

Министерство образования и науки Украины
Государственное высшее учебное заведение
«Национальный горный университет»

Библиотека иностранного студента

И.П.Гаркуша, В.П.Куриной

Физика

Учебное пособие в 7 частях.

Часть 3. Электричество и магнетизм

Днепропетровск
НГУ
2014

УДК 53(075.4)
ББК 22.3я72
Г45

Рекомендовано редакционным советом Государственного ВУЗа «НГУ» как учебное пособие для бакалавров отрасли знаний 0503 «Разработка полезных ископаемых» (протокол № 12 от 29. 12 2014).

Гаркуша И.П., Куринной В.П. Г 45. Физика. Учебное пособие в 7 частях. Ч. 3. Электричество и магнетизм. [Электронная версия Текст]: Учебное пособие: – Д. Национальный горный университет, 2014. – 174 с. – (Библиотека иностранного студента).

Пособие составлено в соответствии с программой нормативной дисциплины «Физика» и является третьей из семи частей курса лекций тех же авторов, предназначенных для бакалавров отрасли знаний 0503 «Разработка полезных ископаемых». Изложение сопровождается примерами решения задач, облегчающих понимание теоретического материала.

Пособие может быть полезным студентам дневных и заочных отделений других технических направлений подготовки, а также преподавателям высших технических учебных заведений.

Оглавление

ЧАСТЬ 3.

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

Глава 1. Электрическое поле в вакууме.....	5
§ 1. Электрический заряд.....	5
§ 2. Закон Кулона.....	6
§ 3. Электрическое поле. Напряженность электрического поля.....	7
§ 4. Линии вектора напряженности. Поток вектора напряженности.....	11
§ 5. Теорема Гаусса для электростатического поля в вакууме.....	13
§ 6. Применение теоремы Гаусса для нахождения напряженности некоторых полей в вакууме.....	15
§ 7. Работа перемещения заряда в электрическом поле. Потенциал поля.....	20
§ 8. Эквипотенциальные поверхности. Связь между напряженностью и потенциалом.....	24
§ 9. Вычисление разности потенциалов по напряженности поля	26
Глава 2. Электрическое поле в диэлектриках.....	29
§ 10. Диполь во внешнем электрическом поле.....	29
§ 11. Типы диэлектриков. Поляризация диэлектриков.....	31
§ 12. Поляризованность. Диэлектрическая восприимчивость.....	34
§ 13. Электрическое смещение Диэлектрическая проницаемость.....	35
Глава 3. Проводники в электрическом поле.....	39
§ 14. Равновесие зарядов на проводнике.....	39
§ 15. Электрическое поле заряженного проводника.....	41
§ 16. Емкость уединенного проводника.....	42
§ 17. Конденсаторы.....	43
§ 18. Соединение конденсаторов.....	46
.	.
Глава 4. Энергия электрического поля.....	50
§ 19. Энергия взаимодействия точечных электрических зарядов.....	50
§ 20. Энергия заряженного проводника и системы проводников. Энергия заряженного конденсатора.....	51
§ 21. Плотность энергии электростатического поля.....	53
Глава 5. Постоянный электрический ток.....	55
§ 22. Постоянный электрический ток, его характеристики и условия существования.....	55
§ 23. Сторонние силы, ЭДС и напряжение.....	57
§ 24. Закон Ома для однородного участка цепи. Электрическое сопротивление проводника.....	61
§ 25. Последовательное и параллельное соединение проводников.....	63
§ 26. Работа, мощность и тепловое действие тока. Закон Джоуля – Ленца.....	66
§ 27. Закон Ома для неоднородного участка цепи	68
§ 28. Закон Ома для замкнутой цепи.....	69
§ 29. Правила Кирхгофа.....	71
§ 30. Элементы классической электронной теории электропроводности металлов.....	74

Глава 6. Магнитное поле в вакууме.....	82
§ 31. Магнитное поле. Вектор магнитной индукции.....	82
§ 32. Закон Био-Савара-Лапласа и его применение к расчету полей прямого и кругового токов.....	86
§ 33. Магнитное поле движущегося заряда.....	93
§ 34. Действие магнитного поля на проводник с током. Закон Ампера.....	94
§ 35. Взаимодействие двух параллельных токов. Определение единицы силы тока – ампера.....	95
§ 36. Действие магнитного поля на движущийся заряд. Сила Лоренца.....	96
§ 37. Движение заряженных частиц в однородном магнитном поле.....	99
§ 38. Эффект Холла.....	103
§ 39. Циркуляция вектора магнитной индукции в вакууме.....	106
§ 40. Магнитное поле соленоида и тороида.....	109
§ 41. Поток вектора магнитной индукции.....	111
§ 42. Работа, совершаемая при перемещении проводника с током в магнитном поле.....	113
§ 43. Момент сил, действующих на контур с током в однородном магнитном поле.....	114
Глава 7. Магнитное поле в веществе.....	117
§ 44. Намагничивание вещества.....	117
§ 45.1. Описание магнитного поля в веществе Циркуляция вектора магнитной индукции в веществе. Напряженность магнитного поля. Магнитная восприимчивость и магнитная про- ницаемость.....	119
§ 45, 2. Граничные условия на границе раздела двух магнетиков.....	123
§ 46. Природа молекулярных токов. Магнитные свойства атомов.....	126
§ 47. Диа- и парамагнетизм.....	128
§ 48. Магнитоупорядоченные вещества (ферро -, антиферро- , ферримагнетики).....	131
Глава 8. Электромагнитная индукция.....	137
§ 49. Явление электромагнитной индукции. Закон Фарадея. Вывод закона электромагнитной индукции из закона сохранения энергии. Правило Ленца.....	137
§ 50. Природа ЭДС индукции. Вывод закона электромагнитной индукции на основе элек- тронной теории.....	142
§ 51. Явление самоиндукции. Индуктивность. Явление взаимной индукции	146
§ 52. Ток при замыкании и размыкании цепи.....	149
§ 53. Энергия магнитного поля.....	152
§ 54. Релятивистское истолкование магнитного взаимодействия движущегося заряда и пря- молинейного проводника с током. Относительный характер электрического и магнитного полей.....	153
§ 55. Преобразования Лоренца для электромагнитного поля	158
Глава 9. Уравнения Максвелла.....	161
§ 56. Вихревое электрическое поле. Первое уравнение Максвелла.....	162
§ 57. Ток смещения. Второе уравнение Максвелла.....	164
§ 58. Третье и четвертое уравнения Максвелла.....	168
§ 59. Полная система уравнений Максвелла для электромагнитного поля.....	169

Глава 1. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ

§ 1. Электрический заряд

Все тела в природе образованы из атомов и молекул, которые, в свою очередь, состоят из ядер и электронов, обладающих электрическим зарядом. Электрический заряд, подобно массе, является свойством элементарных частиц, их внутренней характеристикой. *Электрический заряд – величина, определяющая интенсивность электромагнитного взаимодействия заряженных частиц.*

Различают два вида электрических зарядов, условно названных *положительными и отрицательными*. Электроны являются отрицательно заряженными частицами, а протоны, входящие в состав атомного ядра, – положительными. Одноименные заряды (заряды одного знака) отталкиваются друг от друга, разноименные (заряды разных знаков) – притягиваются.

Наименьший по величине экспериментально обнаруженный в природе заряд – это заряд электрона

$$q_e = -e; \quad e \approx 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл.} \quad (1.1)$$

Электрический заряд, равный e , называется элементарным зарядом. Носителями элементарных зарядов и нейтральными, т.е. такими, заряд которых равен нулю, являются следующие элементарные частицы (таблица 1):

Таблица 1.

$+e$	протон, позитрон, положительный мюон μ^+ , положительный пион π^+
$-e$	электрон, антипротон, отрицательный мюон μ^- , отрицательный пион π^-
0	нейтрон, нейтрино, фотон, нейтральный пион π^0

В каждом атоме суммарный положительный и отрицательный заряды одинаковы, поэтому в любом элементарном объеме тела алгебраическая сумма зарядов равна нулю. Вследствие этого тела являются электрически нейтральными или незаряженными.

Однако, если оторвать электроны от одних тел и передать их другим телам, то эти тела становятся соответственно положительно и отрицательно заряженными. Например, если натирать стеклянную палочку куском резины, стекло заряжается положительно, резина в таком же количестве – отрицательно. Заряд наэлектризованной о шерсть пластмассовой палочки является отрицательным.

Электрический заряд q любого тела является целым кратным электрическому заряду e , т.е. изменяется дискретно, или, как говорят, *квантуется*:

$$q = \pm Ne, \quad (1.2)$$

где N – целое число.

Экспериментально установлено, что *суммарный электрический заряд изолированной системы остается постоянным* при всех взаимодействиях и превращениях частиц этой системы. Это утверждение называется *законом сохранения электрического заряда*.

Электрические заряды могут возникать и исчезать, однако при этом возникают или исчезают одновременно два элементарных заряда разных знаков. Например, если сталкиваются электрон с зарядом $-e$ и его античастица позитрон с зарядом $+e$, то в результате аннигиляции рождаются два гамма-фотона

$$e^- + e^+ = \gamma + \gamma.$$

Полный заряд до и после реакции равен нулю.

И наоборот, пролетая вблизи атомного ядра, гамма-фотон может превратиться в пару частиц – электрон($-e$) и позитрон($+e$).

Еще одним свойством электрического заряда, установленным экспериментально, является независимость заряда от его скорости. Величина заряда, измеренная в различных инерциальных системах отсчета, является одинаковой. Это обстоятельство называют *релятивистской инвариантностью заряда*.

§ 2. Закон Кулона

Если размеры заряженных тел пренебрежимо малы по сравнению с расстояниями между ними, тела можно считать материальными точками, или *точечными зарядами*.

Французский физик Ш. Кулон экспериментально установил: *сила взаимодействия двух точечных неподвижных зарядов в вакууме пропорциональна произведению зарядов q_1 и q_2 , обратно пропорциональна квадрату расстояния r между ними и направлена по прямой, соединяющей эти заряды:*

$$F = k \frac{|q_1||q_2|}{r^2}. \quad (2.1)$$

Эта формула определяет *модуль* силы. Коэффициент пропорциональности k в СИ равен:

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}, \quad (2.2)$$

где ϵ_0 – *электрическая постоянная*,

$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ А}^2 \cdot \text{с}^4 / \text{М}^3 \cdot \text{кг}. \quad (2.3)$$

Удобным для расчетов является приближенное значение k :

$$k \approx 9 \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{Кл}^2.$$

Чтобы формула давала не только значение модуля силы, но и направление силы, закон Кулона можно выразить в векторной форме:

$$\mathbf{F} = k \frac{q_1 q_2}{r^3} \mathbf{r}, \quad (2.4)$$

Здесь \mathbf{F} – сила, действующая на заряд, к которому обращен вектор \mathbf{r} , проведенный от одного заряда к другому (рис. 2.1). Модуль этого вектора равен расстоянию между зарядами.

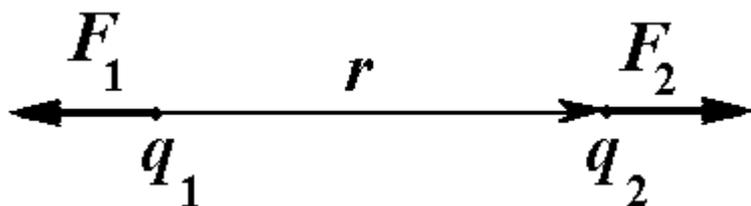


Рис. 2.1.

При любых знаках зарядов формула (2.4) дает правильное направление силы. Так, при отталкивании (рис. 2.1), т.е. в случае одноименных зарядов $q_1q_2 > 0$, и сила F_2 , действующая на заряд q_2

со стороны заряда q_1 , направлена вдоль r .

При притяжении, т.е. в случае разноименных зарядов $q_1q_2 < 0$, и векторы F_2 и r направлены в противоположные стороны (рис. 2.2).

Чтобы получить силу F_1 , действующую на первый заряд q_1 , нужно провести вектор r от q_2 к q_1 , подставить его в (2.4) и повторить рассуждения.

Если записать закон Кулона в виде

$$F_r = k \frac{q_1q_2}{r^2}, \quad (2.5)$$

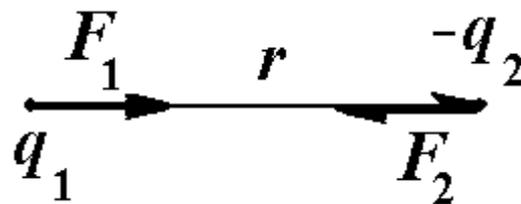


Рис. 2.2.

то это выражение представляет собой *проекцию* вектора F на направление вектора r . Проекция может быть положительной либо отрицательной в зависимости от знака произведения q_1q_2 .

§ 3. Электрическое поле. Напряженность электрического поля

Согласно представлениям классической физики взаимодействие между зарядами осуществляется через поле. Всякий электрический заряд изменяет определенным образом свойства окружающего его пространства – создает *электромагнитное поле*. Это поле проявляет себя в том, что на помещенный в какую-либо его точку другой, «пробный» заряд действует некоторая сила, т.е. взаимодействие электрических зарядов осуществляется через «посредника» - электромагнитное поле.

Электрическое поле наряду с веществом является формой существования материи. Ему присущи энергия и импульс, поле является физической реальностью.

Поле, создаваемое *неподвижными зарядами*, не изменяется со временем и называется *электростатическим*. (Заметим, что движущиеся заряды, кроме электрического поля создают также магнитное поле.)

Скорость распространения электромагнитного поля в пустоте равна

$$c = 299\,792,458 \text{ км/с} \approx 300\,000 \text{ км/с.}$$

Для изучения поля рассматривают две его физические характеристики - силовую и энергетическую.

Помещая в соответствующую точку поля пробный заряд, можно обнаружить силу, действующую на него. Величина силы, действующей на заряд, ха-

рактически характеризует «интенсивность» поля. Эта сила зависит как от поля, так и от самого пробного заряда.

Например, в случае поля, создаваемого неподвижным точечным зарядом q в точке, положение которой относительно заряда q определяется радиус-вектором \mathbf{r} , на пробный положительный точечный заряд q_{np} в этом поле будет по закону Кулона (2.4) действовать сила

$$\mathbf{F} = k \frac{q q_{np}}{r^3} \mathbf{r}. \quad (3.1)$$

Сила пропорциональна величине каждого из зарядов. Однако, отношение силы к пробному заряду \mathbf{F}/q_{np} уже не зависит от величины пробного заряда, а зависит только от величин q и \mathbf{r} , определяющих поле в данной точке.

Напряженностью \mathbf{E} электрического поля называется векторная величина, равная в каждой точке отношению силы \mathbf{F} , действующей на пробный заряд q_{np} , помещенный в эту точку, к величине заряда q_{np} :

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q_{np}}. \quad (3.2)$$

Вектор \mathbf{E} – силовая характеристика электрического поля – численно равен и совпадает по направлению с силой, действующей со стороны поля на помещенный в рассматриваемую точку единичный положительный заряд. Отсюда вытекает простое правило – для определения направления вектора напряженности электрического поля в разных точках пространства в эти точки надо мысленно поместить плюс единицу заряда. На рис. 3.1 и 3.2 показаны картины полей, создаваемых точечным положительным (рис. 3.1) и точечным отрицательным (рис. 3.2) зарядами. Вектор напряженности \mathbf{E} имеет радиальное направление: он направлен от создающего поле заряда q , если это положительный заряд, и к создающему поле заряду q , если он отрицательный.

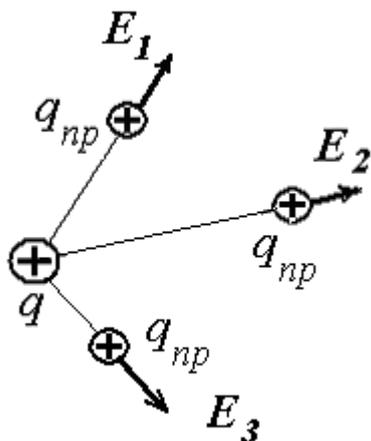


Рис. 3.1.

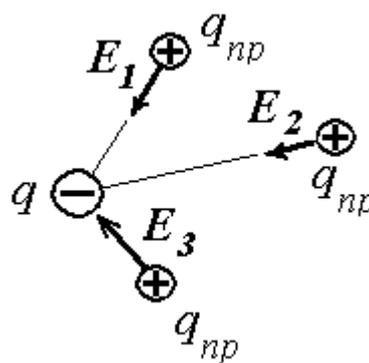


Рис. 3.2.

Из формул (3.1) и (3.2) получим *напряженность поля точечного заряда q в любой точке поля*

$$\mathbf{E} = k \frac{q}{r^3} \mathbf{r}, \quad (3.3)$$

где \mathbf{r} – радиус-вектор, проведенный из заряда в данную точку поля. Направлен вектор \mathbf{E} вдоль радиальной прямой от заряда, если он положителен, и к заряду, если он отрицателен.

Модуль E напряженности поля точечного заряда q в точке, отстоящей на расстоянии r от него:

$$E = k \frac{|q|}{r^2}. \quad (3.4)$$

Единица измерения напряженности электрического поля в СИ – ньютон на кулон или вольт на метр – равна напряженности такого поля, в котором на заряд в 1 Кл действует сила в 1 Н.

Пример 3.1. Пользуясь формулой для напряженности электрического поля точечного заряда (3.3) и учитывая размеры атома $r_a \sim 10^{-10}$ м, оценим напряженность электрического поля внутри простейшего из атомов – атома водорода. Поле создается положительно заряженным ядром – протоном с зарядом $|e| = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

$$E = \frac{|e|}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 9 \cdot 10^9}{10^{-20}} \approx 1,5 \cdot 10^{11} \text{ В/м}.$$

Достижимые на практике электрические поля имеют гораздо меньшую величину напряженности – порядка 10^7 В/м.

Зная напряженность электрического поля, можно найти силу, действующую на любой заряд q , помещенный в данную точку поля. В соответствии с (3.2) выражение для этой силы имеет вид

$$\mathbf{F} = q \mathbf{E}. \quad (3.5)$$

Принцип суперпозиции. Опытным путем установлено, что напряженность поля, создаваемого несколькими зарядами, равна векторной сумме напряженностей полей, создаваемых каждым зарядом в отдельности:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \dots = \sum \mathbf{E}_i. \quad (3.6)$$

Сложение напряженностей электрических полей по правилу сложения векторов выражает так называемый *принцип суперпозиции (наложения друг на друга) электрических полей*.

Это означает, что присутствие других электрических зарядов никак не сказывается на поле, создаваемом данным зарядом. Отдельные заряды действуют независимо, «не мешая» друг другу, не влияют друг на друга, и поэтому суммарное поле можно определить как векторную сумму от каждого из них в отдельности.

Принцип суперпозиции позволяет рассчитать напряженность поля, созданного любым распределением неподвижных электрических зарядов.

Пример 3.2. Поле диполя. *Электрическим диполем* называется система двух одинаковых по модулю и противоположных по знаку точечных зарядов $+q$ и $-q$, расстояние l между которыми (*плечо диполя*) мало по сравнению с расстояниями r до тех точек, в которых рассматривается поле системы.

Определим напряженность электрического поля диполя:

1) в точке A , лежащей на продолжении плеча l на расстоянии r от его середины (при $r \ll l$) (рис. П.3.1);

- 2) в точке B на перпендикуляре к плечу диполя, проведенному через его середину (рис. П.3.2);
 3) в произвольной точке C .

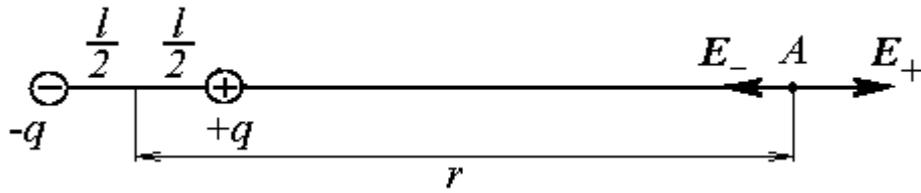


Рис. П.3.1.

По принципу суперпозиции:

$$E_A = E_+ + E_-.$$

Здесь E_+ – напряженность поля, создаваемого зарядом $+q$, а E_- – зарядом $-q$ в точке A . Поскольку в точке A эти векторы направлены в противоположные стороны, используя формулу (3.4) можно написать:

$$E_A = E_+ - E_- = k \frac{q}{\left(r - \frac{l}{2}\right)^2} - k \frac{q}{\left(r + \frac{l}{2}\right)^2} = k \frac{2qlr}{\left(r^2 - \frac{l^2}{4}\right)^2}.$$

По условию $r \gg l$, поэтому $r^2 \gg \frac{l^2}{4}$ и в знаменателе последней формулы можно пренебречь $\frac{l^2}{4}$ по сравнению с r^2 . Тогда для напряженности поля в точке A получим

$$E_A = k \frac{2ql}{r^3}. \quad (\text{П. 3.1})$$

Плечом диполя называют вектор l , направленный по оси диполя от отрицательного заряда к положительному и численно равный расстоянию между ними. Произведение абсолютной величины заряда на плечо называют электрическим моментом диполя $p = ql$. Тогда

$$E_A = k \frac{2p}{r^3},$$

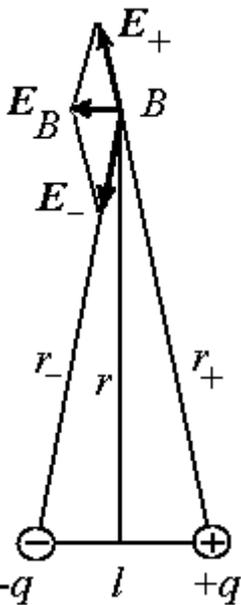


Рис.П.3.2

2). Для точки B на прямой, перпендикулярной к оси диполя, векторы E_+ и E_- имеют одинаковые модули, равные

$$E_+ = E_- = k \frac{q}{r^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2} \approx k \frac{q}{r^2}. \quad (\text{П. 3.2})$$

Из подобия равнобедренных треугольников, опирающихся на отрезок l и на вектор E_B , следует

$$\frac{E_B}{E_+} = \frac{l}{r_+} = \frac{l}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2}} \approx \frac{l}{r}.$$

Подставив значение E_+ (П. 3.2), получим

$$E_B = k \frac{ql}{r^3} = k \frac{p}{r^3}. \quad (\text{П. 3.3})$$

Эта зависимость в векторном виде :

$$E_B = -k \frac{P}{r^3}. \quad (\text{П. 3.4})$$

3). Можно показать, что напряженность поля диполя в произвольной точке C определяется формулой

$$E_C = k \frac{P}{r^3} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \alpha}, \quad (\text{П. 3.5})$$

где α – угол между вектором l и вектором r .

Отметим, что в отличие от поля одного точечного заряда, напряженность которого убывает как $\frac{1}{r^2}$, напряженность поля диполя с расстоянием от убывает как $\frac{1}{r^3}$, т.е. быстрее.

§ 4. Линии вектора напряженности. Поток вектора напряженности

Для графического изображения электрических полей используют линии вектора напряженности или силовые линии. Эти линии проводятся таким образом, чтобы в каждой точке касательная к линии совпадала по направлению с вектором напряженности в этой точке (рис. 4.1). Силовым линиям приписывают направление: они выходят из положительных зарядов или приходят из бесконечности. Они либо оканчиваются на отрицательных зарядах, либо уходят в бесконечность. На рисунках это направление указывают стрелками на силовой линии.

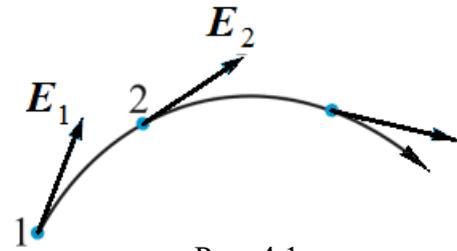


Рис. 4.1.

Условились густоту линий связывать с модулем напряженности поля E . А именно, через единичную площадку, перпендикулярную силовым линиям про-

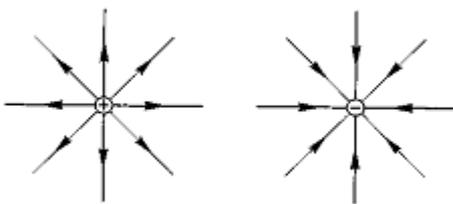


Рис. 4.2.

водят столько линий, какова в этом месте величина напряженности поля. Таким образом, линии проводят гуще в тех местах, где напряженность поля больше, и реже там, где она меньше.

На рис. 4.2 показаны силовые линии поля уединенных положительного и отрицательного точечных зарядов. Из формулы (3.3) следует, что они являются радиальными прямыми, рас-

пределенными с одинаковой густотой по всем направлениям.

Более сложный вид имеет картина линий поля, создаваемого двумя зарядами противоположных (рис. 4.3) или одинаковых знаков (рис. 4.4)

Поле называется *однородным*, если величина и направление вектора E одинаковы во всех точках поля. Очевидно, что однородное поле изображается прямыми параллельными силовыми линиями одинаковой густоты (рис. 4.5).

Введем понятие *потока вектора напряженности* поля через поверхность.

Рассмотрим небольшую площадку, ΔS_0 , расположенную в однородном электростатическом поле перпендикулярно силовым линиям (рис. 4.6).

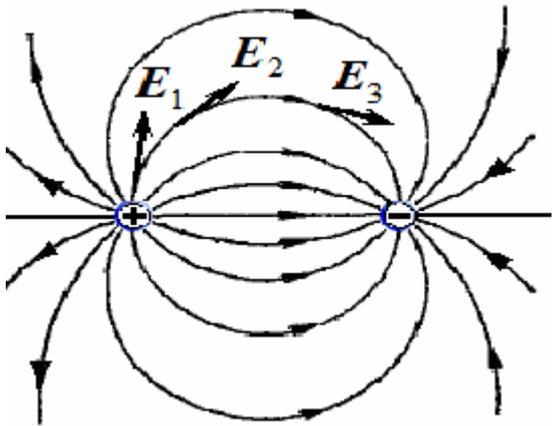


Рис. 4.3.

