякий час t_1?
10. Тіло кинуто під кутом α до горизонту з початковою швидкістю v_0. Опором повітря нехтують. Як визначити шлях s, пройдений тілом за час t?
11. У якому випадку можна користуватися формулою шляху для рівнозмінного руху $s = v_{0x}t + a_xt^2/2$?
12. Який рух - поступальний або обертальний - здійснює кабіна атракціону «колесо огляду»?
13. У якому випадку можна користуватися формулою кута повороту для рівнозмінного обертання $\varphi = \omega_0 t + \varepsilon t^2/2$?
14. Як направлені кутова швидкість і кутове прискорення коліс автомобіля - вправо або вліво по відношенню до напрямку руху?
15. Який зв'язок між лінійними і кутовими величинами?

Розділ 2. ДИНАМІКА МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

Закони динаміки описують рух тіл під дією прикладених до них сил. Під тілом будемо , як і раніше , розуміти матеріальну точку .

Основні положення динаміки матеріальної точки були сформульовані видатним англійським ученим , засновником класичної фізики І. Ньютоном в 1687 р. у вигляді трьох законів руху. Ці закони виникли в результаті узагальнення даних великого числа дослідів і є , отже , експериментальними .

§8 . Перший закон Ньютона (закон інерції)

Перший закон Ньютона говорить :

- ***всяке тіло зберігає стан спокою або рівномірного прямолінійного руху, поки вплив з боку інших тіл не змусить його змінити цей стан.***

Як випливає з цього закону , тіло , на яке не діють сили , зберігає постійну швидкість. Для того , щоб тіло рухалося , двигун не потрібен. Рівномірний і прямолінійний рух - це природний стан всякого тіла , звільненого від зовнішніх впливів.

Властивість тіла зберігати стан спокою або рівномірного і прямолінійного руху називається ***інерцією .***

Принцип інерції далеко не очевидний. Наприклад , з повсякденного життя відомо , що для руху автомобіля з постійною швидкістю повинен безперервно працювати його мотор. Однак тут вплив двигуна необхідний не для підтримки руху , а для врівноваження сили тертя.

Поставити прямі досліди , які б підтверджували перший закон , не можна. Не можна поставити тіло в такі умови , щоб на нього не діяли ніякі інші тіла , хоча б тому , що на всі тіла на Землі діє сила тяжіння до Землі . Однак , можна поставити тіло в такі умови , щоб дії інших тіл на дане врівноважували б одна одну . Можна також послабити деякі дії .

Приклади.

1. Куля на столі нерухома. На кулю діють Земля і стіл. Їхні дії врівноважені , і куля зберігає стан спокою.

2. Залізна куля на столі рухається рівномірно і прямолінійно. Якщо кулю штовхнути збоку або піднести до неї магніт , куля завертає . Дія з боку рук і магніту змінює стан рівномірного і прямолінійного руху.

3 . Якщо кулю на склі штовхнути , то через деякий час вона зупиняється. Дія з боку скла на кулю (сила тертя) змінює стан рівномірного і прямолінійного руху кулі. Якби з боку підставки на кулю не діяла би сила тертя , то вона рухалася б після поштовху рівномірно і прямолінійно.

4. Космічний корабель розганяють у напрямі планети Марс і вимикають двигуни. Корабель рухається практично у вакуумі вздовж прямої за інерцією протягом 7-8 місяців. Він пролітає сотні мільйонів км, доки не попадає у сферу притягання Марса.

Таким чином , рушійна сила потрібна не для руху , а для *зміни* стану руху тіла.

Виникає питання , відносно якої системи відліку справедливий перший закон Ньютона ?

Проробимо дослід зі склом і кулею у вагоні. Якщо вагон буде завертати, прискорювати або сповільнювати хід, тобто , якщо з'явиться прискорення , то куля, що покоїлася, почне рухатися , хоча ніяких інших тіл , які могли б змінити стан спокою , не з'явилося. Отже , в системі координат , пов'язаній з вагоном , що прискорено рухається , перший закон Ньютона не справедливий.

Система відліку , в якій виконується перший закон Ньютона , називається ***інерціальною системою*** . Перший закон Ньютона є узагальненням дослідних фактів і стверджує, що ***інерціальні системи існують***.

З великим ступенем точності інерціальною системою є геліоцентрична система. Початок координат її знаходиться в майже центрі Сонця, а осі координат направлені на три нерухомі зірки на небосхилі.

Будь-яка інша система відліку , що рухається рівномірно і прямолінійно відносно геліоцентричної системи , також є інерціальною , тобто їх існує безліч.

Система відліку , пов'язана з Землею , не є інерціальною , тому що Земля обертається навколо своєї осі і обертається навколо Сонця . Але при вирішенні більшості інженерних завдань цю систему відліку можна вважати інерціальною .

§ 9 . Сила і маса . Другий закон Ньютона

На досліді виявляється , що в інерціальних системах відліку всяке прискорення тіла викликається дією на нього будь-яких інших тіл . Для опису впливу вводять поняття сили .

Сила - це векторна величина , що є мірою механічної дії на тіло з боку інших тіл або полів , в результаті якої тіло набуває прискорення або деформується.

Сила визначена , якщо задано її числове значення , напрям в просторі і точка докладання .

Пряму , проведену через точку прикладання сили в напрямку дії сили , називають лінією дії сили . Дві сили називаються чисельно рівними і протилежними за напрямком, якщо одночасне прикладання цих сил в одній і тій же точці тіла не викликає зміни його механічного руху. Зокрема , якщо до прикладання таких двох сил тіло покоїлося , то воно продовжує залишатися в спокої і після їх прикладання. Тому говорять , що дві чисельно рівні і протилежно направлені сили, прикладені в одній і тій же точці тіла , взаємно врівноважуються .

Якщо на тіло одночасно діє кілька сил , прикладених в одній точці тіла , то їх можна замінити однією еквівалентної силою , що дорівнює їх геометричній сумі і прикладеною в тій же точці . Ця сила називається результуючою або рівнодіючою силою.

Вимірювання сил засноване на їх властивості викликати деформацію пружних тіл і здійснюється за допомогою динамометрів .

Дослід показує , що всяке тіло «чинить опір » при будь-яких спробах змінити його швидкість, як за величиною , так і за напрямком. Цю властивість , що виражає ступінь опору тіла до зміни його швидкості , називають *інертністю* . У різних тіл воно проявляється в різному ступені. *Міра інертності тіла називається* ***масою***. Тіло з більшою масою є більш інертним , і навпаки.

З іншого боку , в законі всесвітнього тяжіння встановлюється , що сили тяжіння пропорційні масам тел.

Таким чином , маса тіла характеризує також гравітаційні властивості речовини. ***Маса*** - фізична величина, що визначає *інертні* (інертна маса) і *гравітаційні* (гравітаційна маса) властивості тіла . У сучасній фізиці з великим ступенем точності встановлено рівність цих мас, тому їх не розрізняють .

Векторна величина , що дорівнює добутку маси матеріальної точки на її швидкість , називається імпульсом тіла :

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}. \qquad (9.1)$$

При вільному русі тіла в інерціальній системі відліку його імпульс залишається постійним. Якщо ж тіло взаємодіє з оточуючими тілами, то його імпульс змінюється з часом. Узагальнення дослідних даних показує, що зміна імпульсу тіла тим більше, чим інтенсивніше його взаємодія з оточуючими тілами.

Другий закон Ньютона (основний закон динаміки поступального руху) стверджує, що:

- ***швидкість зміни імпульсу тіла дорівнює силі, що діє на тіло***

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{F} \qquad (9.2)$$

Під швидкістю зміни імпульсу розуміють похідну від імпульсу за часом . Рівняння (9.2), що виражає другий закон Ньютона , називається *рівнянням руху тіла*.

У такій самій загальній формі другий закон Ньютона справедливий і при русі тіл зі змінною масою. Маса може не залишатися постійною , наприклад , у літака , з двигунів якого викидаються продукти горіння , у поливальної машини і т.п. А при русі елементарних частинок зі швидкостями , близькими до швидкості світла , маса частинок зростає залежно від швидкості руху.

У випадку , коли маса m тіла передбачається постійною, математичний вираз другого закону Ньютона можна представити у формі

$$\boldsymbol{F} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(m\boldsymbol{v}\right) = m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = m\boldsymbol{a}\,. \qquad (9.3)$$

Тут враховано, що прискорення дорівнює похідній від швидкості за часом

$$\boldsymbol{a} = d\boldsymbol{v}/dt.$$

Звідси випливає інше формулювання другого закону Ньютона:

- ***прискорення, яке набувається тілом, збігається за напрямом з діючою на нього силою і дорівнює відношенню цієї сили до маси тіла***

$$\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{F}}{m}, \qquad (9.4)$$

або інакше:

- ***добуток маси тіла на його прискорення дорівнює діючій на тіло силі:***

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}. \qquad (9.5)$$

Маса в СІ вимірюється в кілограмах, одиниця сили - ньютон. 1 Н - це сила, яка масі в 1 кг надає прискорення 1 м/с^2 в напрямку дії сили: 1 Н = 1 кг·м/с^2.

Якщо на тіло діють декілька сил, то прискорення тіла пропорційно векторній сумі діючих на нього сил (рівнодіючій силі):

$$\boldsymbol{a} = \frac{\sum_i \boldsymbol{F}_i}{m}. \qquad (9.6)$$

Другий закон Ньютона , як і всі інші , справедливий тільки в інерціальній системі відліку , тобто в такій системі відліку , яка сама не має прискорення. Земля є хорошим наближенням до інерціальної системи відліку для більшості практичних завдань.

Для розуміння другого закону Ньютона слід пам'ятати , що всі сили спричиняються тілами , діючими на дане. Якщо немає тіла , що викликає силу , то немає і сили , а якщо сила позначена , то обов'язково має бути тіло , яке її спричиняє. Наприклад , трамвай повертає за рахунок сили тиску з боку рейки на колесо трамвая. Ця сила надає трамваю нормального (або доцентрового) прискорення .

§ 10 . Третій закон Ньютона

Третій закон Ньютона відображає той факт , що сила є результатом взаємодії двох різних тіл . Якщо тіло *А* надає прискорення тілу *В*, то виявляється , що і тіло *В* надає прискорення тілу *А*.

- ***Сили , з якими взаємодіють дві матеріальні точки , рівні за модулем і спрямовані в протилежні сторони вздовж прямої , що з'єднує ці точки .***

Якщо $\boldsymbol{F}_{12}$ – сила, що діє на першу точку з боку другої, а $\boldsymbol{F}_{21}$ – сила, що діє на другу точку з боку першої, то відповідно до третього закону Ньютона

$$\boldsymbol{F}_{12} = -\boldsymbol{F}_{21}. \qquad (10.1)$$

У формулюванні самого Ньютона цей закон звучить коротко: *дії є рівна і протилежна протидія.* Таким чином, сили завжди виникають попарно як результат взаємодії між двома тілами. Важливо підкреслити, що ці сили прикладені до різних тіл, тому їх не можна складати, вони не можуть урівноважити одна одну.

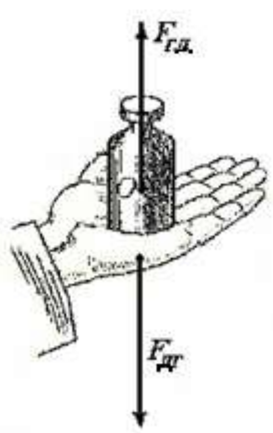


Рис. 10.1

Приклади. 1. На долоні лежить гиря (рис. 10.1). Долоня діє на гирю з силою $\boldsymbol{F}_{ГД}$, спрямованою вгору і прикладеною *до гирі*, а гиря, в свою чергу, діє на долоню з такою ж за величиною силою $\boldsymbol{F}_{ДГ}$, але спрямованою вниз і прикладеною *до долоні*

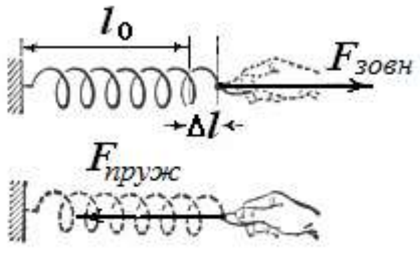


Рис. 10.2

2. Рука розтягує пружину. (рис.10.2). Сила, з якою рука діє *на пружину* - зовнішня сила. Деформована пружина *діє на руку* з силою, рівною зовнішній силі за величиною, але протилежною за напрямком. Ця сила називається силою пружності.

$$\boldsymbol{F}_{внеш} = -\boldsymbol{F}_{упр}$$

3. Під час ходьби ми відштовхуємо назад Землю з деякою силою, Земля з рівною і протилежною силою діє на нас.

У третьому законі Ньютона передбачається, що обидві сили рівні за модулем у будь-який момент часу *незалежно від руху* точок.

Згідно з уявленнями Ньютона взаємодія між тілами поширюється миттєво. Інакше кажучи, якщо змінити положення одного тіла, то відразу ж відбуваються зміни у взаємодіючих з ним тілах, як би далеко вони не знаходилися.

Насправді взаємодії поширюються з кінцевою швидкістю. Максимальна швидкість поширення взаємодій дорівнює швидкості світла у вакуумі. При контакті тіл взаємодія поширюється зі швидкістю пружних хвиль в тілах і закони Ньютона справедливі лише тоді, коли час протікання процесу значно більше часу встановлення напруженого стану в тілах.

Тому третій закон Ньютона має певні межі застосування. Однак при швидкостях тіл, значно менших швидкості світла, з якими має справу класична механіка, закон виконується з дуже великою точністю. Про це свідчать, наприклад, розрахунки траєкторій планет і штучних супутників, які проводяться за допомогою законів Ньютона

§ 11. Природа механічних сил. Сила тяжіння і вага

Сучасній фізиці відомі чотири типи фундаментальних взаємодій: гравітаційна, що виникає між усіма тілами, електромагнітна, - між тілами або частинками, що мають електричні заряди, сильна - між ядерними частинками і слабка, що діє в процесах перетворення деяких елементарних частинок.

В основі всіх механічних явищ лежать сили гравітаційні (сила тяжіння і вага тіла) і електромагнітні (сили пружності і сили тертя).

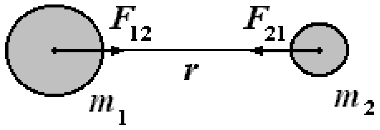


Рис.11.1.

Два інших фундаментальних види взаємодії - слабка і сильна - діють на таких малих відстанях (слабка - порядку 10^{-18} м, сильна – 10^{-15}м), що в класичній механіці ролі не грають.

Походження **сили тяжіння** пов’язано з *гравітаційним притяганням.* Згідно з ***законом всесвітнього тяжіння*** (І. Ньютон, 1687 г) ***будь-які дві матеріальні точки притягуються одна до одної з силами, пропорційними добутку їх мас, обернено пропорційними квадрату відстані між ними і спрямованими вздовж прямої, що з'єднує ці точки.***

$$F_{12} = F_{21} = G\frac{m_1 m_2}{r^2}. \quad (11.1)$$

Тут G – *гравітаційна стала*, $G \approx 6{,}67\cdot10^{-11}$ м³/(кг·с²). У такій формі закон тяжіння Ньютона справедливий для матеріальних точок і для куль (рис.11.1) з сферично симетричним розподілом речовини. Маси, що фігурують у цьому законі, називають *гравітаційними* на відміну від *інертної* маси, що входить в другій закон Ньютона.

За допомогою сучасних експериментів встановлено, що гравітаційна і інертна маси будь-якого тіла пропорційні одна одній з дуже високою точністю (відносна точність до 10^{-12}). Тому їх можна вважати рівними.

Дослідним шляхом встановлено, що внаслідок тяжіння всі тіла поблизу поверхні Землі падають з однаковим прискоренням, тобто прискорення вільного падіння не залежить від маси падаючого тіла.

Прискорення, що надано тілу силою тяжіння Землі - *прискорення вільного падіння* - на рівні моря на середній географічній широті становить $g \approx 9{,}81$ м/с².

Тоді з другого закону Ньютона випливає, що на будь-яке тіло (матеріальну точку), що знаходиться поблизу поверхні Землі, діє сила тяжіння

$$\boldsymbol{F}_{\text{тяж}} = m\boldsymbol{g}. \quad (11.2)$$

Якщо знехтувати неінерціальністю системи відліку, пов'язаній з Землею, і обумовленій її обертанням, то силу тяжіння можна вважати рівною силі, з якою тіло притягається до Землі.

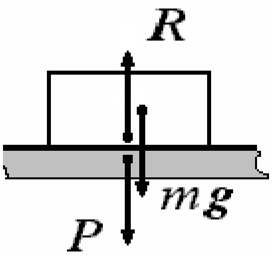


Рис. 11.2.

Розглянемо сили, що діють на лежаче на столі тіло (рис. 11.2) . Нагадаємо , що всі сили виникають попарно , тобто всякій силі , прикладеній до тіла , можна знайти рівну їй за модулем і протилежну по напрямку силу , яка прикладена до іншого тіла , що взаємодіє з даними . Дія з боку Землі характеризується силою тяжіння $m\boldsymbol{g}$. Вона прикладена в центрі мас тіла. Рівна їй за модулем і протилежна сила прикладена до центра Землі , її, природно , можна не враховувати внаслідок малості .

Інша пара взаємодіючих тіл - тіло і опора (стіл). Тіло тисне на опору , ця сила $\boldsymbol{P}$ прикладена до опори.

***Вагою** тіла називається сила , з якою воно діє опору (або підвіс) внаслідок притягання до Землі* . При цьому передбачається , що тіло і опора (або підвіс) нерухомі відносно системи відліку , в якій визначається вага тіла.

Підкреслимо , що вага $\boldsymbol{P}$ прикладена не до самого розглянутого тіла , а до опори або підвісу , які утримують його від вільного падіння.

Опора , в свою чергу , діє на тіло. Ця сила називається ***реакцією опори R*** , і вона прикладена до тіла. За третім законом Ньютона

$$\boldsymbol{P} = -\boldsymbol{R}.$$

Тіло перебуває в спокої відносно Землі, отже, прикладені до нього сили тяжіння $m\boldsymbol{g}$ і реакція опори $\boldsymbol{R}$ врівноважують одна одну:

$$m\boldsymbol{g} = -\boldsymbol{R}.$$

Порівнюючи обидва співвідношення, отримуємо

$$\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{g}, \qquad (11.3)$$

тобто вага ***P*** дорівнює силі тяжіння *m**g*** (для тіла, яке покоїться). Важливо відзначити , що ці сили прикладені до різних тіл - вага до опори , сила тяжіння - до самого тіла .

Діючі на тіло сила тяжіння *m**g*** і реакція опори ***R*** створюють тиск частинок тіла одна на одну. Людський організм відчуває цей тиск як « вагомість ».

Розглянемо тепер тіло, що лежить на підлозі ліфта (рис. 11.3) , який рухається з прискоренням вгору або вниз. З таким же прискоренням рухається і тіло. Отже , тепер сили тяжіння *m**g*** і реакції опори ***R*** , прикладені до тіла, не врівноважуються, а сума цих сил надає тілу необхідне прискорення

$$m\boldsymbol{a} = m\boldsymbol{g} + \boldsymbol{R}.$$

Враховуючи, що ***R = - P***, отримаємо

$$m\boldsymbol{a} = m\boldsymbol{g} - \boldsymbol{P},$$

звідки вага тіла ***P*** в ліфті, що рухається з прискоренням ***a***,

$$\boldsymbol{P} = m\,(\boldsymbol{g} - \boldsymbol{a}). \qquad (11.4)$$

Вага *P* вже не дорівнює силі тяжіння, а в залежності від напрямку прискорення може бути або меншою, або більшою сили тяжіння. При русі ліфта вгору з прискоренням ***a*** в проекціях на вісь *z* вага дорівнює:

$P = m\,(g + a)$.

При русі вниз:

$P = m\,(g - a)$.

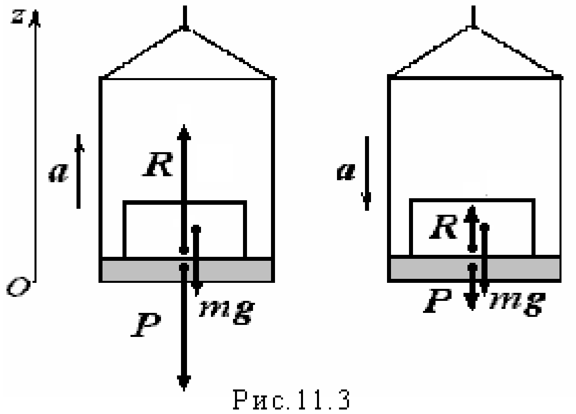


Рис.11.3

Якби ліфт вільно падав з прискоренням *a* = g, то вага тіла ***P*** стала би дорівнювати нулю. Тіло перестало б діяти на опору, вага зникла, зникла б і реакція опори, яка спричиняла разом з силою тяжіння тиск частинок одна на одну. Настає *стан невагомості*.

Подібний стан спостерігається для тіл, що знаходяться в космічному кораблі на орбіті Землі. Космічний корабель на навколоземній орбіті, отримавши відповідну початкову швидкість, рухається під дією сил тяжіння з непрацюючими двигунами. Можна вважати, що корабель безперервно «вільно падає» (рис 11.4) і замість того, щоб продовжувати рух за інерцією по дотичним до орбіти, він продовжує рухатися уздовж орбіти.

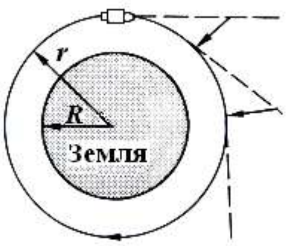


Рис. 11.4

Взагалі будь-яке тіло, розміри якого дуже малі в порівнянні з Земним радіусом, здійснюючи вільний поступальний рух в полі тяжіння Землі, буде, за відсутності інших зовнішніх сил, знаходитися в стані невагомості.

Приклад. Через нерухомий блок перекинута невагома нитка, до кінців якої підвішені вантажі масами m_1 = 0,5 кг и m_2 = 0,6 кг (рис.11.5). На лівий вантаж покладений перевантаж масою m_3 = 0,15 кг. Визначити вагу перевантажу, прискорення системи і силу тиску на вісь блоку при русі вантажів. Маса блоку мізерно мала. Тертям в осі знехтувати.

Визначимо сили, що діють на кожне з тіл. На вантаж масою m_1 діють сила тяжіння $m_1\boldsymbol{g}$, сила натягу нитки $\boldsymbol{T}_1$, вага перевантажу $\boldsymbol{P}_3$; на вантаж масою m_2 – сила тяжіння $m_2\boldsymbol{g}$ и сила натягу нитки $\boldsymbol{T}_2$; на перевантаж – сила тяжіння $m_3\boldsymbol{g}$ и сила реакції $\boldsymbol{R}$ з боку лівого вантажу; на блок – сила реакції оси $\boldsymbol{N}$ и сили натягу нитки $\boldsymbol{T}_1'$ и $\boldsymbol{T}_2'$.

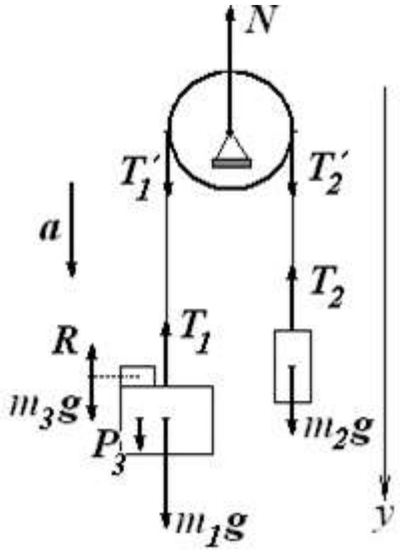


Рис. 11.5

Запишемо для кожного з тіл рівняння другого закону Ньютона.

$m_1\boldsymbol{a} = m_1\boldsymbol{g} + \boldsymbol{T}_1 + \boldsymbol{P}_3$; (для тіла *1*)

$m_2\boldsymbol{a} = m_2\boldsymbol{g} + \boldsymbol{T}_2$; (для тіла *2*)

$m_3\boldsymbol{a} = m_3\boldsymbol{g} + \boldsymbol{R}$. (для тіла *3*)

Якщо маса блоку дорівнює нулю, то

$$0 = \boldsymbol{N} + \boldsymbol{T}_1' + \boldsymbol{T}_2'.$$

Замінимо векторні рівняння скалярними рівняннями проекцій:

$$m_1a = m_1g - T_1 + P_3;$$
$$-m_2a = m_2g - T_2;$$
$$m_3a = m_3g - R.$$
$$0 = -N + T_1' + T_2'.$$

Оскільки масою блоку нехтують, то сила натягу залишається незмінною за модулем при переході через блок, а за третім законом Ньютона $T_1 = T_2 = T_1' = T_2' = T$; $R = P_3$. Тоді

$$m_1a = m_1g - T + P_3;$$
$$-m_2a = m_2g - T;$$
$$m_3a = m_3g - P_3;$$
$$0 = -N + T + T.$$

Розв’язуючи систему рівнянь, отримаємо

$$P_3 = \frac{2m_2m_3}{m_1+m_2+m_3}g = 1{,}41H, a = \frac{m_1-m_2+m_3}{m_1+m_2+m_3}g = 0{,}39м/с^2,$$

$$N = \frac{4(m_1+m_3)m_2}{m_1+m_2+m_3}g = 12{,}25H.$$

§ 12. Сили пружності

При деформації тіла виникають сили пружності , що перешкоджають цієї деформації . Природа цих сил - електромагнітна взаємодія . Під впливом зовнішніх сил частинки твердого тіла зміщуються з положення рівноваги . Цьому зміщенню частинок протидіють сили електричної взаємодії між зарядами всередині атомів і молекул.

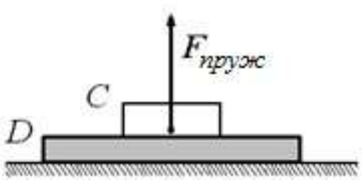


Рис.12.1

Якщо після припинення дії зовнішніх сил відновлюються колишні форма і розміри тіла , то деформація називається *пружною*. Деформації , що не зникають після припинення дії сил , називаються *пластичними* .

Пружні сили виникають при безпосередньому зіткненні тел. Пружною силою буде , наприклад, та сила , з якою діє розтягнута або стиснута пружина на дотичні з нею тіла. Отже , щоб створити в тілі пружну силу , його треба попередньо деформувати .