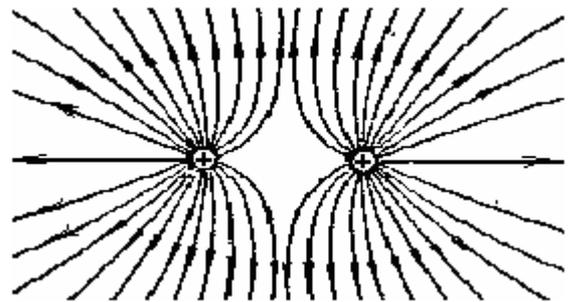


Рис. 4.4.

Определим, какое число силовых линий пронизывает эту площадку. По договоренности *густоту линий*, т.е. количество линий, рассчитанное на единицу площади поверхности, ориентированной перпендикулярно к линиям, выбирают равной модулю E напряженности поля.

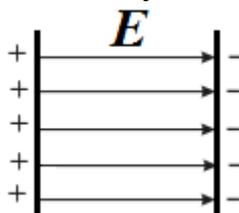


Рис. 4.5.

Тогда количество линий, пронизывающих площадку ΔS_0 будет равно

$$\Delta\Phi_E = E \Delta S_0 \quad (4.1)$$

Пусть теперь ΔS – другая площадка, силовые линии образуют с нормалью к этой площадке угол α . Площадка ΔS_0 является проекцией площадки ΔS на плоскость, перпендикулярную к силовым линиям.

$$\Delta S_0 = \Delta S \cos \alpha.$$

Здесь α – угол между направлением линий напряженности и направлением нормали к площадке ΔS (рис. 4.6).

Как видно из рисунка, число линий, пересекающих ΔS и ΔS_0 одинаково. Поэтому количество линий, пронизывающих площадку ΔS будет также равно

$$\Delta\Phi_E = E \Delta S_0 = E \Delta S \cos \alpha.$$

Величина $E \cos \alpha$ представляет собой проекцию вектора E на направление нормали n к площадке ΔS :

$$E \cos \alpha = E_n.$$

Поэтому число силовых линий $\Delta\Phi$, пересекающих площадку ΔS равно

$$\Delta\Phi_E = E_n \Delta S. \quad (4.2)$$

Произведение $E_n \Delta S$ носит название *потока вектора напряженности поля* через поверхность ΔS . Формула (4.2) показывает, что поток $\Delta\Phi_E$ вектора E

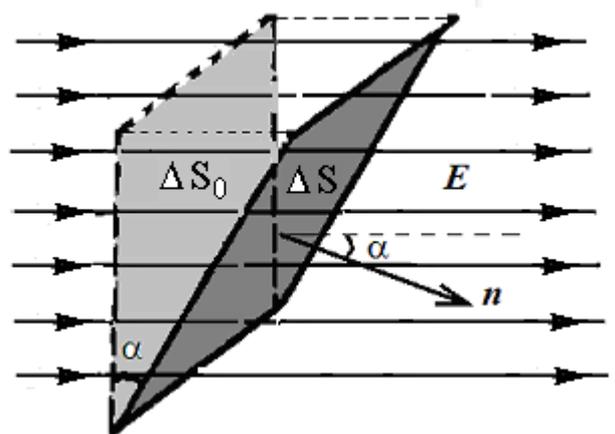


Рис. 4.6.

через поверхность ΔS равен полному числу силовых линий, пересекающих эту поверхность.

Отметим, что поток вектора напряженности, как и число проходящих через поверхность силовых линий, есть скаляр – алгебраическая величина. Поток считается положительным, если силовые линии пересекают поверхность в направлении нормали и отрицательным – в противоположном направлении.

В случае замкнутых поверхностей под нормалью к площадке dS подразумевают обращенную наружу, т.е. внешнюю нормаль. Тогда поток, выходящий из охватываемой поверхностью области наружу, будет положительным.

Если под dS понимать вектор, направленный перпендикулярно к плоскости площадки в направлении внешней нормали и равный по величине площади этой элементарной площадки, то поток вектора напряженности \mathbf{E} через площадку dS есть *скалярное произведение* векторов \mathbf{E} и $d\mathbf{S}$:

$$d\Phi_E = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E dS \cos \alpha = E_n dS = E dS_n, \quad (4.3)$$

где $dS_n = dS \cos \alpha$ – площадь проекции площадки dS на плоскость, перпендикулярную вектору \mathbf{E} .

Полный поток Φ_E вектора напряженности электрического поля через произвольную поверхность S равен алгебраической сумме потоков через все малые участки этой поверхности – интегралу по поверхности

$$\Phi_E = \int_S E dS \cos \alpha = \int_S E_n dS = \int_S E dS_n. \quad (4.4)$$

§ 5. Теорема Гаусса для электростатического поля в вакууме

Рассмотрим картину силовых линий электрического поля неподвижного точечного положительного заряда (рис. 5.1). Они представляют собой симметрично расположенные радиальные прямые.

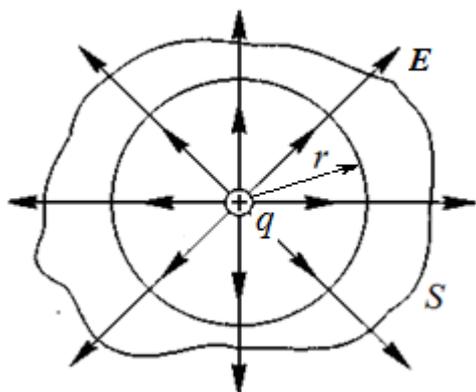


Рис. 5.1.

Вычислим поток вектора \mathbf{E} через замкнутую сферическую поверхность, окружающую этот заряд и имеющую центр в точке нахождения заряда. Полное число Φ_E линий, пересекающих сферическую поверхность радиуса r , будет равно произведению густоты линий на площадь поверхности сферы $4\pi r^2$. Густота линий должна быть по условию равна модулю вектора \mathbf{E} :

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}.$$

Здесь учтено, что $|q| = q$, т.к. $q > 0$. Из этой формулы следует, что на всей поверхности сферы напряженность поля, а следовательно, и густота линий, будет одинакова по величине. Напряженность направлена вдоль радиуса, то есть по нормали к поверхности сферы, поэтому $E_n = E$. Следовательно, поток вектора напряженности через охватывающую заряд сферическую поверхность равен

$$\Phi_E = \oint_S E_n dS = E_n S = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad (5.1)$$

Знак потока совпадает со знаком заряда.

Если заменить сферу произвольной замкнутой поверхностью S , охватывающей заряд q (рис. 5.1), то очевидно, что каждая силовая линия, пересекающая сферу, пересечет и эту поверхность. Значит, поток Φ_E вектора \mathbf{E} и для поверхности любой другой формы, если она замкнута и заключает внутри себя точечный заряд q , также будет равен q/ϵ_0 .

$$\Phi_E = \oint_S \mathbf{E}_n dS = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

Если внутри замкнутой поверхности находится несколько зарядов, то в силу принципа суперпозиции полей суммарная напряженность поля будет представлять собой векторную сумму напряженностей полей каждого из зарядов

$$\Phi_E = \oint_S \mathbf{E}_n dS = \oint_S (\mathbf{E}_{1n} + \mathbf{E}_{2n} + \dots) dS = \Phi_{1E} + \Phi_{2E} + \dots \quad (5.2)$$

и, следовательно,

$$\Phi_E = \sum_i \frac{q_i}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i. \quad (5.3)$$

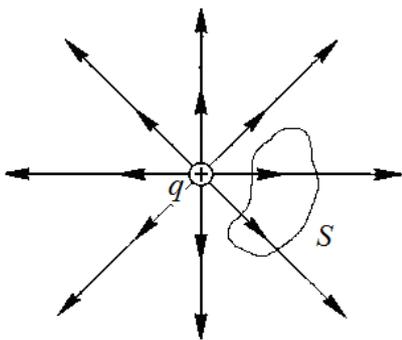


Рис. 5.2.

Если замкнутая поверхность не охватывает заряда (рис. 5.2), то поток вектора \mathbf{E} через эту поверхность равен нулю, т.к. число силовых линий, входящих через поверхность, равно числу выходящих из нее.

Доказанное утверждение называется теоремой Гаусса для электростатического поля в вакууме: **поток вектора напряженности электростатического поля в вакууме через произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме заключенных внутри этой поверхности зарядов, деленной на ϵ_0 .**

$$\oint_S \mathbf{E}_n dS = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i. \quad (5.4)$$

Заметим, что теорема Гаусса тесно связана со справедливостью закона Кулона. Вывод теоремы Гаусса использует сокращение r^2 , а это возможно из-за того, что сила взаимодействия зарядов, описываемая законом Кулона, обратно пропорциональна квадрату расстояния между зарядами. Закон Кулона и теорема Гаусса фактически представляют один и тот же закон природы. Кроме того, пропорциональность площади поверхности квадрату линейных размеров – это отличительная черта евклидовой геометрии в трехмерном пространстве. Таким образом, теорема Гаусса свидетельствует о неискривленности трехмерного физического пространства, т.е. о том, что его геометрия евклидова.

§ 6. Применение теоремы Гаусса для нахождения напряженности некоторых полей в вакууме

1. Поле бесконечной равномерно заряженной плоскости.

Пусть бесконечная плоскость заряжена с постоянной *поверхностной плотностью зарядов* σ , которая определяется формулой

$$\sigma = \frac{dq}{dS}, \quad (6.1)$$

где dq – заряд, расположенный на малом участке поверхности площадью dS . Для определенности выберем положительный заряд ($\sigma > 0$).

Поскольку плоскость бесконечна и заряжена однородно, то из соображений симметрии следует полагать, что напряженность в любой точке поля должна быть перпендикулярна к плоскости ($E = E_n$), направлена от нее (выбран случай положительно заряженной плоскости), а густота линий везде одна и та же (рис. 6.1).

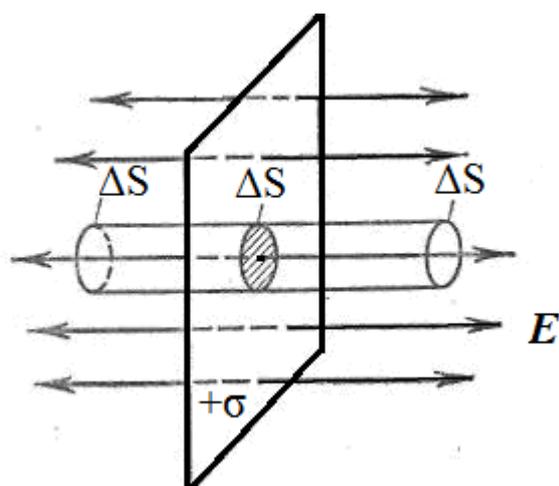


Рис. 6.1.

Эта плоскость является плоскостью симметрии поля, в симметричных относительно плоскости точках напряженность должна быть одинакова по величине и противоположна по направлению.

Для применения теоремы Гаусса выберем замкнутую поверхность в виде цилиндрической поверхности с образующими, перпендикулярными к плоскости, и основаниями ΔS , параллельными плоскости и расположенными на одинаковом расстоянии от нее.

Поток вектора напряженности поля через цилиндрическую часть поверхности равен нулю, так как линии напряженности поля скользят вдоль этой поверх-

ности и не пересекают ее.

Внутри построенной таким образом замкнутой поверхности оказывается участок заряженной плоскости ΔS , на котором находится заряд

$$\Delta q = \sigma \Delta S. \quad (6.2)$$

При вычислении потока вектора E через замкнутую поверхность необходимо учитывать, что силовые линии пронизывают две площадки ΔS – лежащие вправо и влево от плоскости. Следовательно, поток через них равен

$$\Phi_E = E \cdot 2\Delta S. \quad (6.3)$$

С другой стороны, тот же поток по теореме Гаусса равен заряду внутри, деленному на ϵ_0 :

$$2E\Delta S = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma \Delta S,$$

откуда напряженность поля с каждой стороны от равномерно заряженной плоскости в вакууме

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}. \quad (6.4)$$

Следовательно, поле бесконечной заряженной плоскости не зависит от расстояния до нее и перпендикулярно к плоскости.

Если записать полученный результат в виде $E_n = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$, где E_n – проекция

вектора \mathbf{E} на нормаль \mathbf{n} к заряженной плоскости, причем вектор \mathbf{n} направлен от этой плоскости, то эта формула будет справедлива и для отрицательно заряженной плоскости.

Если $\sigma > 0$, то и $E_n > 0$, вектор \mathbf{E} направлен от заряженной плоскости, как на рис. 6.1, если же $\sigma < 0$, то $E_n < 0$, и вектор \mathbf{E} направлен к заряженной плоскости.

2. *Напряженность поля двух бесконечных параллельных плоскостей, заряженных разноименно с поверхностными плотностями зарядов $+\sigma$ и $-\sigma$ (модель плоского конденсатора).*

Изобразим на рис. 6.2 сплошными силовые линии, начинающиеся на положительных зарядах левой поверхности, и штриховыми – входящие в правую поверхность, несущую отрицательный заряд.

Напряженность поля каждой отдельной плоскости равна по модулю $\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$. В пространстве между

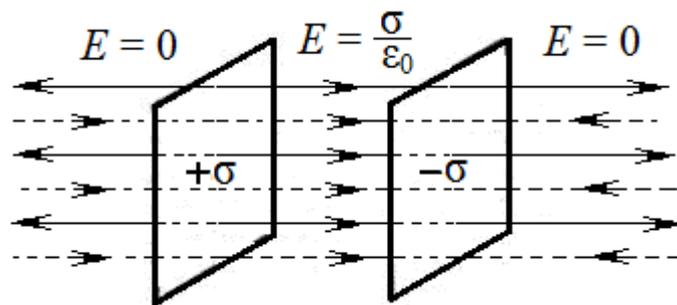


Рис. 6.2.

плоскостями напряженности совпадают по направлению, по принципу суперпозиции напряженности полей складываются и общая напряженность равна

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \quad (6.5)$$

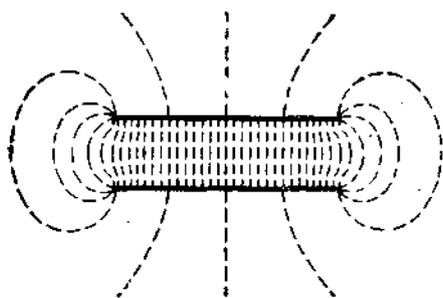


Рис. 6.3.

Здесь под σ подразумевается модуль поверхностной плотности заряда.

Напряженность поля вне пластин равна нулю, так как по абсолютному значению напряженности равны, а по направлению противоположны – поля взаимно уничтожаются.

Таким образом, поле оказывается сосредоточенным между пластинами. Напряженность поля во всех точках этой области одинакова по величине и по направлению. Она направлена от положительно заря-

женной плоскости к отрицательной по нормали к ним. Такое поле является однородным, а линии напряженности представляют собой совокупность параллельных равноотстоящих прямых. Подобным рассмотренному случаю является поле заряженного плоского конденсатора (рис. 6.3), хотя он имеет конечные размеры. Однородность поля нарушается только вблизи краев пластин.

3. Напряженность поля равномерно заряженной нити.

Рассмотрим бесконечную прямолинейную нить, вдоль которой равномерно распределен заряд с линейной плотностью заряда

$$\tau = \frac{dq}{dl}. \quad (6.6)$$

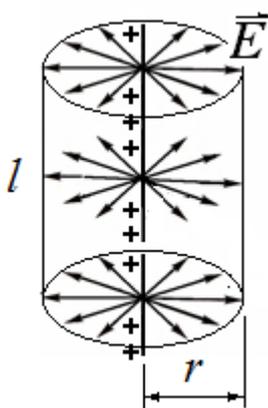


Рис. 6.4.

Из соображений симметрии следует, что поле бесконечной равномерно заряженной нити имеет осесимметричный характер – вектор \mathbf{E} в каждой точке направлен перпендикулярно к нити и радиально от нее (если $\tau > 0$, рис. 6.4) или к ней (если $\tau < 0$). Модуль вектора \mathbf{E} зависит только от расстояния r до нити. Линии напряженности являются радиальными прямыми, лежащими в плоскостях, перпендикулярных нити.

Чтобы воспользоваться теоремой Гаусса и найти напряженность электрического поля на расстоянии r от нити, окружим ее замкнутой цилиндрической поверхностью так, чтобы сама нить являлась осью цилиндра.

Учитывая, что силовые линии пронизывают только боковую поверхность цилиндра и скользят по его основаниям, определим поток вектора \mathbf{E} простым умножением E_r на площадь боковой поверхности:

$$\Phi_E = \oint_S E_n dS = E_r S_{\text{бок}} = E_r \cdot 2\pi r l, \quad (6.7)$$

где E_r – проекция вектора \mathbf{E} на радиус-вектор \mathbf{r} , проведенный от нити в рассматриваемую точку поля и направленный перпендикулярно к оси.

Поскольку заряд, охватываемый замкнутой поверхностью, в данном случае равен

$$q = \tau l,$$

применим теорему Гаусса:

$$\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0}, \text{ или } E_r \cdot 2\pi r l = \frac{\tau \cdot l}{\epsilon_0}.$$

Откуда

$$E_r = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r}. \quad (6.8)$$

При $\tau > 0$ $E_r > 0$, т.е. вектор \mathbf{E} направлен от заряженной нити, при $\tau < 0$ $E_r < 0$, вектор \mathbf{E} направлен к нити.

Такой же вид имеет поле бесконечного равномерно заряженного по поверхности цилиндра (рис. 6.5). Если

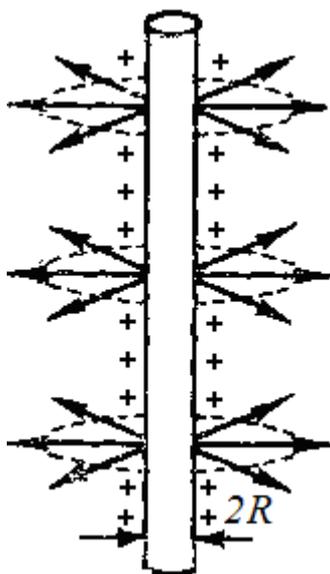


Рис. 6.5.

радиус цилиндра R , поверхностная плотность заряда σ , то заряд, приходящийся на элемент длины dl цилиндра равен

$$dq = \sigma \cdot 2\pi R dl,$$

а количество заряда, приходящегося на единицу длины цилиндра – линейная плотность заряда τ :

$$\tau = \frac{dq}{dl} = \frac{\sigma 2\pi R dl}{dl} = \sigma 2\pi R.$$

Тогда

$$E_r = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{\sigma R}{\epsilon_0 r} \quad (r \geq R) \quad (6.9).$$

Если $r < R$, то гауссова коаксиальная с заряженной поверхностью замкнутая цилиндрическая поверхность радиуса r не охватывает зарядов, вследствие чего $E_r = 0$. То есть внутри заряженной бесконечно длинной цилиндрической поверхности поле отсутствует.

4. Напряженность поля равномерно заряженной сферической поверхности.

Пусть заряд q равномерно распределен в вакууме по поверхности сферы радиуса R (рис. 6.6) с поверхностной плотностью зарядов σ :

$$\sigma = \frac{q}{S_{\text{сферы}}} = \frac{q}{4\pi R^2}.$$

Поле такой заряженной сферы будет центрально симметрично относительно центра сферы.

Это означает, что векторы напряженности \mathbf{E} будут направлены радиально, а величина напряженности зависит только от расстояния r от центра сферы.

В качестве замкнутой гауссовой поверхности выберем также сферическую поверхность радиуса $r > R$, описанную вокруг заряженной сферы с тем же центром.

Поскольку для всех точек поверхности напряженность поля \mathbf{E} перпендикулярна поверхности, поток вектора \mathbf{E} определится так:

$$\Phi_E = E_r \cdot 4\pi r^2. \quad (6.10)$$

По теореме Гаусса поток равен заряду внутри гауссовой сферы, деленному на ϵ_0 :

$$E_r \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0},$$

откуда

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \quad (r \geq R). \quad (6.11)$$

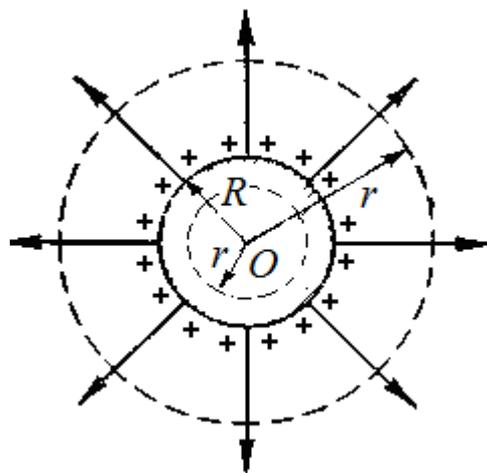


Рис. 6.6.

Эта формула совпадает с формулой напряженности поля точечного заряда q , помещенного в центре сферы.

Если радиус вспомогательной поверхности r меньше радиуса R заряженной сферы, то такая поверхность не будет охватывать зарядов. Вследствие этого из теоремы Гаусса следует, что внутри равномерно заряженной сферической поверхности поле отсутствует, $E = 0$.

5. Напряженность поля равномерно заряженного по объему шара.

Пусть заряд q равномерно распределен в вакууме по объему шара радиуса R с объемной плотностью зарядов ρ :

$$\rho = \frac{q}{V_{\text{шара}}} = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3}.$$

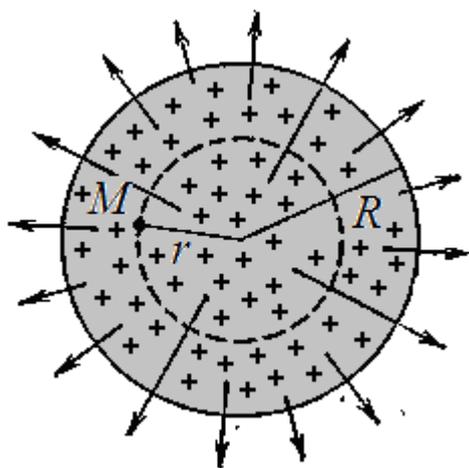


Рис. 6.7.

Определим напряженность электрического поля внутри шара в точке M (рис. 6.7) на расстоянии $r < R$ от центра. Для этого проведем через точку M вспомогательную концентрическую сферу радиуса r .

Вспомогательная поверхность охватывает заряд

$$q_1 = \rho V_1 = \rho \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Только этот заряд q_1 создает поток вектора напряженности Φ_E через поверхность вспомогательной сферы площадью $S = 4\pi r^2$.

Поэтому

$$\Phi_E = E_r \cdot S = E_r \cdot 4\pi r^2 = \frac{q_1}{\epsilon_0} = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi r^3}{\epsilon_0}.$$

Отсюда

$$E_r = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho}{4\pi r^2 \epsilon_0} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r = \frac{qr}{4\pi\epsilon_0 R^3}. \quad (r < R) \quad (6.12)$$

Для точек, лежащих вне шара ($r > R$), вспомогательная поверхность охватывает весь заряд q и поле равномерно заряженного шара совпадает с полем точечного заряда, помещенного в центр шара:

$$E_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (r \geq R). \quad (6.13)$$

§ 7. Работа перемещения заряда в электростатическом поле. Потенциал поля

Пусть электростатическое поле создается неподвижным точечным зарядом q . Определим, какую работу выполняют силы поля при перемещении заряда q_1 из точки 1 в точку 2 этого поля (рис. 7.1).

Сила F , действующая со стороны поля на заряд q_1 , различна в разных точках поля. Поэтому разобьем мысленно криволинейный путь $1 \rightarrow 2$ на элементарные прямолинейные участки dS , в пределах которых силу можно считать постоянной.

По определению элементарная работа силы на участке dS равна

$$dA = F \cdot dS \cdot \cos \alpha,$$

где α – угол между направлением силы F и элементарного перемещения dS .

Тогда полная работа электрических сил на всем пути выразится суммой элементарных работ, т.е. криволинейным интегралом

$$A = \int_{1 \rightarrow 2} F dS \cos \alpha.$$

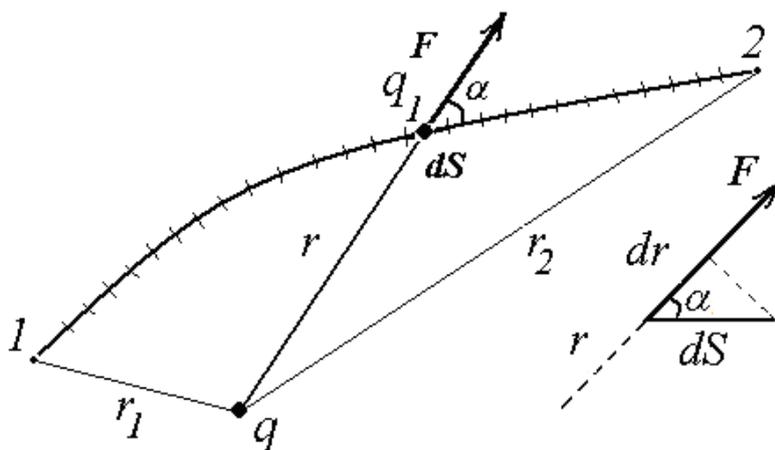


Рис. 7.1.

Как видно из рисунка

$$dS \cdot \cos \alpha = dr,$$

где dr – проекция элемента длины контура dS на направление радиус-вектора r .

Выразим силу F через напряженность E электрического поля

$$F = Eq_1.$$

Тогда элементарная работа на участке dS

$$dA = F \cdot dS \cdot \cos \alpha = E \cdot q_1 \cdot dr = kqq_1 \frac{dr}{r^2}, \quad (7.1)$$

и полная работа

$$A = kqq_1 \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = kqq_1 \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right). \quad (7.2)$$

Из формулы (7.2) следует:

- работа не зависит от формы пути, по которому происходит движение заряда q_1 , а зависит только от начального и конечного положений зарядов (от r_1 и r_2);
- в том случае, когда движение заряда происходит по замкнутому пути, т.е. конечная точка перемещения совпадает с начальной, работа равна нулю.