Розглянемо , наприклад , брусок *C* , що лежить на дошці *D* (рис.12.1) . З боку пружно деформованої дошки на брусок , що лежить на ній , діє сила пружності $\boldsymbol{F}_{пруж}$. У цьому випадку сила пружності називається силою реакції опори.

Р. Гук дослідним шляхом установив закон, за яким ***при пружній деформації пружини подовження пружини пропорційно зовнішній силі***.

$$\Delta x = \frac{1}{k} F_{зовн} . \qquad (12.1)$$

Величина *k* називається *жорсткістю* пружини.

Якщо, наприклад, розтягувати пружину рукою, то за третім законом Ньютона в розтягнутій (або стиснутій) пружині виникає протидіюча сила - *пружна сила*, яка врівноважує зовнішню силу (рис. 12.2). Пружна сила відрізняється від зовнішньої тільки знаком. Зовнішня сила прикладена до пружини, пружна - до руки.

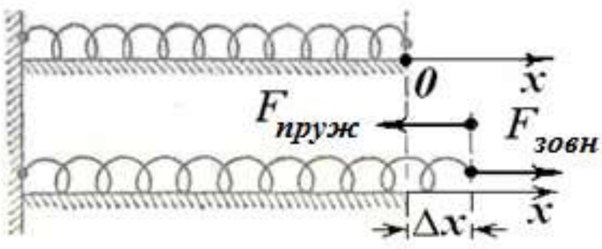


Рис.12.2

Тому, замінюючи зовнішню силу пружною, для закону Гука можна записати

$$F_x = -k\Delta x, \qquad (12.2)$$

тобто ***пружна сила пропорційна величині деформації і спрямована до положення рівноваги.*** Тут F_x – проекція пружної сили на вісь *x, k* - жорсткість пружини, Δx – величина розтягу (стиску) пружини.

Жорсткість *k* пружини залежить від матеріалу, розмірів витка і довжини пружини. Жорсткість чисельно дорівнює силі, яка потрібна для розтягування пружини на одиницю довжини. Одиницею жорсткості в СІ являється Н/м.

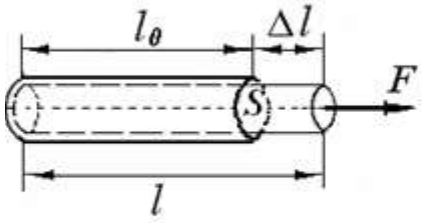


Рис. 12.3

Сила, прикладена до стрижня (рис.12.3), призводить до виникнення в ньому пружних сил і спричиняє зміну його довжини.

Деформація розтягування (стиснення) стрижня характеризується *абсолютним* подовженням $\Delta l = l - l_0$ і *відносним* подовженням

$$\varepsilon = \Delta l / l_0,$$

де l_0 і l – початкова та кінцева довжина стрижня. Пружні сили прийнято характеризувати *механічним напруженням* σ, яке визначається як модуль сили F, що припадає на одиницю площі S поперечного перерізу стрижня

$$\sigma = F/S. \tag{12.3}$$

Одиниця напруги, що дорівнює ньютону на квадратний метр, називається паскалем (1 Н/м^2 = 1 Па).

Закон Гука для стрижня: *відносне подовження стрижня прямо пропорційно напруженню і обернено пропорційно модулю Юнга.*

$$\varepsilon = \frac{1}{E}\sigma . \tag{12.4}$$

Модулем Юнга E (модулем поздовжньої пружності) називають величину, що характеризує опір матеріалу розтягуванню або стисненню при пружній деформації.

Наприклад, для гуми модуль Юнга дорівнює 10 МПа, дерева E = 10 ГПа, свинцю E = 18 ГПа, міді E = 110 ГПа, сталі E = 220 ГПа и т.д.

Приклад. Дві пружини з коефіцієнтами жорсткості k_1 *и* k_2 з'єднують один раз послідовно, другий - паралельно. Якої жорсткості $k_{екв}$ треба взяти пружини, щоб ними можна було замінити в кожному випадку ці системи з двох пружин?

У разі послідовного з'єднання пружин (рис. 12.4) сили, які розтягують кожну з них, за третім законом Ньютона однакові і дорівнюють силі F, з якою розтягують систему пружин. При цьому подовження системи дорівнює сумі подовжень пружин $\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2$.

Якщо $F = k_{1екв}\, \Delta x$, то $\Delta x = F/ k_{1екв}$. Аналогічно $\Delta x_1 = F/ k_1$, $\Delta x_2 = F/ k_2$. Тоді

$$F/ k_{1экв} = F/ k_1 + F/ k_2.$$

Таким чином

$$\frac{1}{k_{1екв}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \text{ і } k_{1екв} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$$

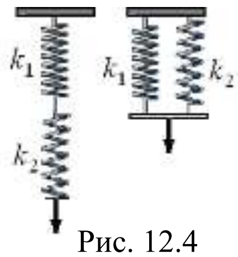


Рис. 12.4

У разі паралельного з'єднання пружин подовження кожної з них одне й те саме $\Delta x = \Delta x_1 = \Delta x_2$, а сила F, що розтягує, дорівнює сумі сил пружності, що виникають при розтягуванні кожної пружини $F = F_1 + F_2$. Тоді $k_{2екв}\, \Delta x = k_1\, \Delta x + k_2\, \Delta x$, тобто

$$k_{2екв} = k_1 + k_2.$$

§ 13. Сили тертя

Сили тертя за своєю природою також є електромагнітними. При зіткненні шорстких поверхонь порушується рівноважний розподіл зарядів всередині молекул і атомів, з яких складаються тіла. Це призводить до появи електричних сил взаємодії між цими зарядами.

Розрізняють три види тертя при дотиканні тіл: *тертя спокою, тертя ковзання і тертя кочення.*

Подіємо на брусок, що лежить на горизонтальному столі, зовнішньою силою $\boldsymbol{F}_{зовн}$, безперервно збільшуючи її (рис.13.1).

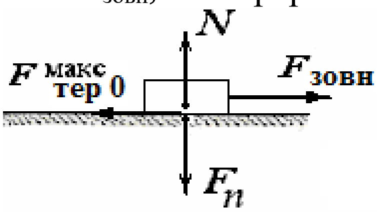


Рис.13.1

При зміні $\boldsymbol{F}_{зовн}$ від нуля до деякого значення руху бруска не виникає.

Звідси випливає висновок, що на брусок з боку столу діє рівна і протилежно спрямована сила $\boldsymbol{F}_{тер0}$, що врівноважує силу $\boldsymbol{F}_{зовн}$. Силу $\boldsymbol{F}_{тер0}$ називають *силою тертя спокою*. Вона направлена по дотичній до поверхонь, що труться, і існує між тілами, які не рухаються одне щодо одного.

Сила тертя спокою «автоматично» приймає значення, що дорівнює значенню зовнішньої сили $\boldsymbol{F}_{зовн}$ від нуля до деякого максимального $\boldsymbol{F}_{тер0}^{макс}$, при якому брусок починає ковзати. За умови $\boldsymbol{F}_{зовн} > \boldsymbol{F}_{тер0}^{макс}$ виникає відносний рух бруска.

Коли брусок почне ковзати, тертя спокою змінюється тертям ковзання. Модуль сили тертя ковзання дорівнює, таким чином, максимальному значенню сили тертя спокою. Сила тертя ковзання спрямована уздовж поверхні зіткнення тіл так, щоб перешкоджати відносному прослизанню дотичних тіл (протилежно відносній швидкості).

Силу $\boldsymbol{N}$, що діє на брусок з боку опори перпендикулярно до його поверхні, називають *силою нормальної реакції*, а силу $\boldsymbol{F}_{n}$, яка діє з боку бруска на опору - *силою нормального тиску.*

Дослідним шляхом встановлено, що *сила тертя ковзання* не залежить від площі зіткнення тіл і *пропорційна силі нормального тиску*, що притискає поверхні, які труться, одну до одної

$$F_{тер} = \mu F_{n}. \tag{13.1}$$

Тут μ – безрозмірний *коефіцієнт тертя ковзання*.

За третім законом Ньютона модуль сили, що притискає, дорівнює модулю сили нормальної реакції $\boldsymbol{N}$. Тому частіше записують

$$F_{тер} = \mu N. \tag{13.2}$$

Приклад. Наведемо деякі значення коефіцієнта тертя спокою (коефіцієнт тертя ковзання як правило менше коефіцієнта тертя спокою, $\mu < \mu_0$): дерево по дереву $\mu_0 = 0{,}65$, резина по асфальту $\mu_0 = 0{,}55$, сталь по пластмасі $\mu_0 = 0{,}3$, сталь по сталі $\mu_0 = 0{,}15$, сталь по льоду $\mu_0 = 0{,}015$.

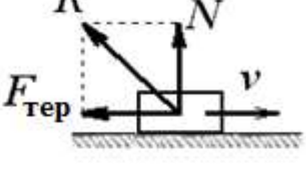


Рис.13.2

Сила тертя $\boldsymbol{F}_{тер}$ і нормальна сила реакції $\boldsymbol{N}$ є складовими однієї сили реакції $\boldsymbol{R}$, з якою поверхня діє на тіло (рис.13.2).

Тертя кочення виникає через деформації матеріалу перед тілом, що котиться, і через розрив молекулярних зв'язків в місці контакту. Сила тертя кочення обернено пропорційна радіусу тіла, що котиться. Ця сила набагато менше за сил тертя спокою і ковзання.

Приклад. Щоб пройти під час перегонів поворот на великій швидкості мотоцикліст нахиляється в бік повороту. З якою максимальною швидкістю може їхати мотоцикліст по горизонтальній трасі, описуючи дугу радіусом R = 100 м, якщо коефіцієнт тертя коліс об асфальт μ = 0,6? На який кут φ від вертикалі він при цьому відхиляється (рис.13.3)?

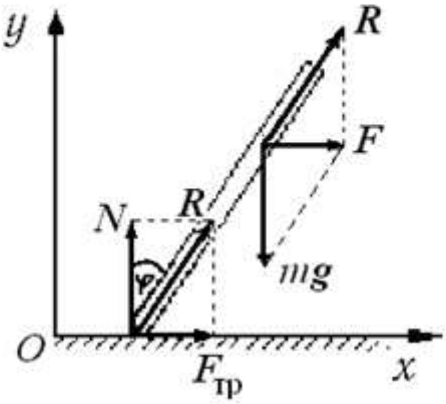


Рис.13.3

Мотоцикліст взаємодіє із Землею (сила тяжіння $m\boldsymbol{g}$) і з дорогою (сила реакції з боку дороги $\boldsymbol{R}$). Силу реакції $\boldsymbol{R}$ доцільно розкласти на дві складові - силу нормальної реакції $\boldsymbol{N}$ і силу тертя $\boldsymbol{F}_{тер}$. Мотоцикліст нахиляє мотоцикл доти, поки сила реакції $\boldsymbol{R}$, яка додана до сили тяжіння $m\boldsymbol{g}$, не буде надавати йому необхідного нормального (доцентрового) прискорення для проходження з потрібною швидкістю дуги повороту.

Силою, яка безперервно змінює імпульс мотоцикліста, тобто змінює напрямок його швидкості, тут є сила тертя.

Другий закон Ньютона у векторному вигляді запишеться так:

$$m\boldsymbol{a} = m\boldsymbol{g} + \boldsymbol{R}$$

або

$$m\boldsymbol{a} = m\boldsymbol{g} + \boldsymbol{N} + \boldsymbol{F}_{тр}.$$

У проекціях на координатні осі:

$$ma_{доц} = F_{тер},$$
$$-mg + N = 0.$$

Враховуючи, що $F_{тер} = \mu N$, $a_{доц} = v^2/r$, отримаємо

$$v = \sqrt{\mu g r}\ .$$

Для визначення кута нахилу φ мотоцикліста з прямокутного трикутника маємо

$$\mathrm{tg}\,\varphi = F_{тер}/N = \mu;$$
$$\varphi = \mathrm{arc\,tg}\,\mu.$$

Підставляючи числа, знайдемо : v = 24,3 м/с = 87,3 км/ч, φ= 31°.

§ 14. Основне завдання динаміки

У динаміці розглядаються два типи завдань , які вирішуються за допомогою рівняння $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$.

Пряме завдання полягає в тому , щоб , знаючи рух тіла , *визначити діючі на нього сили* . У техніці такі завдання виникають , наприклад , при визначенні сил тиску коліс на рейки , знаходження внутрішніх зусиль в деталях механізмів і т.д. , якщо закони руху цих механізмів відомі.

Обернене завдання є в динаміці *основним* і полягає в тому , щоб за діючими на тіло силам і початковим станом тіла *визначити закон його руху*.

Наприклад , за діючими на ракету під час її руху силами тяги двигуна , тяжіння з боку Землі і опору повітря знайти закон руху ракети , зокрема , її траєкторію.

Основне завдання динаміки матеріальної точки формулюється так : *знайти закон руху частинки (матеріальної точки), тобто виразити її координати у вигляді певних функцій часу , якщо відомі маса частинки , сили, що діють на неї і початкові умови - швидкість і положення частинки в початковий момент часу.*

Для вирішення цього завдання за допомогою другого закону Ньютона ($\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$) знаходять прискорення, з яким рухається матеріальна точка . Потім за допомогою інтегрування (або , в простих випадках , відомих формул кінематики) знаходять вирази для швидкостей і координат.

Приклади . ***1*** . Невеликий брусок масою m зісковзує без початкової швидкості вниз по похилій площині , яка утворює кут α з горизонтом. Коефіцієнт тертя дорівнює μ , довжина похилої площини l . Визначити прискорення бруска відносно площини і швидкість його біля основи похилій площині. (рис. 14 .1)

На першому етапі розв’язання слід встановити всі сили, що діють на брусок, тобто дію яких інших тіл на дане тіло слід враховувати.

Для бруска, що ковзає по похилій площині, істотний вплив з боку Землі (він характеризується силою тяжіння $m\boldsymbol{g}$) і вплив з боку площини (він характеризується силою реакції $\boldsymbol{R}$). Силу реакції $\boldsymbol{R}$ зазвичай розкладають на дві складові - нормальну силу реакції $\boldsymbol{N}$ з боку площині і силу тертя $F_{тер}$ (рис. 14. 1), спрямовану в бік, протилежний руху бруска.

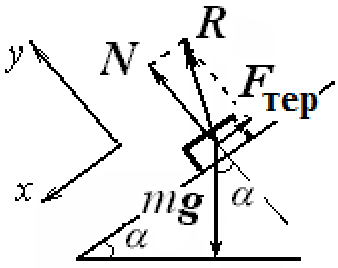


Рис. 14.1

Визначивши сили, що діють на тіло, складають рівняння другого закону Ньютона у векторному вигляді:

$$\boldsymbol{ma} = \boldsymbol{mg} + \boldsymbol{N} + \boldsymbol{F}_{\text{тер}}.$$

Щоб здійснити обчислення, потрібно перейти від векторів до їх проекцій. Вибір системи координат довільний, зручно вісь Ox розмістити так, щоб вона збігалася з напрямком руху.

Проекції векторів на напрям Ox дорівнюють:

$$a_x = a, \quad g_x = g \sin\alpha, \quad N_x = 0, \quad F_{\text{тер}\,x} = -F_{\text{тр}}.$$

Тоді

$$ma_x = mg\sin\alpha - F_{\text{тер}}.$$

Оскільки тіло рухається тільки уздовж осі Ox, прилягаючи до похилої площини, то це означає, згідно з другим законом Ньютона, що сума проекцій всіх сил в напрямку, перпендикулярному до площини (на вісь Oy), має дорівнювати нулю

$$N - mg\cos\alpha = 0.$$

З урахуванням закону, що зв'язує силу тертя і нормальної реакції, отримаємо

$$F_{\text{тер}} = \mu N = \mu\, mg\cos\alpha.$$

У підсумку

$$a_x = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha).$$

Для руху вздовж прямої з постійним прискоренням скористаємося формулою (5.11) кінематики: $v^2 = 2\,al$. Звідки

$$v = \sqrt{2gl(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}\,.$$

2. Електровоз масою m тягне поїзд з двох вагонів масами m_1 і m_2 з постійною силою $\boldsymbol{F}$ на горизонтальній ділянці шляху (рис.14.2). Визначити прискорення, з яким рухається поїзд, і сили натягу жорстких зчіпок. Тертям знехтувати.

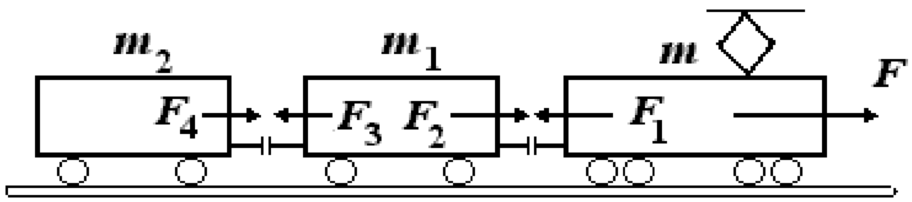


Рис.14.2.

При складанні рівнянь руху для кожного вагона врахуємо, що за третім законом Ньютона:

$$\boldsymbol{F}_1 = -\boldsymbol{F}_2, \quad \boldsymbol{F}_3 = -\boldsymbol{F}_4.$$

Рівняння руху для електровоза:

$$\boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_1 = m\boldsymbol{a},$$

для першого вагона:

$$\boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_3 = m_1\boldsymbol{a},$$

для другого вагона:

$$\boldsymbol{F}_4 = m_2\boldsymbol{a}.$$

У проекціях

$$F - F_1 = ma,$$
$$F_2 - F_3 = m_1 a,$$
$$F_4 = m_2 a$$

або

$$F - F_1 = ma,$$
$$F_1 - F_3 = m_1 a,$$
$$F_3 = m_2 a.$$

Розв'язуючи систему, знайдемо

$$a = \frac{F}{m + m_1 + m_2}, F_1 = \frac{m_1 + m_2}{m + m_1 + m_2} F, F_3 = \frac{m_2}{m + m_1 + m_2} F.$$

3. Існує відомий спосіб, що допомагає велосипедисту пройти швидкісний поворот, не нахиляючи корпусу. Для цього на віражі велосипедного треку зовнішню сторону полотна дороги на повороті піднімають на деякий кут. (рис. 14.3)

З якою швидкістю повинен проходити віраж радіусом 20 м велосипедист, тримаючись перпендикулярно до полотна дороги, щоб не впасти? Полотно утворює кут 30 º з горизонтом.

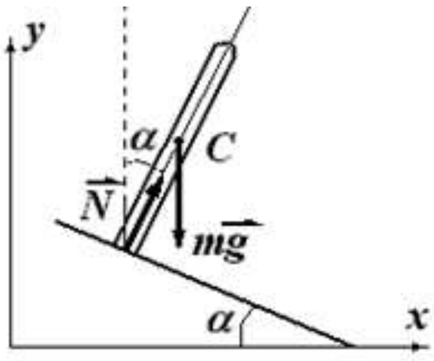


Рис. 14.3

Оскільки велосипед перпендикулярний до полотна треку за умовою, сила реакції полотна $\boldsymbol{N}$ також є перпендикулярною до полотна, а сила бокового тертя відсутня. Перенесемо силу $\boldsymbol{N}$ вздовж лінії її дії в точку *C*. Тоді рівняння другого закону Ньютона у векторному вигляді запишеться:

$$\boldsymbol{N} + m\boldsymbol{g} = m\boldsymbol{a}_{\text{доцентр}}.$$

У проекціях на координатні осі:

$$Ox: \quad N\sin\alpha = m\frac{v^2}{R}, \quad Oy: \quad N\cos\alpha - mg = 0.$$

Після перетворень отримаємо

$$v = \sqrt{gR\,\mathrm{tg}\,\alpha}\,.\; v \approx 38{,}3 \text{ км/год.}$$

Контрольні питання .

1 . Яка фізична абстракція привела Галілея і Ньютона до встановлення закону інерції ?
2 . Чому на практиці тіло , надане самому собі , не зберігає як завгодно довго свою швидкість ?
3 . Чому пасажир при різкому гальмуванні автобуса відхиляється вперед по руху , а при різкому прискоренні - назад , проти руху ?
4 . Чи правильно вважати , що 1 -й закон Ньютона випливає з 2 -го закону (якщо сила $F = 0$, то прискорення $a = 0$, тобто тіло рухається рівномірно і прямолінійно) ?
5 . У яких системах відліку і для яких тіл виконуються закони Ньютона ?
6 . Що є причиною зміни стану рівномірного і прямолінійного руху тіла в інерціальній системі відліку ?
7 . Що потрібно враховувати , щоб правильно визначити сили, що діють на дане тіло ? До яких точок прикладаються сили тяжіння , ваги , реакції опори , тертя ?
8 . Матеріальна точка рухається по колу з постійною за модулем швидкістю. Як направлена сила, що діє на точку ? Як буде спрямована ця сила , якщо точка рухається по колу прискорено ?
9 . Матеріальна точка рухається по криволінійній траєкторії. Як спрямований при цьому вектор $d\mathbf{p}/dt$?
10 . Два тіла масами M і m ($M > m$) , що з'єднані невагомою нерозтяжної ниткою , лежать на гладкій горизонтальній поверхні. Чи залежить натяг нитки від того, до якого з тіл прикладена сила ?
11 . Чому на віражах швидкісних мотогонок спортсмен сильно нахиляє свій корпус ?
12 . Чому у гоночних автомобілів «Формула - 1 » сильно зношуються покришки?
13 . Чи є пружні сили і сили тертя фундаментальними ? Яка природа цих сил?
14 . Чи залежить сила тертя ковзання від площі зіткнення тіл?
15 . Брусок лежить нерухомо на похилій площині. Чому дорівнює і як спрямована сила реакції ?
16 . На тонкій нерозтяжної нитці підвішений кульку (матеріальна точка) масою m, яка здійснює рух в горизонтальній площині. Нитка утворює кут α з вертикаллю. Якою є сила пружності нитки T (інша назва - сила натягу нитки) ?
17 . Чому дорівнює сила тяжіння космонавта , який знаходиться в кабіні космічного корабля на круговій орбіті навколо Землі ?
18 . Для яких тіл справедливий закон всесвітнього тяжіння у вигляді

$$F = Gm_1m_2/r^2 \ ?$$

19. Як направлені сили гравітаційної взаємодії?
20 Як зміниться жорсткість пружини, якщо її довжину зменшити в n разів?

Розділ 3. ЗАКОН ЗБЕРЕЖЕННЯ ІМПУЛЬСУ

§ 15. Закон збереження імпульсу

Розглянемо систему N тіл (матеріальних точок), імпульси яких дорівнюють $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \ldots \boldsymbol{p}_N$, відповідно (рис.15.1).

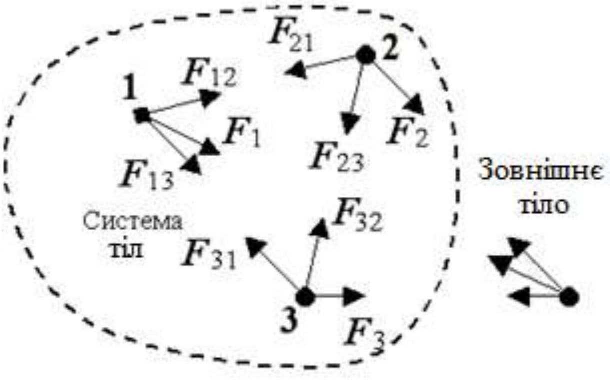


Рис. 15.1.

Будемо розрізняти *внутрішні сили* між тілами, які входять у систему, і *зовнішні сили*, що діють на систему з боку зовнішніх тел. Внутрішні сили будемо позначати буквою з подвійними індексами $\boldsymbol{F}_{i,j}$, де індекси показують, що дана сила діє на тіло з номером i з боку тіла з номером j . Символом $\boldsymbol{F}_i$ з одинарним індексом позначимо зовнішню силу, що діє на i- у частинку.

Напишемо рівняння другого закону Ньютона (швидкість зміни імпульсу тіла дорівнює сумі всіх діючих на тіло сил) для всіх N тіл.

$$\begin{aligned}
\frac{d\boldsymbol{p_1}}{dt} &= \boldsymbol{F}_{1,2} + \boldsymbol{F}_{1,3} + \ldots + \boldsymbol{F}_{1,N} + \boldsymbol{F}_1 \\
\frac{d\boldsymbol{p_2}}{dt} &= \boldsymbol{F}_{2,1} + \boldsymbol{F}_{2,3} + \ldots + \boldsymbol{F}_{2,N} + \boldsymbol{F}_2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{d\boldsymbol{p_N}}{dt} &= \boldsymbol{F}_{N,1} + \boldsymbol{F}_{N,2} + \ldots + \boldsymbol{F}_{N,N-1} + \boldsymbol{F}_N
\end{aligned} \tag{15.1}$$

Додамо разом усі ці рівняння. Ліворуч отримаємо похідну за часом від сумарного імпульсу $\boldsymbol{p}$ системи

$$\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 + \ldots + \boldsymbol{p}_N\right) = \frac{d}{dt}\boldsymbol{p} .$$

Праворуч не рівною нулю буде тільки сума зовнішніх $\Sigma\, \boldsymbol{F}_i$. Сума же внутрішніх сил вийде рівною нулю. Дійсно, вона складається з подвійних доданків

$$\left(\boldsymbol{F}_{1,2} + \boldsymbol{F}_{2,1}\right) + \left(\boldsymbol{F}_{1,3} + \boldsymbol{F}_{3,1}\right) + \ldots .$$

Згідно з третім законом Ньютона $\boldsymbol{F}_{1,2} = -\boldsymbol{F}_{2,1}$ і т.д., тому кожна з дужок дорівнює нулю. З урахуванням цього отримаємо

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{p} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i . \tag{15.2}$$

Таким чином , *похідна за часом від сумарного імпульсу системи дорівнює сумі* ***зовнішніх*** *сил, що діють на тіла системи* .

З рівняння (15.2) можна зробити важливий висновок – *імпульс системи може змінюватися під дією тільки зовнішніх сил.*

Внутрішні сили не можуть змінити імпульс системи . Тому, наприклад , неможливо підняти самого себе за волосся , як це робив веселий літературний герой барон Мюнхгаузен . Безплідними будуть також спроби привести в рух автомобіль, перебуваючи всередині нього і чинячи тиск на його стінки.