Работу, совершаемую силами поля над зарядом q_1 при обходе по замкнутому контуру, можно представить как криволинейный интеграл

$$\oint_L q_1 E dl \cos \alpha = 0.$$

Кружок у знака интеграла указывает на интегрирование по замкнутому контуру L . После сокращения на постоянную величину q_1 , получим

$$\oint_L E_l dl = 0. \quad (7.3)$$

Здесь через E_l обозначена проекция вектора E на направление элементарного перемещения dS .

Входящий в выражение (7.3) интеграл называется *циркуляцией вектора напряженности вдоль замкнутого контура L* .

Таким образом, **циркуляция вектора напряженности электростатического поля по произвольному замкнутому контуру равна нулю.**

Поля, которые удовлетворяют этим условиям, называются *потенциальными*.

В таких полях работа сил поля совершается за счет убыли потенциальной энергии. Поэтому работу (7.2) можно представить как разность значений потенциальной энергии W , которыми обладает заряд q_1 в точках 1 и 2 :

$$A_{12} = k \frac{qq_1}{r_1} - k \frac{qq_1}{r_2} = W_{p1} - W_{p2}. \quad (7.4)$$

Отсюда для потенциальной энергии заряда q_1 в поле заряда q получаем

$$W_p = k \frac{qq_1}{r} + const. \quad (7.5)$$

Как и в механике, потенциальная энергия определяется не однозначно, а с точностью до произвольной постоянной $const$. Это связано с тем, что физический смысл имеет только разность потенциальных энергий в двух точках пространства, выражающая работу, производимую при переходе из одной точки в другую. При нахождении же этой разности произвольная постоянная исключается.

Значение $const$ обычно выбирается таким образом, чтобы при удалении заряда на бесконечность ($r = \infty$) потенциальная энергия (7.5) обращалась в нуль. Для этого необходимо положить произвольную постоянную $const = 0$.

При этом условии получается, что

$$W_p = k \frac{qq_1}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_1}{r}. \quad (7.6)$$

Потенциальная энергия (7.6) есть энергия взаимная. Оба взаимодействующих заряда входят в выражение (7.6) симметрично. Поэтому с одинаковым пра-

вом можно считать, что либо заряд q_1 находится в электрическом поле заряда q , либо заряд q находится в электрическом поле заряда q_1 .

При одноименных зарядах q и q_1 , т.е. при отталкивании, потенциальная энергия положительна и убывает при разведении зарядов. При разноименных зарядах, т.е. при притяжении потенциальная энергия отрицательна и возрастает при разведении зарядов.

Величина

$$\varphi = \frac{W_p}{q_1}, \quad (7.7)$$

численно равная *потенциальной энергии, которой обладает в данной точке поля положительный единичный заряд*, называется **потенциалом** поля в данной точке. Потенциал является энергетической характеристикой поля.

Подставляя в (7.7) значение потенциальной энергии (7.6), получаем для потенциала поля точечного заряда выражение

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}. \quad (7.8)$$

Используя понятие потенциала, выражение для работы, совершаемой полем при перемещении заряда q_1 из точки 1 в точку 2 можно записать в виде

$$A = q_1 (\varphi_1 - \varphi_2). \quad (7.9)$$

Работа, совершаемая электростатическим полем при перемещении заряда, равна произведению величины заряда на разность потенциалов начальной и конечной точек пути.

Если заряд q_1 из точки с потенциалом φ_1 удаляется на бесконечность (где по условию потенциал равен нулю), работа сил поля будет равна

$$A_{1\infty} = q_1 \varphi_1.$$

Тогда можно дать второе определение потенциала.

Потенциал численно равен работе, которую совершают силы поля над положительным единичным зарядом при удалении его из данной точки на бесконечность:

$$\varphi_1 = \frac{A_{1\infty}}{q_1}. \quad (7.10)$$

Такую же по величине работу необходимо совершить против сил электрического поля при перенесении положительного единичного заряда из бесконечности в данную точку поля.

Физический смысл имеет только разность потенциалов между какими-либо точками, а не сами значения потенциалов в этих точках.

Если поле создается несколькими зарядами, то в силу принципа суперпозиции потенциал произвольной точки поля равен алгебраической сумме потенциалов, создаваемых в этой точке всеми зарядами:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \dots = \sum_{i=1}^n \varphi_i. \quad (7.11)$$

Потенциалы измеряются в вольтах. Разность потенциалов между двумя точками поля равна одному вольту, если при переносе заряда, равного 1 Кл, из одной точки в другую, поле совершает работу в 1 Дж.

1 В = 1 Дж/Кл.

Пример 7.1. Электрическое поле создается двумя зарядами $q_1 = 4$ мкКл и $q_2 = -2$ мкКл, находящимися на расстоянии $a = 10$ см друг от друга. Определить работу A сил поля при перемещении заряда $q = 50$ нКл из точки 1 в точку 2 поля (рис. П. 7.1).

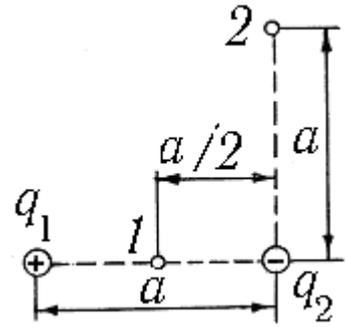


Рис. П. 7. 1.

Работа перемещения заряда из одной точки поля в другую равна произведению заряда на разность потенциалов этих точек

$$A = q(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Для определения потенциалов φ_1 и φ_2 точек 1 и 2 поля применим принцип суперпозиции электрических полей: потенциал электрического поля, созданного двумя зарядами в некоторой точке, равен алгебраической сумме потенциалов, создаваемых отдельными зарядами q_1 и q_2 . Тогда

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= kq_1/(a/2) + kq_2/(a/2) = 2k(q_1+q_2)/a; \\ \varphi_2 &= kq_1/(a\sqrt{2}) + kq_2/a = k(q_1/\sqrt{2}+q_2)/a. \end{aligned}$$

После преобразований окончательно имеем

$$A = kq(q_1(2 - \frac{1}{\sqrt{2}}) + q_2)/a \quad (\text{П. 7.1})$$

В расчетах потенциалов знаки зарядов учитываются автоматически, т.е. в последнюю формулу надо подставить $q_2 = -2 \cdot 10^{-6}$ Кл.

Подставим числа

$$A = 9 \cdot 10^9 \cdot 50 \cdot 10^{-9} (4 \cdot 10^{-6} (2 - \frac{1}{1,41}) - 2 \cdot 10^{-6}) / 0,1 \approx 1,43 \cdot 10^{-2} (\text{Дж}) = 14,3 (\text{мДж}).$$

Пример 7.2. К закрепленной частице, заряд которой $q_1 = 2$ нКл, из бесконечности со скоростью $v = 0,1$ м/с приближается заряженная частица, масса которой $m = 40$ мг и заряд $q = 1$ нКл. На какое наименьшее расстояние r они сблизятся (рис. П. 7.2)?

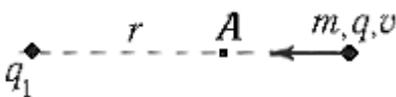


Рис. П. 7.2.

В точке A неподвижный заряд q_1 создает электрическое поле с потенциалом

$$\varphi_A = k \frac{q_1}{r}.$$

Тогда потенциальная энергия взаимодействия зарядов в точке A

$$W_p = q\varphi_A = \frac{kqq_1}{r}.$$

Потенциальная энергия движущейся частицы в бесконечности равна нулю. По закону сохранения энергии в момент остановки подвижной частицы в точке A начальная кинетическая энергия переходит в потенциальную энергию кулоновского отталкивания

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{kqq_1}{r}, \quad (\text{П. 7.2})$$

$$r = \frac{2kqq_1}{mv^2}. \quad (\text{П. 7.3})$$

Подставляя числа, найдем

$$r = \frac{2 \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-9} \cdot 2 \cdot 10^{-9}}{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot (0,1)^2} = 9 \cdot 10^{-2} (\text{м}) = 9(\text{см}).$$

§ 8. Эквипотенциальные поверхности. Связь между напряженностью и потенциалом

Для графического изображения поля наряду с силовыми линиями используют *эквипотенциальные поверхности*. Геометрическое место точек, имеющих равный потенциал, называется поверхностью равного потенциала или эквипотенциальной поверхностью $\varphi = \text{const}$.

В случае уединенного точечного заряда, как следует из формулы (7.8) $\varphi = \text{const}$ при $r = \text{const}$, т.е. эквипотенциальные поверхности представляют собой концентрические сферы.

На плоскости эти поверхности вырождаются в концентрические окружности (рис. 8.1).

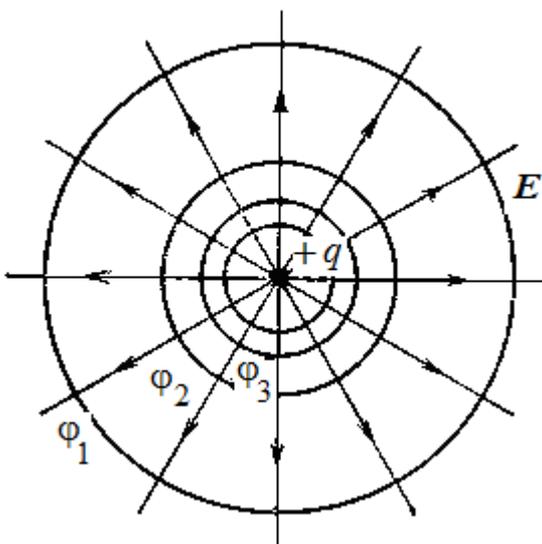


Рис. 8.1.

При перемещении заряда из одной точки эквипотенциальной поверхности в другую поле, как следует из выражения $A = q_1(\varphi_1 - \varphi_2)$, не совершает над ним работы, т.к. $(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$.

Тогда из формулы работы $A = F \cdot dS \cdot \cos\alpha$ следует, что $\cos\alpha = 0$, т.е. силовые линии поля всюду перпендикулярны эквипотенциальным поверхностям.

Взаимная перпендикулярность силовых линий поля и эквипотенциальных поверхностей справедлива не только для поля точечного заряда, но и для сколь угодно сложных электростатических полей.

Обе характеристики поля – векторная (напряженность E) и скалярная (потенциал φ) связаны между собой.

Чтобы установить связь потенциала с напряженностью поля рассмотрим две точки поля 1 и 2, принадлежащие двум близким эквипотенциальным поверхностям $\varphi_1 = \text{const}$ и $\varphi_2 = \text{const}$ (рис. 8.2). Предположим, что пробный заряд переходит из точки 1 в точку 2 вдоль прямолинейного отрезка Δl . Обе точки нужно выбрать достаточно близко друг от друга, чтобы можно было считать напряженность поля, и, сле-

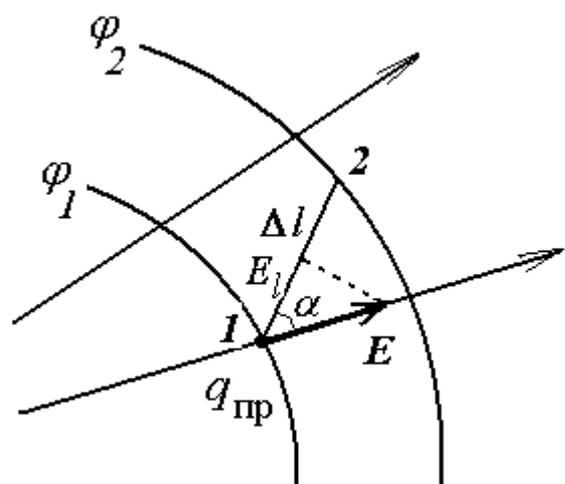


Рис. 8.2.

довательно, силу, действующую на пробный заряд, на отрезке Δl постоянной.

Для работы электростатического поля по перемещению пробного заряда $q_{пр}$ на пути Δl можно написать два выражения.

С одной стороны, работа силы $F = q_{пр} E$ на перемещении Δl равна

$$A = q_{пр} E \Delta l \cos \alpha = q_{пр} E_l \Delta l .$$

Как видно из рис. 8.2

$$E_l = E \cos \alpha$$

– проекция вектора E на направление отрезка Δl .

С другой стороны, работа перемещения заряда в электростатическом поле

$$A = q_{пр} (\varphi_1 - \varphi_2).$$

Приравняем оба выражения для работы. После сокращения на величину пробного заряда получим

$$E_l \Delta l = (\varphi_1 - \varphi_2).$$

Отсюда

$$E_l = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\Delta l} = -\frac{\Delta \varphi}{\Delta l} . \quad (8.1)$$

Минус в этой формуле обусловлен тем, что $\Delta \varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ – это *приращение* потенциала (от конечного значения отнимается начальное), а $\varphi_1 - \varphi_2 = -\Delta \varphi$ – это *убыль* потенциала (от начального значения отнимается конечное).

Переходя в выражении (8.1) к пределу при условии, что перемещение Δl стремится к нулю, получим

$$E_l = -\frac{\partial \varphi}{\partial l} . \quad (8.2)$$

Производная $\frac{\partial \varphi}{\partial l}$ выражает *быстроту изменения потенциала в данном направлении*. Следовательно, *проекция вектора напряженности электростатического поля на произвольное направление численно равна быстрой убыли потенциала поля на единицу длины в этом направлении*.

Символ частной производной показывает, что дифференцирование производится только по l , считая другие переменные постоянными.

Вдоль силовой линии $\cos \alpha = 1$, в этом случае E_l и $\left| \frac{\partial \varphi}{\partial l} \right|$ достигают максимального значения, равного $|E|$. Если n – нормаль к эквипотенциальным поверхностям, то

$$E = -\frac{\partial \varphi}{\partial n} . \quad (8.3)$$

Таким образом, потенциал изменяется наиболее быстро в направлении силовой линии. Знак минус в уравнениях (8.2) и (8.3) указывает на то, что вектор E напряженности поля направлен в сторону наиболее быстрого убывания потенциала.

Поскольку направление перемещения можно выбирать произвольно, проекции вектора напряженности на координатные оси будут иметь вид:

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}. \quad (8.4)$$

Выразим вектор \mathbf{E} через его составляющие:

$$\mathbf{E} = E_x \mathbf{i} + E_y \mathbf{j} + E_z \mathbf{k} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \mathbf{k} \right). \quad (8.5)$$

Здесь $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ - единичные векторы координатных осей. Вектор, определяемый выражением (8.5), называется градиентом потенциала и обозначается как $\text{grad } \varphi$.

Градиентом некоторой скалярной величины, являющейся функцией пространственных координат, является вектор, направленный в сторону наиболее быстрого возрастания этой величины и численно равный скорости ее роста в этом направлении. Поэтому связь между напряженностью и потенциалом электростатического поля можно представить как

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi. \quad (8.6)$$

Напряженность в какой-либо точке электростатического поля равна градиенту потенциала в этой точке, взятому с обратным знаком.

Формула (8.2) позволяет по известным значениям φ найти напряженность поля в каждой точке. Можно решить и обратную задачу – по заданным значениям \mathbf{E} в каждой точке найти разность потенциалов между двумя произвольными точками поля. Из (38.2) следует

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{1 \rightarrow 2} E_l dl. \quad (8.7)$$

Интеграл можно брать по любой линии, соединяющей точки 1 и 2, поскольку работа сил поля не зависит от формы пути.

§ 9. Вычисление разности потенциалов по напряженности поля

1. Поле уединенного точечного заряда.

Напряженность поля уединенного точечного заряда в вакууме дается формулой (3.4)

$$E_r = k \frac{q}{r^2}.$$

Связь между напряженностью и потенциалом запишется в виде

$$E_r = -\frac{d\varphi}{dr}.$$

Тогда потенциал поля точечного заряда

$$\varphi = -\int E_r dr = -kq \int \frac{dr}{r^2} = k \frac{q}{r} + \text{const}.$$

На бесконечности потенциал принято считать равным нулю ($\varphi = 0$ для $r = \infty$), и постоянную интегрирования следует положить равной нулю, т.е. потенциал поля точечного заряда

$$\varphi = k \frac{q}{r}.$$

Отсюда *разность потенциалов* между двумя точками, лежащими на расстояниях r_1 и r_2 от точечного заряда

$$\varphi_1 - \varphi_2 = kq \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (9.1)$$

2. Поле равномерно заряженной плоскости и плоского конденсатора.

Напряженность поля равномерно заряженной бесконечной плоскости определяется формулой

$$E_n = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0},$$

где σ – поверхностная плотность заряда. Поле плоскости ортогонально к ней.

Если направить ось Ox перпендикулярно этой плоскости, то согласно выражению (8.7) разность потенциалов между точками, отстоящими от плоскости на расстояния x_1 и x_2 равна

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{x_1}^{x_2} E_x dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} dx = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} (x_2 - x_1). \quad (9.2)$$

Для электростатического поля в вакууме между двумя параллельными плоскостями, заряженными разноименно (поле плоского конденсатора) (рис. 9.1) получим *разность потенциалов* (называемую *напряжением*) между двумя бесконечными заряженными пластинами (обкладками конденсатора)

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_0^d \frac{\sigma}{\varepsilon_0} dx = \frac{\sigma d}{\varepsilon_0}. \quad (9.3)$$

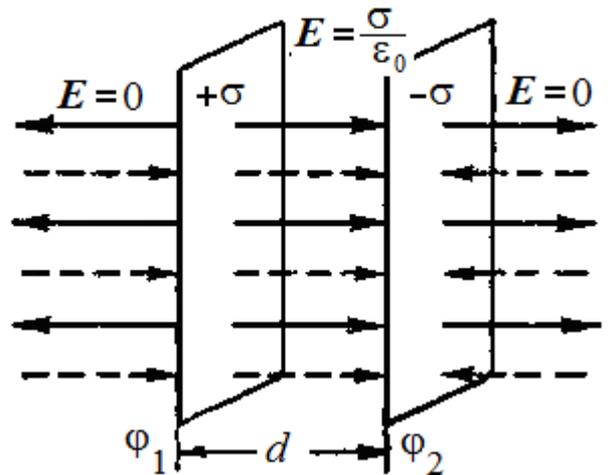


Рис. 9.1.

3. Поле равномерно заряженной бесконечной нити.

Вектор напряженности поля E в любой точке направлен вдоль радиальной прямой, перпендикулярной к нити (рис. 9.2), а его проекция на эту прямую дается формулой (6.8)

$$E_r = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}.$$

Так как напряженность поля зависит только от r , то связь между напряженностью и потенциалом (формула (8.2)) запишется в виде

$$E_r = -\frac{d\varphi}{dr},$$

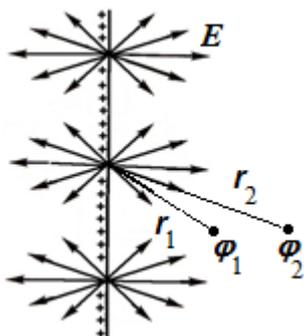


Рис. 9.2.

Откуда следует, что *разность потенциалов* между двумя точками, лежащими на расстояниях r_1 и r_2 от нити, равна

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} E_r dr = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}. \quad (9.4)$$

Пример 9.1. Электростатическое поле создается положительно заряженной бесконечной нитью с линейной плотностью заряда $\tau = 1$ нКл/м. Какую скорость приобретет электрон, приблизившись под действием поля к нити вдоль линии напряженности от расстояния $r_1 = 1,5$ см до $r_2 = 1$ см? Начальная скорость электрона равна нулю.

Поле бесконечной равномерно заряженной нити симметрично: линии напряженности являются радиальными прямыми, лежащими в плоскостях, перпендикулярных к нити (рис. П.9.1).

Работа сил поля равна приращению кинетической энергии электрона: $A = W_{k2} - W_{k1}$, или

$$e(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}, \quad (\text{П. 9.1})$$

где W_{k1} и W_{k2} – кинетические энергии электрона до и после прохождения ускоряющего поля, v_1 и v_2 – начальная и конечная скорости электрона, e – заряд, m – масса электрона, φ_1 и φ_2 – потенциалы начальной и конечной точек пути. Воспользуемся (9.4)

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

С учетом того, что $v_1 = 0$ и $W_{k1} = 0$, получим

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{e\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1} \quad \text{и} \quad v = \sqrt{\frac{e\tau}{m\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}}. \quad (\text{П. 9.2})$$

Подставив числовые значения, определим $v = 1,6$ Мм/с.

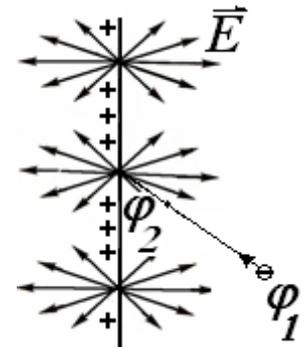


Рис. П.9.1.

Пример 9.2. В качестве детектора α -, β - и γ -радиоактивных излучений применяют газоразрядные счетчики. Такой счетчик представляет собой проводящий цилиндр 3 (рис. П.9.2) с натянутой вдоль оси цилиндра **тонкой металлической нитью 2**.

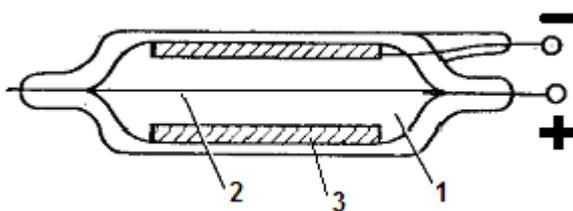


Рис. П.9.2.

Между нитью 2 и цилиндром 3 создается высокая разность потенциалов порядка 400 В. Частицы, пройдя сквозь цилиндр счетчика, попадают в пространство 1 между электродами и вызывают ионизацию газа. Образовавшиеся в газе ионы притягиваются к электродам. Так как поле неоднородно и **сильно возрастает вблизи нити**,

то движущиеся вторичные электроны на длине свободного пробега приобретает кинетическую энергию, достаточную для ударной ионизации атомов. Возникает лавинный процесс ионизации, в результате которого на нить попадает значительное число электронов, потенциал нити изменяется, что фиксируется прибором как единичный разрядный импульс.

Контрольные вопросы

1. Может ли измениться заряд элементарной частицы в результате ядерной реакции?
2. Почему окружающие нас макроскопические тела как правило не заряжены?
3. Будет ли закон Кулона иметь одинаковый вид для определения силы взаимодействия как точечных зарядов, так и протяженных заряженных тел?

4. Каким образом по картине силовых линий поля можно сделать выводы о направлении и численном значении напряженности электрического поля ?
5. Совпадают ли линии напряженности с траекторией движения положительного пробного заряда? Могут ли пересекаться силовые линии электростатического поля?
6. Может ли замкнутая поверхность охватывать заряды, а поток вектора E через нее равняться нулю?
7. Изобразите графически однородное и неоднородное электростатические поля.
8. Как изменяется напряженность поля бесконечной равномерно заряженной пластины по мере удаления от нее?
9. Каковы единицы измерения напряженности электрического поля?
10. Постройте график изменения напряженности электростатического поля с расстоянием для: а) равномерно заряженной плоскости; б) равномерно заряженной по объему сферы.
11. Какова связь потенциала электрического поля с работой сил поля перемещения заряда?
12. Почему напряженность электрического поля направлена в сторону наиболее быстрого убывания потенциала?
13. Какое условие является необходимым и достаточным для того, чтобы электростатическое поле являлось потенциальным?
14. Как доказать, что электростатическое поле, создаваемое точечным зарядом, является потенциальным?
15. Какова связь напряженности с потенциалом электростатического поля на примере однородного поля в плоском конденсаторе?
16. Может ли существовать электростатическое поле, силовые линии которого параллельны, но имеют разную густоту в разных частях поля?

Глава 2. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ДИЭЛЕКТРИКАХ

§ 10. Диполь во внешнем электрическом поле

Рассмотрим поведение жесткого электрического *диполя* (см. § 3), помещенного в *однородное электрическое поле*.

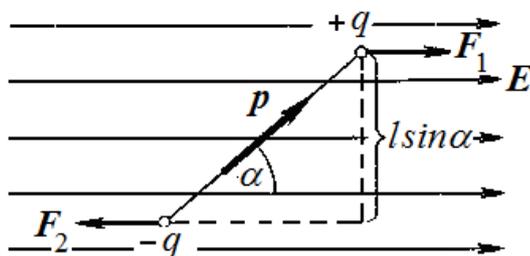


Рис. 10.1.

Пусть вектор p дипольного момента направлен под углом α к направлению внешнего поля E (рис. 10.1). Диполь называют жестким, если в электрическом поле расстояние l между его зарядами не изменяется. Электрический момент диполя равен численно $p = ql$ и направлен от отрицательного заряда к положительному.

На положительный заряд $+q$ действует сила, совпадающая по направлению с вектором E и равная $F_1 = qE$, а на отрицательный заряд $-$ противоположного направления и равная $F_2 = -qE$.

Эти силы, равные по величине и направленные в противоположные стороны, образуют *пару сил*. Механический вращающий момент этой пары численно равен произведению модуля силы на плечо пары $l \sin \alpha$:

$$M = Fl \sin \alpha = qEl \sin \alpha = pE \sin \alpha. \quad (10.1)$$

Вектор M момента равен векторному произведению векторов p и E

$$M = [pE]. \quad (10.2)$$

Момент сил M стремится повернуть диполь так, чтобы его электрический момент p установился по направлению внешнего поля E .

Для того, чтобы повернуть диполь на малый угол $d\alpha$ против часовой стрелки вокруг оси, перпендикулярной к направлению поля, внешние силы должны совершить определенную работу.

$$dA = M d\alpha = pE \sin \alpha d\alpha. \quad (10.3)$$

Эта работа затрачивается на увеличение потенциальной энергии W , которой обладает диполь в электрическом поле

$$dW = dA = pE \sin \alpha d\alpha. \quad (10.4)$$

Интегрируя, получаем

$$W = -pE \cos \alpha + \text{const} = -pE \cos \alpha + \text{const}. \quad (10.5)$$

Если положить $\text{const} = 0$, то энергия диполя равна нулю тогда, когда диполь устанавливается перпендикулярно полю ($\alpha = \pi/2$).

Минимальное значение энергии, равное $-pE$, получается, когда $\alpha = 0$, т. е. когда диполь ориентирован своим моментом вдоль поля.

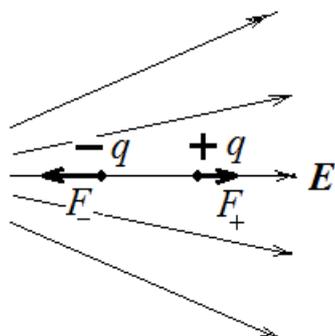


Рис.10.2

Это соответствует положению устойчивого равновесия. При отклонении диполя от этого положения снова возникает механический момент внешних сил, который возвращает диполь в первоначальное положение.

В *неоднородном электрическом поле* на диполь, кроме вращающего момента, действует также сила, стремящаяся втянуть диполь в область более сильного

поля. На рис. 10.2 изображен диполь в неоднородном электрическом поле в случае, когда дипольный момент p направлен по полю. Сила F_- больше (по модулю) силы F_+ , результирующая сила $F_- - F_+$ стремится переместить диполь в область большей напряженности электрического поля.

Этим поведением диполя, в частности, объясняется прилипание легких диэлектрических предметов («диполей») – кусочков бумаги, пенопласта – к наэлектризованным телам.

Пример 10.1. Какова минимальная и максимальная потенциальная энергия диполя с электрическим моментом $p = 4 \cdot 10^{-9}$ Кл·м, который находится во внешнем однородном электрическом поле напряженностью $E = 300$ В/м?

Согласно формуле (10.5) потенциальная энергия диполя

$$W = -pE \cos \alpha.$$

Минимальная энергия при $\alpha = 0^\circ$ $W = -pE = -4 \cdot 10^{-9} \cdot 300 = -1,2 \cdot 10^{-6}$ (Дж) соответствует положению устойчивого равновесия. Максимальная энергия при $\alpha = 180^\circ$ $W = pE = 4 \cdot 10^{-9} \cdot 300 = 1,2 \cdot 10^{-6}$ (Дж) соответствует положению неустойчивого равновесия.

§ 11. Типы диэлектриков. Поляризация диэлектриков

Все вещества в природе можно условно *разделить на две категории*: проводники – хорошо пропускающие электрический ток, и диэлектрики (изоляторы) – практически не пропускающие ток. Промежуточное положение занимают полупроводники, пропускающие ток при определенных условиях.

С точки зрения классической физики в металлических проводниках имеется много так называемых свободных электронов, оторвавшихся от ионов кристаллической решетки. Включение сколь угодно малого внешнего электрического поля вызывает направленное движение электронов – электрический ток.

Диэлектрики – это вещества, плохо проводящие электрический ток. Это объясняется тем, что в диэлектриках, в отличие от металлов, практически отсутствуют свободные электроны, все электроны связаны с атомами. Электрическое поле не отрывает электроны от атомов, а только смещает их на малые (порядка межатомных) расстояния, т.е. на расстояния порядка 10^{-7} - 10^{-8} см.

Все диэлектрики можно разделить на такие три группы.

1. Диэлектрики с полярными молекулами.

Молекулы некоторых веществ, например жидкостей – воды H_2O , соляной кислоты HCl , бензола C_6H_6 и др., твердых тел – H_2S , газов – SO_2 , обладают собственным дипольным моментом.

Это означает, что в таких молекулах центры «тяжести» положительных и отрицательных зарядов смещены друг относительно друга. Подобные молекулы называются *полярными*.

Электрическое поле полярной молекулы можно представить как поле некоторого эквивалентного электрического диполя с постоянным дипольным моментом $p = ql$, где l – расстояние между электрическими центрами.

Когда внешнее электрическое поле отсутствует, дипольные моменты молекул в полярных диэлектриках из-за наличия теплового движения ориентированы хаотически (рис. 11.1). На рис. 11.1 положительно заряженная часть молекулы закрашена в черный цвет, отрицательная – в белый.

При наличии внешнего поля наиболее устойчивым является состояние, соответствующее минимуму потенциальной энергии, т.е. состояние, при котором дипольные моменты молекул p были бы параллельны напряженности поля E .

Вследствие совместного действия обоих факторов (сил поля и хаотического теплового движения) в диэлектрике устанавливается ориентация дипольных моментов полярных молекул в направлении поля (рис. 11.1).

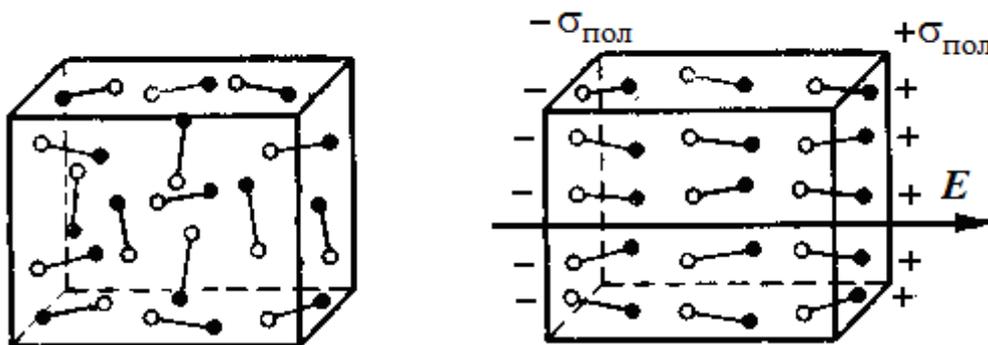


Рис. 11.1.

Процесс смещения связанных заряженных частиц диэлектрика под действием внешнего электрического поля называется **поляризацией диэлектрика**.

В рассматриваемом случае внешнее поле вызывает поляризацию, выстраивая, ориентируя дипольные моменты молекул по направлению поля. Такая поляризация называется **ориентационной**.

На торцевые поверхности диэлектрического образца выступают нескомпенсированные положительные и отрицательные заряды – концы молекул-диполей. Их называют **поляризационными или связанными зарядами** (на рис. 11.1 $+\sigma_{\text{пол}}$ и $-\sigma_{\text{пол}}$).

Тепловое движение, разумеется, мешает выстраиванию молекул, так что ориентационная поляризация уменьшается с ростом температуры.

2. Диэлектрик с неполярными молекулами

Каждая молекула (или атом) диэлектрика имеет положительно заряженные ядра и отрицательно заряженные электроны, которые движутся вокруг ядер. Положительные заряды всех ядер равны по абсолютной величине заряду всех электронов, и поэтому молекула вещества в целом электрически нейтральна.

Ко второй группе можно отнести диэлектрики, в молекулах которых «центры тяжести» положительных и отрицательных частиц совпадают (рис. 11.2).

Молекулы таких диэлектриков называются **неполярными**. В частности, к диэлектрикам этой группы принадлежат водород H_2 ,

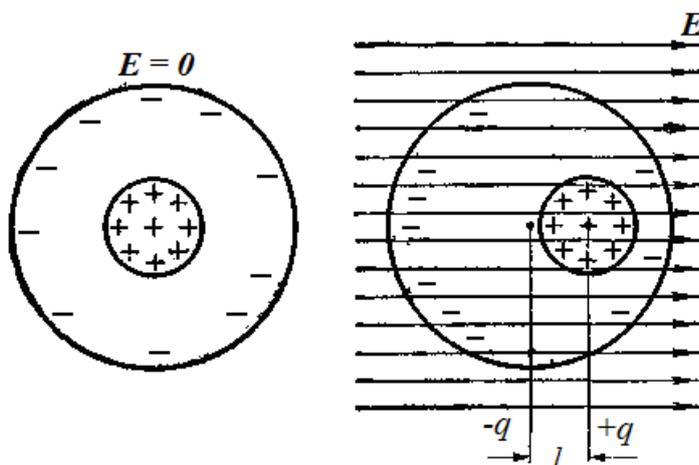


Рис. 11.2.

азот N_2 , кислород O_2 , окись углерода CO , CCl_4 , парафин, бензол и ряд других углеводородов. В отсутствие внешнего электрического поля дипольный момент таких молекул равен нулю.

Если во внешнее поле внести диэлектрик с неполярными молекулами, то электронные орбиты деформируются, и поэтому смещается центр тяжести электронов относительно центра тяжести атомных ядер.

Молекулы становятся электрическими диполями, ориентированными положительно заряженными концами в направлении электрического поля – неполярные молекулы становятся полярными (рис. 11.2). В этом состоит механизм *электронной* поляризации.

Такие наведенные диполи называют упругими (квазиупругими), в отличие от жестких полярных молекул.

При внесении неполярного диэлектрика в электрическое поле все наведенные дипольные моменты располагаются цепочками вдоль линий напряженности. Вследствие этого грани диэлектрика приобретают разноименные заряды – диэлектрик поляризуется.

3. Ионные диэлектрики

К третьей группе диэлектриков принадлежат *ионные кристаллы*, в которых в пространственных решетках правильно чередуются положительные и отрицательные ионы (например, $NaCl$, KCl , $CsCl$). В таких кристаллах нельзя выделить отдельные молекулы, их можно рассматривать как совокупность двух ионных решеток, вставленных друг в друга (рис. 11.3). Одна решетка построена из положительных ионов, другая – из отрицательных.

На рис. 11.3 изображена схема кристаллической решетки поваренной соли $NaCl$; здесь маленькие шарики – положительные ионы натрия, большие –

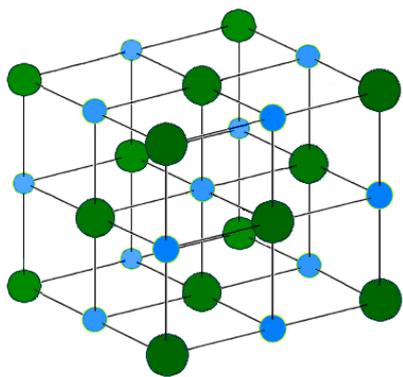


Рис. 11.3

отрицательные ионы хлора. Все кристаллы поваренной соли имеют одинаковую кубическую форму.

Когда внешнее электрическое поле отсутствует, электрические силы взаимодействия заряженных ионов в узлах решетки взаимно уравновешиваются, и на каждой грани кристалла располагается одинаковое количество положительных и отрицательных ионов. Если такой кристалл внести в электрическое поле, то под действием сил поля положительные ионы смещаются в направлении вектора напряженности, а все отрицательные ионы – в противоположном направлении. Поэтому на противоположных гранях кристалла преобладают ионы одного знака, и кристалл будет поляризованным.

Таким образом, для всех трех типов диэлектрика характерным признаком поляризации является возникновение электрического дипольного момента в любом макроскопически малом объеме диэлектрика

Пример 11.1. На явлении поляризации, а точнее, переполаризации основана работа СВЧ-печи (микроволновой печи), предназначенной для быстрого приготовления или подогрева пищи. Нагрев в печи основан на принципе так называемого «дипольного сдвига».

Молекулярный дипольный сдвиг под действием электрического поля происходит в материалах, содержащих полярные молекулы. Лучшим полярным диэлектриком является вода, которая содержится практически во всех продуктах питания.

В переменном электрическом поле высокочастотного электромагнитного излучения молекулы воды периодически меняют направление. Сталкиваясь и передавая энергию соседним молекулам, молекулы воды увеличивают среднюю кинетическую энергию молекул вещества, а следовательно, увеличивают его температуру.

Пример 11.2. В некоторых кристаллических диэлектриках сжатие образца в определенном направлении ведет к его поляризации – к появлению на противоположных гранях поляризационных зарядов противоположного знака. Наоборот, подача разности потенциалов на противоположные грани ведет к сжатию (или расширению) образца. Такое явление называется *пьезоэлектрическим эффектом*. Этот эффект проявляют кварц, титанат бария, сегнетова соль и др. Поляризация в направлении механического действия обусловлена структурной перестройкой, смещением ионов и деформацией электронных оболочек.

Пьезоэлектрические материалы широко используют в технике для преобразования механических колебаний в электрические и наоборот. Из них изготавливают различные датчики для измерения частоты и амплитуды вибраций конструкций, двигателей, турбин, самолетов, датчики механических напряжений, датчики давления жидкостей и газов; чувствительные элементы в микрофонах и т.п. Для преобразования электрических колебаний в звуковые используют пьезоэлектрики в качестве акустических генераторов (ультразвуковых излучателей, излучателей гидролокаторов–сонаров и т.д.). Самым распространенным прибором, в котором используется пьезоэффект, является зажигалка.

§ 12. Поляризованность. Диэлектрическая восприимчивость

Для количественной оценки поляризации диэлектрика вводится понятие *вектора поляризации (поляризованности)*. Под поляризованностью понимают сумму электрических дипольных моментов молекул единицы объема поляризованного диэлектрика, иными словами, поляризованность определяется *электрическим дипольным моментом единицы объема поляризованного диэлектрика*.

$$P = \frac{\sum p_i}{\Delta V}, \quad (12.1)$$

где p_i - дипольный момент i -й молекулы, а суммирование производится по всем молекулам, содержащимся в объеме ΔV .

Опыт показывает, что внешнее электрическое поле либо создает дипольные моменты, ориентированные по полю (упругая поляризация), либо ориентирует дипольные моменты молекул (ориентационная поляризация), вследствие чего диэлектрик приобретает макроскопический дипольный момент.

Следовательно, поляризованность P должна быть пропорциональна напряженности внешнего поля

$$P = \kappa \varepsilon_0 E, \quad (12.2)$$

где коэффициент k носит название *диэлектрической восприимчивости*. Эта величина характеризует способность среды к поляризации.

Зная величину поляризованности, можно определить поверхностную плотность избыточных, так называемых *поляризационных зарядов*, появляющихся во внешнем электрическом поле на поверхности диэлектрика.

Рассмотрим образец диэлектрика в виде наклонной призмы с площадью основания S и ребром l , помещенный в электрическое поле, параллельное его боковому ребру (рис. 12.1). На одном из оснований призмы появляются отрицательные заряды с поверхностной плотностью $-\sigma'$, а на другой – положительные заряды с поверхностной плотностью $+\sigma'$. Очевидно, что полный дипольный момент призмы равен произведению величины поляризационного заряда $q' = \sigma'S$, возникающего на ее торцах, на расстояние между ними l :

$$P = \sigma' S l.$$

Согласно определению можно записать, что поляризованность (электрический момент единицы объема) равна

$$P = \frac{q'l}{V} = \frac{\sigma'Sl}{V}.$$

Если α – угол между направлением нормали к основанию призмы и вектором P , то объем призмы равен

$$V = Sh = Sl \cos \alpha.$$

Подставив значение объема призмы, получим

$$P = \frac{\sigma'Sl}{Sl \cos \alpha},$$

откуда

$$\sigma' = P \cos \alpha = P_n. \quad (12.3)$$

Поверхностная плотность связанных (поляризационных) зарядов равна проекции вектора поляризованности P на внешнюю нормаль n к рассматриваемой поверхности диэлектрика.

§ 13. Электрическое смещение. Диэлектрическая проницаемость

Рассмотрим поле, создаваемое в вакууме двумя бесконечными разноименно заряженными пластинами, заряженными с поверхностной плотностью свободных зарядов $+\sigma$ и $-\sigma$.

Предположим, что между ними помещен слой однородного диэлектрика (рис. 13.1).

Под действием поля диэлектрик поляризуется, т.е. происходит смещение положительных зарядов по полю и отрицательных – против поля.

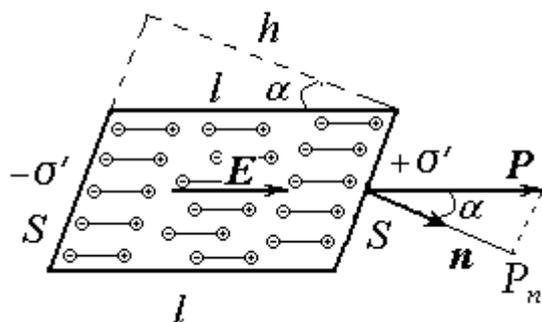


Рис. 12.1.

В результате поляризации поверхности диэлектрика также приобретают поверхностные заряды $+\sigma'$ и $-\sigma'$, причем около положительной заряженной плоскости будет находиться отрицательно заряженная поверхность диэлектрика.

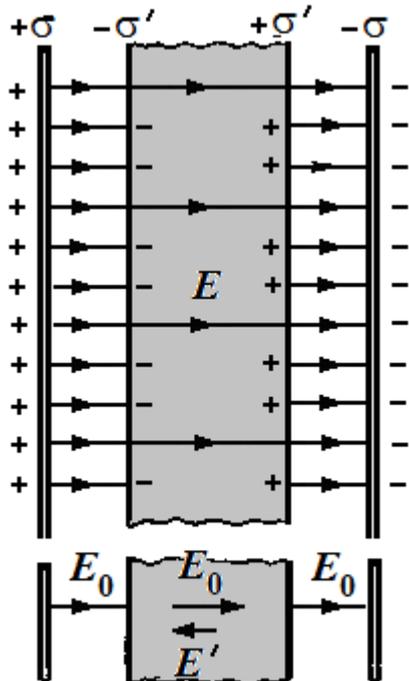


Рис. 13.1.

Из рис. 13.1 видно, что электрическое поле E' связанных зарядов направлено противоположно внешнему полю E_0 , созданному свободными зарядами.

Согласно принципу суперпозиции напряженность поля E внутри диэлектрика есть сумма этих двух полей:

$$E = E_0 + E', \quad (13.1)$$

или в проекциях

$$E = E_0 - E'. \quad (13.2)$$

Оба поля создаются двумя бесконечными заряженными плоскостями и равны соответ-

ственно $E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ и $E' = \frac{\sigma'}{\epsilon_0}$. Поэтому

$$E = \frac{\sigma - \sigma'}{\epsilon_0}. \quad (13.3)$$

Поскольку напряженность поля внутри диэлектрика меньше, чем вне его, то часть линий вектора напряженности, начинающихся (или заканчивающихся) на свободных зарядах, заканчиваются (соответственно, начинаются) на связанных зарядах (рис. 13.1).

Таким образом, вектор напряженности E , проходя через воздушный зазор между плоскостями и диэлектриком, испытывает скачкообразное изменение. Это создает неудобство при расчете электростатических полей.

Связанные заряды появляются на поверхностях диэлектрика под действием поля, созданного свободными зарядами. Поэтому первичным источником поля в диэлектрике являются именно свободные заряды.

Результирующее поле в диэлектрике E равно векторной сумме поля свободных зарядов и поля поляризационных связанных зарядов. Но поверхностная плотность связанных зарядов, определяющая поле связанных зарядов, в свою очередь зависит от напряженности результирующего поля в диэлектрике

$$\sigma' = P_n = \kappa \epsilon_0 E_n.$$

Возникает затруднение, разрешить которое можно путем введения вспомогательной величины D , источниками которой являются *только свободные заряды*.

Эту векторную величину D называют *электрическим смещением* (иногда – *индукцией*) *электрического поля* и определяют по формуле:

$$D = \epsilon_0 E + P. \quad (13.4)$$

С учетом соотношения $P = \kappa \epsilon_0 E$ выражение для электрического смещения приобретает вид

$$D = \epsilon_0 E + \kappa \epsilon_0 E = \epsilon_0 (1 + \kappa) E = \epsilon \epsilon_0 E, \quad (13.5)$$

где безразмерная величина

$$\varepsilon = 1 + \kappa \quad (13.6)$$

называется *диэлектрической проницаемостью* рассматриваемого вещества.

В вакууме $\kappa = 0$, $\varepsilon = 1$.

Через диэлектрическую проницаемость поляризованность \mathbf{P} запишется теперь как

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 (\varepsilon - 1) \mathbf{E}. \quad (13.7)$$

Как было показано ранее, поверхностная плотность связанных зарядов равна проекции вектора поляризации на внешнюю нормаль к поверхности диэлектрика:

$$\sigma' = P_n = \kappa \varepsilon_0 E_n.$$

Поскольку поле внутри диэлектрика в данном случае перпендикулярно к его поверхности, $E_n = E$ и $\sigma' = \kappa \varepsilon_0 E$. Подставляя это значение в формулу (13.3), получим

$$E = E_0 - \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} = E_0 - \kappa E,$$

откуда

$$E = \frac{E_0}{1 + \kappa} = \frac{E_0}{\varepsilon}. \quad (13.8)$$

Таким образом, в рассматриваемом случае *величина диэлектрической проницаемости показывает, во сколько раз напряженность электрического поля в диэлектрике меньше, чем напряженность поля, которое создается тем же расположением свободных зарядов в вакууме.*

Все формулы, описывающие электрические поля и взаимодействие электрических зарядов и полученные в предыдущих параграфах, остаются справедливыми и для однородного и изотропного диэлектрика, если вместо электрической постоянной ε_0 ввести произведение $\varepsilon_0 \varepsilon$. Например, в закон Кулона

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon r^2}$$

диэлектрическая проницаемость ε входит как величина, показывающая, во сколько раз сила взаимодействия двух свободных зарядов в диэлектрике меньше, чем в вакууме. Ослабление взаимодействия происходит из-за экранизации свободных зарядов связанными, образующимися в результате поляризации среды.

Аналогично напряженность и потенциал электрического поля точечного заряда

$$E = \frac{q}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon r^2}, \varphi = \frac{q}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon r}$$

и т. д.

У газов диэлектрическая проницаемость близка к единице, у твердых диэлектриков не превышает 10, а у жидких диэлектриков не превышает 100. Особый класс диэлектриков – сегнетоэлектрики – имеют аномально большие значения $\varepsilon \sim 10^4$.

Умножив (13.8) на $\epsilon\epsilon_0$, получим электрическое смещение D внутри диэлектрика:

$$D = \epsilon\epsilon_0 E = \epsilon_0 E_0. \quad (13.9)$$

Следовательно, *внутри диэлектрика электрическое смещение совпадает с электрическим смещением внешнего поля.*

Если записать соотношение (13.9) для модулей векторов $D = \epsilon_0 E_0$, а также учесть, что напряженность поля между двумя параллельными бесконечными плоскостями, заряженными с поверхностной плотностью зарядов $+\sigma$ и $-\sigma$ в вакууме равна $E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$, то получим

$$D_0 = \sigma. \quad (13.10)$$

Электрическое смещение D описывает поле, создаваемое свободными зарядами. Однако связанные заряды, возникающие в диэлектрике, могут вызвать перераспределение свободных зарядов, создающих поле. Поэтому вектор D характеризует электростатическое поле, создаваемое свободными зарядами (т.е. в вакууме), но при таком их распределении в пространстве, какое имеется при наличии диэлектрика.

Поле вектора D графически изображается линиями вектора смещения, так же как и поле вектора E . Однако, если линии вектора E начинаются и заканчиваются на любых – как свободных, так и связанных зарядах, и поэтому на границе диэлектрика густота этих линий изменяется скачком, то линии вектора D начинаются и заканчиваются только на свободных зарядах, и их густота на границе диэлектрика остается неизменной.

Математическая запись *электростатической теоремы Гаусса для поля в диэлектрике* в интегральной форме имеет вид:

$$\Phi_D = \oint_S D_n dS = \sum_i q_i, \quad (13.11)$$

т.е. поток вектора электрического смещения через произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме заключенных внутри этой поверхности свободных зарядов.

Пример 13.1. Плоский конденсатор, расстояние между пластинами которого $d = 8$ мм, заряжен до разности потенциалов $U_0 = 500$ В и отключен от источника напряжения. После зарядки конденсатора между его пластинами вдвинули фарфоровую пластину ($\epsilon = 6,5$). Определить:

- 1.) модули векторов напряженности поля E и электрического смещения D ;
- 2.) модуль поляризованности P диэлектрика;
- 3.) поверхностную плотность связанных зарядов $\pm\sigma'$ на фарфоровой пластине;
- 4.) диэлектрическую восприимчивость к фарфору.

Напряженность поля заряженного конденсатора в отсутствие пластины диэлектрика $E_0 = \frac{U_0}{d}$, напряженность поля в пластине в ϵ раз меньше:

$$E = \frac{E_0}{\epsilon} = \frac{U_0}{\epsilon d} = \frac{500}{6,5 \cdot 0,008} = 9,62 \frac{\text{кВ}}{\text{м}}.$$

Смещение при переходе границы диэлектрика не изменяется и имеет одинаковое значение внутри и вне пластины:

$$D = \varepsilon_0 \varepsilon E = D_0 = \varepsilon_0 E_0 = \frac{\varepsilon_0 U_0}{d} = \frac{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 500}{0,008} \approx 5,53 \cdot 10^{-7} \left(\frac{\text{Кл}}{\text{м}^2} \right) \approx 0,55 \frac{\text{мкКл}}{\text{м}^2}.$$

Модуль поляризованности

$$P = \kappa \varepsilon_0 E = (\varepsilon - 1) \varepsilon_0 \frac{E_0}{\varepsilon} = \frac{(\varepsilon - 1) \varepsilon_0 U_0}{\varepsilon d} = \frac{(6,5 - 1) 8,85 \cdot 10^{-12} 500}{6,5 \cdot 0,008} \approx 0,47 \left(\frac{\text{мкКл}}{\text{м}^2} \right).$$

Поляризованность перпендикулярна к поверхности пластины, поэтому поверхностная плотность связанных зарядов $\sigma' = P_n = \pm P = \pm \frac{(\varepsilon - 1) \varepsilon_0 U}{\varepsilon d} = \pm 0,47 \left(\frac{\text{мкКл}}{\text{м}^2} \right)$.

$$\kappa = \varepsilon - 1 = 6,5 - 1 = 5,5.$$

Контрольные вопросы

1. Электрический диполь помещен во внешнее однородное электрическое поле. Сколько существует положений равновесия диполя? Какое из них является устойчивым, и какое – неустойчивым, и почему?
2. В чем сходство и в чем различие между свободными и поляризационными зарядами?
3. Можно ли отделить друг от друга поляризационные заряды, разрезав в электрическом поле диэлектрик на части?
4. Можно ли передать поляризационные заряды другому телу путем соприкосновения тел?
5. Прямоугольный образец однородного диэлектрика расположен перпендикулярно внешнему электрическому полю. Будут ли возникать поляризационные заряды на: а) торцевых поверхностях; б) на боковых поверхностях диэлектрика?
6. Как влияет диэлектрик на напряженность электростатического поля? Каков физический смысл диэлектрической проницаемости ε ?
7. Как объяснить уменьшение силы взаимодействия двух точечных зарядов в однородном диэлектрике?
8. Пластина однородного изотропного диэлектрика помещена в однородное электростатическое поле перпендикулярно полю. Как изменяется густота линий векторов E и D при пересечении пластины?