Система , на яку не діють зовнішні сили , називається *замкнутою або ізольованою.* Якщо зовнішні сили відсутні , то права частина рівняння (15.2) дорівнює нулю. Якщо похідна деякої величини дорівнює нулю $\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = 0$, то ця величина є постійною ($\boldsymbol{p}$ = const). Цей висновок називається ***законом збереження імпульсу***:

- ***в інерціальній системі відліку імпульс замкнутої системи частинок залишається сталим, тобто не змінюється з часом:***

$$\boldsymbol{p} = \sum_i \boldsymbol{p}_i(t) = const\,. \tag{15.3}$$

При цьому імпульси окремих тіл системи можуть змінюватися при їх взаємодії. Наприклад , при зіткненнях тіл імпульс може передаватися від одного тіла до іншого. Однак ці зміни завжди відбуваються так , що приріст імпульсу одного тіла дорівнює убутку імпульсу другого тіла, а повний імпульс системи залишається постійним .

Найважливішим прикладом застосування закону збереження імпульсу є *принцип реактивного руху*. При згорянні палива двигун ракети викидає з великою швидкістю гази в одну сторону , а ракета отримує такий самий імпульс в протилежну сторону так , що сума імпульсів ракети і газів залишається постійною величиною.

Іншим прикладом може служити віддача гармати при пострілі – якщо її не закріпити , вона відкотиться назад. В автоматі за рахунок віддачі затвора викидається стріляна гільза і відбувається перезарядка зброї . Явище віддачі пояснює ходьбу , рух усіх видів транспорту. Так , при обертанні ведучіх коліс автомобіля за рахунок сили тертя автомобіль рухається в одну сторону, Земля – у протилежну (природно, з мізерно малою швидкістю). Точно так само рухається судно: його гвинт захоплює воду і відкидає її за корму , завдяки чому судно рухається вперед.

Застосування закону збереження імпульсу допомагає розв'язати задачу про пружні і непружні зіткнення тіл , розпад елементарних частинок і т.п.

Приклад . Дві пластилінових кулі з імпульсами $\boldsymbol{p_1}$ та $\boldsymbol{p_2}$, кут між якими дорівнює θ, стикаються абсолютно непружно і далі летять як одне тіло (рис.15.2). Вважаючи систему замкнутою, визначити модуль імпульсу тіла, що утворилося.

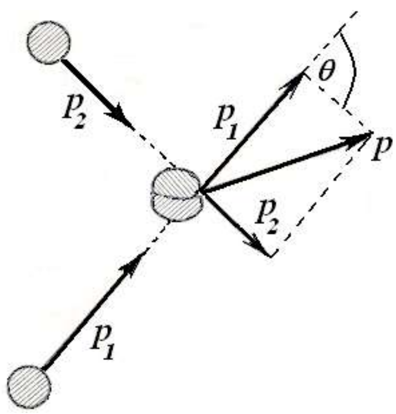


Рис. 15.2

Згідно з законом збереження імпульсу $\mathbf{p} = \mathbf{p_1} + \mathbf{p_2}$. За правилом додавання векторів будуємо паралелограм імпульсів. Скориставшись теоремою косинусів, отримаємо:

$$p = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 - 2p_1p_2\cos(180-\theta)} = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2\cos\theta}.$$

Закон збереження імпульсу *виконується і в незамкненій системі* у випадку, коли сума всіх зовнішніх сил дорівнює нулю. У цьому випадку проекція суми всіх зовнішніх сил на яку-небудь координатну вісь також дорівнює нулю. Спроектувавши всі вектори, що фігурують в рівнянні (15.2) на деякий напрям *x*, отримаємо

$$\frac{d}{dt}p_x = \sum_{i=1}^{N} F_{ix}\ . \qquad (15.4)$$

При $\Sigma F_{ix} = 0$ маємо $p_x = \mathrm{const}$, тобто проекція на вісь *Ox* вектора імпульсу системи не змінюється з часом.

Приклади. 1. При русі тіла, кинутого під кутом до горизонту, (рис.15.3) на нього не діють ніякі зовнішні сили, крім сили тяжіння, спрямованій вертикально (опором повітря нехтуємо). Проекція сили тяжіння на горизонтальний напрям дорівнює нулю. Тому горизонтальна складова імпульсу тіла, а отже і швидкості, залишається постійною протягом усього польоту.

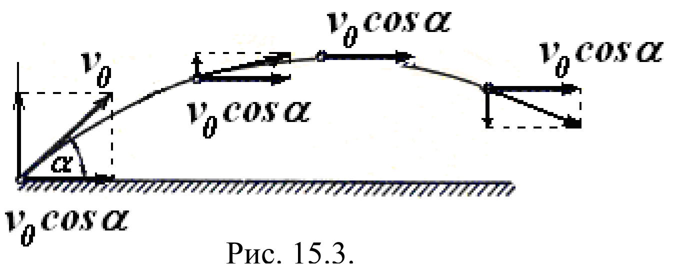


Рис. 15.3.

2. Після пострілу з гармати, що міститься на платформі, платформа відкочується (рис. 15.4).

Проекції всіх вертикальних сил (сил тяжіння гармати, платформи, снаряда і реакції опори) на горизонтальний напрям дорівнюють нулю. Тому зберігається проекція сумарного імпульсу системи на горизонтальний напрям, що б в системі не відбувалося. Швидкість відкоту платформи може бути знайдена із закону збереження проекції сумарного імпульсу на горизонталь координатну вісь *Ox:*

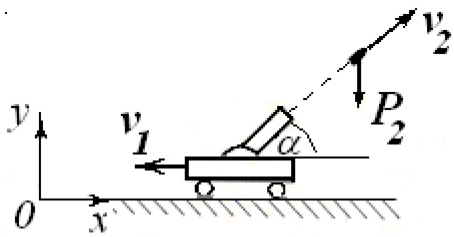


Рис. 15.4.

$$m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = 0;$$
$$-m_1 v_1 + m_2 v_2 \cos\alpha = 0;$$
$$v_1 = (m_2/m_1)\, v_2 \cos\alpha\ .$$

Закон збереження імпульсу є фундаментальним законом природи і пов'язаний із загальною властивістю простору – його *однорідністю.* Це означає, що паралельне перенесення замкнутої фізичної системи з одного місця в інше без зміни взаємного розташування тіл і їх швидкостей не змінює механічних властивостей системи.

Тому цей закон для матеріальних точок є універсальним, тобто виконується при будь-яких взаємодіях і не знає жодних винятків.

§ 16. Центр мас

Якщо тіло складається з N матеріальних точок з масами m_i і радіус-векторами $\boldsymbol{r}_i$ (рис.16.1), то центром мас системи матеріальних точок називають таку точку C, радіус-вектор якої визначається виразом

$$\boldsymbol{r}_C = \frac{m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2 + ... + m_N\boldsymbol{r}_N}{m_1 + m_2 + ... + m_N} = = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} m_i\boldsymbol{r}_i \qquad (16.1)$$

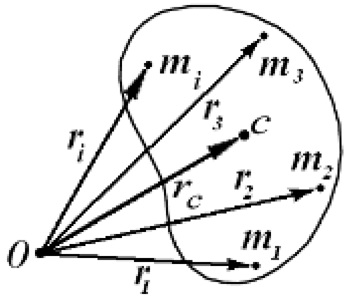


Рис. 16.1

Тут m - сумарна маса системи .

Центр мас (або *центр інерції*) – це геометрична точка , положення якої характеризує розподіл мас в тілі або системі частинок.

Приклад . Центр мас двох однакових частинок знаходиться в середині відрізка, що з'єднує їх.

Для різних частинок центр мас ділить цей відрізок у відношенні, яке обернено пропорційне масам частинок.

Якщо однорідне тіло має центр симетрії , то центр мас знаходиться в центрі симетрії.

В однорідному полі тяжіння центр мас тіла співпадає з його центром тяжіння , тобто з точкою прикладання рівнодіючої сил тяжіння, що діють на окремі елементи тіла.

Диференціюючи $\boldsymbol{r}_C$ за часом , знайдемо швидкість центра мас:

$$\boldsymbol{V}_C = \frac{d\boldsymbol{r}_C}{dt} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} m_i\boldsymbol{v}_i = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{p}_i = \frac{\boldsymbol{p}}{m}. \qquad (16.2)$$

($\boldsymbol{v}_i$ – швидкість, $\boldsymbol{p}_i$ – імпульс *i-ї* частинки, $\boldsymbol{p}$ – імпульс системи).

З (16.2) випливає, що сумарний імпульс системи дорівнює добутку маси системи на швидкість її центра мас:

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{V}_C . \qquad (16.3)$$

Похідна за часом від сумарного імпульсу системи дорівнює сумі зовнішніх сил:

$$\frac{d}{dt}\left(m\boldsymbol{V}_C\right) = m\boldsymbol{a}_C = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \ , \qquad (16.4)$$

де $\boldsymbol{a}_C$ – прискорення центра мас. *Центр мас рухається так, як якби вся маса системи була зосереджена в ньому під дією результуючої всіх зовнішніх сил, прикладених до тіл системи.*

У замкненій системі $\Sigma\, \boldsymbol{F}_i = 0$ та $\boldsymbol{a}_C = 0$. Це означає , що *центр мас замкненої системи або залишається нерухомим, або рухається рівномірно і прямолінійно* незалежно від того , як рухаються окремі тіла , з яких складається система.

Приклади . 1 . Дія далеких зірок на Сонячну систему є мізерно малою і її можна вважати замкнутою. Спостереження показують , що Сонячна система рухається прямолінійно з постійною швидкістю 18 км / с в напрямку сузір'я Геркулес .

2 . Центр мас системи Земля - Місяць знаходиться в точці , розташованій приблизно в 4600 км від центра Землі. Земля і Місяць обертаються відносно цієї точки . Центр мас рухається за еліпсом навколо Сонця , здійснюючи один оберт за рік.

3 . Людина масою $m_1 = 60$ кг знаходиться на кормі човна . Човен стоїть на спокійній воді озера. Довжина човна $l = 3$ м, маса $m_2 = 120$ кг. Яку відстань пропливе човен , якщо людина повільно перейде на ніс човна? Вага човна рівномірно розподілена по її довжині. Тертям о воду і повітря знехтувати.

Всі сили, що діють в цьому прикладі - сили тяжіння , архімедова сила - спрямовані вертикально. Їх проекції на горизонтальний напрям рівні нулю. Отже , згідно з законом руху центра мас системи (16.4) дорівнює нулю і горизонтальна проекція прискорення центра мас , і в даному випадку центр мас системи людина - човен при переході людини залишиться нерухомим відносно берега .

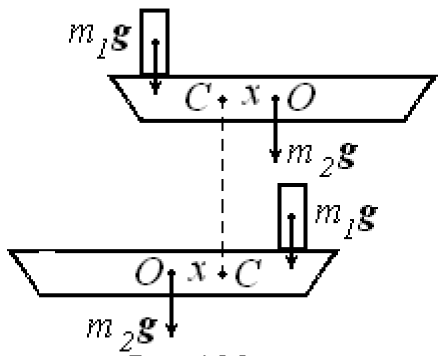


Рис. 16.2.

Нехай центр мас C системи знаходиться на відстані x від центра мас O човна (рис. 16.2). Для визначення величини x скористаємося тим, що моменти сіли тяжіння людини $m_1 g$ та човна $m_2 g$ відносно центра мас C мають бути рівними:

$$m_1 g\left(\frac{l}{2} - x\right) = m_2 g x \, .$$

Звідси

$$x = \frac{m_1}{(m_1 + m_2)} \frac{l}{2} \, .$$

При переході людини човен зміщується на відстань 2 x відносно берега. Тоді переміщення човна відносно берега дорівнює

$$s = \frac{m_1}{(m_1 + m_2)} l = 1 м.$$

Контрольні питання.

1.Яка система тіл називається замкненою? Чи є обов'язковою вимога замкненості системи для виконання закону збереження імпульсу?
2.Як довести, що сума внутрішніх сил замкненої системи дорівнює нулю?
3.Матеріальна точка рівномірно обертається по колу. Чи змінюється при цьому імпульс матеріальної точки?
4.У чому полягає принцип реактивного руху?
5.Сформуліруйте закон збереження для проекції імпульсу системи на деякий напрям.
6.Как пояснити рух усіх видів транспорту?

Розділ 4. ЗАКОН ЗБЕРЕЖЕННЯ ЕНЕРГІЇ

§ 17. Робота і потужність

Якщо сила, що діє на тіло постійна ($\boldsymbol{F}$ = const), а траєкторія прямолінійна (рис. 17.1), то роботою сили F на шляху s називають скалярну величину

$$A = F\,s\cos\alpha = F_s\,s, \qquad (17.1)$$

де F – модуль сили, s - шлях, пройдений точкою прикладання сили, α - кут між напрямом сили і переміщення, $F_s = F\cos\alpha$ – проекція сили на напрям переміщення.

У загальному випадку сила може змінюватися як за модулем, так і за напрямом.

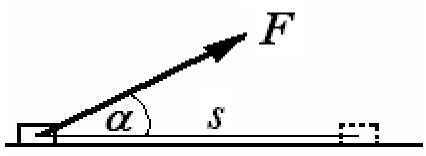


Рис. 17.1

Для того, щоб підрахувати роботу такої змінної сили, треба розбити весь шлях на окремі малі переміщення ds, на кожному з яких силу можна вважати постійною. Тоді елементарна робота dA сили F на нескінченно малому переміщенні ds тіла дорівнює

$$dA = F\,ds\cos\alpha = F_s\,ds.` \qquad (17.2)$$

Цю формулу роботи можна записати також у вигляді *скалярного добутку векторів сили **F** і елементарного переміщення **ds**:*

$$dA = \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s}. \qquad (17.3)$$

Робота сили $\boldsymbol{F}$ на кінцевому переміщенні визначається як сума елементарних робіт на окремих нескінченно малих ділянках шляху і виражається криволінійним інтегралом від сили уздовж даної ділянки траєкторії

$$A = \int_0^s (F\cos\alpha)ds = \int_0^s F_s ds. \qquad (17.4)$$

Робота - алгебраїчна величина, її знак залежить від значення cos α.

Робота є додатною, якщо кут α гострий (cos α> 0), від'ємною, якщо тупий (cos α < 0), і дорівнює нулю, якщо сила перпендикулярна до переміщення (cos π/2 = 0).

Важливо підкреслити, що у фізиці працює сила. Тому завжди необхідно вказувати, робота якої саме сили мається на увазі.

Приклади. 1. Визначити *роботу сили тяжіння* при підйомі вантажу на висоту h над поверхнею Землі.

Оскільки сила тяжіння спрямована вертикально вниз, а переміщення вгору (рис. 17.2), то кут α = 180º, cos 180º = –1 і робота сили тяжіння від'ємна:

$$A = -mgh,$$

де h - висота , на яку підняли вантаж над поверхнею Землі. Додатна тут робота зовнішньої сили (наприклад , руки) , що піднімає вантаж на висоту h . Зовнішня сила працює проти сили тяжіння.

Робота сили тяжіння при горизонтальному переміщенні тіла дорівнює нулю (α = π / 2) , а при вільному падінні тіла - додатна. Завжди від'ємна робота сили тертя, що спрямована , як відомо , протилежно швидкості тіла.

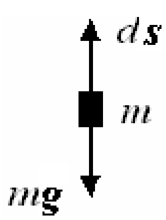


Рис. 17.2.

2 . Визначити роботу пружної сили при розтягуванні пружини (рис. 17.3) .

При розтягуванні пружини виникає пружна сила , проекція якої на вісь x згідно закону Гука дорівнює

$$F_x = -kx.$$

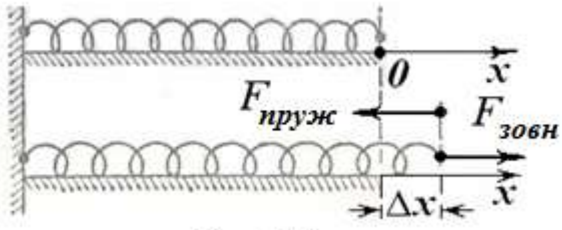


Рис. 17.3

Підрахуємо роботу цієї змінної сили при подовженні пружини від 0 до x_0.

Тут, як і в попередньому прикладі, напрям сили і переміщення є протилежними. Елементарна робота пружної сили при розтягуванні пружини на dx:

$$dA = F\,dx\cos 180^{\circ} = F_x\,dx = -kx\,dx.$$

Отже, повна робота пружної сили при подовженні пружини від $x = 0$ до $x = x_0$ буде дорівнювати

$$A = -\int_0^{x_0} kxdx = -k\int_0^{x_0} xdx = -\frac{1}{2}kx_0^2.$$

Пружна сила прагне стиснути пружину при її розтягуванні, робота такої сили при розтягуванні пружини є від’ємною. Але додатною є робота зовнішньої сили, що розтягує пружину.

Одиницею роботи в СІ є джоуль (Дж). Один джоуль дорівнює роботі постійної сили в один ньютон на переміщенні в один метр за умови, що напрям сили збігається з напрямом переміщення:

$$1\ \text{Дж} = 1\ \text{Н}\cdot\text{м} = 1\ \text{кг}\cdot\text{м}^2/\text{с}^2.$$

Робота, що здійснюється силою в одиницю часу, називається потужністю. Миттєва потужність P визначається співвідношенням

$$P = \frac{dA}{dt}. \tag{17.5}$$

Підставляючи замість роботи вираз $dA = F{\cdot}ds$. і, враховуючи, що похідна $d\boldsymbol{s}/dt$ є швидкість v, отримаємо

$$P = \boldsymbol{F}\frac{ds}{dt} = \boldsymbol{Fv}. \tag{17.6}$$

Таким чином, *миттєва потужність дорівнює скалярному добутку вектора сили на вектор швидкості точки прикладання сили.*

Одиницею потужності в СІ є ват (Вт), рівний джоулю в секунду (Дж/с). У техніці іноді застосовується одиниця потужності, звана кінської силою (к.с.), що дорівнює 736 Вт.

§ 18. Консервативні і неконсервативні сили

Сили , що зустрічаються в механіці , можна розділити на два класи .

До одного класу відносять сили , робота яких не залежить від шляху , по якому відбулося переміщення частинки , а залежить тільки від початкового і кінцевого положення частинки. Ці сили називаються *консервативними (потенціальними)* .

Для сил іншого класу робота переміщення між двома точками залежить від шляху , вздовж якого відбулося це переміщення . Ці сили називаються *неконсервативними* .

Покажемо , що робота консервативних сил по замкнутій траєкторії дорівнює нулю. Розглянемо дві довільні точки *1*та *2* і два довільних шляхи *132* і *142* (рис. 18.1) . При переміщенні частинки з початкового положення *1* в кінцеве *2* величина роботи однакова незалежно від форми траєкторії:

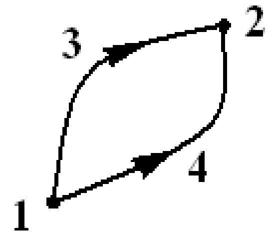


Рис. 18.1

$$A_{132} = A_{142}.$$

При зворотному русі робота змінює знак на протилежний, оскільки всі елементарні переміщення ds у формулі роботи замінюються на $-\boldsymbol{ds}$: $A_{241} = -A_{142}$.

Отже, робота консервативних сил по замкненому шляху дорівнює нулю:

$$A_{132} + A_{241} = 0.$$

Робота неконсервативних сил по замкненій траєкторії не дорівнює нулю.

Наведемо приклади консервативних і неконсервативних сил.

1 . Відомо , що поблизу поверхні Землі всі тіла падають з постійним прискоренням $\boldsymbol{g}$, спрямованим до центра Землі . Якщо розглядати рух в області , лінійні розміри якої значно менше радіуса Землі , земну поверхню можна вважати плоскою. Тоді сили, що діють на тіло масою m в будь-якій точці , мають однаковий напрям і величину $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{g}$. Їх називають однорідними .

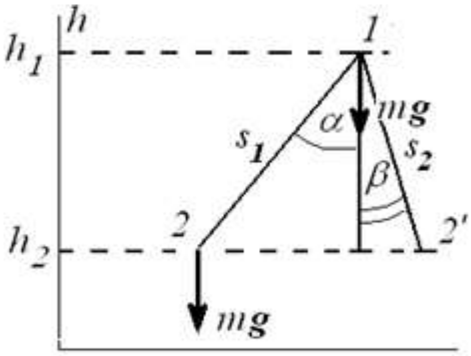


Рис. 18.2.

Покажемо , що однорідні сили тяжіння є консервативними. Позначимо через h висоту від поверхні Землі (рис. 18.2). Обчислимо роботу, яку здійснює сила тяжіння $m\boldsymbol{g}$ при переході матеріальної точки з положення *1* в положення *2* вздовж прямолінійного відрізка *12* (наприклад, матеріальна точка зісковзує з похилої площини без тертя).

$$A_{12} = mgs_1 \cos\alpha = mg(h_1 - h_2) = mgh_1 - mgh_2. \tag{18.1}$$

Очевидно, що робота сили тяжіння по шляху *12* і *12* '(рис. 18.2) однакова.

$$A_{12'} = mgs_2 \cos\beta = mgh_1 - mgh_2.$$

Таким чином, робота сили тяжіння не залежить від шляху , по якому рухається тіло , а визначається тільки початковим і кінцевим положенням тіла в просторі. Отже , однорідна сила тяжіння є консервативною.

Формула (18.1) є справедливою і при переміщенні уздовж довільної кривої. При криволінійному русі траєкторію можна представити як сукупність нескінченно малих прямолінійних переміщень . Робота на кожній з цих ділянок дорівнює $A_i = m\cdot g\cdot s_i \cos\alpha_i$ і , отже , сумарна робота , як і раніше , розраховується згідно з рівнянням (18.1) .

2 . Як приклад неконсервативної сили наведемо силу тертя , яка виникає при ковзанні одного тіла по поверхні іншого . Для неї на будь-якій ділянці траєкторії вектор сили спрямований проти вектора швидкості , який у свою чергу паралельний елементарному переміщенню і, отже , на кожній ділянці траєкторії і на всьому переміщенні робота від'ємна. Ясно також , що робота сили тертя пропорційна довжині траєкторії і тому залежить від траєкторії , по якій відбувається переміщення .

До неконсервативних сил відносяться також сили опору , які діють на тіло при русі в рідинах і газах.

Сила тертя ковзання і сила опору називаються *дисипативними* силами . Сумарна робота таких сил при будь-яких переміщеннях завжди від'ємна . У системах , де діють такі сили , повна механічна енергія при русі убуває , переходячи в теплоту.

Існують також неконсервативні гіроскопічні сили (в механіці - сила Коріоліса , в електромагнетизмі - сила Лоренца) , які залежать від швидкості матеріальної точки і спрямовані перпендикулярно до неї.

§ 19, *а. Потенціальна енергія*

Для системи тіл , в якій діють тільки внутрішні консервативні сили , можна ввести поняття потенціальної енергії. Для цього скористаємося розглянутим вище прикладом .

Щоб підняти тіло , наприклад , камінь , на деяку висоту , потрібно затратити роботу зовнішніх сил , що дорівнює $mg(h_1 - h_2)$. Ця робота може бути повернута назад і виконана силою тяжіння , якщо дати каменю можливість падати.

Отже , піднятий камінь має певний *запас роботи* , яку він може здійснити.

Такий запас роботи визначається положенням тіл в даній системі , або, як кажуть , конфігурацією тел. У разі сил тяжіння запас роботи визначається висотою підйому тіла.

Здатність тіла здійснювати роботу називається *енергією.*

Запас роботи , обумовлений взаємним розташуванням взаємодіючих матеріальних точок , що складають систему , називається ***потенціальною енергією системи .***

Поняття потенціальної енергії можна ввести *тільки для консервативних сил* , робота яких не залежить від траєкторії руху і визначається тільки початковим і кінцевим положеннями тіла. Таким чином , потенціальна енергія є *функцією стану системи і залежить тільки від координат.*

З рівняння (18.1) випливає, що робота сили тяжіння дорівнює убутку функції mgh :

$$A_{12} = mgh_1 - mgh_2.$$

Позначимо цю функцію E_p і назвемо її потенціальної енергією.

$$A_{12} = E_{p1} - E_{p2}. \qquad (19.1)$$

Підкреслимо, що робота A_{12} сили тяжіння дорівнює *убутку* потенціальної енергії, тобто різниці значень потенціальної енергії тіла в початковій і кінцевій точках шляху.

Тоді потенціальну енергію E_p тіла, піднятого над Землею, на будь-яку висоту h ($h << R_З$, де $R_З$ - радіус Землі) можна записати так

$$E_p = mgh + C. \tag{19.2}$$

Тут C-деяка постійна величина, що має розмірність енергії. Таким чином, потенціальна енергія може бути визначена з точністю до деякої адитивної постійної.

Ця постійна має зміст потенціальної енергії на нульовому рівні (h = 0). Зазвичай приймають, що на рівні h = 0 потенціальна енергія тіла дорівнює нулю, тоді з (19.2) випливає, що C = 0.

За такої умови, формула потенціальної енергії тіла масою m поблизу поверхні Землі буде

$$E_p = mgh. \tag{19.3}$$

У деяких задачах для зручності рішення висота відраховується від інших рівнів. Вибір рівня для відліку висот , а отже і потенціальних енергій , неістотний , оскільки важлива не потенціальна енергія , а її зміни , якими визначається здійснена робота. Зміни ж потенціальної енергії будуть однаковими , яким би не вибрали рівень для відліку енергії , лише б він був однаковий у всіх розрахунках, які стосуються даної задачі.

Формула (19.3) непридатна для двох матеріальних точок, що притягуються . У цьому випадку необхідно розрахувати *роботу сил гравітаційного тяжіння* .

Ці сили є центральними . Сила називається *центральною* , якщо вона спрямована до однієї і тієї ж точки (або з однієї і тієї ж точки) і залежить тільки від відстані до цієї точки , званої *центром сил*.

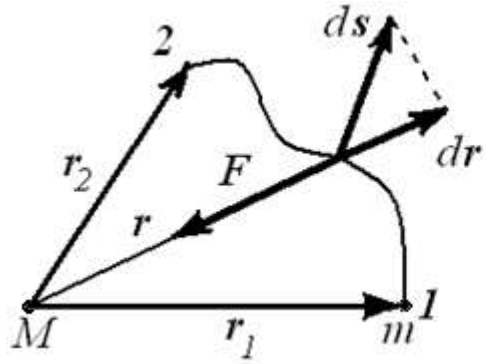


Рис. 19.1

Сила притягання двох матеріальних точок з масами M і m (рис. 19.1) :

$$F(r) = G\frac{Mm}{r^2}, \tag{19.4}$$

де $G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ Н·м^2/кг^2 – *гравітаційна стала*.

Для простоти будемо вважати, що маса M перебуває у спокої, а маса m притягується до неї з силою $\boldsymbol{F}$ і переміщується.

Знайдемо елементарну роботу сили $\boldsymbol{F}$ на переміщенні $\boldsymbol{ds}$. Уявімо роботу як скалярний добуток

$$dA = \boldsymbol{F}\, d\boldsymbol{s} = F(r)\, ds\cos\alpha = F(r)\, ds_F, \tag{19.5}$$

где $F(r)$– модуль сили, ds_F – проекція переміщення на напрям сили. З рис. 19.1 випливає, що $ds_F = -\,dr$.

Мінус поставлений з тих міркувань, що проекція ds_F є від’ємною $ds_F < 0$, а dr - приріст модуля $\boldsymbol{r}$ - додатний.

(Неважко переконатися, що при $ds_F > 0,\ dr < 0$).

Таким чином, елементарна робота сили гравітаційного притягання визначається тільки переміщенням вздовж радіус-вектора і не залежить від форми траєкторії.

Це означає, що сила тяжіння є консервативною. Тому робота такої сили при переміщенні частинки з довільної точки, що знаходиться на відстані r_1 в точку на відстані r_2 зводиться до інтегрування.

$$A_{12} = -GMm\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2} = -G\frac{Mm}{r_1} - (-G\frac{Mm}{r_2}). \qquad (19.6)$$

Ми приходимо до висновку, що робота сили тяжіння дорівнює *убутку* однієї і тієї ж функції, яку ми позначимо як $E_p\,(r)$:

$$A = E_p(r_1) - E_p(r_2)\ . \qquad (19.7)$$

Тут

$$E_p(r) = -G\frac{Mm}{r} + C\ . \qquad (19.8)$$

Введена нами функція $E_p\,(r)$ називається *потенціальною енергією гравітаційної взаємодії* двох частинок. Таким чином, робота сил тяжіння на шляху $1 \rightarrow 2$ дорівнює убутку потенціальної енергії системи двох частинок.

Крім позначення $E_p(r)$ використовують і інші позначення потенціальної енергії – $U(r)$, $\Pi(r)$, W_p .

З формули (19.8) видно, що потенціальна енергія визначається з точністю до невідомої адитивної сталої C. Однак, у всі фізичні співвідношення входить або різниця потенціальних енергій у двох точках, необхідна для визначення роботи, або похідна функції $E_p\,(r)$ за координатами, що служить для визначення сили. Тому довільна стала випадає.

Якщо сила на великій відстані досить швидко прямує до нуля, то потенціальну енергію взаємодії на нескінченності звичайно приймають рівною нулю

$$E_p\,(\infty) = 0. \qquad (19.9)$$

З цього випливає, що в (19.8) стала $C = 0$ і тоді потенціальна енергія двох частинок, що знаходяться на відстані r одна від одної, виражається формулою

$$E_p(r) = -G\frac{Mm}{r}\ . \qquad (19.10)$$

У даному випадку потенціальна енергія від'ємна. Це узгоджується з тим , що при зближенні частинок сила тяжіння між ними здійснює додатну роботу , яка дорівнює убутку потенціальної енергії. При від'ємній $E_р$ убуток її теж буде додатним.

Модуль виразу (19.10) дає запас роботи , яку виконають сили тяжіння при зближенні частинок від нескінченної відстані між ними до відстані r .

Щоб розвести ці два тіла на нескінченність , зовнішні сили мають здійснити додатну роботу , що також дорівнює модулю цього виразу .

Введене таким чином поняття потенціальної енергії має одну загальну властивість : $E_р$ - це функція конфігурації системи (взаємного розташування тіл).

Потенціальна енергія - деяка функція, що залежить від взаємного розташування тіл, які входять в систему, убуток якої дорівнює роботі внутрішніх консервативних сил , здійснюваній при переході системи з одного стану в інший.

$$A = -\Delta E_p.$$

Формула для розрахунку потенціальної енергії для кожного типу взаємодії є різною і залежить від характеру взаємодії тіл;

Приклад. Можна встановити співвідношення між загальною формулою для потенціальної енергії тяжіння

$$E_p(r) = -G\frac{Mm}{r}$$

і її окремим випадком $E_р = mgh$.

Замінимо r на $R + h$, где R – радіус Землі. Отримаємо

$$E_p = -G\frac{Mm}{R+h} = -G\frac{\frac{1}{R}Mm}{1+\frac{h}{R}}. \qquad (19.11)$$

Тут M – маса Землі. Відношення $\frac{h}{R}$ є малою величиною. Тоді за формулою наближених обчислень для $x \to 0$ справедливо $\frac{1}{1+x} \approx 1-x$, або

$$\frac{1}{1+\frac{h}{R}} \approx 1-\frac{h}{R}. \qquad (19.12)$$

Сила притягування тіла масою m, що знаходиться на висоті h над поверхнею Землі, згідно із законом всесвітнього тяжіння запишеться у вигляді

$$F = G\frac{Mm}{(R+h)^2}.$$

Для точок, близьких до поверхні Землі, h є настільки малим в порівнянні з радіусом Землі, що $R + h$ можна замінити на R.

Тоді

$$F = G\frac{M}{R^2}m$$

Порівнюючи цю формулу з виразом для сили тяжіння $F = mg$, бачимо, що прискорення сили тяжіння може бути виражено через гравітаційну сталу, масу Землі і радіус Землі формулою

$$g = G\frac{M}{R^2}. \tag{19.13}$$

Підставимо вираз (19.12) в формулу (19.11). З урахуванням (19.13) отримаємо

$$E_p = -G\frac{Mm}{R} + mgh\ .$$

Прийнявши за нуль потенціальної енергії енергію тіла, що знаходиться на поверхні Землі, приходимо до формули

$$E_p = mgh.$$

Наведемо інші приклади потенціальної енергії.

Потенціальна енергія розтягнутої пружини. Нехай пружина деформується (наприклад, розтягується) під дією зовнішньої сили $F = kx$, де x - подовження пружини під дією цієї сили. Зовнішня сила здійснює роботу

$$A_{зовн} = \frac{1}{2}kx^2 \text{ (див. § 17).}$$

Така робота є мірою енергії, що перейшла до розтягнутої пружини. Робота йде на збільшення запасу енергії розтягнутої пружини. Якщо надати пружині можливість стискатися, то вона передасть енергію деформації тому тілу, яке його розтягує. Таким чином, потенціальна енергія пружини, розтягнутої (стиснутої) на x, дорівнює

$$E_{\text{p}} = ½\, k\, x^2, \tag{19.14}$$

де x - подовження (стискування) пружини, k - її жорсткість. Потенціальна енергія недеформованою пружини приймається рівною нулю ($E_{\text{p}} = 0$ при $x = 0$). Подібно пружині всяке пружне тіло, що знаходиться в деформованому стані, має деяку потенціальну енергією, що зветься енергією пружної деформації.

Потенціальна енергія кулонівської взаємодії двох точкових зарядів

$$E_n = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r}. \tag{19.15}$$

Знак потенціальної енергії залежить від знаків зарядів. У разі відштовхування зарядів ($q_1q_2 > 0$) потенціальна енергія є додатною, у разі притягання (q1q2 <0) – від'ємною.

§ 19, *б. Поняття про фізичне поле*

Нехай два тіла A і B знаходяться на деякій відстані один від одного і взаємодіють , наприклад , притягуються за законом всесвітнього тяжіння.

Як здійснюється взаємодія ? Сучасна фізика вважає , що тіло A не діє на тіло B безпосередньо. Воно створює навколо себе гравітаційне поле . Це поле і впливає на інше тіло B і проявляється у вигляді сили, що діє на нього.

Природно , що тіло B створює навколо себе своє поле , яке в свою чергу діє на тіло A.

Таким чином , кожне тіло створює в оточуючому його просторі особливий стан , що зветься полем сил. Воно проявляє себе в силовому впливі тіл на інші тіла , що поміщаються в яку-небудь точку цього простору.

Фізичні поля не тільки здійснюють взаємодію між тілами ; вони можуть існувати вільно , незалежно від тіл, що їх створили (наприклад , електромагнітні хвилі). Тому їх слід розглядати як особливу форму матерії .

Кожному типу взаємодії в природі відповідають певні фізичні поля. Прикладами фізичних полів можуть служити електромагнітне і гравітаційне поля , поле ядерних сил.

На прикладі гравітаційного поля познайомимося з кількісною характеристикою поля - напруженістю поля.

Напруженість поля $\boldsymbol{G}$ чисельно дорівнює відношенню сили тяжіння , що діє на пробне тіло , до маси цього тіла:

$$\boldsymbol{G} = \frac{\boldsymbol{F}}{m} . \qquad (19.16)$$

Відповідно до закону тяжіння на тіло масою m, що знаходиться в гравітаційному полі Землі (масою M) на відстані r від її центра, діє сила, що за модулем дорівнює

$$F = G\frac{mM}{r^2} .$$

Розділивши цю силу на масу m, отримаємо модуль напруженості гравітаційного поля Землі в точці, віддаленої від центра Землі на відстань r.

$$g = G\frac{M}{r^2} . \qquad (19.17)$$

За своїм фізичним змістом напруженість гравітаційного поля збігається з прискоренням вільного падіння тіла m. Оскільки напруженість не залежить від маси тіла, то всі тіла, незалежно від їх маси, рухаються в даній точці гравітаційного поля з однаковим прискоренням. Саме тому всі тіла падають в полі тяжіння з однаковим прискоренням g.

Напруженість поля є вектором, спрямованим в ту ж сторону, що і сила тяжіння.

Розділимо величину взаємної потенціальної енергії двох тяжіючих мас M і m

$$E_p = -G\frac{Mm}{r}$$

на масу m. Тоді отримаємо величину

$$\varphi = \frac{E_p}{m} = -G\frac{M}{r}, \tag{19.18}$$

яка визначається тільки масою *M* і відстанню від матеріальної точки *M* до даної точки поля. Цю величину називають *потенціалом* гравітаційного поля Очевидно, що потенціал - це потенціальна енергія одиничної маси, поміщеної в дану точку поля.

§ 19, *в*. Зв'язок консервативної сили і потенціальної енергії

Якщо відома потенціальна енергія частинки в силовому полі, то можна знайти консервативну силу, що діє на частинку в кожній точці такого поля.

Нехай частинка здійснила довільне нескінченно мале переміщення

$$d\boldsymbol{r} = dx\,\boldsymbol{i} + dy\,\boldsymbol{j} + dz\,\boldsymbol{k}.$$

Елементарна робота сіли $\boldsymbol{F}$, що діє на неї, при такому переміщенні буде дорівнювати убутку потенціальної енергії:

$$dA = \boldsymbol{F}d\boldsymbol{r} = E_{p1} - E_{p21} = -\Delta E_p.$$

При досить малих приростах аргументів повний приріст функції можна замінити її повним диференціалом

$$\Delta E_p \approx dE_p.$$

Тоді в проекціях це рівняння запишеться так:

$$F_x\,dx + F_y dy + F_z dz = -dE_p. \tag{19.19}$$

З теорії функцій декількох змінних відомо, що вираз

$$dE_p = \frac{\partial E_p}{\partial x}dx + \frac{\partial E_p}{\partial y}dy\frac{\partial E_p}{\partial z}dz \tag{19.20}$$

називається повним диференціалом функції $E_p(x, y, z)$ і з точністю до малих другого порядку малості виражає приріст функції при зміні аргументів x на dx, y на dy, z на dz. Символом ∂ тут позначається так звана частинна похідна функції E_p. на відміну від символу d, який застосовується при диференціюванні функції однієї змінної . Частинна похідна виходить, якщо при диференціюванні $E_p(x,y,z)$ розглядати як функцію одного аргументу x, а інші два аргументи y, z вважати при цьому постійними .

Порівняння виразів (19.19) і (19.20) показує, що

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x},\ F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y},\ F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z}. \qquad (19.21)$$

Ми знайшли проекції вектора сили $\boldsymbol{F}$ на координатні осі. Звідси можна знайти і сам вектор, для чого помножимо ці формули на одиничні вектори координатних осей $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ і додамо.

$$\boldsymbol{F} = F_x\boldsymbol{i} + F_y\boldsymbol{j} + F_z\boldsymbol{k} = -\left((\frac{\partial E_p}{\partial x})\boldsymbol{i} + (\frac{\partial E_p}{\partial y})\boldsymbol{j} + (\frac{\partial E_p}{\partial z})\boldsymbol{k} \right). \qquad (19.22)$$

У математиці вектор з компонентами $\frac{\partial E_p}{\partial x}, \frac{\partial E_p}{\partial y}, \frac{\partial E_p}{\partial z}$ називається *градієнтом* функції $E_\text{р}$ і позначається або символом grad $E_\text{р}$, або символом ∇E_p:

$$\boldsymbol{F} = -\,\text{grad}\ E_p,\ \text{або}\ \boldsymbol{F} = -\nabla E_p \qquad (19.23)$$

Вектор градієнта скалярної функції спрямований у бік якнайшвидшого зростання функції, а модуль цього вектора дорівнює швидкості її зростання.

Таким чином, *консервативна сила дорівнює градієнту потенціальної енергії частинки, взятому з протилежним знаком.*

Приклад. Як вже було показано, сила пружності є потенціальною. Потенціальна енергія розтягнутої пружини визначається виразом

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2,$$

де x - подовження пружини, k - жорсткість. Направимо вісь Ox уздовж осі пружини, закріпивши один її кінець, а другий будемо розтягувати рукою. Тоді $E_\text{р}$ буде функцією тільки однієї координати x. Розтягнута пружина діє на руку з силою

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x} = -\frac{dE_p}{dx} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}kx^2\right) = -kx.$$

Ми отримали відомий результат - проекція пружної сили на вісь Ox дорівнює $F_x = -kx$.

§ 20 . Кінетична енергія

Тіла можуть мати запас роботи , тобто мати енергією не тільки тому , що вони займають певне положення , але й тому , що вони мають деяку швидкість .

Запас роботи , яку може виконати тіло, що рухається, до повної зупинки , є *кінетичною енергією* тіла.

Для обчислення кінетичної енергії припустимо , що матеріальна точка масою m рухається зі швидкістю v по криволінійній траєкторії.

Згідно з другим законом Ньютона ,

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{F} \ , \qquad (20.1)$$

де $\boldsymbol{F}$ - рівнодіюча всіх сил, прикладена до точки. Помножимо праву і ліву частини рівності (20.1) скалярно на $d\boldsymbol{s} = \boldsymbol{v}\,dt$.

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\boldsymbol{v}dt = \boldsymbol{F}d\boldsymbol{s} \ . \qquad (20.2)$$

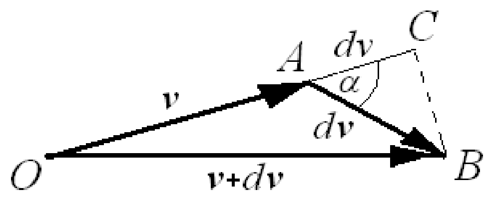


Рис.20.1

Розглянемо окремо скалярний добуток $\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{v}$ вектора $\boldsymbol{v}$ на його елементарний приріст $d\boldsymbol{v}$ (рис. 20.1).

За визначенням скалярного добутку

$$\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{v} = v \cdot AB \cdot \cos\alpha = v \cdot AC = \ v\,dv.$$

Тут dv є елементарний приріст модуля (довжини) вектора $\boldsymbol{v}$.

Тепер перетворимо ліву частину рівняння (20.2) до виду повного диференціала:

$$mvdv = \frac{m}{2}d(v^2) = d\left(\frac{mv^2}{2}\right).$$

У правій частині (20.2) вийшов вираз для елементарної роботи dA. У підсумку отримаємо:

$$dA = \boldsymbol{F}d\boldsymbol{s} = d\left(\frac{mv^2}{2}\right), \qquad (20.3)$$

З останньої формули випливає, що елементарна робота, здійснена над матеріальною точкою силою $\boldsymbol{F}$, йде на збільшенні деякої величини $\frac{mv^2}{2} + const$.

Функція , зміна якої дорівнює роботі всіх сил , діючих на частинку, називається ***кінетичної енергією.***

Робота є мірою зміни енергії . Маючи кінетичну енергію , тіло може виконати роботу .

Кінетична енергія є функцією стану , тобто її значення не залежить від попередніх станів системи і повністю визначається її наявним станом.

Як бачимо , кінетична енергія визначається з точністю до довільної сталої . Зазвичай вважають , що нерухома частинка кінетичною енергією не володіє , так що довільну сталу вважають рівною нулю:

Половина добутку маси частинки на квадрат її швидкості називається кінетичною енергією цієї частинки:

$$E_{кин} = \frac{mv^2}{2} \ . \qquad (20.4)$$

Аналогічне твердження справедливе також для системи частинок - кінетична енергія системи матеріальних точок дорівнює сумі їх кінетичних енергій.

Кінетичну енергію матеріальної точки можна також виразити через її імпульс $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$:

$$E_{кин} = \frac{p^2}{2m}. \qquad (20.5)$$

(Інші позначення кінетичної енергії T або W).

Підкреслимо практично важливий висновок: ***приріст кінетичної енергії*** *системи при її переміщенні з положення 1 в положення 2, що відбувається під дією прикладених до системи зовнішніх і внутрішніх сил, дорівнює* ***сумі робіт всіх сил*** *на даному переміщенні*

$$\Delta E_k = E_{k2} - E_{k1} = \Sigma A^{зовн} + \Sigma A^{внутр}. \qquad (20.6)$$

Користуючись цим законом, можна вирішувати багато завдань динаміки, наприклад, визначити характер руху тіл, не розглядаючи сили і не вирішуючи системи рівнянь, записаних на основі 2-го закону Ньютона.

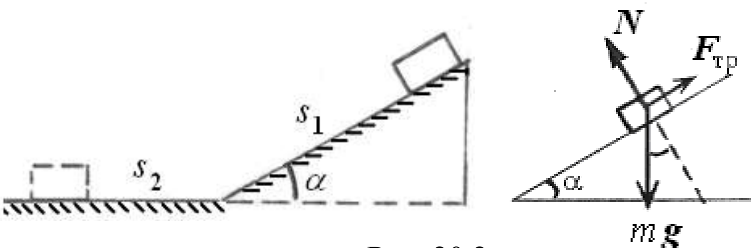


Рис. 20.2.

Приклад. Тіло рухається зі стану спокою спочатку вниз по похилій площині, а потім по горизонтальній поверхні до зупинки. Довжина похилої площини s_1, кут її нахилу до горизонту $\alpha = 10°$. Визначити коефіцієнт тертя μ на всьому шляху, якщо тіло проходить по горизонтальній поверхні такий же шлях s_2, що і по похилій площині

Робота всіх сил, що діють на тіло, витрачається на збільшення кінетичної енергії тіла:

$$A^{всіх} = E_{k2} - E_{k1} = 0.$$

Прирощення $\Delta E_k = 0$, оскільки на вершині похилої площини тіло перебувало в стані спокою, а в кінці горизонтальної ділянки тіло зупинилося. На ділянці s_1 на тіло діють сили тяжіння, нормальної реакції похилої площини і тертя, на ділянці s_2 - тільки сила тертя. Сумарна робота всіх сил дорівнює:

$$A^{всіх} = mg \cdot s_1 \cdot \cos(90 - \alpha) - \mu mg s_1 \cos\alpha - \mu mg\, s_2 = 0;$$

або

$$mg \cdot s_1 \cdot (\sin\alpha - \mu\cos\alpha - \mu) = 0.$$

Звідки

$$\mu = \frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha}.$$

Підставляючи числа, знайдемо $\mu = 0{,}087$.

21. Закон збереження механічної енергії

Повною механічною енергією E частинки називається сума її кінетичної $E_к$ і потенціальної $E_п$ енергії

$$E = E_к + E_п. \tag{21.1}$$

Нехай частинка рухається в поле консервативних сил. При переході з точки *1* у точку *2* здійснюється робота сил поля, що дорівнює убутку потенціальної енергії $A_{12}= E_{п1} – E_{п2}$. З іншого боку, ця робота дорівнює приросту кінетичної енергії частинки. Прирівнявши обидва вирази для роботи, отримаємо співвідношення

$E_{п1} – E_{п2} = E_{к2} – E_{к1}$., з якого випливає, що

$$E_{к1} + E_{п1} = E_{к2} + E_{п2}. \tag{21.2}$$

Формула означає, що ***повна механічна енергія частинки, що рухається в стаціонарному полі консервативних сил, залишається постійною.*** Це твердження виражає закон збереження механічної енергії для системи, що складається з однієї частинки.

У разі однорідного поля сили тяжіння повна механічна енергія визначається виразом

$$E = \frac{mv^2}{2} + mgh. \tag{21.3}$$

Кінетична і потенціальна енергії можуть перетворюватися одна в одну. Однак, якщо на частку діють тільки консервативні сили, повна енергія залишається постійною.

Справедливість закону збереження механічної енергії легко перевірити на прикладі вільного падіння тіла на Землю.

Нехай тіло вільно падає з висоти H. Спочатку його кінетична енергія дорівнює нулю, а потенціальна енергія дорівнює mgH. Наприкінці падіння швидкість тіла дорівнює $v = \sqrt{2gH}$.

Отже, кінетична енергія тіла дорівнює

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{m(\sqrt{2gH})^2}{2} = mgH.$$

Потенціальна енергія в кінці падіння дорівнює нулю. Сума енергій в обох положеннях дорівнює mgH. Таким чином, потенціальна енергія перетворилася на еквівалентну кількість кінетичної енергії.

Аналогічно формулюється *закон збереження механічної енергії та для системи тіл.* ***Повна механічна енергія системи тіл, що знаходяться під дією тільки консервативних сил, залишається постійною***.

$$E = E_к + E_п = \text{const}. \qquad (21.4)$$

Відзначимо , що закон справедливий як для замкненої , так і незамкненої систем . Важливо тільки , щоб система була консервативною , тобто в ній діяли тільки потенціальні (консервативні) сили .

Збереження енергії - фундаментальний закон природи. В основі цього закону лежить така властивість простору - часу як *однорідність часу* , тобто незмінність фізичних законів *відносно* зміни початку відліку часу.

Наприклад , під час вільного падіння тіла зміна кінетичної і потенціальної енергій , а також швидкість падіння і пройдений шлях залежать тільки від початкової швидкості і часу падіння , але не залежать від вибору початкового моменту відліку часу.

При наявності сил тертя і сил опору середовища , робота яких від’ємна, повна механічна енергія системи зменшується , переходячи у внутрішню енергію тіл, що призводить до їх нагрівання. Такий процес називається *дисипацією* (розсіюванням) енергії. Сили , що призводять до дисипації енергії , називаються дисипативними .

Закон збереження енергії - один з основних законів природи. Він має загальний характер і застосовується до всіх без винятку процесів, що відбуваються в природі. Повна кількість енергії в ізольованій системі тіл і полів завжди залишається постійною ; енергія ні за яких процесів не зникає і не створюється знову , вона лише може переходити з однієї форми руху матерії в іншу.

Приклад . З якої найменшої висоти повинен скочуватися велосипедист , щоб не впасти у верхній точці «мертвої петлі » (рис. 21.1) ? Тертям знехтувати.

Повна механічна енергія велосипедиста дорівнює: на старті - його потенціальній енергії mgH; у верхній точці петлі - сумі кінетичної і потенціальної енергії

$$mg2R + mv^2/2.$$

За законом збереження механічної енергії:

$$mgH = mg2R + mv^2/2.$$

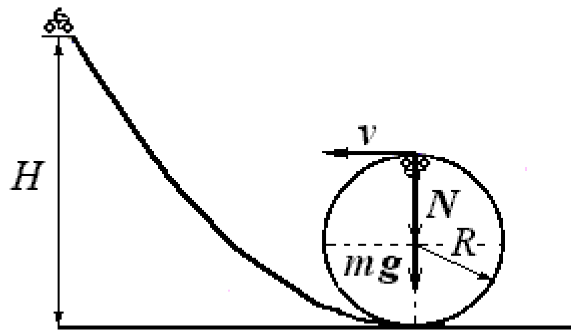


Рис. 21.1

Розглянемо граничний випадок, коли сила, що діє на велосипедиста з боку петлі - сила реакції $\boldsymbol{N}$ - у верхній точці зменшується до нуля (момент відриву). У цьому випадку нормальне прискорення надається тільки силою тяжіння $\boldsymbol{mg}$. Другий закон Ньютона тоді запишеться так:

$$\frac{mv^2}{R} = mg .$$

Вирішуючи спільно обидва рівняння, отримаємо $H = (5/2)R.$

§ 22. Зіткнення тіл

Розглянемо два граничних види співудару - абсолютно пружний і абсолютно непружний удар.

Ударом тіл називають сукупність явищ, які виникають при короткочасній їх взаємодії внаслідок зіткнення.

Тривалість удару для макротіл зазвичай дуже мала ($\sim 10^{-4} - 10^{-5}$с), внаслідок цього при ударах можуть розвиватися досить великі потужності Удар супроводжується зміною швидкостей тіл.

При зіткненні тіла більшою або меншою мірою деформуються. При цьому кінетична енергія тіл частково або повністю переходить в потенціальну енергію пружної деформації і у внутрішню енергію тіл . Збільшення внутрішньої енергії супроводжується нагріванням тіл.

При ударах виникають досить великі сили , у порівнянні з якими постійно діючими силами (силами тяжіння та ін) можна знехтувати і вважати систему замкнутою. Це дає можливість застосовувати закон збереження імпульсу.

Абсолютно пружним називається такий удар , після якого в тілах не залишається ніяких деформацій , а механічна енергія до і після зіткнення не змінюється. Близьким до такого удару є зіткнення сталевих або більярдних куль .

Нехай дві абсолютно пружних кулі з масами m_1 і m_2 до удару рухаються поступально зі швидкостями $\boldsymbol{v}_1$ і $\boldsymbol{v}_2$, спрямованими в одну сторону вздовж лінії їх центрів (центральний удар) (рис.22.1). Знайдемо швидкості куль $\boldsymbol{u}_1$ і $\boldsymbol{u}_2$ після зіткнення.