Глава 8. ПРОВОДНИКИ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

§ 14. Равновесие зарядов на проводнике

Тела, в которых имеется большое количество свободных зарядов, называются проводниками. В проводниках электрические заряды могут свободно перемещаться под действием сколь угодно малой силы. Жидкости и газы в обычном состоянии являются плохими проводниками электричества. Если же газ ионизовать, а в жидкости растворить какую-либо соль, кислоту или щелочь (такой проводящий раствор будет называться электролитом), то проводимость их увеличивается.

Если проводниками являются жидкости и газы, то в них движутся как положительные, так и отрицательные за-



Рис. 14.1.

ряженные частицы: положительные и отрицательные ионы и электроны.

В металлах же, которые являются лучшими проводниками, чем жидкости и газы, проводимость обусловлена только движением электронов. Положительно заряженные ионы металла образуют кристаллическую решетку и удерживаются вблизи положений равновесия силами взаимодействия с «газом свободных электронов». Электронный газ образуется за счет одного или нескольких электронов, отданных каждым атомом.

Рассмотрим незаряженный металлический проводник, внесенный во внешнее электрическое поле (рис. 14.1).

Под действием поля свободные заряды начнут перемещаться и будут продолжать двигаться до тех пор, пока дополнительное поле E' , вызванное разделением зарядов внутри проводника (рис. 14.2), не скомпенсирует полностью внешнее поле E_0 так, чтобы

$$E' + E_0 = 0. \quad (14.1)$$

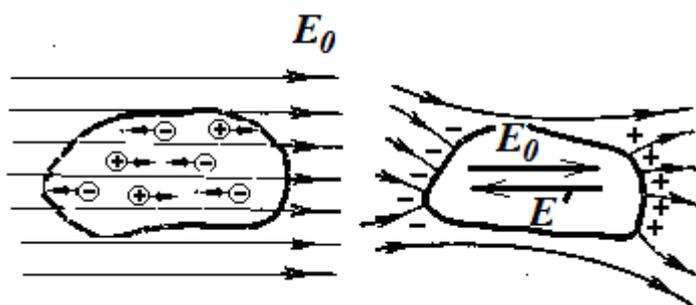


Рис. 14.2.

Только в этом случае будет отсутствовать сила, действующая на заряды, а значит, прекратится их направленное движение. При равновесии зарядов их направленное движение внутри проводника прекращается.

В состоянии равновесия напряженность электрического поля внутри проводника равна нулю.

Поскольку внутри проводника $E = 0$, из соотношения

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{1 \rightarrow 2} E_l dl$$

следует, что для произвольных точек 1 и 2, взятых внутри проводника, $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$. Иными словами, *в состоянии равновесия потенциал всех точек внутри проводника одинаков.*

$$\varphi = \text{const}. \quad (14.2)$$

Заметим, что время, в течение которого в проводнике происходит перемещение зарядов и устанавливается равновесие, для металлов чрезвычайно мало.

Следующее условие равновесия зарядов на проводнике: *напряженность поля на поверхности проводника должна быть в каждой точке направлена по нормали к поверхности:*

$$E = E_n. \quad (14.3)$$

В противном случае под действием касательной составляющей напряженности электроны продолжали бы перемещаться вдоль поверхности, что также противоречит условию равновесия.

Учитывая, что силовые линии всегда перпендикулярны к эквипотенциальной поверхности, заключаем, что в случае равновесия зарядов поверхность проводника будет эквипотенциальной.

Перераспределение зарядов в проводнике под влиянием внешнего электрического поля называется *электростатической индукцией*. Возникающие при этом на проводнике заряды, численно равные друг другу, но противоположные по знакам, называются *индуцированными* или *наведенными* зарядами.

§ 15. Электрическое поле заряженного проводника

Если проводнику сообщить некоторый заряд q , то он распределяется так, чтобы соблюдались условия равновесия.

Представим себе произвольную замкнутую поверхность, полностью заключенную в пределах тела. Поскольку при равновесии зарядов поле в каждой точке внутри проводника отсутствует, поток вектора напряженности \mathbf{E} через эту поверхность равен нулю. Согласно теореме Гаусса алгебраическая сумма зарядов внутри поверхности также будет равна нулю. Это справедливо для произвольной поверхности. Следовательно, при равновесии *ни в каком месте внутри проводника не может быть избыточных зарядов* – все они располагаются на поверхности проводника с некоторой поверхностной плотностью σ .

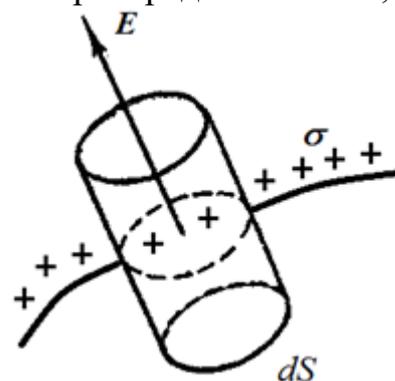


Рис. 15.1.

Это происходит потому, что одноименные заряды отталкиваются и стремятся расположиться как можно дальше друг от друга.

Значит, удаление вещества из некоторого объема внутри проводника никак не отразится на равновесном распределении зарядов.

Практическим применением этого свойства проводников является электростатическая защита (экранировка) чувствительных приборов и людей от действия внешних электрических полей, при которой они окружаются проводящей оболочкой (обычно ее выполняют в виде густой металлической сетки).

Рассмотрим небольшую цилиндрическую поверхность, образованную нормальными к поверхности проводника и основаниями dS , одно из которых расположено внутри, а другое – вне проводника (рис. 15.1).

Поток напряженности через внутреннюю часть поверхности равен нулю, т.к. внутри проводника поле $\mathbf{E} = 0$. Вне проводника в непосредственной близости к нему напряженность поля \mathbf{E} направлена по нормали к поверхности.

Внутрь цилиндра попадает свободный заряд σdS . Применяя к цилиндрической поверхности теорему Гаусса, получим для напряженности поля вблизи поверхности проводника

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon\epsilon_0}. \quad (15.1)$$

Плотность зарядов зависит от кривизны поверхности, она растет на выступах и остриях и убывает на вогнутых участках. На острие заряженного проводника поверхностная плотность может стать настолько большой, что заряды начинают «стекать», образуя так называемый электрический ветер.

§ 16. Электроемкость уединенного проводника

Рассмотрим проводник, заряд которого равен q , а потенциал поверхности (одинаковый во всех ее точках) равен φ . Заряд q распределяется по поверхности таким образом, чтобы всюду внутри проводника выполнялись условия равновесия – напряженность поля равнялась бы нулю.

Сообщим проводнику дополнительно еще такой же заряд q . Поскольку внутри проводника поле по-прежнему должно остаться равным нулю, дополнительный заряд распределяется по поверхности **точно таким же образом**, как и прежний, создаст всюду точно такое же поле и изменит потенциал каждой точки на такую же величину φ .

Необходимо при этом, чтобы проводник был уединенным, удаленным от других тел. Иначе перемещение зарядов вне проводника может привести к перераспределению зарядов и в нем самом.

Таким образом, заряд и потенциал уединенного проводника пропорциональны друг другу: $\varphi \sim q$. Следовательно, для каждого уединенного проводника отношение заряда к потенциалу проводника есть величина постоянная

$$C = \frac{q}{\varphi}. \quad (16.1)$$

Коэффициент C называется электроемкостью уединенного проводника.

Электроемкость уединенного проводника численно равна величине заряда, который нужно сообщить этому проводнику, чтобы изменить его потенциал на единицу.

В СИ единицей электроемкости является фарад (Ф) – емкость проводника, потенциал которого изменяется на 1 В, если сообщить ему заряд в 1 Кл.

Электроемкость – характеристика проводника, количественная мера его способности удерживать электрический заряд. Чем больше электроемкость, тем больший заряд может накопить проводник при данном φ . Электроемкость определяется геометрическими размерами проводника, его формой и электрическими свойствами окружающей среды (ее диэлектрической проницаемостью) и не зависит от материала проводника.

В качестве примера определим *электроемкость уединенного проводящего шара* радиуса R , помещенного в среду с диэлектрической проницаемостью ϵ .

Поле заряженного проводящего шара является центрально симметричным относительно центра шара.

Вектор напряженности \mathbf{E} такого поля в любой точке вне шара ($r \geq R$) направлен вдоль радиальной прямой, поэтому проекция E_r вектора \mathbf{E} на радиальное направление равна

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{q}{r^2}.$$

Из формулы (38.3), связывающей напряженность с потенциалом, следует, что

$$E_r = -\frac{d\varphi}{dr}.$$

Тогда для разности потенциалов точек поля справедливо выражение

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} E_r dr.$$

Полагая $\varphi = 0$ при $r \rightarrow \infty$, получаем для потенциала уединенного заряженного шара

$$\varphi = \int_R^{\infty} E_r dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \int_R^{\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{1}{R}, \quad (16.2)$$

так что

$$C = \frac{q}{\varphi} = 4\pi\epsilon\epsilon_0 R. \quad (16.3)$$

Емкость уединенного шара пропорциональна его радиусу и диэлектрической проницаемости среды, окружающей шар.

Пример 16.1. Подсчитаем электроемкость Земли, считая ее уединенным сферическим проводником радиусом $R \approx 6\,400$ км. Диэлектрическая проницаемость ϵ окружающей среды практически равна единице. По формуле (16.3)

$$C = 4 \cdot 3,14 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 6,4 \cdot 10^6 \text{ Ф} \approx 7,1 \cdot 10^{-6} \text{ Ф} = 710 \text{ мкФ}.$$

Уединенные проводники разумных размеров имеют значительно меньшую электроемкость. Следовательно, фарад – очень большая величина. Емкостью в 1 фарад обладал бы электропроводный шар в вакууме радиусом $9 \cdot 10^6$ км! Поэтому на практике пользуются долями этой единицы – от микрофарад ($1 \text{ мкФ} = 10^{-6} \text{ Ф}$) до пикофарад ($1 \text{ пФ} = 10^{-12} \text{ Ф}$).

Понятие электроемкости применимо только к проводникам, так как для них существует равновесное распределение зарядов по поверхности тела, при котором все точки проводника имеют один и тот же потенциал. Если же заряд сообщается изолятору, то он не растекается по нему, и поэтому в различных местах изолятора потенциал различен (в зависимости от расстояний до того места, где находится подведенный заряд).

§ 17. Конденсаторы

Наличие вблизи проводника других тел изменяют его электроемкость, т.к. потенциал проводника зависит и от электрических полей, создаваемых зарядами, наведенными в окружающих телах вследствие электростатической индукции.

Рассмотрим заряженный, например, положительно $+q$, проводник A и приблизим к нему незаряженный проводник B . Под действием поля, создаваемого заряженным про-

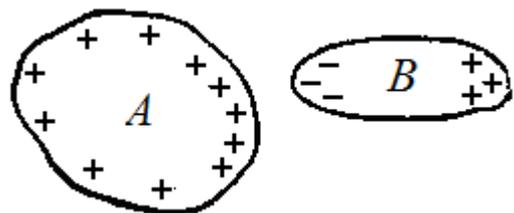


Рис. 17.1.

проводником A , в проводнике B возникнут индуцированные заряды. На ближнем конце проводника B возникнет индуцированный заряд другого знака, чем заряд проводника A , в данном случае отрицательный $-q$. Одноименный с q положительный заряд $+q$ возникнет на дальнем конце проводника B (рис. 17.1).

Теперь потенциал проводника A будут создавать не только его собственные заряды $+q$, но и индуцированные в проводнике B . Оба индуцированных заряда $-q$ и $+q$ равны по абсолютному значению. Они оба будут влиять на потенциал проводника A , но большее влияние окажут те заряды, которые расположены к нему ближе, в данном случае $-q$.

Так как ближе оказываются отрицательные заряды, при поднесении к заряженному проводнику A незаряженного проводника B потенциал проводника A станет меньше. Согласно формуле емкости $C = \frac{q}{\varphi}$ это означает увеличение емкости проводника A .

Система двух проводников, емкость которых увеличена за счет их взаимного расположения, называется конденсатором.

Конденсаторы изготавливают в виде двух проводников, называемых *обкладками*, разделенных тонким слоем диэлектрика. Обкладки несут одинаковые по величине, но противоположные по знаку заряды.

Обкладкам придают такую форму, чтобы поле было сосредоточено внутри конденсатора. Емкость конденсатора (взаимная емкость его обкладок)

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2}, \quad (17.1)$$

где q – заряд одной из обкладок, $\varphi_1 - \varphi_2$ – разность потенциалов (напряжение) между обкладками. Емкость конденсатора практически не зависит от наличия окружающих тел и может достигать очень большой величины при малых геометрических размерах.

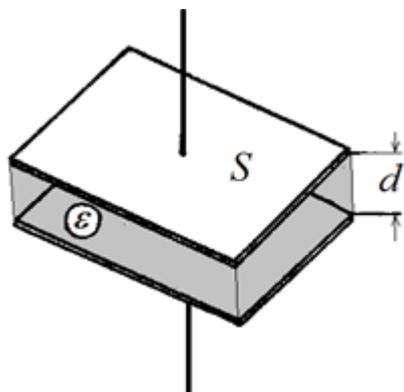


Рис. 17.2.

Он состоит из двух параллельных металлических пластин, разделенных слоем диэлектрика (рис. 17.2). Пластины заряжены равными по абсолютному значению зарядами противоположного знака. Получить такие заряды можно, либо соединив на короткое время пластины с полюсами источника, либо зарядив одну пластину и заземлив другую (рис. 17.3). В этом случае на внутренней поверхности второй

Определим емкость *плоского конденсатора*.

Он состоит из двух параллельных металлических пластин, разделенных слоем диэлектрика (рис. 17.2).

Пластины заряжены равными по абсолютному значению зарядами противоположного знака. Получить такие заряды можно, либо соединив на короткое время пластины с полюсами источника, либо зарядив одну пластину и заземлив другую (рис. 17.3). В этом случае на внутренней поверхности второй

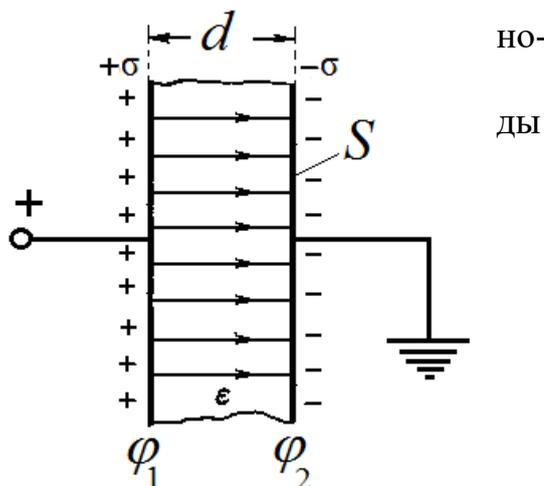


Рис. 17.3.

пластины индуцируется заряд, равный по абсолютному значению, но противоположный по знаку заряду первой пластины, а одноименный заряд, возникший на наружной поверхности второй пластины, уйдет в Землю.

Если расстояние d между пластинами мало по сравнению с их размерами, можно пренебречь краевыми эффектами и считать поле внутри конденсатора однородным и воспользоваться выражением для напряженности поля двух бесконечных разноименно заряженных плоскостей. Учитывая, что диэлектрик ослабляет поле в ϵ раз, для напряженности поля в плоском конденсаторе получим

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon\epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon\epsilon_0 S}, \quad (17.2)$$

где S – площадь обкладки. Ранее было выведено выражение (9.3) для разности потенциалов (напряжения) между обкладками

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\sigma d}{\epsilon\epsilon_0} = \frac{qd}{\epsilon\epsilon_0 S}.$$

Следовательно, емкость плоского конденсатора

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{\epsilon\epsilon_0 S}{d}. \quad (17.3)$$

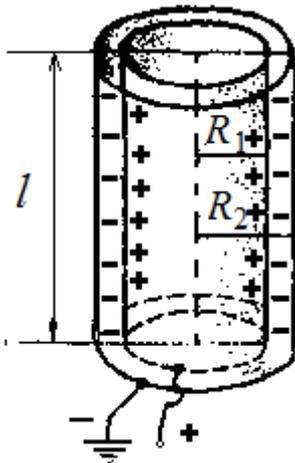


Рис. 17.4.

Цилиндрический конденсатор состоит из двух расположенных один внутри другого коаксиальных (с общей осью) проводящих цилиндров, разделённых диэлектриком (рис. 17.4). Можно, пользуясь формулами (9.4) и (17.1), аналогично показать для цилиндрического конденсатора, имеющего длину l и радиусы коаксиальных цилиндров R_1 и R_2 :

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{2\pi\epsilon\epsilon_0 l}{\ln \frac{R_2}{R_1}}. \quad (17.4)$$

В электролитических цилиндрических конденсаторах в качестве диэлектрика используют тонкую оксидную пленку, образующуюся на поверхности одного из электродов (металлического) – анода, а в роли второго электрода – катода – выступает электролит. За счет очень малой толщины оксидной пленки радиусы цилиндров близки по значению, т.е. $R_2/R_1 \rightarrow 1$, $\ln \frac{R_2}{R_1} \rightarrow 0$ и, как следу-

ет из формулы (17.4), емкость цилиндрического конденсатора C достигает значительной величины.

Существуют миниатюрные танталовые электролитические конденсаторы. Они имеют довольно малые размеры и предназначены для монтажа на печатных платах миниатюрных плееров, мобильных телефонов, материнских платах ноутбуков и компьютеров.

Пример 17.1. Плоский воздушный конденсатор был заряжен до напряжения $U_0 = 600$ В и отключен от источника питания. Площадь пластин конденсатора $S = 200$ см², расстояние

между ними $d = 2$ мм. После отключения конденсатора от источника напряжения между обкладками конденсатора поместили диэлектрическую пластину ($\epsilon = 6$). Определить разность потенциалов U_1 между пластинами после внесения диэлектрика. Определить также емкости конденсатора C_0 и C_1 до и после внесения диэлектрика.

Впервые М.Фарадей опытным путем установил, что емкость конденсатора с диэлектриком (рис. П.17.1) увеличивается в ϵ раз, т.е.

$$C_1 = \epsilon C_0$$

Так как заряд отключенного от источника конденсатора не меняется при помещении в него диэлектрика $q_0 = q_1 = q = const$, справедливы следующие соотношения:

$$q_0 = C_0 U_0 \quad \text{и} \quad q_1 = C_1 U_1.$$

Отсюда $C_0 U_0 = C_1 U_1$ или

$$U_1 = U_0 \frac{C_0}{C_1} = \frac{U_0}{\epsilon} = \frac{600}{6} = 100(B).$$

Емкости конденсатора:

$$C_0 = \frac{\epsilon_0 S}{d} = \frac{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 200 \cdot 10^{-4}}{0,002} = 88,5 \cdot 10^{-12} \Phi = 88,5 n\Phi,$$

$$C_1 = \epsilon C_0 = 6 \cdot 88,5 = 531 n\Phi.$$

Пример 17.2. Как изменится заряд на обкладках конденсатора, если диэлектрическая пластина вносится в пространство между пластинами конденсатора при включенном источнике питания?

В отличие от первого случая, теперь постоянным оказывается напряжение U_0 на обкладках конденсатора до и после внесения диэлектрика, а заряды на обкладках разные.

$$U_0 = U_1 = U = const; \quad C_1 = \epsilon C_0; \quad q_0 = C_0 U;$$

$$q_1 = C_1 U = \epsilon C_0 U = \epsilon q_0; \quad \frac{q_1}{q_0} = \epsilon.$$

Тогда дополнительный заряд, который натекает на пластины конденсатора от источника питания

$$\Delta q = q_1 - q_0 = \epsilon q_0 - q_0 = q_0(\epsilon - 1) = C_0 U (\epsilon - 1). \\ \Delta q = 88,5 \cdot 10^{-12} \cdot 600 \cdot (6 - 1) \approx 0,27 \text{ мкКл.}$$

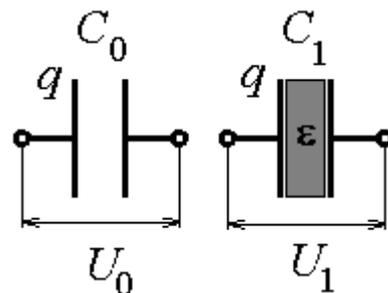


Рис. П. 17.1

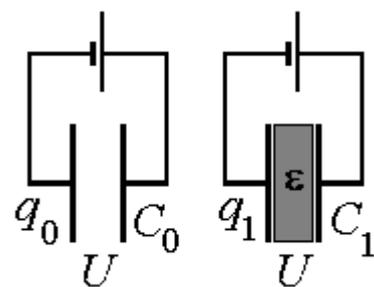


Рис. П. 17.2

§ 18. Соединение конденсаторов

При практическом использовании конденсаторы часто объединяют в батареи.

При **параллельном** соединении обкладки конденсаторов соединяют в две группы, потенциалы которых ϕ_1 и ϕ_2 (рис. 18.1).

Разность потенциалов между обкладками всех конденсаторов одинакова и равна $\phi_1 - \phi_2$. При зарядании такой батареи сообщенный ей заряд q частично попадает на обкладки всех конденсаторов.

Суммарный заряд батареи равен сумме зарядов отдельных конденсаторов:

$$q = q_1 + q_2 + q_3 + \dots + q_n. \quad (18.1)$$

Таким образом, в случае параллельного соединения конденсаторов

$$C_{нар} = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{q_1}{\varphi_1 - \varphi_2} + \frac{q_2}{\varphi_1 - \varphi_2} + \dots + \frac{q_n}{\varphi_1 - \varphi_2} = C_1 + C_2 + \dots + C_n. \quad (18.2)$$

При параллельном соединении емкость батареи равна сумме емкостей отдельных конденсаторов.

Параллельное соединение применяют для того, чтобы получить большую емкость, чем емкость одного конденсатора.

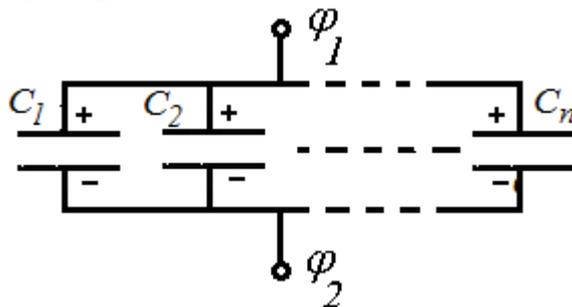


Рис. 18.1.

При **последовательном** соединении конденсаторов (рис. 18.2) обкладки отдельных конденсаторов имеют заряды, численно равные, но противоположные по знаку.

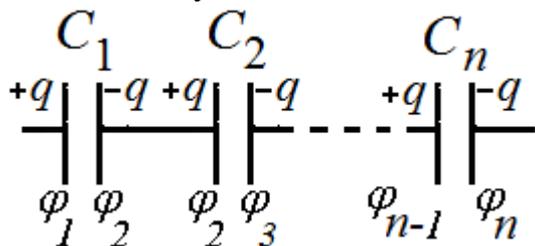


Рис. 18.2

Если первой обкладке сообщить заряд $+q$, то на второй обкладке батареи появится индуцированный заряд $-q$. Поскольку эта обкладка соединена с первой обкладкой второго конденсатора и образует с ней единый проводник, то согласно закону сохранения заряда, на последней появится заряд $+q$. В свою очередь, это приведет к появлению заряда $-q$ на другой обкладке второго конденсатора и т.д. В результате все последовательно соединенные конденсаторы будут заряжены одинаково. При этом батарее сообщен только заряд q .

Полная разность потенциалов на клеммах всей батареи $\varphi_1 - \varphi_n$ равна сумме разностей потенциалов между обкладками каждого из конденсаторов

$$\varphi_1 - \varphi_n = (\varphi_1 - \varphi_2) + (\varphi_2 - \varphi_3) + \dots + (\varphi_{n-1} - \varphi_n). \quad (18.3)$$

Согласно определению емкости

$$C_{посл} = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_n}.$$

Или

$$\frac{1}{C_{посл}} = \frac{\varphi_1 - \varphi_n}{q} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{q} + \frac{\varphi_2 - \varphi_3}{q} + \dots + \frac{\varphi_{n-1} - \varphi_n}{q} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}. \quad (18.4)$$

При последовательном соединении конденсаторов складываются обратные величины емкостей.

В частности, для двух последовательно соединенных конденсаторов

$$C_{\text{послед}} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}. \quad (18.5)$$

Пример 18.1. Два конденсатора, емкости которых $C_1 = 0,2$ мкФ и $C_2 = 0,4$ мкФ, соединены последовательно и подключены к источнику напряжения $U = 300$ В. Определить заряды q_1 и q_2 и напряжения U_1 и U_2 на конденсаторах.

При последовательном соединении конденсаторы заряжаются одинаковым зарядом $q_1 = q_2 = q = \text{const}$. Поскольку емкости конденсаторов различны, то напряжения на каждом из них также различны, а полное напряжение

$$U = U_1 + U_2 \quad (\text{П. 18.1})$$

распределяется между конденсаторами соответственно их емкостям

$$U_1 = \frac{q}{C_1}; \quad U_2 = \frac{q}{C_2}.$$

Из этих равенств следует:

$$C_1 U_1 = C_2 U_2. \quad (\text{П. 18.2})$$

Решая систему уравнений (П. 18.1) и (П. 18.2), получим

$$U_1 = \frac{C_2}{C_1 + C_2} U = \frac{0,4}{0,2 + 0,4} 300 = 200 \text{ В}.$$

$$U_2 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} U = \frac{0,2}{0,2 + 0,4} 300 = 100 \text{ В}.$$

$$q_1 = q_2 = C_1 U_1 = C_2 U_2 = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} U =$$

$$= \frac{0,2 \cdot 0,4}{0,2 + 0,4} 10^{-6} \cdot 300 = 4 \cdot 10^{-5} \text{ Кл} = 40 \text{ мкКл}$$

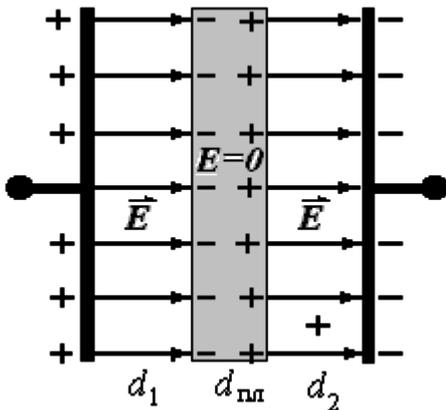


Рис. П. 18.1

Пример 18.2. Плоский воздушный конденсатор был заряжен до разности потенциалов $U_0 = 300$ В и отключен от источника напряжения. Расстояние между обкладками конденсатора $d = 2$ см. После этого в конденсатор параллельно его обкладкам ввели проводящую пластину толщиной $d_{\text{пл}} = 1$ см, размеры которой равны размерам обкладок (рис. П. 18.1). Как изменятся емкость конденсатора и напряжение на нем?

При внесении незаряженного проводника в электрическое поле носители заряда начинают двигаться: положительные в направлении внешнего поля, отрицательные - в противоположную сторону. Вследствие этого на внешних поверхностях пластины возникают заряды противоположного знака, называемые индуцированными. Поле этих зарядов направлено противоположно внешнему полю. По принципу суперпозиции электрическое поле внутри пластины является суммой поля конденсатора и поля, создаваемого индуцированными зарядами.

Напряженность поля в любой точке внутри пластины становится равной нулю (условие равновесия зарядов). Все линии напряженности электрического поля в зазоре конденсатора разрываются, они заканчиваются на отрицательных индуцированных зарядах и вновь начинаются на положительных зарядах.



Рис. П. 18.2

Потенциал внутри пластины является постоянным. Это позволяет рассматривать конденсатор с проводящей пластиной внутри как систему двух последовательно включенных конденсаторов C_1 и C_2 (рис. П. 18.2) ..

а). Если толщина пластины $d_{пл}$ намного меньше, чем d , то $d \approx d_1 + d_2$, а емкости соответственно равны (для воздуха $\varepsilon = 1$)

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 S}{d_1}, \quad C_2 = \frac{\varepsilon_0 S}{d_2}.$$

Общая емкость C определится из соотношения

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{d_1}{\varepsilon_0 S} + \frac{d_2}{\varepsilon_0 S} = \frac{d}{\varepsilon_0 S} = \frac{1}{C_0},$$

где C_0 – емкость конденсатора без пластины. Таким образом, при любом положении *тонкой* пластины *емкость конденсатора не меняется*, $C = C_0$.

б) Если проводящая пластина имеет определенную толщину $d_{пл}$, то $d = d_1 + d_{пл} + d_2$. Общая емкость двух образовавшихся последовательно соединенных конденсаторов может быть найдена из соотношения

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{d_1}{\varepsilon_0 S} + \frac{d_2}{\varepsilon_0 S} = \frac{d - d_{пл}}{\varepsilon_0 S}.$$

Откуда

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d - d_{пл}} > C_0.$$

Таким образом, *емкость возросла*. В то же время *заряд конденсатора*, отключенного от источника напряжения, *не меняется*.

$$q = C_0 U_0 = CU.$$

Тогда $U = \frac{C_0}{C} U_0 = \frac{d - d_{пл}}{d} U_0 < U_0.$

Следовательно, *напряжение уменьшилось*. $U = 150$ В.

Контрольные вопросы

1. Как распределяются заряды по поверхности уединенного заряженного сферического проводника? Проводника произвольной формы? Каким будет потенциал точек поверхности в этих двух случаях?
2. Будут ли одинаковыми потенциалы точек поверхности незаряженного проводника, помещенного в электрическое поле? Потенциалы точек внутри проводника?
3. Имеются два одинаково заряженных проводника, емкости которых различны. Будут ли перемещаться заряды, если привести проводники в контакт?
4. Имеются два заряженных проводника: у одного заряд меньше, но потенциал выше, чем у другого. Как будут перемещаться электрические заряды при соприкосновении этих проводников?
5. Почему емкость конденсатора, который состоит из двух проводников (A и B) больше, чем емкость каждого из уединенных проводников (A или B)? В чем преимущества конденсатора, состоящего из пары проводников?
6. Как изменится емкость плоского конденсатора, если в воздушный зазор между обкладками вдвинуть: очень тонкую металлическую пластину? Металлическую пластину конечной толщины?

7. Изменится ли напряжение между пластинами заряженного плоского конденсатора, если одну из них заземлить?
8. Зависит ли напряженность поля заряженного и отключенного от источника напряжения конденсатора от расстояния между его пластинами? Подключенного к источнику?
9. Как и почему изменятся емкость, напряженность электрического поля, напряжение, если поместить диэлектрик между обкладками заряженного конденсатора?
10. Между обкладками плоского конденсатора вдвигается пластина диэлектрика. Как изменятся характеристики конденсатора в двух случаях: 1) конденсатор заряжен и отключен от источника напряжения; 2) конденсатор не отключается от источника напряжения?

Глава 9. ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

§ 19. Энергия взаимодействия точечных электрических зарядов

Рассмотрим систему, состоящую из расположенных на расстоянии r друг от друга двух точечных зарядов q_1 и q_2 . Величина

$$W = q_1 \frac{q_2}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r} = q_1\varphi_1 \quad (19.1)$$

(через φ_1 обозначен потенциал поля заряда q_2 в той точке, где находится заряд q_1), как известно, равна потенциальной энергии первого заряда q_1 в поле второго заряда q_2 . Очевидно, что это выражение можно также записать в виде потенциальной энергии второго заряда в поле первого

$$W = q_2 \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{q_1}{r} = q_2\varphi_2. \quad (19.2)$$

Здесь φ_2 - потенциал поля заряда q_1 в точке, где находится заряд q_2 .

Чтобы подчеркнуть тот факт, что энергией обладает не каждый заряд в отдельности, а энергия принадлежит сразу двум зарядам, энергию W называют *энергией взаимодействия*. Следовательно, потенциальная энергия взаимодействия двух зарядов равна

$$W = q_1\varphi_1 = q_2\varphi_2.$$

Выражение для потенциальной энергии взаимодействия двух зарядов удобно записать в симметричном виде

$$W = \frac{1}{2}(q_1\varphi_1 + q_2\varphi_2). \quad (19.3)$$

В общем случае *системы, состоящей из n зарядов*, энергия их взаимодействия

$$W = \frac{1}{2}(q_1\varphi_1 + q_2\varphi_2 + \dots + q_n\varphi_n) = \frac{1}{2} \sum_i q_i\varphi_i, \quad (19.4)$$

где φ_i – потенциал, создаваемый в той точке, где находится заряд q_i , всеми зарядами, кроме q_i .

Для неподвижных зарядов энергия взаимодействия зарядов является энергией электрического поля.

§ 20. Энергия заряженного проводника и системы проводников. Энергия заряженного конденсатора

Рассмотрим уединенный проводник с зарядом q , потенциалом φ и емкостью C . Чтобы увеличить заряд этого проводника на dq , необходимо перенести из бесконечности на поверхность проводника дополнительный заряд dq , совершив против сил кулоновского отталкивания между одноименными зарядами работу

$$dA = (\varphi - \varphi_\infty) dq = \varphi dq = C \varphi d\varphi. \quad (20.1)$$

Чтобы зарядить проводник от нулевого потенциала до потенциала, равного φ , надо совершить полную работу

$$A = \int_0^\varphi C \varphi d\varphi = \frac{C \varphi^2}{2}. \quad (20.2)$$

В силу закона сохранения энергии увеличение потенциальной энергии проводника равно совершенной над ним работе, так что, полагая потенциальную энергию незаряженного проводника равной нулю, мы получаем для энергии заряженного уединенного проводника выражение

$$W = \frac{C \varphi^2}{2} = \frac{q \varphi}{2} = \frac{q^2}{2C}. \quad (20.3)$$

Формулу (20.3) можно получить иначе, рассматривая заряд q , находящийся на проводнике, как систему точечных зарядов q_i . Поверхность проводника является эквипотенциальной. Поэтому потенциал точек, в которых находятся точечные заряды q_i , одинаков и равен потенциалу φ проводника. Из формулы (19.4) для энергии взаимодействия зарядов получим для энергии заряженного проводника выражение

$$W = \frac{1}{2} \varphi \sum_i q_i = \frac{q \varphi}{2},$$

где $q = \sum_i q_i$ – заряд проводника.

Рассмотрим теперь систему k заряженных проводников. Поскольку все заряды на поверхности одного проводника имеют одинаковый потенциал, который равен потенциалу φ_k проводника, вместо суммы по всем точечным зарядам получим сумму по всем проводникам

$$W = \frac{1}{2} \sum_k Q_k \varphi_k. \quad (20.4)$$

Здесь W – энергия электростатического взаимодействия системы заряженных проводников, k – номер проводника, φ_k – потенциал k -го проводника, Q_k – полный заряд на k -м проводнике.

Применим формулу (20.4) для конденсатора. Конденсатор – это два проводника. Учитывая, что заряды обкладок равны по величине и противоположны по знаку, получим

$$W = \frac{1}{2} ((+q)\varphi_1 + (-q)\varphi_2) = \frac{1}{2} q(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{1}{2} qU, \quad (20.5)$$

где U - разность потенциалов между обкладками конденсатора.

Используя формулу (20.5) и принимая во внимание, что $q = CU$, получаем для электрической энергии заряженного конденсатора

$$W = \frac{qU}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{CU^2}{2}. \quad (20.6)$$

В случае плоского конденсатора напряженность поля внутри него не зависит от расстояния между пластинами. Это позволяет получить выражение для энергии заряженного конденсатора иначе.

Пусть пластины конденсатора, несущие равные и противоположные по знаку заряды, расположены на расстоянии d друг от друга. Так как разноименно заряженные пластины конденсатора притягиваются, дадим возможность одной из пластин перемещаться в направлении к другой пластине вплоть до их полного совмещения. При этом заряды пластин компенсируются, и конденсатор с запасенной в нем энергией исчезает. Очевидно, что работа действующей на пластину электрической силы равна первоначальному запасу энергии конденсатора.

Сила, действующая на пластину, равна произведению ее заряда q на напряженность однородного электрического поля, создаваемого покоящейся пластиной. Эта напряженность, как показано в § 6, равна половине полной напряженности E электрического поля внутри конденсатора. Поэтому работа, совершаемая за счет запасенной в конденсаторе энергии, равна

$$A = W = Fd = q \left(\frac{E}{2} \right) d = \frac{qU}{2},$$

где $U = Ed$ – напряжение между пластинами.

Пример 20.1. Конденсатор емкостью $C_1 = 2$ мкФ заряжают до напряжения $U_1 = 110$ В, после чего его замыкают на незаряженный конденсатор неизвестной емкости. Определить емкость второго конденсатора, если после замыкания на нем установилось напряжение $U_2 = 44$ В. Какое количество теплоты выделяется вследствие замыкания?

После замыкания образуется батарея из двух параллельно соединенных конденсаторов. Поэтому напряжение на каждом из них будет одинаковым U_2 . Заряд первого конденсатора до замыкания $q_1 = C_1 U_1$ распределяется между обоими конденсаторами

$$q_1 = q'_1 + q'_2; \quad q'_1 = C_1 U_2, \quad q'_2 = C_2 U_2, \quad \text{или } C_1 U_1 = C_1 U_2 + C_2 U_2, \quad \text{откуда } C_2 = C_1 \left(\frac{U_1}{U_2} - 1 \right).$$

Энергия до соединения $W = \frac{C_1 U_1^2}{2}$, после соединения $W' = \frac{(C_1 + C_2) U_2^2}{2}$. Отсюда

$$Q = W - W' = \frac{C_1 U_1 (U_1 - U_2)}{2}.$$

Подставляя числа, находим $C_2 = 3$ мкФ, $Q = 7,26$ мДж

Пример 20.2. Емкость плоского конденсатора $C_0 = 200$ пФ. Диэлектрик – стекло ($\epsilon = 7$). Конденсатор зарядили до разности потенциалов $U_0 = 700$ В и отключили от источника напряжения. Какую работу нужно совершить, чтобы вынуть стеклянную пластину из конденсатора?

Начальная энергия поля в конденсаторе $W_0 = \frac{C_0 U_0^2}{2}$. После удаления пластины емкость конденсатора уменьшится в ε раз и станет равной $C_1 = \frac{C_0}{\varepsilon}$. При этом энергия поля в конденсаторе станет равной $W_1 = \frac{q^2}{2C_1}$, где $q = C_0 U_0$ – заряд на обкладках, который не меняется, т.к. конденсатор отключен от источника напряжения.

Тогда $W_1 = \frac{C_0^2 U_0^2}{2C_1} = \frac{\varepsilon C_0 U_0^2}{2}$. Таким образом, энергия конденсатора увеличилась в ε раз.

На удаление пластины внешние силы совершили работу

$$A = W_1 - W_0 = \frac{(\varepsilon - 1)C_0 U_0^2}{2} = \frac{(7 - 1) \cdot 200 \cdot 10^{-12} \cdot (700)^2}{2} = 294 \text{ (мкДж)}.$$

§ 21. Плотность энергии электростатического поля

Энергию заряженного конденсатора можно трактовать либо как потенциальную энергию взаимодействия зарядов на его обкладках, либо как энергию создаваемого этими зарядами электрического поля, заключенного в пространстве между обкладками. Электростатическое поле неотделимо от создающих его неподвижных зарядов. Поэтому, оставаясь в рамках электростатики, нельзя ответить на вопрос – что является носителем энергии – заряды или поле?

Физическими экспериментами было показано, что переменные во времени электрические и магнитные поля могут существовать обособленно, независимо от возбудивших их зарядов и распространяются в пространстве в виде электромагнитных волн. Такие волны способны переносить энергию, что подтверждает вывод о том, что *носителем энергии является поле*.

Соответственно и электростатическое поле обладает энергией. Назовем величину

$$w = \frac{W}{V}, \quad (21.1)$$

равную энергии однородного электростатического поля, приходящейся на единицу занимаемого им объема, **объемной плотностью энергии** электростатического поля.

Для того чтобы определить, чему равна плотность энергии электростатического поля, рассмотрим плоский конденсатор. С учетом того, что емкость плоского конденсатора

$$C = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 S}{d},$$

а разность потенциалов между его обкладками

$$U = Ed,$$

где E – напряженность поля (по модулю) между обкладками, выражение (20.6) для энергии заряженного конденсатора можно представить в виде

$$W = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon \varepsilon_0 S}{d} (Ed)^2 = \frac{1}{2} \varepsilon \varepsilon_0 E^2 Sd = \frac{1}{2} \varepsilon \varepsilon_0 E^2 V. \quad (21.2)$$

Таким образом, энергия электростатического поля конденсатора прямо пропорциональна объему, заключенному между его обкладками, и энергия электрического поля распределена в пространстве с плотностью

$$w = \frac{W}{V} = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 E^2}{2}. \quad (21.3)$$

Можно показать, что это выражение справедливо не только для поля конденсатора, но и в общем случае произвольного электрического поля.

Пример 21.1. Площадь обкладок плоского воздушного конденсатора равна $S = 100 \text{ см}^2$, расстояние между ними $d = 2 \text{ мм}$. Какая разность потенциалов была приложена между обкладками, если при разряде конденсатора выделилось количество теплоты $Q = 90 \text{ мкДж}$?

Выделившееся количество теплоты равно энергии электростатического поля заряженного конденсатора

$$Q = W = wV = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} Sd.$$

Откуда
$$E = \sqrt{\frac{2Q}{\varepsilon_0 \varepsilon Sd}},$$

и разность потенциалов
$$U = Ed = \sqrt{\frac{2Qd}{\varepsilon_0 \varepsilon S}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9 \cdot 10^{-5} \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{-2}}} \approx 2 \cdot 10^3 \text{ В}.$$

Пример 21.2. Определить силу притяжения пластин заряженного плоского конденсатора. Площадь пластин S , заряд на каждой пластине q . Конденсатор заряжен и отключен от источника электрической энергии.

При сближении пластин на расстояние Δd сила притяжения F выполняет работу

$$\Delta A = F \cdot \Delta d.$$

Вследствие сближения пластин конденсатора объем его поля уменьшается. Объемная плотность энергии поля $w = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 E^2}{2}$ при этом не изменяется, т.к. напряженность поля E не зависит от расстояния между обкладками, а зависит только от плотности зарядов на обкладках. Следовательно, энергия поля конденсатора уменьшается на величину

$$\Delta W = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 E^2}{2} S \Delta d.$$

Из закона сохранения энергии вытекает, что $\Delta A = \Delta W$, или

$$F \Delta d = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 E^2}{2} S \Delta d,$$

откуда $F = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 E^2}{2} S$. Подставляя значение напряженности электрического поля плоского конденсатора

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon\varepsilon_0 S},$$

получим

$$F = \frac{q^2}{2\varepsilon\varepsilon_0 S}. \quad (\text{П. 21.1})$$

Контрольные вопросы

1. Чему равна максимальная потенциальная энергия системы притягивающихся зарядов?
2. Где локализована энергия заряженного конденсатора?
3. В каком случае запасается большая энергия при подключении батареи конденсаторов к источнику напряжения: а) при их последовательном соединении; б) при их параллельном соединении?
4. В поле заряженного конденсатора попадает заряженная частица. Ее кинетическая энергия в поле изменяется. За счет какой энергии выполняется работа?
5. При соединении заряженного конденсатора с незаряженным энергия системы убывает. Она расходуется на образование искры, нагревание проводников и т.д. От чего зависят потери энергии? Могут ли потери энергии быть равными нулю, если, например, использовать сверхпроводники?
6. Чему равна энергия поля заряженного проводника?
7. Что происходит с энергией плоского конденсатора, который был заряжен и отключен от источника напряжения, при раздвижении его пластин?
8. Как изменится энергия заряженного и отключенного плоского воздушного конденсатора, если между его обкладками вставить диэлектрическую пластину? Если энергия изменится, то кто выполняет работу?
9. Какова размерность плотности энергии электрического поля?

Глава 5. ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

§ 22. Постоянный электрический ток, его характеристики и условия существования

Электрическим током называется упорядоченное движение электрических зарядов. Носителями тока могут быть электроны, а также положительные и отрицательные ионы.

Упорядоченное движение свободных электрических зарядов, происходящее в проводнике, называется током *проводимости* (ток в металлах, в электролитах, в газах). Упорядоченное движение зарядов при движении заряженного тела в пространстве, называется *конвекционным* током.

Силой тока называется скалярная величина, равная заряду, проходящему за одну секунду через любое поперечное сечение проводника. Если за время dt через сечение проводника переносится заряд dq , то сила тока

$$I = \frac{dq}{dt}. \quad (22.1)$$

Таким образом, сила тока определяется как скорость переноса заряда через рассматриваемое сечение проводника.

За направление электрического тока по традиции принимается направление, в котором перемещаются положительные заряды. Точнее, перемещались бы, поскольку электропроводность большинства проводников (металлов, полупроводников, плазмы) обусловлена движением отрицательно заряженных свободных электронов (рис. 22.1).

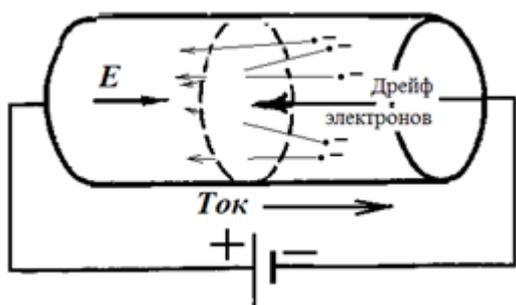


Рис. 22.1.

Если сила и направление тока не меняются со временем, ток называется *постоянным*. Для постоянного тока, очевидно, справедливо соотношение

$$I = \frac{q}{t}. \quad (22.2)$$

Единицей силы тока в системе СИ является ампер (А). Ампер входит в число основных единиц системы СИ и вводится на основе магнитного взаимодействия токов.

При силе постоянного тока, равной 1 А, через сечение проводника за 1 с переносится заряд, равный 1 Кл.

Ток может быть неравномерно распределен по сечению проводника (например, переменный ток высокой частоты почти не проникает вглубь проводника), так что необходимо ввести величину, характеризующую распределение силы тока по сечению проводника. Это вектор плотности тока \mathbf{j} .

Плотность тока \mathbf{j} определяется зарядом, проходящим за единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную направлению упорядоченного движения зарядов. Модуль плотности тока

$$j = \frac{dI}{dS_{\perp}}, \quad (22.3)$$

а направление вектора \mathbf{j} совпадает с направлением скорости упорядоченного движения положительных зарядов.

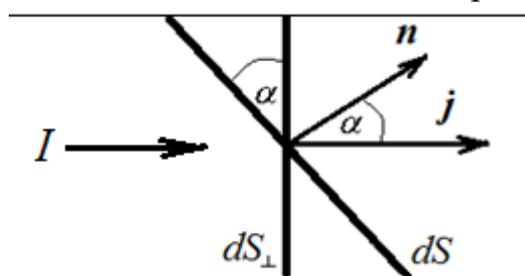


Рис. 22.2.

Если малый элемент площадью dS расположен так, что нормаль \mathbf{n} к нему составляет с вектором \mathbf{j} угол α , то сила тока через площадку dS_{\perp} согласно (22.3) равна

$$dI = j dS_{\perp}.$$

Как видно из рис. 52.2:

$$dS_{\perp} = dS \cos \alpha.$$

Поэтому

$$dI = j dS_{\perp} = j dS \cos \alpha = j_n dS,$$

где $j_n = j \cos \alpha$ – проекция вектора j на нормаль n .

Таким образом, через площадку dS течет такой же ток, как и через площадку dS_{\perp} . Сила тока через произвольную поверхность S получается суммированием по всем элементам:

$$I = \int_{(s)} j_n dS . \quad (22.4)$$

Если сечение проводника перпендикулярно вектору плотности тока, плотность тока одинакова по всему сечению, а направление нормали совпадает с направлением движения положительных зарядов, то сила тока

$$I = j \cdot S.$$

Пусть в единице объема проводника содержится n носителей тока, заряд каждого из которых q . Обозначим скорость упорядоченного движения носителей тока через u (рис. 22.4). Через единичную поверхность пройдут за секунду только те носители, которые в начале этой секунды находились внутри цилиндра с основанием единичной площади и высотой (длиной боковой поверхности), численно равной скорости направленного движения u . Объем цилиндра равен u , количество носителей – nu , а суммарный заряд – nqu . Следовательно, для плотности тока получается формула

$$j = nqu. \quad (22.5)$$

Если электрический ток создается одновременно как положительными, так и отрицательными носителями, полная плотность тока равна векторной сумме вкладов отдельных сортов носителей.

Как следует из выражения (22.3), плотность тока в системе СИ измеряется в амперах на квадратный метр (A/m^2). В технике используется измерение плотности тока в амперах на квадратный миллиметр (A/mm^2).

Для появления и существования электрического тока проводимости должны выполняться *два условия*.

1. В рассматриваемой среде должны существовать *носители тока* – способные свободно перемещаться заряженные частицы. Такими носителями тока в металлах являются свободные электроны, в полупроводниках – электроны проводимости и дырки, в электролитах – положительные и отрицательные ионы, в газах – противоположно заряженные ионы и электроны.

2. В рассматриваемой среде должно существовать *электрическое поле*, энергия которого затрачивается на перемещение электрических зарядов. Для существования постоянного тока энергия поля должна все время пополняться, то есть необходим *источник энергии* электрического поля.

§ 23. Сторонние силы, ЭДС и напряжение

Пусть на концах проводника AB (рис 23.1) создана разность потенциалов $\varphi_A - \varphi_B$, которая создает внутри него электрическое поле E , направленное в сторону падения потенциала. Для удобства рассужде-

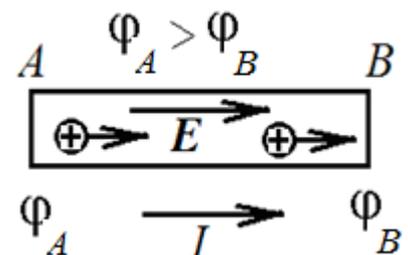


Рис. 23.1.

ний будем предполагать, что носителями тока являются положительные заряды. В реальности в металлических проводниках ток проводимости создается движением электронов, что, однако, не меняет сути рассуждений.

В течение очень короткого времени будет происходить перемещение зарядов от A к B до тех пор, пока в проводнике не установится одинаковый потенциал; при этом напряженность электрического поля внутри проводника станет равной нулю, и ток I прекратится. Таким образом, проводник, в котором действуют только электростатические силы, со временем переходит в равновесное состояние.

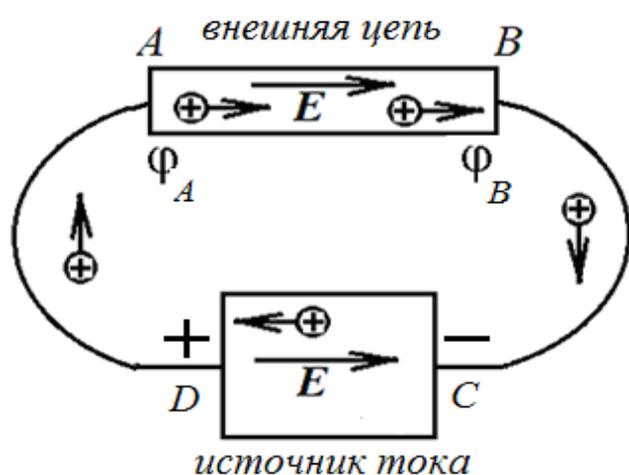


Рис. 23.2.