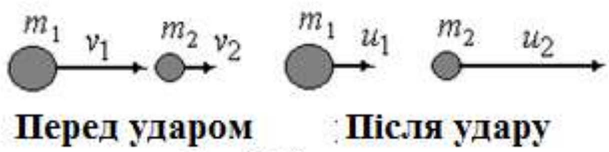


Рис.22.1

Для вирішення цього завдання скористаємося двома законами збереження - імпульсу і енергії.

За законом збереження імпульсу

$$m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2 = m_1\boldsymbol{u}_1 + m_2\boldsymbol{u}_2.$$

За законом збереження механічної енергії (кулі рухаються в горизонтальній площині, і їх потенціальна енергія не змінюється)

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}.$$

Спільне рішення цих рівнянь дає формули для швидкостей куль після удару:

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{2m_2\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_1(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2},$$
$$\boldsymbol{u}_2 = \frac{2m_1\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2}. \qquad (22.1)$$

Проаналізуємо отримані співвідношення. Розглянемо окремі випадки.

1) . Маси куль однакові ($m_1 = m_2 = m$). Тоді з (22.1) випливає, що $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{v}_2$; $\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{v}_1$, , тобто під час удару кулі обмінюються швидкостями.

2) Маса другої кулі у багато разів більше маси першої кулі ($m_2 >> m_1$). При цьому друга куля до удару нерухома ($\boldsymbol{v}_2 = 0$). Тоді отримаємо $\boldsymbol{u}_2 \approx 0$ (важка куля залишається нерухомою) і $\boldsymbol{u}_1 \approx -\boldsymbol{v}_1$ (легка куля відскакує від нерухомої масивної кулі і рухається у зворотний бік з тією ж швидкістю).

3) Маса кулі, що налітає, набагато перевершує масу тієї, що покоїться : $m_1 >> m_2$, $\boldsymbol{v}_2 = 0$. Тоді $\boldsymbol{u}_1 \approx \boldsymbol{v}_1$ (важка куля не змінює своєї швидкості) і $\boldsymbol{u}_2 = 2\,\boldsymbol{v}_1$.

Абсолютно непружним називають такий удар , після якого зберігаються деформації тіл, кінетична енергія тіл частково або повністю перетворюється у внутрішню енергію ; а після удару тіла з'єднуються і рухаються як одне ціле (рис. 22.2)

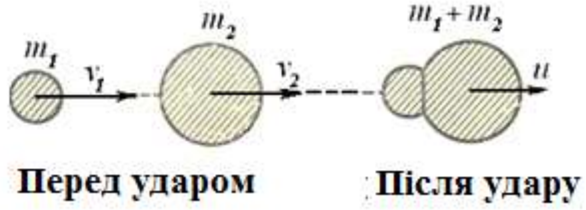


Рис. 22.2

Прикладами є зіткнення пластилінових куль, захоплення вільного електрона позитивно зарядженим іоном та ін.

У разі абсолютно непружного удару закон збереження механічної енергії непридатний, тому що частина механічної енергії переходить в тепло. Для центрального удару закон збереження імпульсу дає

$$m_1 v_1 + m_2 \boldsymbol{v}_2 = (m_1 + m_2)\boldsymbol{u},$$

звідки швидкість $\boldsymbol{u}$ тіла, що утворилося,

$$\boldsymbol{u} = \frac{m_1 \boldsymbol{v}_1 + m_2 \boldsymbol{v}_2}{m_1 + m_2}. \qquad (22.2)$$

Внаслідок непружної деформації тіл під час удару їх кінетична енергія частково перетворюється у внутрішню енергію Q тіла, що утворилося. Роботу непружної деформації тіл знайдемо, якщо від сумарної кінетичної енергії обох тіл віднімемо кінетичну енергію тіла, що утворилося,

$$Q = A_{деф} = \left(\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}\right) - \frac{(m_1 + m_2)u^2}{2},$$

або з урахуванням (22.2) втрата кінетичної енергії

$$A_{деф} = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}(v_1 - v_2)^2. \qquad (22.3)$$

Якщо друге тіло до удару є нерухомим ($v_2 = 0$), то вираз спрощується

$$A_{деф} = \frac{m_1 v_1^2}{2}\frac{m_2}{m_1 + m_2} = E_{k1}\frac{m_2}{m_1 + m_2}. \qquad (22.4)$$

З формули (22.4) випливають важливі практичні висновки.

1. При використанні удару *для зміни форми* нерухомого тіла (наприклад, для кування металу, дроблення крихких тіл) необхідно якомога більшу частину кінетичної енергії рухомого тіла перетворити в роботу деформації. Для цього необхідно збільшити масу m_2 нерухомого тіла (наприклад, поклавши його на масивне ковадло). При $m_2 >> m_1$ дріб у формулі (22.4) $\frac{m_2}{m_1 + m_2} \to 1$ і майже вся енергія тіла, що налітає, перетворюється в роботу деформації: $A_{деф} \approx E_{k1}$.

2. Якщо удар застосовується для *переміщення* нерухомого тіла з метою подолання опору (забивання цвяхів, паль в землю тощо), то бажано зменшити роботу деформації і максимально зберегти кінетичну енергію обох тіл після удару. Цього

можна досягти, зменшивши масу m_2 нерухомого тіла (наприклад, цвяха) і збільшивши масу m_1 тіла, що ударяє (наприклад, молотка). При $m_1 >> m_2$ дріб у формулі (22.4) $\frac{m_2}{m_1+m_2} \to 0$ і робота деформації $A_{деф} \to 0$.

Приклади . 1 . Для здійснення ланцюгової реакції поділу ядер урану необхідно уповільнювати нейтрони поділу , тобто зменшувати їх кінетичну енергію від 2 МеВ до 0,025 еВ. Особливо важливо , щоб зменшення енергії нейтрона відбувалося великими порціями , щоб уникнути значень енергії нейтронів 7 еВ , при якій вони резонансно поглинаються , і ланцюгова реакція обривається.

Сповільнювачем нейтронів служить важка вода. Нейтрони стикаються з ядрами важкого водню - дейтерію , маса ядра якого всього в 2 рази більше маси нейтрона. Будемо вважати зіткнення абсолютно пружним ударом. Визначимо відношення енергії , втраченої нейтроном при одному зіткненні , до його первісної енергії. Енергія , втрачена нейтроном $\Delta E_{к1}$ (масою m_1), дорівнює енергії , яку отримало ядро дейтерію (масою $2m_1$) :

$$\Delta E_{k1} = E'_{k2} = \frac{(2m_1)u_2^2}{2}.$$

Скориставшись формулою (22.2) при $v_2 = 0$, отримаємо

$$u_2 = \frac{2m_1}{m_1 + 2m_1} v_1 = \frac{2}{3} v_1.$$

Тоді

$$\frac{\Delta E_{k1}}{E_{k1}} = \frac{(2m_1)u_2^2}{2} \frac{2}{m_1 v_1^2} = 2\left(\frac{u_2}{v_1}\right)^2 = 2\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}.$$

Таким чином, при одному центральному зіткненні з ядром дейтерію нейтрон втрачає 8/9 своєї енергії, тобто уповільнення відбувається дуже ефективно і енергія нейтрона зменшується великими порціями. Можна показати, що для зменшення енергії нейтрона від 2 МеВ до 0,025 еВ має статися всього 7 зіткнень.

2. При нецентральному (косому) пружному зіткненні куль (рис. 22.3) однакової маси згідно з законом збереження імпульсу:

$$m\mathbf{v}_1 = m\mathbf{u}_1 + m\mathbf{u}_2.$$

За законом збереження енергії

$$\frac{mv_1^2}{2} = \frac{mu_1^2}{2} + \frac{mu_2^2}{2}.$$

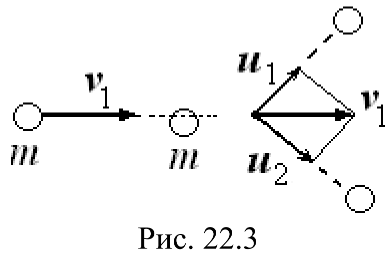


Рис. 22.3

Після скорочення мас в обох рівняннях, отримаємо

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2.$$

$$v_1^2 = u_1^2 + u_2^2.$$

З останнього рівняння випливає, що трикутник, в якому $\mathbf{v}_1$ - гіпотенуза, має бути за теоремою Піфагора прямокутним. Отже, швидкості куль після такого удару мають бути спрямовані під прямим кутом одна до одної. Цей висновок можна простежити в більярдній грі - при косому ударі кулі завжди розлітаються під кутом в 90°.

Контрольні питання .

1 . Чи може сила тертя виконувати додатну роботу?

2 . Тіло масою m піднімається на висоту h рівномірно по похилій площині , яка утворює з горизонтом кут α . Яку роботу виконують : зовнішня сила (сила тяги) , сила тяжіння, сила тертя і сила нормальної реакції ? Коефіцієнт тертя дорівнює μ .

3 . Які сили називаються консервативними ? Наведіть приклади консервативних сил. Чи є сила тертя консервативною силою ?

4 . У системі діють неконсервативні сили . Чи може виконуватися в такій системі закон збереження механічної енергії?

5 . Чи є обов'язковою вимога замкненості системи для виконання закону збереження механічної енергії?

6 . Чим пояснюється довільність вибору початкового рівня відліку потенціальної енергії?

7 . Який зв'язок між кінетичної енергією матеріальної точки і роботою прикладених до точки сил?

8 . Який зв'язок між потенціальною енергією матеріальної точки і роботою консервативних сил?

9 . За якої умови уповільнення нейтронів в ядерному реакторі при пружних зіткненнях є найбільш ефективним?

10 . За якої умови тіло, що вдаряє, відскакує від тіла, яке вдаряють, практично без втрати кінетичної енергії? Який імпульс при цьому отримує тіло, яке вдаряють?

11 . Оцініть потужність виділення тепла при гальмуванні вантажівки.

12 . Між двома тілами різної маси поміщена стиснута пружина . Потім пружину відпустили. Як співвідносяться кінетичні енергії , яких набудуть тіла ?

Розділ 5. **ЗАКОН ЗБЕРЕЖЕННЯ МОМЕНТА ІМПУЛЬСУ**

§ 23. Момент сили

Нехай окрема частинка (рис. 23.1) рухається відносно точки *O* під дією деякої сили $\boldsymbol{F}$. Положення частинки визначається радіус-вектором $\boldsymbol{r}$, проведеним з точки *O* в точку прикладання сили.

Моментом сили ***відносно точки O*** *називається* ***вектор M****, що дорівнює векторному добутку радіус-вектора* **r** *точки прикладання сили на вектор сили* ***F*****:**

$$\boldsymbol{M} = [\boldsymbol{rF}]. \qquad (23.1)$$

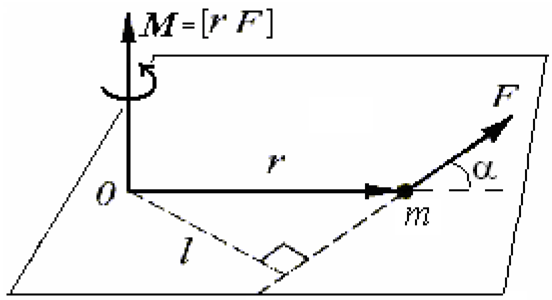


Рис. 23.1.

Спрямований вектор моменту сили $\boldsymbol{M}$ перпендикулярно до площини, в якій лежать сила і точка *O*, причому так, що напрям обертання, обумовлений силою, і напрям вектора $\boldsymbol{M}$ пов'язані правилом правого гвинта - поворот головки гвинта в напрямі сили спричиняє переміщення гвинта в напрямі вектора $\boldsymbol{M}$.

Модуль моменту сили

$$M = Fr\sin\alpha = Fl. \qquad (23.2)$$

Плечем l сили називають довжину перпендикуляра, опущеного з точки *O* на лінію дії сили (рис. 23.1). Таким чином, модуль моменту сили дорівнює добутку модуля сили *F* на її плече *l*.

Оскільки напрям вектора $\boldsymbol{M}$ визначається за певною умовою, його називають псевдовектором (аксіальним вектором).

Нехай довільно спрямована сила $\boldsymbol{F}$ прикладена до однієї з точок твердого тіла, яке може обертатися навколо закріпленої осі (рис 23.2).

Розкладемо силу $\boldsymbol{F}$ на три взаємно перпендикулярних складових. Одна зі складових $\boldsymbol{F}_{||}$, яка є паралельною осі, обертати тіло навколо осі не може, вона лише згинає вісь обертання. Друга складова $\boldsymbol{F}_{\perp}$, перпендикулярна осі, також не може обертати тіло. Отже, не всяка сила може викликати обертання. Ми повинні враховувати дію тільки складової $\boldsymbol{F}_{\tau}$, що лежить у площині, перпендикулярній до осі обертання і спрямованій по дотичній до кола, яке описує точка прикладання сили. Сила F_{τ} називається *обертаючою* силою.

Обертаюча дія сили визначається її чисельним значенням і відстанню від осі до лінії дії сили.

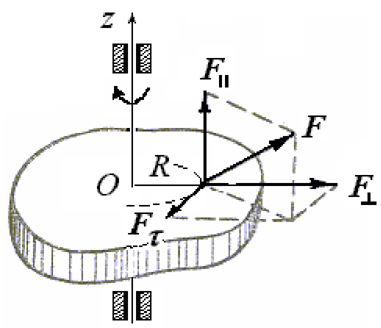


Рис. 23.2.

Розглянемо обертання твердого тіла навколо осі *z* під дією лише обертаючої сили (рис. 23.3). Її позначимо літерою $\boldsymbol{F}$, опускаючи індекс τ.

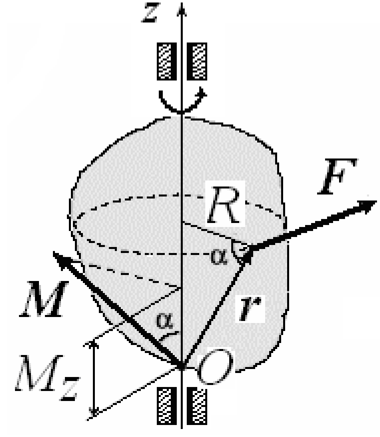


Рис. 23.3

Момент сили ***відносно осі*** визначається як скалярна величина, що дорівнює *проекції M_z на вісь z вектора моменту сили* $\boldsymbol{M} = [\boldsymbol{rF}]$ *відносно деякої точки O, яка лежить на цій же осі (рис. 23.3).*

Тут $\boldsymbol{r}$ - радіус-вектор, який визначає положення точки прикладання сили $\boldsymbol{F}$ відносно точки O.

Покажемо, що вибір цієї точки на осі значення не має. Оскільки радіус-вектор точки прикладання сили $\boldsymbol{r}$ і сила $\boldsymbol{F}$ взаємно перпендикулярні (рис. 23.3), то модуль векторного добутку $[\boldsymbol{rF}]$ дорівнює

$$M = rF \sin 90^{o} = rF .$$

Тоді проекція вектора $\boldsymbol{M}$ на вісь z

$$M_z = M \cos \alpha = rF \cos \alpha. \qquad (23.3)$$

Як випливає з рис. 23.3

$$r \cos \alpha = R.$$

Відрізок R називають плечем сили відносно осі.

Плечем R сили $\boldsymbol{F}$ відносно даної осі z називається найкоротша відстань між віссю обертання тіла і лінією дії сили.

Таким чином, момент сили відносно осі визначається тільки модулем і плечем сили, а вони не залежать від положення точки O:

$$M_z = F\,R. \qquad (23.4)$$

Момент сили вимірюється в ньютон-метрах. (1 Нм).

Приклад. Нехай на вал з диском діють дві сили $\boldsymbol{f}$ і $\boldsymbol{F}$ (рис. 23.4).

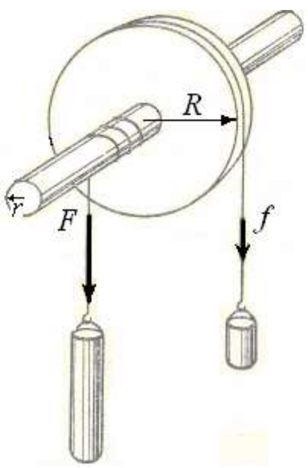


Рис. 23.4.

Дослід показує, що рівновага настає за умови $fR = Fr$, тобто коли моменти сил є рівними за величиною і протилежними за напрямком. Моменти сил, що обертають за годинниковою стрілкою, вважаються додатними, а проти годинникової стрілки – від’ємними.

§ 24. Момент імпульсу частинки

Нехай окрема частинка масою m рухається зі швидкістю $\boldsymbol{v}$ (рис. 24.1). Імпульс цієї частинки $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$. Положення частинки відносно деякої точки O визначається радіус - вектором $\boldsymbol{r}$.

Моментом імпульсу частинки відносно точки О називається **вектор $\boldsymbol{L}$**, що дорівнює векторному добутку радіус-вектора $\boldsymbol{r}$ на імпульс $\boldsymbol{p}$:

$$\boldsymbol{L} = [\boldsymbol{rp}] = [\boldsymbol{r}, m\boldsymbol{v}]. \qquad (24.1)$$

Модуль момента імпульсу дорівнює

$$L = rp \sin \alpha = lp, \qquad (24.2)$$

де α-кут між векторами $\boldsymbol{r}$ і $\boldsymbol{p}$, $l = r \sin \alpha$ - відстань від точки O до прямої, уздовж якої спрямований імпульс частинки - *плече імпульсу*.

Напрям вектора $\boldsymbol{L}$ є перпендикулярним до площини, в якій лежать вектори $\boldsymbol{r}$ і $\boldsymbol{p}$. Напрям обертання навколо точки O і напрям вектора $\boldsymbol{L}$ утворюють правогвинтову систему.

З визначення випливає, що $\boldsymbol{L}$, як і $\boldsymbol{M}$, є псевдовектором (аксіальним, або осьовим вектором).

Частинка має момент імпульсу, незалежно від форми траєкторії, вздовж якої вона рухається. Розглянемо два окремих випадки.

1. Частинка рухається уздовж прямолінійної траєкторії з постійною швидкістю (рис. 24.1). При такому русі плече l залишається постійним. Модуль момента імпульсу відносно точки O

$$L = mvl \tag{24.3}$$

і напрям вектора $\boldsymbol{L}$ не змінюються.

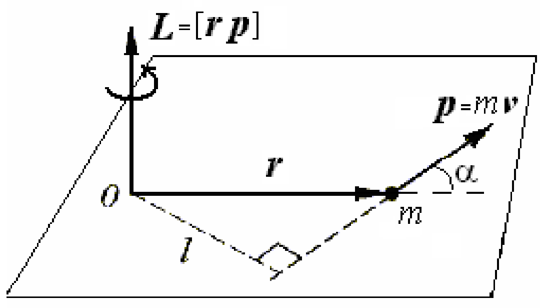


Рис. 24.1.

2. Частинка рухається по колу радіуса r з постійною швидкістю $\boldsymbol{v}$ (ріс.24.2).

Плече імпульсу відносно центра кола є постійним. Модуль момента імпульсу відносно центра кола O дорівнює

$$L = mvr \tag{24.4}$$

і залишається постійним. Незважаючи на безперервну зміну напряму вектора $\boldsymbol{p}$, напрям вектора $\boldsymbol{L}$ залишається постійним.

З'ясуємо, яка механічна величина є відповідальною за зміну вектора $\boldsymbol{L}$. Продиференціюємо вираз (24.1) за часом:

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \frac{d}{dt}[\boldsymbol{rp}] = \left[\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\boldsymbol{p}\right] + \left[\boldsymbol{r}\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}\right].$$

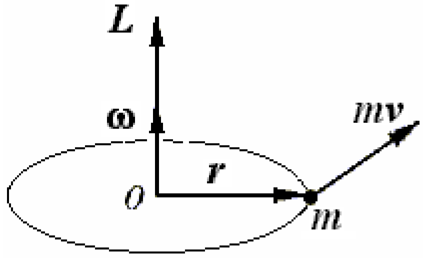


Рис. 24.2

Оскільки похідна радіус-вектора за часом є швидкістю частинки, $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{v}$, то перший доданок набуває вигляду $[\boldsymbol{v}, m\boldsymbol{v}]$ і дорівнює нулю, оскільки є векторним добутком колінеарних векторів (вектора самого на себе).

У другому доданку, згідно з другим законом Ньютона, похідну імпульсу можна замінити силою, що діє на тіло, $\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{F}$.

Тоді виходить

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = [\boldsymbol{rF}].$$

У правій частині рівності стоїть момент сили $\boldsymbol{F}$ відносно тієї ж точки, відносно якої взятий момент імпульсу $\boldsymbol{L}$. Отже, ми приходимо до співвідношення

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{M} \tag{24.5}$$

гідно з яким *похідна за часом момента імпульсу* ***частинки відносно деякої точки*** *дорівнює моменту діючої сили відносно тієї ж точки.*

Рівняння (24.5) називають *основним законом динаміки обертального руху матеріальної точки або рівнянням моментів.* За формою це рівняння аналогічно другому закону Ньютона $\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{F}$, тільки замість імпульсу частинки ***p*** стоїть момент імпульсу ***L***, а замість сили ***F*** - момент сили ***M***.

З рівняння моментів (24.5) випливає, що якщо ***M*** = 0, то ***L*** = const, тобто момент імпульсу частинки залишається постійним у відсутності моментів сил, діючих на неї.

Приклади. 1. Нехай деяка планета *А* рухається в полі тяжіння Сонця *С* (рис. 24.3).

На планету діє лише сила тяжіння ***F*** з боку Сонця . Оскільки за законом всесвітнього тяжіння напрям цієї сили весь час проходить через центр Сонця , то момент ***M*** сили ***F*** відносно центра Сонця дорівнює нулю , і, отже , момент імпульсу ***L*** планети залишатиметься постійним . Якщо вектор момента імпульсу L зберігається , то зберігається і його напрям.

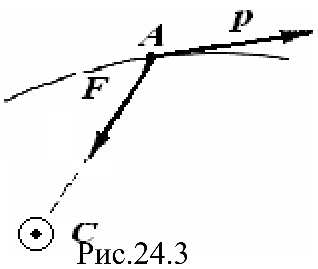


Рис.24.3

Момент імпульсу перпендикулярний до площини , в якій лежать імпульс планети і радіус - вектор , проведений з центра Сонця. Отже, ця площина не змінює свого положення з часом. Іншими словами , орбіта кожної планети лежить в одній площині, що проходить через Сонце , тобто є плоскою кривою .

2 . Невелике тіло масою *m* , яке підвішене на нитці (рис. 24.4) , рівномірно рухається зі швидкістю ***v*** вздовж кола радіуса *R* в горизонтальній площині під дією сили тяжіння *m**g*** і сили натягу нитки ***T.*** Визначити модуль і напрям момента імпульсу тіла відносно точки *О*. Встановити , чи зберігається момент імпульсу тіла відносно точки *О*.

За визначенням момент імпульсу частинки відносно точки *О* дорівнює векторному добутку радіус -вектора частинки на її імпульс : ***L*** = [***R***, *m**v***]. Спрямований вектор момента імпульсу перпендикулярно до площини , в якій лежать вектори - співмножники за правилом правого гвинта , тобто як показано на рисунку - вздовж осі обертання вгору. Модуль вектора ***L*** дорівнює

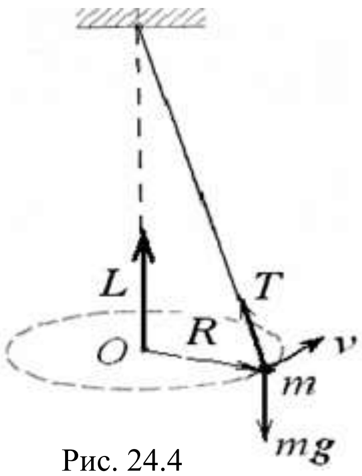


Рис. 24.4

$$L = R\, mv \sin(\pi/2) = mvR.$$

Відповідно до рівняння моментів (24.5) похідна за часом від момента імпульсу ***L*** частинки відносно деякої точки *О* дорівнює моменту рівнодійної сили відносно тієї ж точки *О*:

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{M} \ .$$

Визначимо сумарний момент сил, діючих на частинку:

$$\boldsymbol{M} = [\boldsymbol{R}, m\boldsymbol{g}]. + [\boldsymbol{R}, \boldsymbol{T}]. = [\boldsymbol{R}, (m\boldsymbol{g} + \boldsymbol{T})] = [\boldsymbol{R}, \boldsymbol{F}] = 0$$

Тут через $\boldsymbol{F}$ позначений вектор, який дорівнює сумі векторів сили тяжіння і натягу нитки, який, природно, спрямований по радіусу до центра кола. Рівність нулю векторного добутку випливає з того, що $\boldsymbol{R}$ і $\boldsymbol{F}$ - колінеарні вектори.

Тоді маємо $\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = 0$, звідки $\boldsymbol{L}$ = const, тобто момент імпульсу частинки відносно точки O зберігається.

Розглянемо частинку, яка рухається по колу. Виразимо у формулі момента імпульсу частинки (24.1) вектор лінійної швидкості як векторний добуток кутової швидкості $\boldsymbol{\omega}$ на радіус-вектор $\boldsymbol{r}$

$$\boldsymbol{v} = [\boldsymbol{\omega r}].$$

Тоді для момента імпульсу $\boldsymbol{L}$ отримаємо подвійний векторний добуток:

$$\boldsymbol{L} = [\boldsymbol{rp}] = [\boldsymbol{r}, m[\boldsymbol{\omega r}]].$$

Скористаємося формулою для подвійного векторного добутку:

$$[\boldsymbol{a}[\boldsymbol{bc}]] = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{ac}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{ab}),$$

(її запам'ятовують за мнемонічним правилом «бац мінус цаб»). Круглими дужками позначено тут скалярний добуток векторів.

Момент імпульсу частинки відносно точки набуває вигляду

$$\boldsymbol{L} = m(\boldsymbol{\omega}\,(\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{r}\,(\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{\omega})) = (mr^2)\boldsymbol{\omega}. \qquad (24.6)$$

У першому доданку (24.6) стоїть скалярний добуток вектора самого на себе, він дорівнює квадрату модуля вектора:

$$(\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{r}) = r^2.$$

Другий доданок дорівнює нулю, оскільки $(\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{\omega}) = 0$ (скалярний добуток двох взаємно перпендикулярних векторів дорівнює нулю).