Для того чтобы поддерживать ток длительное время, нужно от конца проводника B с меньшим потенциалом φ_B непрерывно отводить приносимые сюда током заряды, а к концу A с большим потенциалом φ_A непрерывно их подводить (рис. 23.2). Иными словами, необходимо осуществить круговорот зарядов, при котором они двигались бы по замкнутому пути.

В замкнутой цепи наряду с участком AB , на котором положительные заряды движутся в сторону убывания потенциала φ , должен иметься участок, на котором перенос положительных зарядов происходит в направлении возрастания φ , т. е. против сил электростатического поля с напряженностью E , существующего между полюсами источника (часть цепи CD на рис. 23.2).

Перемещение носителей тока на участке CD (против поля E) возможно лишь с помощью сил неэлектростатического (не кулоновского) происхождения, называемых *сторонними силами*.

Устройство, создающее и поддерживающее разность потенциалов $\Delta\varphi = \varphi_A - \varphi_B$ на концах проводника за счет работы сторонних сил, называется *источником тока*.

Устройство, создающее и поддерживающее разность потенциалов $\Delta\varphi = \varphi_A - \varphi_B$ на концах проводника за счет работы сторонних сил, называется *источником тока*.

Источник тока замыкает электрическую цепь, по которой осуществляется непрерывное движение зарядов. Ток течет по внешней части цепи – по проводнику и по внутренней – источнику тока. Источник тока имеет два полюса (рис. 23.2): положительный, с более высоким потенциалом, и отрицательный, с более низким потенциалом. При разомкнутой внешней цепи на отрицательном полюсе образуется избыток электронов, а на положительном – недостаток.

Во внешней цепи ток течет от положительного полюса к отрицательному, а внутри источника тока – от отрицательного полюса к положительному. Внутри источника тока сторонние силы направлены против электрических сил.

Таким образом, *источник тока* должен обеспечивать круговращение носителей тока, подобно тому, как насос обеспечивает циркуляцию жидкости в какой-нибудь замкнутой системе.

Происхождение сторонних сил может быть различным. Сторонние силы приводят в движение заряженные частицы внутри генераторов, гальванических

элементов, аккумуляторов. В генераторах сторонние силы — это либо силы, действующие на электроны проводимости со стороны вихревого электрического поля, возникающего при изменении магнитного поля со временем, либо лоренцевы силы, действующие со стороны магнитного поля на электроны в движущемся проводнике; в гальванических элементах и аккумуляторах — это химические силы и т. д.

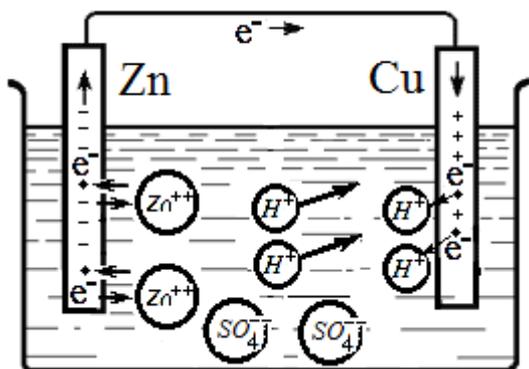


Рис. П. 23.1.

Пример 23.1. Рассмотрим механизм возникновения ЭДС в простейшем химическом источнике тока — элементе Вольта (рис. П. 23.1). В водный раствор серной кислоты опускают две металлических пластины: из цинка Zn и меди Cu. При растворении цинка в электролит переходят положительно заряженные ионы цинка Zn^{++} . В цинковой пластине остаются избыточные электроны. Молекула серной кислоты в воде распадается на два иона H^+ и один ион SO_4^{--} :



Положительно заряженные ионы цинка Zn^{++} , переходя в раствор, отталкивают положительные

ионы водорода H^+ и оттесняют их к медной пластине. Здесь каждый водородный ион H^+ отнимает у медной пластины электрон, превращаясь в нейтральный атом. Атом водорода, соединяясь с другим таким же атомом, образует молекулу газообразного водорода H_2 . Поскольку медная пластина теряет электроны, она заряжается положительно. (Отметим, что на медной пластине происходят подобные реакции, однако цинковая пластина растворяется быстрее медной).

В результате между цинковой и медной пластинами возникает разность потенциалов 1,1 В. Если замкнуть цепь, образующиеся свободные электроны будут переходить по внешней цепи к положительному электроду. В цепи потечет постоянный ток, источником энергии для которого будут химические реакции.

Перемещая электрические заряды, сторонние силы совершают работу за счет энергии, затрачиваемой в источнике тока. *Величина, численно равная работе сторонних сил по перемещению единичного положительного заряда, называется электродвижущей силой (ЭДС) ε* , действующей в замкнутой цепи или на ее участке. Следовательно, если работа сторонних сил над зарядом q равна $A_{ст}$, то

$$\varepsilon = \frac{A_{ст}}{q}. \quad (23.1)$$

Из сопоставления этой формулы с формулой работы сил поля над зарядом ($A = q(\varphi_1 - \varphi_2)$) вытекает, что размерность ЭДС совпадает с размерностью потенциала. Измеряется ЭДС в тех же единицах, что и потенциал, т. е. в вольтах (В).

По аналогии с напряжённостью электрического поля введем понятие *напряжённости поля сторонних сил $E^{ст}$* , под которой будем понимать векторную величину, равную отношению сторонней силы $F^{ст}$, действующей на электрический заряд q , к величине этого заряда.

$$\mathbf{E}^{cm} = \frac{\mathbf{F}^{cm}}{q} . \quad (23.2)$$

Стороннюю силу, действующую на заряд q , можно представить в виде произведения заряда на напряженность поля сторонних сил \mathbf{E}^{cm} :

$$\mathbf{F}^{cm} = q \mathbf{E}^{cm} . \quad (23.3)$$

Тогда работа сторонних сил на участке $1—2$ цепи будет равна сумме элементарных работ, т.е. криволинейному интегралу вдоль участка цепи $1—2$

$$A^{cm} = \int_{12} F_l^{cm} dl = q \int_{12} E_l^{cm} dl . \quad (23.4)$$

Здесь F_l^{ct} и E_l^{cm} – проекции векторов сторонней силы и напряженности поля сторонних сил на направление элементарного перемещения dl . Соответственно, ЭДС, действующая на участке $1—2$ цепи

$$\varepsilon_{12} = \int_{12} E_l^{cm} dl . \quad (23.5)$$

ЭДС, действующая в замкнутой цепи, определяется криволинейным интегралом по замкнутому пути L

$$\varepsilon = \oint_L E_l^{cm} dl . \quad (23.6)$$

Интеграл (23.6) называется *циркулирующей напряженности* по замкнутому контуру L . Таким образом, ЭДС, действующая в замкнутой цепи, равна циркуляции вектора напряженности поля сторонних сил.

Кроме сторонних сил, на носители тока действуют также кулоновские силы электростатического поля. Внутри проводника с током напряженность \mathbf{E} электрического поля по принципу суперпозиции равна

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^{кул} + \mathbf{E}^{ct} , \quad (23.7)$$

где, соответственно, $\mathbf{E}^{кул}$ и \mathbf{E}^{ct} – напряженности электростатического поля кулоновских сил и поля сторонних сил.

Следовательно, результирующая сила, действующая в каждой точке цепи на заряд q , равна

$$\mathbf{F} = q (\mathbf{E}^{кул} + \mathbf{E}^{ct}) . \quad (23.8)$$

Работа, совершаемая результирующей силой над зарядом q на участке $1—2$ цепи, определяется выражением

$$A_{12} = \int_{12} E_l^{кул} dl + \int_{12} E_l^{cm} dl = q(\varphi_1 - \varphi_2) + q\varepsilon_{12} . \quad (23.9)$$

Величина, численно равная работе, совершаемой как электростатическими, так и сторонними силами при перемещении вдоль цепи из точки 1 в точку 2 единичного положительного заряда называется **напряжением** U на данном участке цепи. Согласно формуле (23.9)

$$U_{12} = (\varphi_1 - \varphi_2) + \varepsilon_{12} . \quad (23.10)$$

Участок цепи, на котором не действуют сторонние силы, называется *однородным*. Участок, на котором действуют сторонние силы, называется *неоднородным*. Для однородного участка

$$U_{12} = (\varphi_1 - \varphi_2) , \quad (23.11)$$

т. е. напряжение совпадает с разностью потенциалов на концах участка цепи.

§ 24. Закон Ома для однородного участка цепи. Электрическое сопротивление проводника

Рассмотрим однородный участок цепи, т.е. участок, не содержащий ЭДС, потенциалы концов которого равны соответственно φ_1 и φ_2 (рис. 24.1).

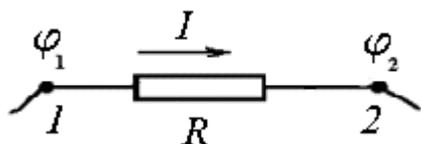


Рис. 24.1.

Согласно закону, экспериментально установленному немецким физиком Г.Омом, *сила тока, текущего по однородному металлическому проводнику, прямо пропорциональна напряжению U на концах проводника:*

$$I = \frac{1}{R}U = \frac{1}{R}(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (24.1)$$

Величина R в формуле закона Ома называется *электрическим сопротивлением проводника*. Единицей сопротивления служит ом (Ом), равный сопротивлению такого проводника, в котором при напряжении в 1 В течет ток силой 1 А: 1 Ом = 1 В/1 А.

Электрическое сопротивление (при не очень больших токах) зависит от размеров и формы проводника, а также от свойств материала, из которого он сделан. Для однородного проводника с постоянным сечением

$$R = \rho \frac{l}{S}, \quad (24.2)$$

где l - длина проводника, S - площадь его поперечного сечения, ρ - зависящий от свойств материала коэффициент, называемый *удельным электрическим сопротивлением* вещества. Удельное сопротивление ρ - это сопротивление проводника длиной $l = 1$ м и площадью поперечного сечения $S = 1$ м². Измеряется ρ в ом·метрах (Ом·м).

Выделим мысленно в проводнике элементарный цилиндрический объем с образующими, параллельными векторам \mathbf{j} и \mathbf{E} (рис. 24.2).

Согласно формуле (24.2) сопротивление цилиндра равно $\rho dl/dS$. Через поперечное сечение цилиндра течет ток силы $j dS$. Напряжение, приложенное к цилиндру, равно $E dl$.

Подстановка этих значений в формулу (24.1) дает, что

$$j dS = \frac{dS}{\rho dl} E dl,$$

откуда

$$j = \frac{1}{\rho} E. \quad (24.3)$$

Поскольку дрейфовая скорость носителей тока создается электрическим полем, имеет место пропорциональность $\mathbf{u} \sim \mathbf{E}$, так что и плотность тока будет пропорциональна вектору напряженности.

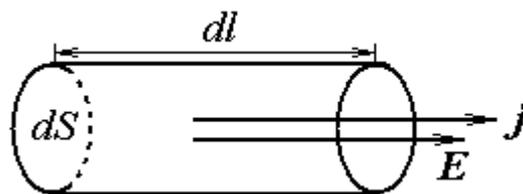


Рис. 24.2.

Векторы \mathbf{j} и \mathbf{E} имеют одинаковое направление. Поэтому можно написать

$$\mathbf{j} = \frac{1}{\rho} \mathbf{E} = \sigma \mathbf{E}. \quad (24.4)$$

Эта формула выражает **закон Ома в дифференциальной форме**. Он связывает в каждой точке проводника плотность тока с напряженностью электрического поля. *Плотность тока в данной точке проводника прямо пропорциональна напряженности электрического поля в этой точке.*

Обратная удельному сопротивлению ρ величина $\sigma = 1/\rho$ называется *удельной электрической проводимостью (электропроводностью)* вещества. Единица, обратная Ому, называется сименсом (См). Следовательно, единицей электропроводности σ является сименс на метр (См/м).

Остановимся на механизме осуществления постоянного тока. Как известно из электростатики (см. § 14), при равновесии зарядов поле неподвижных зарядов внутри проводника равно нулю, а у его поверхности вектор \mathbf{E} напряженности поля направлен по нормали к поверхности. Наличие тока в проводнике означает, что вдоль проводника потенциал электрического поля изменяется. Следовательно, в проводниках при наличии тока электрическое поле не равно нулю, оно существует и внутри проводника с током. На поверхности проводника существует тангенциальная составляющая напряженности электрического поля в направлении тока. Чем же создается это поле?

Роль источника тока состоит в том, чтобы разделять положительные и отрицательные заряды. После разделения заряды перемещаются на полюса источника и по закону Кулона действуют на заряды проводника вблизи полюсов, которые в свою очередь действуют на другие заряды и т. д. На место уходящих зарядов непрерывно поступают новые.

В результате этих коллективных взаимодействий *в цепи на поверхности проводников возникает такое **распределение движущихся зарядов**, которое обеспечивает существование внутри проводников электрического поля.*

Таким образом, источниками электрического поля, которое существует в проводнике и обеспечивает наличие постоянного тока, являются *поверхностные заряды*. Они распределяются на поверхности проводников под действием зарядов на полюсах источника тока.

Поскольку взаимодействие между зарядами осуществляется посредством электромагнитных сил, процесс образования постоянного тока в цепи после ее замыкания характеризуется скоростью распространения электромагнитных волн, зависящей от распределения емкостей, индуктивностей и других характеристик цепи. В свободном пространстве скорость распространения электромагнитных взаимодействий равна скорости света.

Опыт показывает, что удельное сопротивление, а следовательно, и сопротивление металлов, зависит от температуры, линейно увеличиваясь для большинства металлов с ее ростом:

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 (1 + \alpha t), \\ R &= R_0 (1 + \alpha t), \end{aligned} \quad (24.5)$$

где ρ_0, ρ - удельные сопротивления вещества проводника соответственно при 0°C и $t^\circ\text{C}$; R_0, R — сопротивления проводника при 0°C и $t^\circ\text{C}$, α — температурный коэффициент сопротивления, который численно равен относительному изменению сопротивления проводника при изменении его температуры на 1 кельвин:

$$\alpha = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dT}. \quad (24.6)$$

Для чистых металлов при не очень низких температурах $\alpha \approx (1/273) \text{ K}^{-1}$, т.е. можно записать

$$R = \alpha R_0 T. \quad (24.7)$$

Температурная зависимость сопротивления проводника объясняется тем, что при повышении температуры возрастает интенсивность рассеивания (число столкновений) свободных электронов на ионах кристаллической решетки.

Зависимость сопротивления металлов от температуры используют в *термометрах сопротивления*. Обычно в качестве термометрического тела такого термометра берут платиновую проволоку, зависимость сопротивления которой от температуры достаточно изучена. Об изменениях температуры судят по изменению сопротивления проволоки, которое можно измерить. Такие термометры позволяют измерять очень низкие и очень высокие температуры, когда обычные жидкостные термометры непригодны.

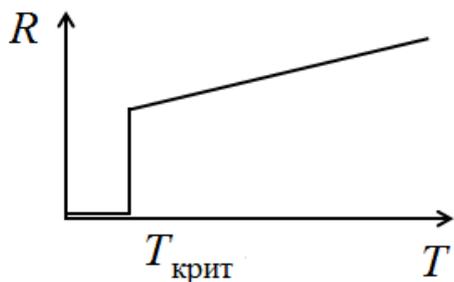


Рис.24.3

При определенных температурах (0,012 - 20 К), называемых «критическими», и при значениях напряженности магнитного поля (внешнего или сопутствующего току), меньшего определенного «критического» значения, сопротивление некоторых металлов скачком уменьшается практически до нуля (рис. 24.3), и металл переходит в сверхпроводящее состояние. Впервые в 1911 г. это обнаружил Г. Камерлинг-Оннес для ртути.

Сверхпроводимость характеризуется не только почти полным исчезновением электрического сопротивления образца, но и одновременным изменением его магнитных и тепловых свойств. Вследствие отсутствия сопротивления в сверхпроводниках можно получать очень большие токи без выделения теплоты.

В настоящее время сверхпроводимость обнаружена у многих металлов, сплавов и соединений. Разработаны керамики, переходящие в сверхпроводящее состояние при температурах превышающих 100 К, так называемые высокотемпературные сверхпроводники.

§ 25. Последовательное и параллельное соединение проводников

При *последовательном соединении* (рис. 25.1) согласно закону сохранения заряда через сопротивления проходит за одно и то же время одинаковый заряд. Поэтому сила тока во всех сопротивлениях одинакова

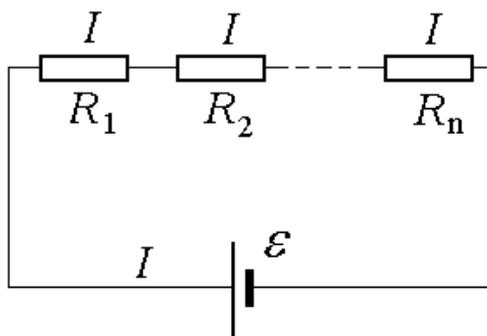


Рис. 25.1.

$$I_1 = I_2 = \dots = I_n = I_1. \quad (25.1)$$

Сумма падений напряжения на всех сопротивлениях равна напряжению на концах цепи:

$$U_1 + U_2 + \dots + U_n = (\varphi_1 - \varphi_2) + (\varphi_2 - \varphi_3) + \dots + (\varphi_{n-1} - \varphi_n) = \varphi_1 - \varphi_n = U. \quad (25.2)$$

Для каждого из напряжений по закону Ома можно записать

$$U_1 = I_1 R_1, \quad U_2 = I_2 R_2, \quad \dots, \quad U_n = I_n R_n. \quad (25.3)$$

Тогда

$$U = I_1 R_1 + I_2 R_2 + \dots + I_n R_n = I (R_1 + R_2 + \dots + R_n). \quad (25.4)$$

С другой стороны, $U = I R_{\text{посл}}$.

Следовательно, при последовательном соединении полное сопротивление цепи равно сумме отдельных сопротивлений,

$$R_{\text{посл}} = \sum_{i=1}^n R_i, \quad (25.5)$$

а падение напряжения на них пропорционально этим сопротивлениям.

При **параллельном соединении** (рис. 25.2) напряжение на участке AB будет одинаково для всех сопротивлений

$$U_1 = U_2 = U_3 = \dots = U_n. \quad (25.6)$$

Из закона сохранения заряда следует, что сила тока на входе и на выходе равна сумме сил токов в отдельных ветвях параллельной цепи

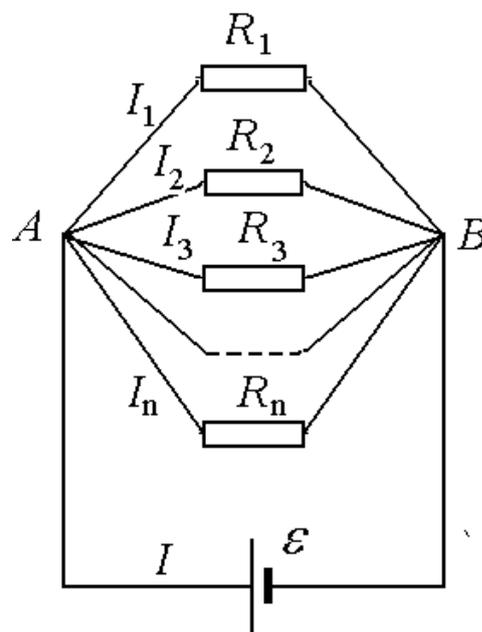


Рис.25.2.

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + \dots + I_n =$$

$$= \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \frac{U}{R_3} + \dots + \frac{U}{R_n} = U \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots + \frac{1}{R_n} \right). \quad (25.7)$$

С другой стороны, для всего участка справедливо соотношение

$$I = \frac{U}{R_{\text{паралл}}},$$

где $R_{\text{паралл}}$ – общее сопротивление цепи при параллельном соединении. Сравнивая обе формулы, получаем

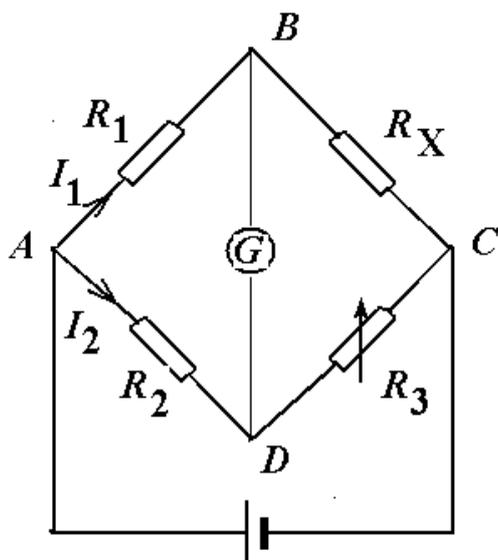


Рис. П. 25.1

$$\frac{1}{R_{\text{паралл}}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i} . \quad (25.8)$$

При параллельном соединении проводников величина, обратная общему сопротивлению цепи, равна сумме величин, обратных сопротивлениям параллельно включенных проводников.

При этом ток в отдельных сопротивлениях обратно пропорционален этим сопротивлениям.

Пример 25.1. Мост Уитстона. Для точного измерения сопротивлений используются методы сравнения сопротивлений, не требующие измерений тока и напряжения, в основу которых положена мостовая схема Уитстона (рис. П 25.1).

Мост состоит из четырех сопротивлений R_1, R_2, R_3, R_X , одно из которых R_X неизвестно и которое необходимо измерить.

На одну из диагоналей моста AC подается напряжение от источника питания, в другую диагональ BD включен нулевой индикатор G (чувствительный гальванометр).

Регулируя сопротивление одного из плеч R_3 , добиваются равновесия моста, при котором ток в диагонали с нулевым индикатором равен нулю.

Пусть в уравновешенном мосту через сопротивления R_1 и R_X проходит одинаковый ток I_1 , а через R_2 и R_3 – тоже одинаковый ток I_2 . Так как разность потенциалов между точками B и D равна нулю, то напряжения на сопротивлениях R_1 и R_2 являются одинаковыми,

$$I_1 R_1 = I_2 R_2 \quad (П.25.1)$$

и напряжения на сопротивлениях R_X и R_3 являются также одинаковыми:

$$I_1 R_X = I_2 R_3 . \quad (П.25.2)$$

Разделив равенства (П.25.1) и (П.25.2) друг на друга, получаем

$$\frac{R_1}{R_X} = \frac{R_2}{R_3} .$$

Отсюда

$$R_X = R_3 \frac{R_1}{R_2} . \quad (П.25.3)$$

Зная значение R_3 и отношение сопротивлений R_1 и R_2 , соответствующие условию равновесия, можно вычислить R_X .

Для удобства уравновешивания моста и упрощения вычислений по формуле (П.25.3) отношение (R_1/R_2) фиксируют и заранее точно измеряют (например, 0,001; 0,01; 0,1; 1; 10; 100; 1000). Балансировку моста осуществляют с помощью только одного переменного сопротивления R_3 (обычно используют магазины сопротивлений). Промышленные мосты постоянного тока позволяют измерять сопротивления от 10^{-6} до 10^{14} Ом с очень высокой точностью.

§ 26. Работа, мощность и тепловое действие тока. Закон Джоуля – Ленца

При прохождении тока, т.е. при упорядоченном перемещении зарядов **кулоновские и сторонние силы** выполняют работу. Эту работу называют *работой электрического тока*.

Определим работу тока в случае **однородного участка** цепи, т.е. участка, **не содержащего ЭДС** (рис. 24.1).

По определению напряжение U между двумя точками проводника в случае однородного участка цепи численно равно работе кулоновских сил по перемещению единицы заряда вдоль проводника между этими точками. Тогда при перенесении заряда $dq = I dt$ выполняется **элементарная работа электрического тока**

$$dA = dq U = IU dt.$$

При постоянном токе силой I за конечный промежуток времени t работа электрического тока

$$A = IU \int_0^t dt = IU t = I^2 R t = \frac{U^2}{R} t. \quad (26.1)$$

Мощность тока определяется работой, совершаемой за единицу времени:

$$P = \frac{dA}{dt} = IU = I^2 R = \frac{U^2}{R}. \quad (26.2)$$

Сталкиваясь с ионами кристаллической решетки металла, носители тока – электроны – передают им свою энергию, которую получают от поля. Поэтому работа поля над зарядами переходит в энергию теплового движения ионов металла, т.е. происходит нагревание проводника. Если ток проходит по неподвижному металлическому проводнику, и в нем не происходит химических превращений, то по закону сохранения энергии количество выделившейся теплоты Q равно работе тока A :

$$Q = IU t = I^2 R t = \frac{U^2}{R} t. \quad (26.3)$$

Эта формула выражает **закон Джоуля – Ленца**, который был установлен Дж. Джоулем и независимо от него Э.Х. Ленцем **опытным путем**: *количество теплоты, которое выделяется в проводнике с током, прямо пропорционально квадрату силы тока, сопротивлению проводника и времени прохождения тока через проводник.*

Если сила тока изменяется со временем, т.е. $I = I(t)$, то количество теплоты, выделившееся за время t , вычисляется по формуле

$$Q = \int_0^t I^2 R dt. \quad (26.4)$$

Работа и мощность электрического тока измеряется в тех же единицах, что и механическая работа, т.е. в СИ в джоулях:

$$1 \text{ Дж} = 1 \text{ В} \cdot 1 \text{ А} \cdot 1 \text{ с},$$

$$1 \text{ Вт} = 1 \text{ Дж/с} = 1 \text{ В} \cdot 1 \text{ А}.$$

Часто используются кратные единицы: 1 кВт (киловатт) = 10^3 Вт, 1 МВт (мегаватт) = 10^6 Вт. Для работы используется внесистемная единица 1 кВт·ч (киловатт-час) – работа, совершаемая за 1 час при развиваемой мощности 1 кВт. $1 \text{ кВт} \cdot \text{ч} = 3,6 \text{ МДж}$.