Добуток маси частинки на квадрат її відстані до осі обертання називають *моментом інерції частинки* і позначають I.

$$I = mr^2. \qquad (24.7)$$

Тоді момент імпульсу окремої частинки запишеться:

$$\boldsymbol{L} = I\boldsymbol{\omega}. \qquad (24.8)$$

Якщо момент інерції I частинки залишається постійним, то, обчислюючи похідну від останнього виразу, отримаємо

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(I\boldsymbol{\omega}) = I\,\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}. \qquad (24.9)$$

Замінюючи похідну кутової швидкості за часом через кутове прискорення, $d\boldsymbol{\omega}/dt = \boldsymbol{\varepsilon}$, з урахуванням рівняння (24.5) отримаємо *основне рівняння динаміки обертання окремої частинки:*

$$\boldsymbol{M} = I\boldsymbol{\varepsilon}. \qquad (24.10)$$

Кутове прискорення $\boldsymbol{\varepsilon}$, що набувається частинкою під дією даного обертального момента сили $\boldsymbol{M}$, прямо пропорційно величині цього момента.

Визначимо тепер *момент імпульсу* ***частинки відносно осі***. Нехай момент імпульсу частинки відносно деякої точки O в даній системі відліку дорівнює $\boldsymbol{L}$.

Проведемо через обрану точку O довільну нерухому вісь z (рис.24.5) .

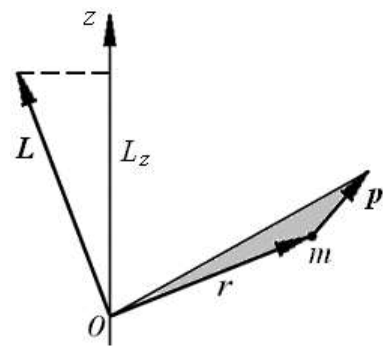


Рис. 24.5.

Скалярна величина L_z , що дорівнює проекції вектора $\boldsymbol{L}$ на вісь z , яка проходить через точку O, називається *моментом імпульсу частинки* ***відносно осі***.

Спроектувавши вектори , що входять в рівняння моментів (24.5) на довільну вісь, що проходить через точку O, отримаємо співвідношення для момента імпульсу частинки відносно осі:

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z\,. \qquad (24.11)$$

Похідна за часом від момента імпульсу частинки відносно осі дорівнює моменту сили відносно цієї осі.

25. Закон збереження момента імпульсу

Перейдемо від однієї частинки до довільної системи частинок. Введемо поняття *момента імпульсу* $\boldsymbol{L}$ *системи частинок* ***відносно точки O*** як векторної суми моментів імпульсів $\boldsymbol{L}_i$ її окремих частинок відносно тієї ж точки:

$$\boldsymbol{L} = \sum \boldsymbol{L}_i\,. \qquad (25.1)$$

Зауважимо, що момент імпульсу системи - величина *адитивна*. Це означає, що момент імпульсу системи дорівнює сумі моментів імпульсів її окремих частин незалежно від того, взаємодіють вони між собою, чи ні.
Диференціювання (25.1) за часом дає:

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \sum \frac{d\boldsymbol{L}_i}{dt}\,. \qquad (25.2)$$

У відповідності з рівнянням моментів (24.5) для кожної з частинок, на які діють як внутрішні, так і зовнішні сили, можна написати рівність

$$\frac{d\boldsymbol{L}_i}{dt} = \boldsymbol{M}_{i,внутр} + \boldsymbol{M}_{i,зовн}\,, \qquad (25.3)$$

де $\boldsymbol{M}_{i\,внутр}$ - момент внутрішніх сил, а $\boldsymbol{M}_{i\,зовн}$ - момент зовнішніх сил, що діють на i-у частинку. Підстановка цих рівностей в (25.2) приводить до співвідношення

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \sum \boldsymbol{M}_{i,внутр} + \sum \boldsymbol{M}_{i,внеш}\,. \qquad (25.4)$$

Внутрішні сили - це сили взаємодії між частинками. За третім законом Ньютона внутрішні сили завжди існують попарно. Це означає, що силі $\boldsymbol{F}_{ik}$, з якою k-а точка діє на i-у, відповідає рівна і протилежно спрямована сила $\boldsymbol{F}_{ki}$, з якою i-а точка діє на k-у. Ці дві сили спрямовані уздовж однієї прямої, тобто мають однакове плече відносно будь-якої точки. Моменти таких сил попарно є рівними за величиною і протилежні за напрямком. Тому сума моментів всіх внутрішніх сил дорівнює нулю.

Тоді отримуємо остаточно, що

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \sum \boldsymbol{M}_{i,внеш}\,. \qquad (25.5)$$

Рівняння (25.5) стверджує , що *похідна за часом від момента імпульсу системи* ***відносно точки*** *дорівнює сумі моментів зовнішніх сил відносно тієї ж точки .*

Іншими словами , момент імпульсу системи може змінюватися тільки під дією сумарного момента всіх зовнішніх сил.

Якщо система замкнена (тобто зовнішніх сил немає) , права частина рівності (25.5) дорівнює нулю і, отже , вектор момента імпульсу системи залишається постійним , тобто не змінюється з часом. Звідси безпосередньо випливає **закон збереження момента імпульсу:**

Якщо система замкнена або сумарний момент зовнішніх сил, що діють на неї , дорівнює нулю , то сумарний момент імпульсу системи відносно деякої точки залишається постійним.

$$\boldsymbol{L} = \Sigma \boldsymbol{L}_i(t) = \text{const.} \qquad (25.6)$$

При цьому моменти імпульсу окремих частинок системи можуть змінюватися з часом. Наприклад, при зіткненнях частинок момент імпульсу може передаватися від однієї частинки до іншої. Однак ці зміни завжди відбуваються так, що приріст момента імпульсу однієї частинки дорівнює убутку момента імпульсу другої, а повний момент імпульсу системи відносно деякої точки залишається постійним.

Приклади. 1. На рис. 25.1 показана схема перетворення нейтрона *n* в протон *p* при β-розпаді всередині ядра**.** З необхідності виконання законів збереження енергії, імпульсу і момента імпульсу швейцарським фізиком В. Паулі була висунута гіпотеза про те, що при цьому перетворенні поряд з електроном *e* утворюється ще одна частинка - електронне антинейтрино $\tilde{\nu}_e$, яка згодом була виявлена експериментально.

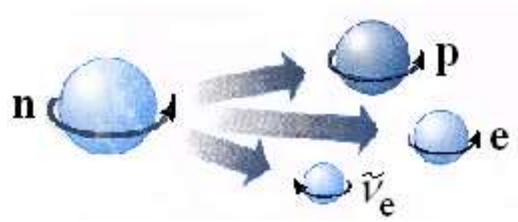


Рис. 25.1

2 . При обтіканні потоком повітря крила літака поблизу гострого заднього зрізу крила виникають вихори , що обертаються у випадку , зображеному на рис. 25.2 , проти годинникової стрілки. Вихори ці ростуть , відриваються від крила і несуться потоком. Інша маса повітря поблизу крила отримує при цьому, за законом збереження момента імпульсу протилежне обертання (за годинниковою стрілкою) , утворюючи циркуляцію повітря близько крила.

Циркуляційний потік навколо контура крила спрямований на більш опуклій частині поверхні в бік течії повітря , що призводить до збільшення швидкості , а на менш опуклій - проти течії , що призводить до її зменшення .

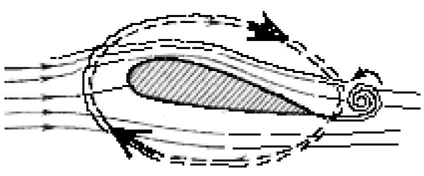


Рис. 25.2.

Відповідно до рівняння Бернуллі там, де швидкість частинок менша, тиск середовища є більшим і навпаки. У результаті тиск повітря на нижню поверхню крила буде більше, ніж на верхню. Це і призводить до появи підйомної сили крила літака.

Якщо спроектувати вектори, що входять у формулу (25.5) на довільну вісь *z*, що проходить через точку *O*, то отримаємо для системи частинок рівняння моментів відносно осі *z*:

$$\frac{d}{dt}L_z = \sum M_{внеш,z} \tag{25.7}$$

У атомній фізиці поняття момента імпульсу елементарних частинок розширюється і узагальнюється , а закон його збереження розглядається як загальнофізичний принцип.

Разом з законами збереження імпульсу і енергії закон збереження момента імпульсу є фундаментальним законом природи.

В основі закону збереження момента імпульсу лежить *ізотропність* простору , тобто рівноправність усіх напрямків. Всі явища в замкнутій фізичній системі будуть відбуватися так само , якщо всю систему як ціле повернути на деякий кут . Рух частинок відносно одна одної після повороту буде таким же , яким він був би , якби поворот не був здійснений. У цьому виявляються властивості симетрії законів природи.

Контрольні питання .

1 . Якою величиною - скалярною чи векторною - є момент імпульсу частинки відносно деякої точки ? Відносно осі ?
2 . Частинка рухається по колу . Як спрямований момент імпульсу частинки відносно центра кола ?
3 . Чи має частинка, що рухається прямолінійно , момент імпульсу відносно деякого центра ?
4 . На тонкій нерозтяжній нитці підвішено кульку (матеріальна точка) масою m , яка здійснює рух в горизонтальній площині. Нитка утворює кут α з вертикаллю . Як спрямований момент імпульсу кульки відносно точки підвісу ? Чи залишається він незмінним?
5 . Центральними називаються сили , лінії дії яких в кожній точці простору направлені в одну і ту ж точку - силовий центр . Прикладом поля центральних сил може служити гравітаційне поле , створене кулею. Частинка рухається в полі центральних сил. Чи може центральна сила викликати зміну момента імпульсу ?
6 . Чи можна застосувати закон збереження момента імпульсу не до повного вектора ***L*** , а тільки до його проекції на будь-який напрямок ?

Розділ 6. ДИНАМІКА ТВЕРДОГО ТІЛА, ЩО ОБЕРТАЄТЬСЯ НАВКОЛО НЕРУХОМОЇ ОСІ

Тверде тіло можна розглядати як систему частинок і застосовувати до нього отримані для системи закономірності . Однак , в такій системі частинок як тверде тіло є особливості - відстані між частинками системи залишаються незмінними. Це призводить до появи нової динамічної характеристики руху - момента інерції твердого тіла , а також спрощує рівняння руху розглядом проекцій векторів повних моментів імпульсу системи ***L*** і зовнішніх сил ***M*** на вісь обертання.

Як вже зазначалося , будь-який рух твердого тіла можна представити у вигляді накладення двох простих рухів: поступального руху тіла , що характеризується рухом будь-якої його точки , і обертання тіла навколо осей , що проходять через цю точку .

Поступальний рух тіла є самим простим . При поступальному русі всі точки тіла рухаються по однаковим траєкторіям з однаковими швидкостями. Тому все тіло можна розглядати як одну матеріальну точку і застосовувати до неї закони динаміки . Такою точкою , рух якої є еквівалентним руху твердого тіла , є центр мас тіла. Центр мас твердого тіла рухається так , як рухалася б матеріальна точка , маса якої дорівнює масі тіла , під дією результуючої зовнішніх сил, що діють на тіло.

Що ж до динаміки обертального руху твердого тіла , то ми будемо розглядати найпростіший випадок - обертання твердого тіла навколо нерухомої осі.

§ 26. Кінетична енергія обертального руху твердого тіла

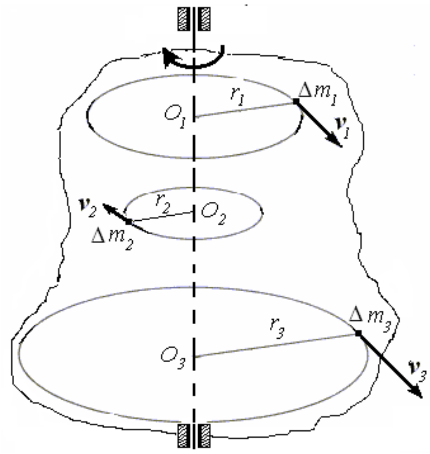


Рис.26.1.

Щоб визначити кінетичну енергію обертального руху твердого тіла подумки розіб'ємо його на окремі частинки (рис. 26.1).

При обертанні навколо нерухомої осі частинки тіла з масами Δm_i описують кола різних радіусів r_i і мають різні лінійні швидкості v_i .

Тому формула кінетичної енергії $E_k = mv^2/2$ для всього тіла цілком непридатна.

Тоді уявімо кінетичну енергію тіла, що обертається, $E_k^{обер}$ як суму кінетичних енергій його складових частин:

$$E_k^{вр} = \frac{\Delta m_1 v_1^2}{2} + \frac{\Delta m_2 v_2^2}{2} + \ldots + \frac{\Delta m_N v_N^2}{2} =$$
$$\frac{\Delta m_1 r_1^2 \omega^2}{2} + \frac{\Delta m_2 r_2^2 \omega^2}{2} + \ldots + \frac{\Delta m_N r_N^2 \omega^2}{2} = \qquad (26.1)$$
$$\frac{\omega^2}{2}(\Delta m_1 r_1^2 + \Delta m_2 r_2^2 + \ldots + \Delta m_N r_N^2).$$

Тут ми використали той факт, що кутова швидкість ω обертання всіх частинок тіла є однаковою, тобто $v_1 = \omega\, r_1$, $v_2 = \omega\, r_2$, $v_3 = \omega\, r_3$ і т.д.

У формулі (26.1), вираз $\Delta m_1\, r_1^2 + \Delta m_2\, r_2^2 + \Delta m_3\, r_3^2 + \ldots + \Delta m_N\, r_N^2$ не залежить від швидкості обертання і є деякою характеристикою даного тіла.

Сума добутків мас елементарних частин тіла на квадрати їх відстаней до певної осі називається моментом інерції тіла відносно цієї осі:

$$I = \Delta m_1 r_1^2 + \Delta m_2 r_2^2 + \ldots \Delta m_N r_N^2 = \sum_{i=1}^{N} \Delta m_i r_i^2. \qquad (26.2)$$

Одиниці виміру момента інерції – кг·м^2.

Тоді кінетична енергія тіла, що обертається

$$E_k^{оберт} = \frac{I\omega^2}{2} \qquad (26.3)$$

виражається так само, як і кінетична енергія тіла при поступальному русі $E_k = \frac{mv^2}{2}$, тільки замість маси слід підставити *момент інерції* тіла I, а замість *лінійної* швидкості - *кутову* швидкість ω.

§ 27. Момент інерції

Як випливає з визначення (26.2), для обчислення момента інерції тіла необхідно подумки розбити його на досить малі елементи, визначити відстань кожного елемента від осі, потім помножити масу кожного елемента на квадрат відстані до осі, зробити це для всіх елементів і результати скласти.

Якщо у виразі (26.2) для момента інерції замінити малі скінченні елементи тіла нескінченно малими елементами, то в межі сума перейде в інтеграл

$$I = \int_V r^2 dm = \int_V r^2 \rho dV . \qquad (27.1)$$

Отже , обчислення моментів інерції тіл зводиться до обчислення об'ємних інтегралів .

Як видно з формули (26.2) , момент інерції тіла залежить не тільки від величини маси тіла , але і від розподілу маси розглянутого тіла відносно заданої осі. Частинки , що лежать далеко від осі , вносять в суму значно більший внесок , ніж близькі частки. Віддаляючи частинки тіла від осі або віддаляючи вісь від тіла , ми тим самим збільшуємо момент інерції тіла відносно цієї осі .

Якщо обчислювати , наприклад , момент інерції тонкої спиці відносно її довгої осі *OO* (рис 27.1 , *а*) , то момент інерції буде дуже малий - всі точки лежать дуже близько до осі, і, отже, всі величини r_1^2, r_2^2,…, що входять у формулу для I, також малі. Момент інерції буде набагато більше відносно осі, яка перпендикулярна до спиці і проходить через її середину (рис 27.1, *б*), і ще більше, якщо вісь проходить через край спиці (рис 27.1, *в*).

З формули (27.2) очевидно також, що момент інерції однієї матеріальної точки дорівнює $I = mr^2$.

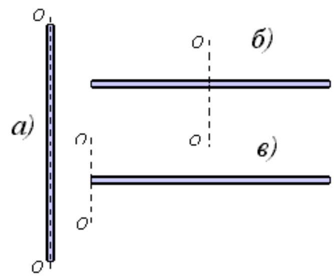
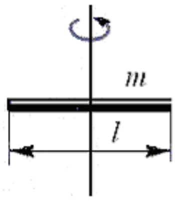
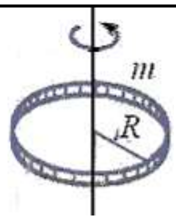
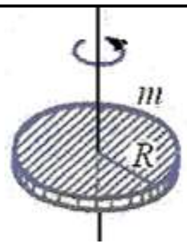
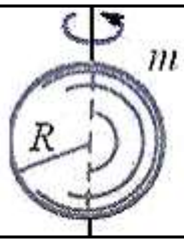


Рис. 27.1

Для деяких тіл симетричної форми моменти інерції, обчислені інтегруванням, наведені в таблиці.

Таблиця 6.1

Тіло		*Вісь, відносно якої визначається момент інерції*	*Момент інерції*
Однорідний тонкий стержень масою m і довжиною l		Проходить через центр мас стержня перпендикулярно до стержня	$\frac{1}{12}ml^2$

		Проходить через кінець стержня перпендикулярно до стержня	$\frac{1}{3}ml^2$
Тонке кільце, обруч, труба, маховик з масою, розподіленій по ободу, радіусом R і масою m		Вісь симетрії	mR^2
Круглий однорідний диск, суцільний циліндр радиусом R і масою m		Вісь симетрії	$\frac{1}{2}mR^2$
Однорідна куля радиусом R і масою m		Проходить через центр кулі	$\frac{2}{5}mR^2$

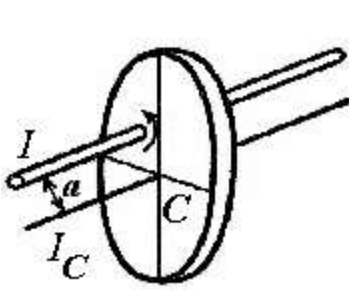


Рис. 27.2.

У наведених у таблиці прикладах осі проходять через центр мас тіла. Момент інерції щодо інших осей визначається згідно теоремі Штейнера (наводиться без доведення): *якщо відомий момент інерції I_C даного тіла відносно осі, що проходить через центр мас C цього тіла, то момент інерції I відносно паралельної осі, віддаленої на відстань a (рис.27.2), визначається формулою:*

$$I = I_C + ma^2. \qquad (27.2)$$

Приклад. Момент інерції диска масою m і радіусом R відносно осі, що перпендикулярна до площини диска і проходить через середину радіуса, дорівнює

$$I = \frac{1}{2}mR^2 + m\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}mR^2.$$

28. Робота і потужність зовнішніх сил при обертанні твердого тіла

При обертанні твердого тіла навколо нерухомої осі траєкторії всіх частинок є колами, центри яких лежать на осі.

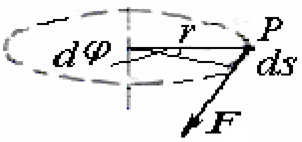


Рис. 28.1.

Визначимо величину роботи dA, яку здійснює зовнішня сила $\boldsymbol{F}$, якщо точка P прикладання її зміщується по колу радіуса r на нескінченно малу величину $ds = rd\varphi$ (рис. 28.1). При цьому модуль сили F будемо вважати постійним. Тоді елементарна робота сили

$$dA = F\,ds = F\,r\,d\varphi. \tag{28.1}$$

Добуток модуля зовнішньої сили F на плече r дає момент M_z зовнішньої сили відносно осі обертання. Отже, *робота, що здійснюється обертальним моментом, дорівнює добутку цього моменту на кут повороту тіла*:

$$dA = M_z\,d\varphi. \tag{28.2}$$

Робота сили при повороті тіла на кінцевий кут φ_0 визначиться як інтеграл

$$A = \int_{0}^{\varphi_0} M_z(\varphi)d\varphi. \tag{28.3}$$

Щоб визначити миттєву потужність N при обертанні твердого тіла, поділимо роботу (28.2) на елементарний проміжок часу dt, протягом якого виконувалася робота:

$$N = \frac{dA}{dt} = M_z\frac{d\varphi}{dt} = M_z\omega, \tag{28.4}$$

де ω - числове значення кутової швидкості тіла.

§ 29. Момент імпульсу твердого тіла відносно осі. Рівняння динаміки обертання твердого тіла відносно нерухомої осі

Для обчислення момента імпульсу твердого тіла відносно осі розіб'ємо тіло, на окремі частинки масою Δm_i (рис.29,1).

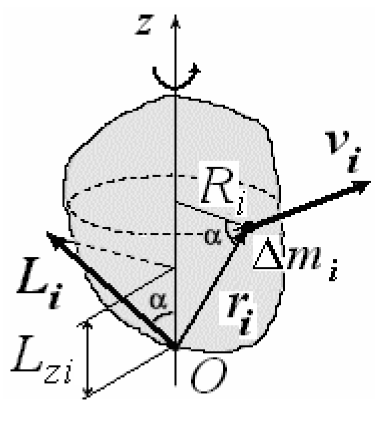


Рис.29.1.

Кожна така частинка рухається навколо осі обертання по колу зі швидкістю $\boldsymbol{v_i}$, дотичній до цього кола. Положення частинки відносно точки O характеризується радіус-вектором $\boldsymbol{r_i}$.

Момент імпульсу окремої і-ї частинки *відносно точки O* за визначенням дорівнює векторному добутку:

$$\boldsymbol{L_i} = [\boldsymbol{r_i}, \Delta m_i \boldsymbol{v_i}].$$

Момент імпульсу цієї частинки *відносно осі* дорівнює проекції L_{zi} вектора $\boldsymbol{L}_i$ на вісь, що проходить через точку O.

$$L_{zi} = L_i \cos\alpha = r_i \,\Delta m_i\, v_i \cos\alpha. \qquad (29.1)$$

З рисунка випливає, що

$$r_i \cos\alpha = R_i\,. \qquad (29.2)$$

З урахуванням формули, що зв'язує модулі лінійної та кутової швидкості, $v_i = \omega R_i$ отримаємо

$$L_{zi} = \omega\, \Delta m_i\, R_i^2. \qquad (29.3)$$

Підсумовуючи по всім елементам тіла, визначимо момент імпульсу тіла відносно осі z:

$$L_z = \Sigma\, L_{zi} := \Sigma\, \omega\, \Delta m_i\, R_i^2.$$

Величину ω, як однакову для всіх частинок, можна винести з-під знака суми. тоді

$$L_z = \omega\, \Sigma\, \Delta m_i\, R_i^2\,. \qquad (29.4)$$

Вираз$\Sigma\, \Delta m_i\, R_i^2$ –сума добутків елементарних мас на квадрати їх відстаней від осі - являє собою момент інерції тіла відносно осі обертання z. Остаточно вираз для *моментa імпульсу тіла відносно осі z* запишеться у вигляді

$$L_z = I_z\, \omega, \qquad (29.5)$$

тобто *момент імпульсу тіла відносно осі обертання дорівнює добутку момента інерції тіла відносно цієї ж осі на кутову швидкість обертання навколо цієї осі.*

Момент імпульсу всього тіла відносно точки O дорівнює сумі моментів імпульсу елементарних мас

$$\boldsymbol{L} = \Sigma\, \boldsymbol{L}_i\,. \qquad (29.6)$$

У разі несиметричного тіла цей сумарний вектор $\boldsymbol{L}$ спрямований під довільним кутом до осі обертання.

У разі однорідного тіла , симетричного відносно осі обертання , і знаходження точки O на осі симетрії напрямок момента імпульсу тіла $\boldsymbol{L}$ збігається з напрямком його кутової швидкості $\boldsymbol{\omega}$. У цьому випадку завжди знайдеться пара симетричних точок , для яких складові вектора $\boldsymbol{L}$ в напрямку перпендикулярному до осі обертання , компенсують один одного.

Отже , для симетричного тіла, що обертається навколо осі симетрії, справедлива векторна рівність :

$$\boldsymbol{L} = I_z\, \boldsymbol{\omega}. \qquad (29.7)$$

Момент імпульсу ***симетричного тіла****, що обертається навколо осі симетрії, дорівнює добутку його момента інерції відносно цієї осі на кутову швидкість.*

Розглядаючи тверде тіло як систему матеріальних точок, застосуємо до нього рівняння моментів для системи частинок (25.7) - похідна за часом від момента імпульсу тіла відносно осі дорівнює сумі моментів зовнішніх сил, які діють на тіло, відносно цієї осі.

$$\frac{dL_z}{dt} = \frac{d}{dt}(I_z\omega) = I_z\frac{d\omega}{dt} = \sum M_{z\,внеш}\,. \qquad (29.8)$$

Похідна кутової швидкості - це кутове прискорення

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$$

Ми прийшли до *основного рівняння динаміки обертального руху твердого тіла:*

$$I_z\varepsilon = \sum M_z^{внеш}\,. \qquad (29.9)$$

Сумарний момент відносно осі зовнішніх сил, що обертають тіло навколо даної осі, дорівнює моменту інерції тіла відносно цієї осі, помноженому на кутове прискорення тіла.

Рівняння (29.9) аналогічно рівнянню другого закону Ньютона $ma_z = \Sigma F_z$.У ньому роль маси відіграє момент інерції, роль лінійного прискорення - кутове прискорення, роль результуючої сили - сумарний момент зовнішніх сил.

Кутове прискорення, що набувається тілом під дією даного обертаючого момента M_z, прямо пропорційно величині цього моменту і обернено пропорційно моменту інерції тіла відносно осі обертання

$$\varepsilon = \frac{M_z}{I}. \qquad (29.10)$$

З останньої формули видно, що момент інерції твердого тіла відносно якої-небудь нерухомої осі є мірою інертності цього тіла в обертанні навколо даної осі: чим більше момент інерції тіла, тим меншого кутового прискорення воно набуває під дією одного і того ж моменту зовнішніх сил.

У векторному вигляді основний закон динаміки обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі записується у вигляді

$$\mathbf{M_z} = I_z\,\boldsymbol{\varepsilon}. \qquad (29.11)$$

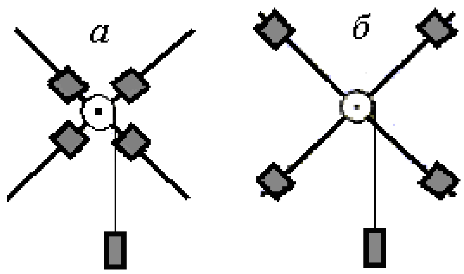


Рис. 29.2.

Приклади. 1. На рис 29.2, *а* і 29.2, *б* маса хрестовини з вантажами, що обертається, є однією й тою. Але вона по-різному розподілена у двох дослідах. Чим далі від осі обертання зосереджена маса тіла, тим важче розкрутити хрестовину під дією постійної сили, що має одне і те ж плече - радіус шківа, на який намотана нитка. Для розкручування стрижнів з вантажами до однієї і тієї ж кутової швидкості у випадку рис 29.2, *б* потрібний більший час, ніж у випадку рис 29.2, *а*.

2. Два циліндри - порожнистий металевий і суцільний дерев'яний - однакової маси і одного радіуса скочуються з однієї і тієї ж похилій площині (рис. 29.3).

При однаковій масі циліндрів дерев'яний має менший момент інерції, ніж металевий. Його інертність при обертанні менше і він скочується швидше.

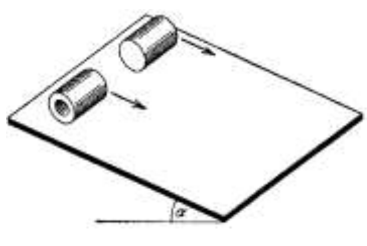


Рис.29.3

У випадку, коли результуючий момент зовнішніх сил відносно осі обертання дорівнює нулю, момент імпульсу тіла відносно осі обертання (його іноді називають обертальним імпульсом) не змінюється з плином часу:

$$\frac{d}{dt}\left(I_z\omega\right)=0\ ,\ I_z\,\omega=\text{const}. \qquad (29.12)$$

Тіло, яке обертається, може змінити свій момент інерції, при цьому відповідно зросте або зменшиться кутова швидкість ω, але так, щоб величина *I*ω залишалася постійною:

$$I_1\,\omega_1 = I_2\,\omega_2. \qquad (29.13)$$

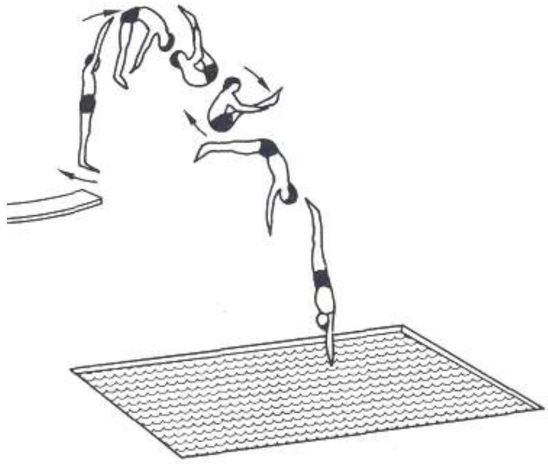


Рис. 29.4

Приклади. 1. *Стрибки у воду з трампліна (рис. 29.4).*

Спортсмен покидає трамплін з витягнутими прямо руками і ногами , надаючи своєму тілу обертання навколо свого центра мас при відштовхуванні від краю трампліну . Оскільки сумарний момент зовнішніх сил дорівнює нулю (на спортсмена діє тільки сила тяжіння , момент цієї сили відносно центра мас дорівнює нулю) , момент імпульсу *I* ω залишається постійним. «Групуючи » своє тіло навколо центра мас , стрибун зменшує тим самим момент інерції *I*. Відповідно збільшується швидкість обертання ω , стрибун робить декілька обертів . Випрямляючи потім знову руки і ноги , стрибун зменшує кутову швидкість до колишнього значення . Подібні рухи здійснюють фігуристи на льоду , акробати , танцюристи і т.п.

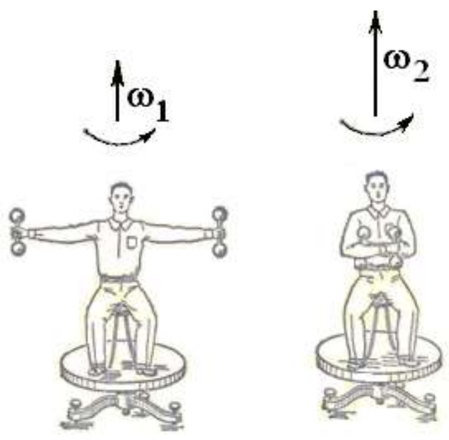


Рис. 29.5.

2 . *Лава Жуковського* (рис. 29.5) .

Лава Жуковського являє собою платформу у формі диска , яка може вільно обертатися навколо вертикальної осі на підшипниках. Під час досліду людина сідає або стає на лаву . Моменти всіх зовнішніх сил можна вважати рівними нулю. Момент сили тяжіння людини дорівнює нулю, тому що центр його ваги розміщений на осі обертання. Силами тертя в підшипниках і силами опору повітря внаслідок їх малості можна знехтувати. *Тому обертальний імпульс системи Iω має залишатися постійним* . Які б внутрішні рухи не здійснювалися, внутрішні сили не можуть змінити обертального імпульсу.

А) Якщо людина на лаві, що не обертається , повертає витягнуті руки з гантелями вліво , лава повертається вправо .

Б) Лава з людиною приводиться в обертання. Якщо людина розведе руки з гантелями в сторони , то вона збільшить момент інерції I системи , і тому кутова швидкість обертання ω має зменшитися. Якщо людина зводить руки до осі обертання , то момент інерції зменшується , а кутова швидкість збільшується.

В.) Для демонстрації векторного характеру закону збереження обертального імпульсу в руки людини на лаві Жуковського, що не обертається, передається розкручене колесо в певному положенні (рис. 29.6) .

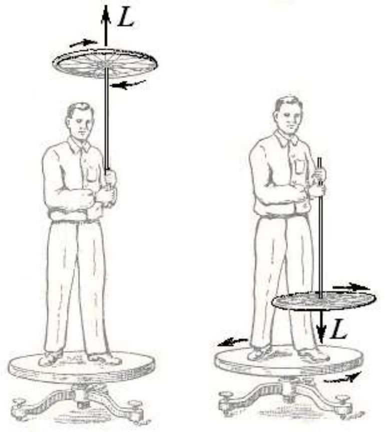


Рис. 29. 6.

Тим самим системі надається деякий обертальний імпульс $\boldsymbol{L}$ (спрямований в даному прикладі вертикально вгору). Весь обертальний імпульс зосереджений в колесі. При повороті осі колеса на 180 ° напрям обертання колеса відносно осі лави зміниться на протилежний , і обертальний імпульс колеса буде тепер спрямований вниз. Тоді людина з лавою починає обертатися в протилежну обертанню колеса сторону так , щоб сума векторів обертального імпульсу людини з лавою і обертального імпульсу колеса давала колишній вектор обертального імпульсу.

3 . Однорідний тонкий стрижень масою m_1 = 500 г і довжиною l = 1 м підвішений на відстані $l/3$ від його кінця і може вільно обертатися навколо горизонтальної осі, що проходить через точку підвісу. У верхній кінець стрижня попадає пластилінова кулька масою m_2 = 50 г , яка летить горизонтально зі швидкістю v = 1 м / с. Визначити кутову швидкість ω стрижня безпосередньо після удару.

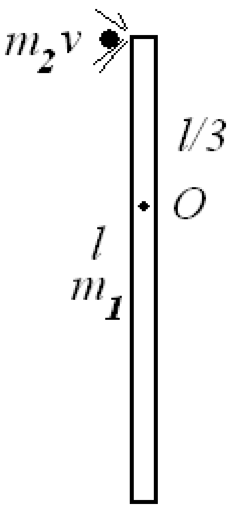


Рис. 29.7.

Розглянемо систему тіл стрижень - кулька . Оскільки кулька прилипає до стрижня , удар слід розглядати як непружний . Тому механічна енергія системи не зберігається , частина її переходить в тепло та енергію деформації.

По відношенню до цієї системи зовнішніми силами є сили тяжіння стрижня і кульки , а також вертикальна сила реакції осі. Через точку підвісу O проходять лінії дії сили реакції осі , сил ваги , як стрижня , так і кульки (в момент удару) . Тому моменти цих сил відносно осі обертання O дорівнюють нулю , і виконується умова застосування закону збереження момента імпульсу.

До удару момент імпульсу має тільки кулька $L = m_2 v\, l / 3$. Після прилипання кульки момент імпульсу системи дорівнює $\left[I + m_2\left(\frac{l}{3}\right)^2\right]\omega$, де I - знайдений за теоремою Штейнера момент інерції стрижня відносно точки підвісу O , $I = m_1 l^2/9$, а $m_2(l/3)^2$– момент інерції кульки, яку можна розглядати як матеріальну точку. За законом збереження

$$m_2 v \frac{l}{3} = \left(\frac{m_1 l^2}{9} + \frac{m_2 l^2}{9}\right)\omega .$$

Звідси

$$\omega = \frac{3 m_2 v}{(m_1 + m_2) l} = 0{,}27\, рад / с .$$

§ 30. Гіроскопи

Гіроскопом *називається масивне симетричне тіло , яке швидко обертається, вісь обертання якого (вісь симетрії) може змінювати свій напрям в просторі.*

У симетричного тіла напрями момента імпульсу $\boldsymbol{L}$ і кутової швидкості $\boldsymbol{\omega}$ співпадають, тому $\boldsymbol{L} = I\boldsymbol{\omega}$. Внаслідок масивності гіроскопа його момент інерції I дуже великий, велика також кутова швидкість $\boldsymbol{\omega}$.

Найпростішим гіроскопом є дитяча дзиґа , що швидко обертається навколо своєї осі. Гіроскопічні сили проявляються при обертанні турбіни літака , велосипедних коліс і т.п. Гіроскопічні властивості мають також елементарні частинки , наприклад , електрони в атомі .

Щоб вісь гіроскопа могла вільно повертатися в просторі , гіроскоп зазвичай поміщають в т.зв. *кардановому підвісі*. Гіроскоп закріплюють у рамках підвісу , що дозволяє осі зайняти будь-яке положення в просторі.

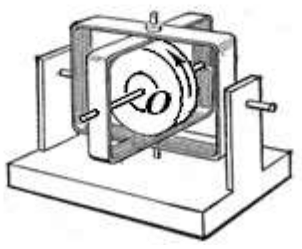


Рис. 30.1.

Всі три осі перетинаються в одній точці , яка називається *центром карданового підвісу* (рис. 30.1).

Гіроскоп в кардановому підвісі має три ступені вільності і може здійснювати будь-які повороти навколо однієї нерухомої точки O - центра підвісу.

Якщо центр підвісу збігається з центром мас гіроскопа, то гіроскоп називається *зрівноваженим*. У цьому випадку момент сили тяжіння відносно точки O дорівнює нулю. Завдяки симетрії гіроскопа дорівнює нулю також момент сил реакції підшипників.

Виходячи з основного закону руху твердого тіла, закріпленого в точці, $d\boldsymbol{L}/dt = \boldsymbol{M}$, отримаємо , що при $\boldsymbol{M} = 0$ вектор момента імпульсу буде зберігати постійне значення і незмінний напрям у просторі , $\boldsymbol{L} = \mathrm{const}$. Оскільки його напрям збігається з віссю обертання , то *положення осі з плином часу не змінюється*.

Перша властивість врівноваженого гіроскопа полягає в тому , що його вісь прагне стійко *зберігати в просторі приданий їй первинний напрям* .

Зрівноважений гіроскоп можна застосовувати як компас. Вісь такого гіроскопа завжди буде показувати певний напрям , наприклад , напрям на Полярну зірку , незалежно від обертання Землі і випадкових поштовхів.

Властивість гіроскопа зберігати незмінним напрям осі використовується також для автоматичного управління рухом літаків (автопілот , авіагоризонт) , судів , ракет , торпед і ін. Вісь обертання гіроскопа задає курс руху. При всякому відхиленні від курсу автоматично включаються двигуни , що приводять у дію рулі управління , які повертають рух по заданому курсу .

Ця ж властивість гіроскопа використовується для стабілізації стійкості ракет , заспокоювача хитавиці на кораблях , стабілізатора стійкості космічних кораблів і т.д.

Друга властивість гіроскопа проявляється , коли на його вісь починає діяти сила, яка прагне привести вісь в рух.

Розглянемо гіроскоп у вигляді диска, що обертається , вісь якого горизонтальна, врівноважена тягарцем і закріплена в шарнірі *O*, навколо якого вона може повертатися і приймати будь-який напрям в просторі (рис. 30.2) .

Подіємо на вісь деякою горизонтальною силою $\boldsymbol{F}$ (рис. 30.2). Здавалося б, вісь гіроскопа має повернутися вправо. Так було б, якби гіроскоп не обертався. Гіроскоп, який обертається, поверне свою праву частину в перпендикулярному до лінії дії сили напрямі - вгору у вертикальній площині.

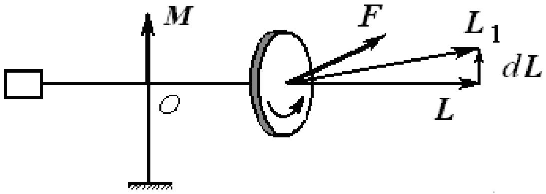


Рис. 30.2

Така поведінка гіроскопа називається *гіроскопічним ефектом*. Рух кінця осі гіроскопа відбувається не в напрямі сили $\boldsymbol{F}$, а в напрямі момента сили $\boldsymbol{M}$.

Якщо тепер подіяти на вісь гіроскопа силою $\boldsymbol{F}$ у вертикальному напрямі (рис. 30.3),то його вісь буде повертатися в горизонтальній площині.

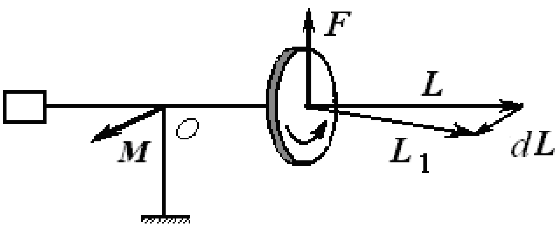


Рис.30.3.

Гіроскопічний ефект пояснюється основним рівнянням динаміки обертального руху твердого тіла - рівнянням моментів.

Відповідно до рівняння моментів відносно точки *O*

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{M} .$$

У результаті дії сили $\boldsymbol{F}$ протягом часу dt момент імпульсу $\boldsymbol{L}$ отримає приріст $d\boldsymbol{L} = \boldsymbol{M}dt$, де $\boldsymbol{M}$ - момент сили відносно точки *O*. Нове значення моменту імпульсу, що дорівнює

$$\boldsymbol{L}_1 = \boldsymbol{L} + d\boldsymbol{L},$$

виявиться повереним (рис. 30.2, 30.3, 30.4).

Оскільки вектор $\boldsymbol{L}$ спрямований вздовж осі гіроскопа, разом з $\boldsymbol{L}$ повернеться і вісь, перейшовши в нове положення.

Обертання осі гіроскопа під дією сили називається *прецесією.*

Прецесію легко спостерігати у вовчка. Розкручена дзиґа не перекидається під дією сили тяжіння.

На дзиґу діє момент сили тяжіння $\boldsymbol{M}$ (рис. 30.4), який перекидає її.

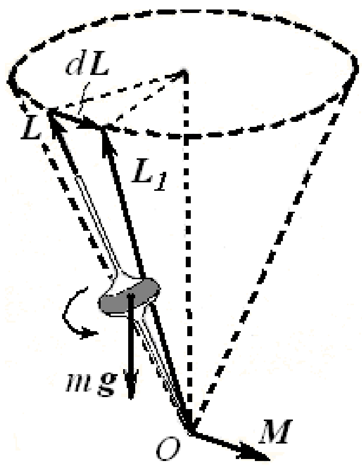


Рис. 30.4

За час dt вектор $\boldsymbol{L}$ отримає приріст $d\boldsymbol{L} = \boldsymbol{M}dt$, спрямований , як і вектор $\boldsymbol{M}$, перпендикулярно до осі дзиги . В результаті вектор $\boldsymbol{L}$, а з ним і вісь обертання дзиги , переходить в нове положення , повертаючись навколо вертикальної осі. Вісь здійснює прецесійний рух - описує конус навколо вертикалі.

З дослідів з прецесією гіроскопа можна зробити висновок про те , що при спробах повернути вісь гіроскопа внаслідок гіроскопічного ефекту виникають так звані *гіроскопічні сили* . Ці сили обумовлюють додатковий тиск на підшипники осей частин машини, що швидко обертаються, при повороті самої машини .

Якщо , наприклад , важка турбіна реактивного двигуна сучасного авіалайнера обертається з кутовою швидкістю навколо горизонтальної осі , спрямованої уздовж курсу літака , то при розвороті літака в горизонтальній площині гіроскопічні сили будуть прагнути повернути вісь турбіни у вертикальне положення. Ніс літака або « зарівається » , або піднімається догори. Мистецтво пілота - вчасно повертати відповідні рулі.

§ 31. Аналогія між рівняннями поступального і обертального рухів

При зіставленні величин і формул, що описують рух матеріальної точки (або поступального руху тіла) з такими ж величинами і формулами, що описують обертання тіла навколо нерухомої осі, виявляється аналогія між ними. Запишемо ці величини і формули у вигляді таблиці.

З таблиці видно, що в обертальному русі роль лінійної швидкості грає кутова швидкість, роль лінійного прискорення - кутове прискорення, роль маси - момент інерції, роль імпульсу - момент імпульсу відносно осі обертання (обертальний імпульс), роль сили - момент сили відносно осі обертання.

Поступальний рух	*Обертальний рух навколо нерухомої осі*
Переміщення $\Delta\boldsymbol{r}$	Кут повороту $\Delta\varphi$
Лінійна швидкість $\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$	Кутова швидкість $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$
Лінійне прискорення	Кутове прискорення

$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$	$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$
Маса m	Момент інерції I
Рівнозмінний прямолінійний рух $v = v_0 + at,$ $s = v_0 t + \frac{at^2}{2},$ $v^2 - v_0^2 = 2\,as.$	Рівнозмінне обертання $\omega = \omega_0 + \varepsilon t,$ $\varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2},$ $\omega^2 - \omega_0^2 = 2\,\varepsilon s.$
Імпульс $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$	Момент імпульсу (обертальний імпульс) $\boldsymbol{L} = I\,\boldsymbol{\omega}$
Сила $\boldsymbol{F}$	Момент сили $\boldsymbol{M}$
Другий закон Ньютона $\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{F}$ или $m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$	Другий закон Ньютона для обертального руху $\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{M}$ или $I\varepsilon = \boldsymbol{M}$
Закон збереження імпульсу: якщо $\boldsymbol{F} = 0$,то $\boldsymbol{p}$ = const	Закон збереження обертального імпульсу: якщо $\boldsymbol{M} = 0$, то $\boldsymbol{L}$ = const
Кінетична енергія $E_k = mv^2/2$	Кінетична енергія $E_k = I\omega^2/2$
Елементарна робота сили $dA = F_s ds = F_v ds$	Елементарна робота момента сили $dA = M_\omega d\varphi$
Потужність $N = F_v v$	Потужність $N = M_\omega \omega$

Підстановка аналогічних величин обертального руху у формули поступального руху призводить до правильних формул для обертального руху.

§32. Плоский рух твердого тіла. Кінетична енергія при плоскому русі твердого тіла

Плоским називається такий рух , при якому всі точки тіла рухаються в паралельних площинах. Прикладами можуть служити : обертання колеса автомобіля при його русі по прямій , кочення циліндра по плоскій поверхні і т.п.

Плоский рух можна представити як додавання двох рухів - поступального руху , що відбувається зі швидкістю центра мас v_C , і обертання навколо осі, що проходить через цей центр , з кутовою швидкістю ω .

Можна показати , що в цьому випадку кінетична енергія тіла розпадається на два незалежних доданки. Один з них визначається величинами, що характеризують поступальний рух , інший - тільки величинами, що характеризують обертання :

$$E_k = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{I_C\omega^2}{2}\,. \qquad (32.1)$$

Тут I_C – момент інерції тіла відносно осі, що проходить через центр мас.

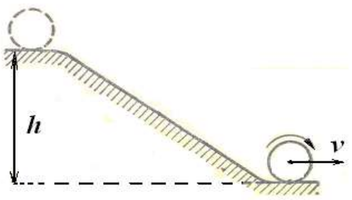


Рис. 32.1

Приклад. Кругле однорідне тіло (обруч, суцільний циліндр, куля) масою m і радіусом R скочується без ковзання з похилої площини з висоти h (рис. 32.1). Початкова швидкість тіла дорівнює нулю. Визначити швидкість центра мас в кінці спуску.

Використаємо закон збереження повної механічної енергії. На початку спуску тіло мало запас потенціальної енергії $E_р = mgh$. У кінці спуску за рахунок потенціальної енергії тіло набуває кінетичну енергію

$$E_k = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{I_C\omega^2}{2} = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{I_C v^2}{2R^2} = \frac{mv_C^2}{2}\left(1 + \frac{I_C}{mR^2}\right).$$

Згідно із законом збереження енергії

$$mgh = \frac{mv_C^2}{2}\left(1 + \frac{I_C}{mR^2}\right).$$

Звідси знаходимо швидкість в кінці спуску

$$v_C = \sqrt{\frac{2gh}{1 + I/mR^2}}\,.$$

Підставляючи в це рівняння моменти інерції обруча $I = mR^2$, циліндра $I = 0{,}5\ mR^2$ і кулі $I = 0{,}4\ mR^2$, отримаємо:

$$v_{обр} = \sqrt{gh}, v_{цил} = \sqrt{\frac{4}{3}gh}, v_{кулі} = \sqrt{\frac{10}{7}gh}.$$

Контрольні питання .

1 . Що називається моментом інерції твердого тіла відносно даної осі ? Чи залежить ця величина від швидкості обертання тіла ?

2 . Чи є момент інерції тіла сумою моментів інерції окремих його частин ?

3 . Як спрямований момент імпульсу тіла, що обертається, відносно точки, яка лежить на осі обертання ?

4 . У якому випадку є справедливою векторна рівність для момента імпульсу тіла $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$?

5 . Чому дорівнює момент імпульсу твердого тіла відносно нерухомої осі обертання ? Якою є ця величина - векторної або скалярною ? Чи може вона зберігатися ? За яких умов ?

6 . Навіщо на хвості вертольота встановлюється ще один гвинт ? У якій площині обертаються його лопаті ?

7 . Чому деякі типи вертольотів забезпечуються двома несучими гвинтами ? У яких напрямках вони обертаються ?

8 . Як поводитиметься підвішений на одному тросі електродвигун після його включення ?

9 . Як спортсмен , який здійснює стрибок у воду з трампліна, встигає зробити повний оберт?

10 . Чому дзиґа, яка обертається, не перекидається ?

11 . Як виявляється гіроскопічний ефект при їзді на велосипеді?

12 . Як зупинити обертання космічного корабля на орбіті після виключення двигунів ?

13 . Один раз куля зісковзує з похилої площини , другий раз скочується. У якому випадку її швидкість біля підстави похилої площини є більшою? Чому ?

Розділ 7. ЕЛЕМЕНТИ СПЕЦІАЛЬНОЇ ТЕОРІЇ ВІДНОСНОСТІ

§ 33. Уявлення класичної фізики. Перетворення Галілея

Згідно з уявленнями класичної фізики, що сформувалися на основі спостережень за рухами макроскопічних тіл зі швидкостями, набагато меншими швидкості світла ($v << c$):
- простір є тривимірним і підпорядковується евклідовій геометрії;
- поряд з тривимірним простором існує незалежний від нього час;
- проміжки часу між подіями і розміри твердих тіл є абсолютними, тобто не залежать від системи відліку.
- справедливий принцип відносності Галілея, згідно з яким всі явища в замкненій фізичній системі протікають однаково незалежно від того, покоїться вона в деякій інерціальній системі відліку або рухається рівномірно і прямолінійно.

З цих уявлень випливають формули, що зв'язують координати і час деякої події в двох різних системах відліку (перетворення Галілея). Щоб вивести ці перетворення, розглянемо дві інерціальні системи відліку K і K'(рис. 33.1).

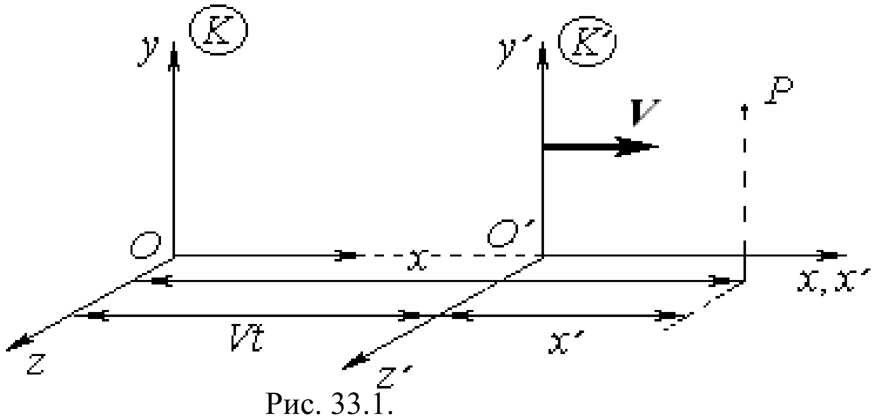


Рис. 33.1.

Нехай система K' рухається рівномірно і прямолінійно зі швидкістю V відносно системи K, яку умовно вважатимемо нерухомою. Рух відбувається уздовж осі x, тобто осі x і x' збігаються, а осі y і y', а також z і z' паралельні одна одній. За такої умови проекції вектора V на осі x і x' дорівнюють $V_x = V_{x'} = V$.

Відлік часу почнемо з моменту, коли початки координат O і O' співпадають. Тоді координати довільної точки P будуть пов'язані співвідношеннями:

$$\begin{aligned} x &= x' + Vt, & x' &= x - Vt, \\ y &= y', & y' &= y, \\ z &= z', & z' &= z, \\ t &= t', & t' &= t. \end{aligned} \qquad (33.1$$

Остання рівність означає, що в механіці Галілея-Ньютона час у всіх системах відліку протікає однаково.

Ці рівняння називаються ***перетвореннями Галілея***. Вони дозволяють перейти від координат і часу однієї інерціальної системи відліку до координат і часу іншої системи відліку.

Диференціюємо перше з рівнянь за часом, врахувавши, що $t = t'$ і, отже, похідна за t збігається з похідною за t':

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} + V = \frac{dx'}{dt'} + V.$$

Похідна dx/dt є проекцією швидкості частинки v у системі K на вісь x цієї системи, похідна dx'/dt' є проекцією швидкості частинки v' в системі K' на вісь x' цієї системи.

Отже,

$$v_x = v'_{x'} + V. \qquad (33.2)$$

Диференціювання другого і третього з рівнянь (33.1) дає, що

$$v_y = v'_{y'},$$
$$v_z = v'_{z'}. \qquad (33.3)$$

Сукупність рівнянь (33.2) і (33.3) можна представити одним векторним рівнянням

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{V}. \qquad (33.4)$$

Це співвідношення називається ***законом додавання швидкостей класичної механіки:*** *швидкість v частинки відносно системи K дорівнює векторній сумі її швидкості v' відносно системи K' і швидкості* ***V*** *системи K' відносно системи K.*

Диференціюючи за часом ще раз рівність (33.4), і враховуючи, що V = const, одержимо співвідношення для прискорення:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}'. \qquad (33.5)$$

Прискорення будь - якого тіла у всіх системах відліку, що рухаються одна відносно одної прямолінійно і рівномірно, виявляється одним і тим же.

Величини, чисельне значення яких не змінюється при перетвореннях координат, називаються ***інваріантами*** перетворень. Прискорення інваріантні відносно таких систем відліку.

У класичній механіці Ньютона сили, що діють на частинку в обох системах, однакові, $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}'$. Це випливає з того, що сили залежать від відстаней між тілами, а ці відстані покладаються однаковими в усіх інерціальних системах відліку. Дослідним шляхом встановлено, що і маса також однакова у всіх системах відліку.

Тоді зі справедливості другого закону Ньютона $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ в K-системі випливає справедливість рівності $\boldsymbol{F}' = m\boldsymbol{a}'$ в K'-системі.

Отриманий результат означає, що *закони механіки однаково формулюються для всіх інерціальних систем відліку. Це твердження називається* ***принципом відносності Галілея.***

Інакше кажучи, перебуваючи всередині інерціальної системи відліку, ніякими механічними дослідами не можна визначити, покоїться дана система або рухається рівномірно і прямолінійно.

§ 34. Постулати Ейнштейна. Перетворення Лоренца

У 1905 р. А. Ейнштейн створив спеціальну теорію відносності (СТВ), яка являє собою фізичну теорію простору і часу (для випадку, коли можна нехтувати дією тяжіння).

Явища, описувані теорією відносності, називаються релятивістськими і проявляються при швидкостях руху тіл, близьких до швидкості світла у вакуумі

$$c = 2{,}99792458 \cdot 10^8 \text{ м/с} \approx 3 \cdot 10^8 \text{м/с}.$$

В основі СТВ лежать два постулати: принцип відносності Ейнштейна і принцип сталості швидкості світла.

1. *Принцип відносності Ейнштейна*: ***всі закони природи мають однакову форму в усіх інерціальних системах відліку.***

Тут Ейнштейн поширив механічний принцип відносності Галілея на всі фізичні явища. Будь-який фізичний процес протікає однаково в ізольованій системі, що знаходиться в стані спокою, і в такій же системі, що знаходиться в стані рівномірного прямолінійного руху. Ніякі досліди (механічні, електричні, оптичні та ін), проведені всередині даної системи відліку, не дають можливості виявити - покоїться ця система чи рухається рівномірно і прямолінійно. Всі інерціальні системи рівноправні.

2. *Принцип постійності швидкості світла*: ***швидкість світла у вакуумі не залежить від швидкості руху джерела світла або спостерігача, і однакова у всіх інерціальних системах відліку.***

Сталість швидкості світла у вакуумі констатується як дослідний факт. Досліди показують, що швидкість світла у вакуумі (c) є граничною можливою швидкістю в природі - ніяка взаємодія або сигнал не можуть поширюватися з швидкістю, більшою c. Зі швидкістю світла завжди рухаються тільки частинки нульової маси - фотони, нейтрино. Швидкість будь-яких інших частинок не може перевершувати c.

Справедливість сталості швидкості світла була доведена дослідами американських фізиків Майкельсона і Морлі.

З постулатів теорії відносності випливає, що *перетворення Галілея* повинні бути замінені більш загальними *перетвореннями Лоренца*, за якими перетворюються не тільки просторові координати, але й час у двох системах відліку K і K'.

Перетворення Лоренца для систем відліку, зображених на рис. 33.1, мають вигляд:

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}}, y = y', z = z', t = \frac{t' + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}}.$$

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}}, y' = y, z' = z, t' = \frac{t - \frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}}. \qquad (34.1)$$

При швидкостях, багато менших швидкості світла, тобто при $V << c$, перетворення Лоренца переходять у перетворення Галілея.

§ 35. Уявний дослід Ейнштейна. Поняття одночасності подій у різних системах відліку

Існування граничної швидкості викликає необхідність зміни наших уявлень, заснованих на повсякденному досвіді, про абсолютний характер часу.

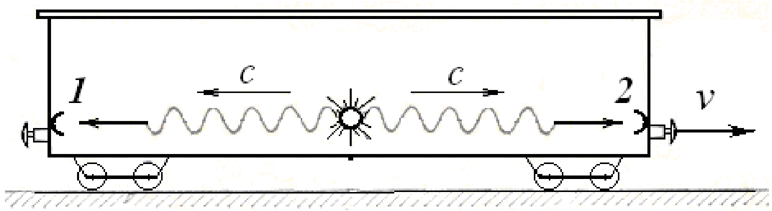


Рис. 35.1.

Розглянемо наступний уявний дослід. Нехай у середині потягу , що рухається рівномірно і прямолінійно, відбувається короткочасний спалах світла, так що в обох напрямках - вперед і назад по ходу потягу - одночасно відправляються світлові сигнали (рис.35.1), які фіксуються фотоелементами *1* і *2*, розташованими на однаковій відстані від джерела світла .

У будь-якій інерціальній системі відліку світло поширюється у всіх напрямках з однаковою швидкістю c. Тому пасажир, що їде в поїзді, для якого точки *1* і *2* нерухомі і рівновіддалені, відзначить, що сигнали досягають фотоелементів в голові і хвості поїзда одночасно.

Однак для спостерігача, що стоїть біля залізничного полотна, лівий фотоелемент *1* рухається назустріч сигналу, а правий *2* - йде від нього. Оскільки швидкість світла і для цього спостерігача має те ж значення, притому однакове в обидві сторони, то він відзначить, що сигнал досягне фотоелемента *1* в хвості потягу раніше, ніж фотоелемента *2* в голові потягу.

З цього прикладу випливає, що події, одночасні в одній системі відліку, не будуть одночасними в іншій системі відліку. Іншими словами, в різних системах відліку час протікає по-різному і твердження про проміжок часу між двома подіями має сенс тільки при вказанні системи відліку.

§ 36. Деякі ефекти спеціальної теорії відносності

1. Довжина тіл в різних системах відліку. Скорочення поздовжніх розмірів рухомих тіл

Будемо вважати, що система K є нерухомою, а система K' рухається відносно неї зі швидкістю V . Нехай у системі K' розміщений нерухомо уздовж осі x' стержень (рис. 36.1).

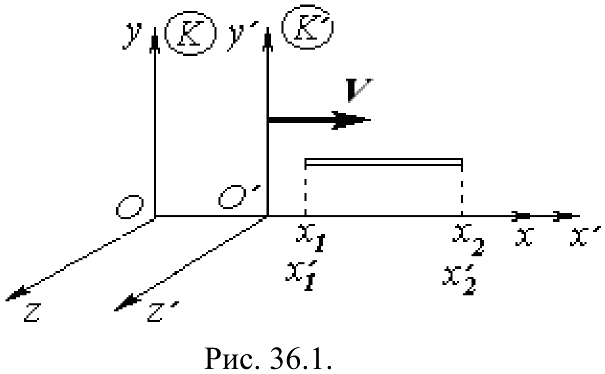


Рис. 36.1.

Довжину стержня в K' можна визначити, вимірюючи координати кінця і початку стержня, який в цій системі лежить нерухомо. Тоді довжина стержня, який покоїться (її називають *власною довжиною*):

$$l_0 = x'_2 - x'_1. \tag{36.1}$$

Нехай тепер довжину стержня вимірює спостерігач в нерухомій системі K. Повз нього стержень рухається зі швидкістю V. Тому потрібно провести одночасний відлік координат його кінців x_1 та x_2 в один і той же момент часу t за годинником системи K.

Довжина стержня в системі K:

$$l = x_2 - x_1. \tag{36.2}$$

Виберемо з перетворень Лоренца ту з формул, яка містить x', x і t.

$$x_1' = \frac{x_1 - Vt}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}},\ x_2' = \frac{x_2 - Vt}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}},$$
$$x_2' - x_1' = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}}. \tag{36.3}$$

Таким чином, довжина рухомого стержня

$$l = l_0\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}. \tag{36.4}$$

скорочується в напрямку руху ($l < l_0$).

2. Тривалість подій у різних системах відліку. Уповільнення часу

Будемо вважати, що система K нерухома, а система K' рухається відносно неї зі швидкістю V. Нехай у системі K' в одній і тій же точці з координатою x_1' (рис. 36.2, *а*, 36.2, *б*) відбуваються в моменти часу t'_1 і t'_2 дві якихось події. Наприклад, в момент часу t'_1 - народження елементарної частинки, а в момент часу t'_2 - її розпад. В системі K' тривалість життя цієї частинки:

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1. \tag{36.5}$$

Знайдемо час життя цієї частинки за годинником нерухомої системи K.

$$\Delta t = t_2 - t_1. \qquad (36.6)$$

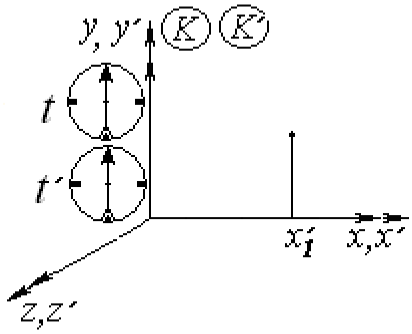


Рис. 36. 2, *а*

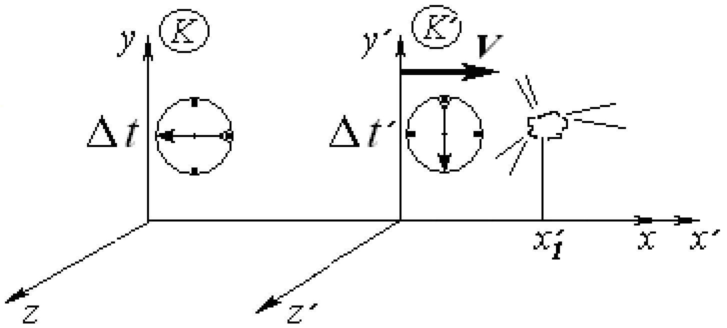


Рис. 36.2, *б*

Для цього використовуємо ту з формул перетворення Лоренца, яка містить t, t' і x'.

$$t_1 = \frac{t_1' + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}}, t_2 = \frac{t_2' + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}}, t_2 - t_1 = \frac{t_2' - t_1'}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}}. \qquad (36.7)$$

Час, відрахований годинником тієї системи, де розглянуті події відбулися в одному місці, називається *власним часом* і позначається буквою τ :

$$\Delta t' = \tau = \Delta t\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}. \qquad (36.8)$$

З отриманої формули випливає, що власний час τ менше часу Δt, відрахованого годинником будь-якої іншої системи відліку

$$\Delta t = \frac{\tau}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}.$$

З точки зору спостерігача в системі K, Δt є проміжок часу, виміряний нерухомим годинником, а τ – годинником, що рухається зі швидкістю v (швидкості частинок і годинника прийнято позначати малої буквою v на відміну від швидкості V системи K'). Оскільки $\tau < \Delta t$, можна сказати, що *рухомий годинник йде повільніше, ніж той, що покоїться.*

У якій би системі не розглядався рух частинки, проміжок τ власного часу вимірюється годинником системи, в якій частинка покоїться. Звідси випливає, що проміжок власного часу являється *інваріантом*, тобто величиною, яка має одне і те ж значення у всіх інерціальних системах відліку.

Обидва розглянутих ефекти знайшли пряме підтвердження на досліді. Так, явище уповільнення часу спостерігається при розпаді елементарних частинок космічних променів або одержуваних за допомогою прискорювачів. Такі частинки рухаються зі швидкостями, близькими до c, і, з точки зору земного спостерігача, їх часи життя, а, отже, і відстані , що проходяться ними від народження до розпаду, збільшуються в десятки тисяч разів.

Приклад. У верхніх шарах атмосфери Землі під дією космічного випромінювання народжуються мюони (одна з елементарних частинок). Час життя мюона, що покоїться (власний час) дорівнює $\tau = 2{,}2$ мкс. Від точки народження до детектора-реєстратора на поверхні Землі мюон пролітає відстань $l = 30$ км. З якою швидкістю v летів мюон?

У системі відліку K', пов'язаній з мюоном, його власний час життя дорівнює τ. У лабораторній системі K, пов'язаній з Землею, від народження мюона до його розпаду пройде час $\Delta t = \dfrac{\tau}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$. За цей час мюон пройде відстань $l = v\Delta t = \dfrac{v\tau}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$.

Звідси знаходимо

$$\frac{v}{c} = \frac{l}{\sqrt{l^2 + (c\tau)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{c\tau}{l})^2}}.$$

Оскільки $\dfrac{c\tau}{l} = \dfrac{3\cdot 10^8 \cdot 2{,}2\cdot 10^{-6}}{3\cdot 10^4} = 2{,}2\cdot 10^{-2} << 1$, можна скористатись формулою наближеного обчислення: $\dfrac{v}{c} = 1 - \dfrac{c^2\tau^2}{2l^2} \approx 0{,}9998.$ Швидкість мюона $v = 0{,}9998\ c$.

Згідно з класичною механікою мюон мав пролетіти всього

$$v\tau = 0{,}9998\cdot 3\cdot 10^{8}\cdot 2{,}2\cdot 10^{-6} = 660 \text{ м}.$$

3. Інвариантність інтервалу

Нехай дано дві події: од но сталося в момент часу t_1 в точці з координатами x_1, y_1, z_1, а другий - у момент часу t_2 в точці з координатами x_2, y_2, z_2 .

Інтервалом між подіями називається величина

$$s_{12} = \sqrt{c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2}\,, \tag{36.9}$$

де $t_{12} = t_2 - t_1$ – проміжок часу між подіями, $l_{12} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ – відстань між точками, в яких відбулися події.

Поставивши над координатами і часом штрихи, ми отримаємо величину інтервалу s'_{12} між цими ж подіями в іншій системі відліку.

У спеціальній теорії відносності вводиться уявний простір чотирьох вимірів (простір Міньковського), на осях якого відкладаються три координати x, y, z. і добуток ct. *Інтервал* - це відстань між двома точками цього простору .

Скориставшись перетвореннями Лоренца, можна показати, що

$$s_{12} = s'_{12}\,, \tag{36.10}$$

тобто величина інтервалу є інваріантом відносно перетворень Лоренца. У класичній механіці таку властивість мали окремо часовий інтервал t_{12} і відстань між точками l_{12}. У релятивістській фізиці цю властивість має тільки інтервал s_{12}. Просторово-часовий інтервал узагальнює поняття проміжку часу та просторової відстані.

Інтервали поділяються на часово-подібні і просторово-подібні.

Якщо переважає часова складова $c^2 t_{12}^2 > l_{12}^2$ (випадок часово-подібного інтервалу), то завжди можна вказати систему відліку K', в якій розглянуті події

відбулися в одному місці $(l'_{12} = 0)$ і інтервал s_{12} збігається з точністю до множника c з власним часом τ. Для таких подій поняття «раніше», «пізніше» мають абсолютний характер, і між ними можливий причинно-наслідковий зв'язок.

У разі просторово-подібного інтервалу переважає просторова складова $l_{12}^2 > c^2 t_{12}^2$. У цьому випадку завжди можна вказати систему відліку K'', в якій розглянуті події відбуваються одночасно($t''_{12} = 0$) і інтервал дорівнює власній відстані l_0.

Між такими подіями неможливий причинно-наслідковий зв'язок, оскільки ніяка взаємодія не може поширюватися зі швидкістю, більшою c, і поняття «одночасно», «раніше», «пізніше» для них є відносними, тобто залежать від системи відліку.

§ 37. Релятивістський закон додавання швидкостей

Нехай частинка для простоти міркувань рухається паралельно осям x і x' в напрямі швидкості V. Тоді проекції швидкості частинки на осі x і x' збігаються з модулями цих швидкостей.

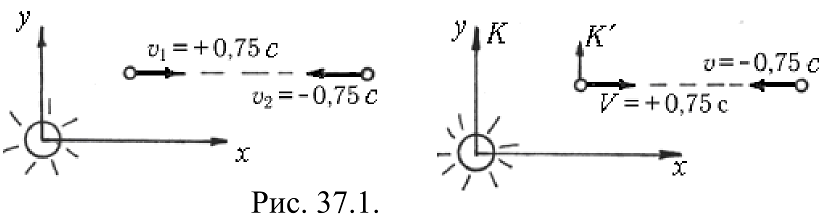


Рис. 37.1.

Швидкість частинки відносно K - системи дорівнює v, відносно K' - системи дорівнює v'. Швидкість штрихованої системи, як і раніше, позначимо через V.

З перетворень Лоренца можна отримати вираз для швидкості v частинки відносно системи K:

$$v = \frac{v' + V}{1 + \frac{v'V}{c^2}}. \qquad (37.1)$$

Ця формула являє собою *закон додавання швидкостей в релятивістській механіці.* Релятивістський закон додавання швидкостей при $V << c$ переходить в закон додавання швидкостей класичної механіки (33.4):

$$v = v' + V.$$

Приклади. 1. Якщо світловий імпульс в K'-системі рухається уздовж осі x' зі швидкістю $v' = c$, то в K-системі за формулою (37.1) його швидкість

$$v = \frac{c + V}{1 + \frac{cV}{c^2}} = c$$

також дорівнює c. Інакше бути не могло, тому що в основі перетворень Лоренца і формули перетворення швидкостей лежить припущення про сталість швидкості світла у вакуумі c в усіх інерціальних системах відліку.

2. Дві космічних частинки рухаються назустріч одна одній зі швидкостями $v_1 = v_2 = 0{,}75\ c$ відносно Сонця. Визначити швидкість однієї частинки відносно іншої за класичною і релятивістської формулами додавання швидкостей.

На лівому рис. 37.1 зображено дві частинки, що рухаються зі швидкостями v_1 і v_2 відносно системи відліку, пов'язаній з Сонцем. Плюс і мінус вказують, що проекція швидкості на вісь Ox є додатною або від’ємною.

Введемо тепер умовно рухливу систему відліку K', з'єднавши її з однією з частинок, наприклад, з лівою, і умовно нерухому систему K, пов'язану з Сонцем. Тоді швидкість системи K' відносно K буде $V = +\ 0{,}75\ c$. Швидкість правої частинки є її швидкістю відносно K і вона буде тепер позначатися v і дорівнюватиме – 0,75 c.

Слід визначити швидкість правої частинки відносно лівої, або відносно системи K', ця швидкість позначається v'. Отже, задача формулюється таким чином: дано $V = +\ 0{,}75\ c$, $v = –\ 0{,}75\ c$, визначити v'.

Згідно з класичним законом додавання швидкостей $v = V + v'$, або $v' = v - V = -\ 0{,}75\ c - 0{,}75\ c = -\ 1{,}5\ c$.

Мінус вказує напрям швидкості. Отже, права частинка наближається до лівої зі швидкістю 1,5 c. Але такої швидкості частинка мати не може, оскільки швидкість світла є граничною. Класичний закон додавання швидкостей непридатний для великих швидкостей.

За релятивістським законом додавання швидкостей $v = \frac{v' + V}{1 + \frac{v'V}{c^2}}$, або після алгебраїчних перетворень $v' = \frac{v - V}{1 - \frac{Vv}{c^2}}$.

$$v' = \frac{-0{,}75c - 0{,}75c}{1 - \frac{0{,}75c(-0{,}75c)}{c^2}} = -0{,}96c\,.$$

Як і слід було очікувати, відносна швидкість зближення частинок не перевищує швидкості світла у вакуумі c.

§ 38. Релятивістський імпульс. Релятивістський вираз для енергії

У теорії відносності, так само як у класичній механіці, для замкнутої системи зберігається імпульс і енергія. Оскільки закони природи повинні мати однакову форму в усіх інерціальних системах відліку, вони повинні зберігати свій вигляд при перетвореннях Лоренца. Ця вимога називається постулатом релятивістської інваріантності. З вимоги інваріантності випливає, що залежність імпульсу від швидкості має вигляд:

$$\boldsymbol{p} = \frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\,. \tag{38.1}$$

Основне рівняння релятивістської механіки має такий же вигляд, як і другий закон Ньютона, тільки для релятивістського імпульсу:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right) = \boldsymbol{F}\,. \tag{38.2}$$

Релятивістський вираз для кінетичної енергії

$$E_k = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1\right) \tag{38.3}$$

при малих порівняно зі швидкістю світла ($v << c$) швидкостях тіл переходить в класичний вираз для кінетичної енергії: $E_к = mv^2/2$, при цьому імпульс набуває вигляду $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$.

Закони збереження, як і інші закони природи, мають виконуватись у всіх інерціальних системах відліку. Величезний експериментальний матеріал, накопичений у фізиці, показує, що це справедливо тільки в тому випадку, якщо вільній (тобто на яку не діють сили) частинці приписувати, крім кінетичної енергії, додаткову енергію, що дорівнює mc^2. Ця енергія називається *енергією спокою*.

$$E_0 = mc^2. \tag{38.4}$$

Нею володіє нерухома частинка. Вона являє собою внутрішню енергію частинки. Формулу (38.4) називають ***формулою Ейнштейна***.

Повною енергією є сума кінетичної енергії та енергії спокою частинки

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\,. \tag{38.5}$$

З цієї формули видно, що повна енергія тіла прямує до нескінченності при $v \to c$, тому, якщо $m \neq 0$, швидкість тіла завжди є меншою c.

Релятивістський вираз, що пов'язує повну енергію і імпульс частинки, має вигляд

$$E = c\sqrt{p^2 + m^2c^2}. \quad (38.6)$$

З формули Ейнштейна (38.4) випливає, що всяка зміна маси тіла Δm супроводжується зміною енергії спокою ΔE_0:

$$\Delta E_0 = \Delta mc^2. \quad (38.7)$$

І навпаки, якщо тіло, залишаючись в спокої, отримує або віддає енергію, то пропорційно змінюється і його маса.

Це твердження називають законом *взаємозв'язку маси і енергії спокою*.

В основі роботи атомних електростанцій лежить ланцюгова реакція поділу ядер урану. Сумарна маса уламків , що утворилися при поділі, є меншою маси вихідного ядра урану. Тому процес поділу супроводжується зменшенням енергії спокою частинок. Різниця енергій спокою перетворюється в кінетичну енергію уламків і енергію електромагнітного випромінювання.

Ця ж формула пояснює походження енергії, що випромінює Сонце.

§ 39. Межі застосування ньютонівської механіки

Предметом вивчення класичної механіки Ньютона-Галілея є рух макроскопічних тіл зі швидкостями, малими в порівнянні зі швидкістю світла у вакуумі ($v << c$).

Критерії застосовності класичної механіки:

$$v << c, \text{ або } \quad p << mc, \text{ або } \quad E_k << mc^2. \quad (39.1)$$

Швидкості рухів, з якими ми маємо справу в повсякденному житті і в техніці, настільки малі в порівнянні зі швидкістю світла у вакуумі c, що стосовно до цих рухів ньютонівську механіку можна вважати практично строгою.

У світі елементарних частинок звичайним явищем є швидкості, близькі до c. Тому до цих частинок ньютонівська механіка не є застосовною, рух елементарних частинок вивчається в квантовій механіці .

Контрольні питання.

1. За яких умов перетворення Лоренца дуже мало відрізняються від перетворень Галілея?
2. Чи залежить робота сили від вибору системи відліку?
3. Чи залежить значення кінетичної енергії тіла від вибору системи відліку?
4. Чи залежить форма тіла від вибору системи відліку?
5. Чи є сила і прискорення інваріантами відносно перетворень Галілея і Лоренца?
6. Чи буде інваріантним закон збереження імпульсу відносно перетворень Галілея?

7. У чому полягає принципова різниця у вимірі тривалості процесу, що відбувається в одній точці простору, і процесу, який починається в одній точці і закінчується в іншій?
8. Звідки випливає, що якщо дві події напевно не можуть бути пов'язані причинно-наслідковим зв’язком в деякій системі координат, то вони не можуть бути також пов'язані причинно-наслідковим зв’язком ні в якій іншій системі координат?
9. Наведіть приклади здійсненності принципу відносності при вимірюванні довжин і проміжків часу.

Рекомендована література

1. Кучерук І. М., Горбачук І.Т, Луцик П.П. Загальний курс фізики. У 3 т. Т.1: Механіка. Молекулярна фізика і термодинаміка. – К.; «Техніка», 1999, – 536 с
2. Бушок Г.Ф., Левандовський В.В., Півень Г.Ф.. Курс фізики. У 2 кн.: Кн.1. Фізичні основи механіки. Електрика і магнетизм. – К.:«Либідь», 2001. – 448с.
3. Савельев И.В. Курс физики. В 3-х т. Т 1: Механика. Молекулярная физика. – М.: «Наука», 1989, – 352с.,
4. Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс физики. – М. «Высш. шк.», 1989, – 609 с.
5. Трофимова Т.И. Курс физики. – М., «Академия», 2005, – 560 с.
6. Иродов И.Е. Механика. Основные законы. – М. «Лаборатория базовых знаний».2005.– 309 с.
7. Сивухин Д.В. Общий курс физики. – М.: «Наука», 1977-1980.– Т. 1
8. Чертов А.Г. Воробьев А.А. Задачник по физике. – М.: «Физмат лит», 2005 – 640 с.
9. Гаркуша І.П., Горбачук І.Т., Курінний В.П. та ін. Загальний курс фізики: Збірник задач – К.: «Техніка», 2004,– 560 с.