Формула (26.3) выражает суммарное количество теплоты, которое выделилось в проводнике сопротивлением R . Эта теплота выделяется по всему объему проводника. Найдем количество теплоты, выделяемое в единице объема. Для этого снова рассмотрим участок однородного проводника в виде цилиндра длиной dl и неизменного поперечного сечения dS (рис. 24.2). Согласно закону Джоуля – Ленца за время dt в этом объеме выделится теплота

$$dQ = I^2 R dt = (jdS)^2 \frac{\rho dl}{dS} dt = \rho j^2 dV dt, \quad (26.5)$$

где $dV = dS dl$ – величина элементарного объема. Разделив последнее выражение на $dV dt$, найдем количество теплоты, выделившееся в единице объема в единицу времени (*плотность тепловой мощности*)

$$w = \rho j^2. \quad (26.6)$$

Приняв во внимание закон Ома в дифференциальной форме $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$, и выражение для удельной электропроводности $\sigma = \frac{1}{\rho}$, формулу (26.6) можно представить в виде

$$w = \sigma E^2. \quad (26.7)$$

Выражение (26.7) называется **законом Джоуля – Ленца в дифференциальной форме**. Плотность тепловой мощности прямо пропорциональна квадрату напряженности электрического поля в данной точке проводника.

Пример 26.1. Сила тока в проводнике сопротивлением $R = 10$ Ом равномерно возрастает за время $\Delta t = 4$ с от $I_0 = 0$ до $I_{\max} = 8$ А. Определить : 1) количество теплоты, которое выделилось в проводнике за первые $t_1 = 3$ с; 2) количество электронов, которые прошли через поперечное сечение проводника за это время.

Закон Джоуля – Ленца в виде $Q = I^2 R t$ справедлив для постоянного тока. Если же сила тока в проводнике изменяется, то этот закон справедлив только для бесконечно малого промежутка времени, в течение которого ток можно считать постоянным

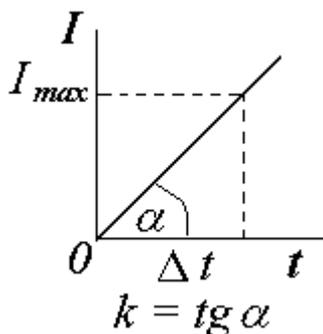


Рис. П. 26.1.

$$dQ = I^2 R dt. \quad (\text{П.26.1})$$

По условию задачи сила тока равномерно возрастает, поэтому закон изменения силы тока можно записать в виде $I = kt$, где k – коэффициент пропорциональности, численно равный тангенсу угла наклона прямой (рис. П 26.1)

$$k = \frac{I_{\max}}{\Delta t} = \frac{8 \text{ А}}{4 \text{ с}} = 2 \frac{\text{А}}{\text{с}}. \quad (\text{П. 26.2})$$

Тогда

$$dQ = k^2 t^2 R dt. \quad (\text{П. 26.3})$$

Для определения количества теплоты, которая выделилась за конечный промежуток времени, выражение (П. 26.3) необходимо проинтегрировать. За первые t_1 секунд выделится количество теплоты

$$Q = \int_0^{t_1} k^2 t^2 R dt = k^2 R \int_0^{t_1} t^2 dt = \frac{k^2 R t_1^3}{3}. \quad (\text{П. 26.4})$$

Подставляя числовые значения, найдем $Q = 360$ Дж.

По определению сила тока равна заряду, который переносится в единицу времени через поперечное сечение проводника:

$$I = \frac{dq}{dt}.$$

Тогда заряд q , который прошел за время t_1 , равен

$$q = \int_0^{t_1} I dt = k \int_0^{t_1} t dt = k \frac{t_1^2}{2}. \quad (\text{П. 26.5})$$

Разделим заряд q на элементарный заряд e и получим количество электронов, прошедших через поперечное сечение,

$$N = \frac{q}{e} = \frac{k t_1^2}{2e} = \frac{2 \cdot 3^2}{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} = 5,63 \cdot 10^{19} \text{ электронов}. \quad (\text{П. 26.6})$$

Пример 26.2. По нихромовому проводнику ($\rho = 1,1 \cdot 10^{-6}$ Ом·м) длиной $l = 2$ м и площадью поперечного сечения $S = 0,4$ мм² идет ток. При этом ежесекундно выделяется количество теплоты $Q = 3,52$ Дж. Определить плотность тока.

Согласно (26.6) закон Джоуля – Ленца в дифференциальной форме может быть представлен в виде

$$w = \rho j^2,$$

где w – плотность тепловой мощности, ρ – удельное сопротивление проводника, j – плотность тока.

По определению плотность тепловой мощности представляет собой количество теплоты, выделяемое в единице объема в единицу времени:

$$w = \frac{Q}{V \cdot t} = \frac{Q}{S l t}.$$

Тогда плотность тока

$$j = \sqrt{\frac{w}{\rho}} = \sqrt{\frac{Q}{S l t \rho}} = \sqrt{\frac{3,52}{0,4 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 1,1 \cdot 10^{-6}}} = 2 \cdot 10^6 \left(\frac{A}{m^2} \right) = 2 \frac{A}{mm^2}.$$

§ 27. Закон Ома для неоднородного участка цепи

Рассмотрим теперь *неоднородный*, т.е. такой, на котором действуют также и сторонние силы, *участок* электрической цепи с током. Так как на участке цепи находится источник тока (рис. 27.1), то при переносе заряда dq работу совершают как кулоновские, так и сторонние силы.

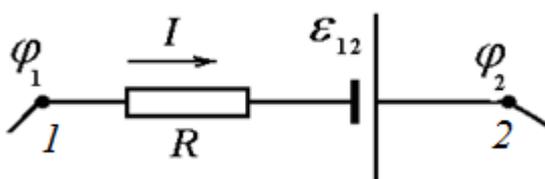


Рис. 27.1.

По определению напряжением U_{12} на участке цепи называется физическая величина, численно равная работе, совершаемой результирующим полем кулоновских и сторонних сил при перемещении из

точки 1 в точку 2 единичного положительного заряда

$$U_{12} = (\varphi_1 - \varphi_2) + \varepsilon_{12}.$$

Тогда полная работа, совершаемая как сторонними, так и кулоновскими силами по перемещению заряда $dq = Idt$ – работа тока на рассматриваемом участке цепи – будет равна:

$$dA = dq U_{12} = I (\varphi_1 - \varphi_2) dt + I \varepsilon_{12} dt. \quad (27.1)$$

Если ток постоянный, а проводник неподвижный, единственной формой энергии, в которую преобразовывается совершенная над зарядом работа dA , является теплота dQ , выделившаяся на участке

$$dQ = I^2 R dt = IR Idt = IR dq, \quad (27.2)$$

и, поскольку

$$dA = dQ,$$

получаем

$$(\varepsilon_{12} + (\varphi_1 - \varphi_2))dq = IR dq,$$

откуда следует **закон Ома для неоднородного участка цепи**

$$I = \frac{\varepsilon_{12} + (\varphi_1 - \varphi_2)}{R} = \frac{U_{12}}{R}. \quad (27.3)$$

Сила тока в проводнике прямо пропорциональна напряжению между концами рассматриваемого участка цепи.

В формуле (27.3) сила тока и ЭДС – величины алгебраические. Сила тока положительна, если ток течет в направлении от конца 1 проводника к концу 2. Скалярную величину ЭДС ε_{12} берут со знаком «плюс», если она способствует движению положительных зарядов в направлении $1 \rightarrow 2$, и со знаком «минус», если препятствует.

Из формулы (27.3) следует, что ЭДС источника равна напряжению на его зажимах при разомкнутой цепи.

§ 28. Закон Ома для замкнутой цепи

Если соединить концы 1 и 2 неоднородного участка цепи (рис. 27.1), то их потенциалы выровняются ($\varphi_1 = \varphi_2$) и образуется замкнутая цепь (рис. 28.1). Обозначим через R сопротивление внешней части цепи (сопротивление проводника, подключенного к полюсам источника тока), а

через r – внутреннее сопротивление источника тока.

В этом случае из (27.3) получаем **закон Ома для замкнутой цепи**

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r}. \quad (28.1)$$

Как видно из формулы (28.1), падение напряжения на внешней цепи сопротивлением R , т.е. напряжение на полюсах источника тока

$$U = IR = \varepsilon - Ir, \quad (28.2)$$

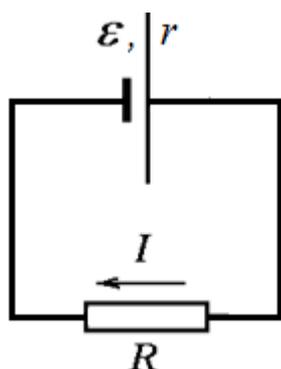


Рис. 28.1.

где $I r$ – падение напряжения внутри источника тока.

Если соединить клеммы источника накоротко, то $R = 0$ (случай *короткого замыкания*). Тогда

$$I_{к.з.} = \frac{\varepsilon}{r} = I_{\max}, U = IR = 0. \quad (28.3)$$

Если *цепь разомкнута*, внешнее сопротивление $R = \infty$. Тогда ток $I = \frac{\varepsilon}{\infty} = 0$ и по формуле (28.2) напряжение

$$U = \varepsilon. \quad (28.4)$$

Следовательно, ЭДС численно равна напряжению на клеммах разомкнутого источника.

Для замкнутой электрической цепи $\varphi_1 = \varphi_2$ и работа электрических сил равна нулю. Поэтому в замкнутой цепи совершает работу только приложенная ЭДС (см формулу (27.1)).

$$dA = I \varepsilon dt. \quad (28.5)$$

Используя закон Ома для замкнутой цепи (28.1), для работы постоянного тока за конечный промежуток времени t получим

$$A = I \varepsilon t = \frac{\varepsilon^2}{R + r} t = I^2 (R + r) t. \quad (28.6)$$

Уравнения (28.6) выражают *работу источника тока* во всей цепи. Она состоит из двух частей : работы внутри источника $I^2 r t$ (бесполезная работа) и работу на внешнем участке $I^2 R t$ (полезная работа).

Соответственно, полная мощность источника

$$P = I \varepsilon = \frac{\varepsilon^2}{R + r} = I^2 (R + r), \quad (28.7)$$

и мощность, которую поглощает потребитель (полезная)

$$P_{\text{полезн}} = IU = I^2 R = \frac{\varepsilon^2 R}{(R + r)^2}. \quad (28.8)$$

Коэффициент полезного действия η источника тока определяется как отношение полезной мощности к полной

$$\eta = \frac{P_{\text{полезн}}}{P} = \frac{R}{R + r}. \quad (28.9)$$

Пример 28.1. Как видно из (28.9), режим работы источника при заданных значениях ε и r зависит от сопротивления потребителя R . Исследуем полученное выражение.

1. При $R = 0$ (короткое замыкание) $P_{\text{полезн}} = 0$, $P = \frac{\varepsilon^2}{R}$, $I = \frac{\varepsilon}{r}$, $\eta = 0$. Сила тока и об-
щая мощность будут максимальными, но полезная мощность и КПД будут равны нулю. Вся развиваемая мощность расходуется на нагрев источника и может привести к его разрушению.

2. Существует оптимальное значение R , при котором источник отдает максимальную мощность потребителю. Для определения этого сопротивления можно исследовать на максимум функцию $P_{\text{полезн}}(R)$, заданную уравнением (28.8).

Получим

$$\frac{dP_{\text{полезн}}}{dR} = \varepsilon^2 \frac{r^2 - R_m^2}{(r + R_m)^2} = 0,$$

откуда, учитывая, что r и R всегда положительны, имеем

$$R_m = r. \quad (\text{П.28.1})$$

Т.е. оптимальная нагрузка данного источника тока равна внутреннему сопротивлению этого источника. При этих условиях

$$P_{\text{полезнmax}} = \frac{\varepsilon^2}{4r}, \quad P = \frac{\varepsilon^2}{2r}, \quad \eta = 0,5. \quad (\text{П.28.2})$$

3. Если $R \gg r$, то $I \approx \frac{\varepsilon}{R}$

$$P_{\text{полезн}} \approx \frac{\varepsilon^2}{R}, \quad P \approx \frac{\varepsilon^2}{R}, \quad \eta \rightarrow 1. \quad (\text{П.28.3})$$

Сила тока в цепи мала, полезная и общая мощности также малы, но КПД максимальный.

На рис. П. 28.1 показаны зависимости мощности источника P , мощности во внешней цепи $P_{\text{полезн}}$ и КПД источника η от силы тока I .

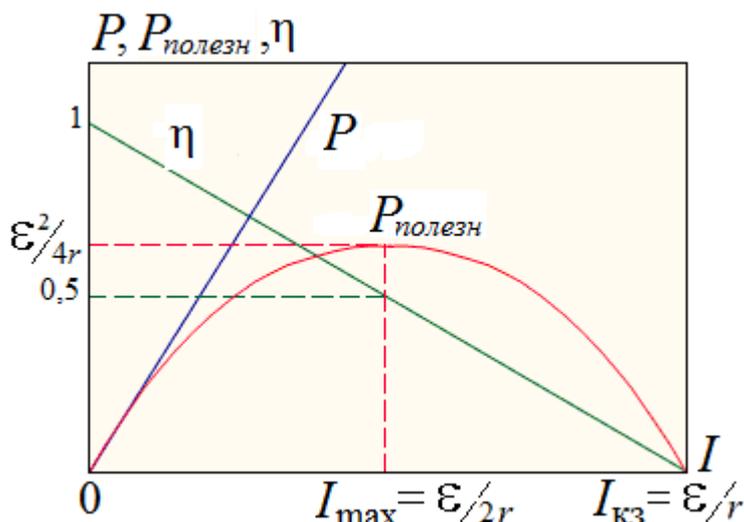


Рис. П. 28.1.

§ 29. Правила Кирхгофа

Правила Кирхгофа позволяют определять силу и направление тока в любой части разветвленной цепи, если известны сопротивления и ЭДС.

Первое правило Кирхгофа относится к узлам, т.е. к таким точкам в разветвленной цепи, в которых сходится не менее трех проводников (рис. 29.1).

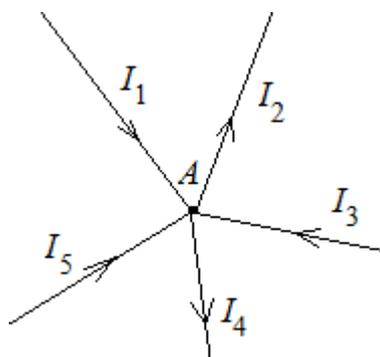


Рис. 29.1.

Первое правило Кирхгофа является следствием закона сохранения заряда и требования, чтобы в цепи постоянного тока ни в одной точке проводника не накапливались и не уменьшались заряды, а потенциал любой точки цепи оставался неизменным.

Если условиться считать подходящие к узлу токи положительными, а исходящие из узла – отрицательными, то можно сказать, что **алгебраическая сумма сил токов, сходящихся в узле, равна нулю**, т.е. количество зарядов, приходящих в данную точку в единицу времени, равно количеству зарядов, уходящих из данной точки за то же время:

$$\sum_{k=1}^l I_k = 0, \quad (29.1)$$

где l – число сходящихся в узле токов.

На рис. 29.1 в узле сходятся пять проводников с токами. Первое правило Кирхгофа для этого узла:

$$I_1 - I_2 + I_3 - I_4 + I_5 = 0.$$

Рассмотрим произвольную разветвленную цепь, часть которой изображена на рис. 29.2, A, B и C — точки разветвления.

Второе правило Кирхгофа относится к произвольным замкнутым контурам, которые можно мысленно выделить в рассматриваемой разветвленной цепи (например, контур ABC на рис. 29.2).

Правило контуров получается в результате применения закона Ома для неоднородного участка цепи (27.3) к различным участкам замкнутой цепи. Пользуясь правилом знаков, установленным в § 27, для каждого из трех неоднородных участков цепи рис. 29.2 можно записать:

$$-I_1 R_1 = \varphi_A - \varphi_B - \varepsilon_1,$$

$$I_2 R_2 = \varphi_B - \varphi_C - \varepsilon_2,$$

$$I_3 R_3 = \varphi_C - \varphi_A + \varepsilon_3.$$

Если сложить эти равенства, потенциалы взаимно уничтожатся и получится

$$-I_1 R_1 + I_2 R_2 + I_3 R_3 = -\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3.$$

В общем случае для всякого замкнутого контура можно записать

$$\sum_{i=1}^n I_i R_i = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i, \quad (29.2)$$

где n — число отдельных участков, на которые контур разбивается узлами (на рис. 29.2 $n=3$).

Это уравнение выражает второе правило Кирхгофа: **в любом замкнутом контуре, выбранном в разветвленной электрической цепи, алгебраическая сумма произведений сил токов I_i на сопротивления R_i соответствующих участков контура равна алгебраической сумме ЭДС в контуре.**

Перед составлением уравнений по правилам Кирхгофа необходимо:

- 1) выбрать направления токов, указав их стрелками на чертеже;
- 2) выбрать направление обхода контуров (по часовой стрелке или против нее).

Оба направления можно выбирать *произвольно*, но их следует зафиксировать и при составлении уравнений придерживаться.

Наибольшие трудности при составлении уравнений вызывают **правила знаков**.

1. **Положительными считаются токи**, которые совпадают с направлением обхода, соответствующее произведение IR входит в уравнение со знаком

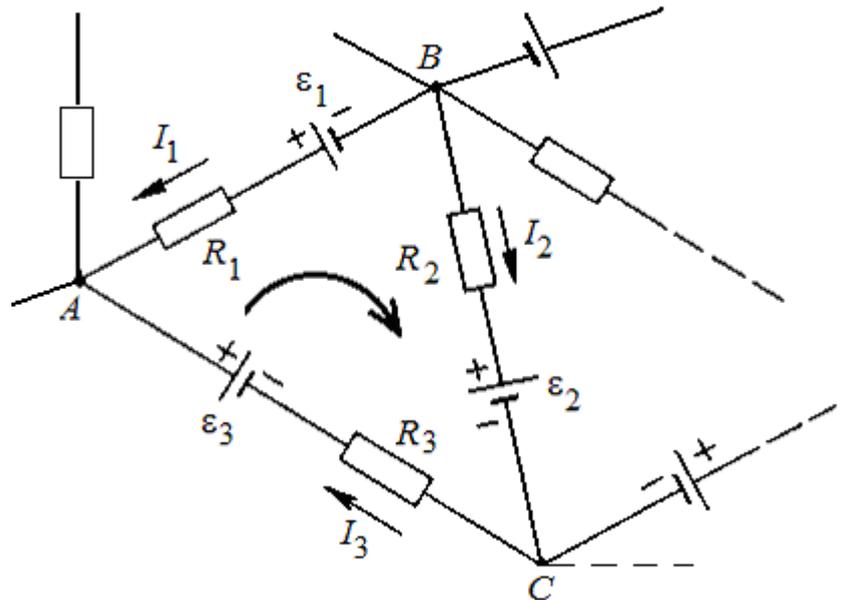


Рис. 29.2.

плюс (I_2 и I_3 на рис. 29.2). **Отрицательными считаются токи**, направления которых противоположны направлению обхода контура (I_1 на рис. 29.2).

2. ЭДС источников берутся **со знаком плюс**, если они создают токи, направление которых совпадают с направлением обхода контура (ε_3 на рис. 29.2), другими словами, такие, которые в направлении обхода проходятся от отрицательного полюса к положительному. В противном случае ЭДС берутся **со знаком минус** (ε_1 и ε_2 на рис. 29.2).

Число независимых уравнений, составляемых по первому и второму правилам Кирхгофа, должно равняться числу неизвестных величин, например, токов, текущих в разных звеньях цепи.

Чтобы избежать составления лишних уравнений, являющихся простой комбинацией уже составленных, следует выбирать каждый новый контур таким образом, чтобы он содержал хотя бы один элемент, который не содержится в предыдущих контурах.

Теперь можно сформулировать **порядок расчета** сложных цепей.

1. Обозначить на схеме токи во всех неразветвленных участках, произвольно задавая им направление.

2. Согласно первому правилу Кирхгофа написать уравнения (29.1) для всех узлов, кроме одного (уравнение для последнего узла является следствием предыдущих). Для m узлов записывается $(m - 1)$ независимых уравнений первого правила Кирхгофа.

3. Выделить всевозможные замкнутые контуры. Условиться о направлении обхода.

4. Согласно второму правилу Кирхгофа составить уравнение (29.2) для всех простых контуров, которые можно выделить в данной цепи и которые не получаются наложением уже рассмотренных. В разветвленной цепи, содержащей p участков между соседними узлами (ветвей) и m узлов, имеется $(p - m + 1)$ независимых уравнений второго правила Кирхгофа.

5. Решить систему линейных алгебраических уравнений, общее число которых равно числу неизвестных (например, токов).

6. Если в результате решения получившейся системы уравнений какие-либо токи окажутся отрицательными, то в действительности их направления противоположны выбранным на схеме.

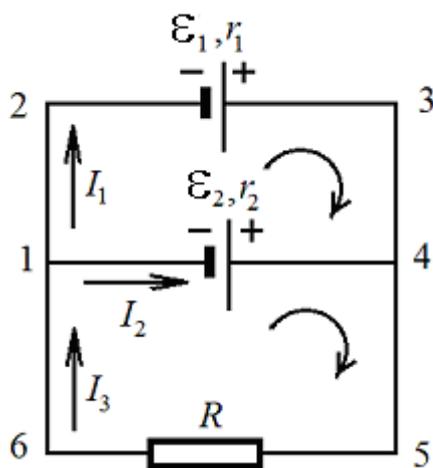


Рис. П.29.1

Пример 29.1. Два источника тока с ЭДС и внутренними сопротивлениями, равными соответственно $\varepsilon_1 = 10$ В, $r_1 = 1$ Ом и $\varepsilon_2 = 8$ В, $r_2 = 2$ Ом, соединены с реостатом ($R = 6$ Ом), как показано на рис. П. 29.1. Определить силу тока на всех участках цепи.

Обозначим токи в неразветвленных участках цепи через I_1 , I_2 , I_3 и зададим им предположительные направления, как указано на рис. П 29.1.

Рассматриваемая схема имеет два узла: 1 и 4. Но составлять уравнения по первому правилу Кирхгофа следует только для одного узла, т.к. уравнение, составленное для второго узла, будет следствием первого.

Составим уравнение для токов в узле 1, пользуясь правилом: ток, подходящий к узлу, входит в уравнение со знаком плюс, отходящий от узла – со знаком минус.

$$-I_1 - I_2 + I_3 = 0. \quad (\text{П.29.1})$$

Теперь составим уравнения для контуров. Выберем два простых контура, например, следующим образом: 12341 и 14561. Условимся обходить контуры по часовой стрелке. Обходя эти контуры, получаем следующие уравнения:

$$I_1 r_1 - I_2 r_2 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2. \quad (\text{П.29.2})$$

$$I_2 r_2 + I_3 R = \varepsilon_2. \quad (\text{П.29.3})$$

Рассмотрение же контура 1234561 не вносит ничего нового, так как даст уравнение, являющееся следствием двух предыдущих.

Мы получили систему (П.29.1 – П.29.3) из трех уравнений с тремя неизвестными токами. Подставим числовые значения:

$$-I_1 - I_2 + I_3 = 0,$$

$$I_1 - 2I_2 = 10 - 8,$$

$$2I_2 + 6I_3 = 8.$$

Решая систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными любым способом, например методом исключения, получим

$$I_1 = 1,6 \text{ А}, \quad I_2 = -0,2 \text{ А}, \quad I_3 = 1,4 \text{ А}.$$

Второй ток получился отрицательным. Значит, на самом деле направление тока обратно выбранному на рисунке.

§ 30. Элементы классической электронной теории электропроводности металлов

Классическая (в смысле некантовая) электронная теория проводимости металлов была создана П.Друде и Г.Лоренцем. Она объясняет высокую электропроводность металла наличием огромного числа электронов проводимости, которые хаотически перемещаются в объеме металла.

При образовании кристаллической решетки металла часть валентных электронов отрывается от своих атомов. Электроны, как принято говорить, обобществляются, они не принадлежат теперь никакому конкретному иону металла и могут свободно перемещаться под действием внешнего электрического поля, образуя электрический ток.

Металлический кристалл можно представить в виде пространственной решетки из положительных ионов, погруженной в «электронный газ» (рис. 30.1). Этот газ свободных электронов заполняет кристаллическую решетку и компенсирует силы взаимного электростатического отталкивания положительных ионов и тем самым связывает их в твердое тело.

В классической электронной теории металлов предполагается, что движение электронов подчиняется законам классической механики.

Электроны проводимости образуют в металле

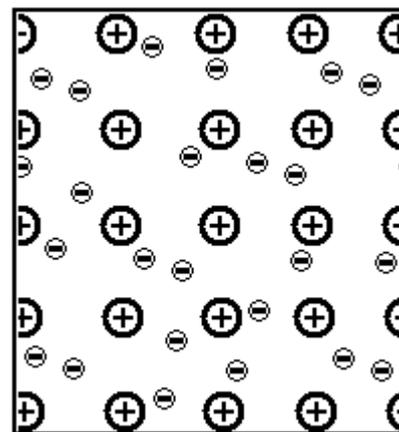


Рис. 30.1.

электронный газ, который имеет свойства одноатомного газа и подчиняется законам статистики Максвелла-Больцмана. При хаотическом движении электроны сталкиваются с ионами кристаллической решетки, которые, в свою очередь, совершают беспорядочные тепловые колебания около положений равновесия – узлов кристаллической решетки (взаимодействием электронов между собой пренебрегают). Электронный газ находится в термодинамическом равновесии с ионной решеткой.

Пример 30.1. Медный диск радиусом $R = 0,5$ м равномерно вращается ($\omega = 10^4$ рад/с) относительно оси, перпендикулярной к плоскости диска и проходящей через его центр. Определить разность потенциалов между центром диска и его крайними точками.

При вращении металлического диска электроны проводимости отбрасываются центробежной силой инерции на его периферию. В центральной области диска возникает недостаток электронов, и она заряжается положительно. На краях диска накапливаются электроны проводимости, и она заряжается отрицательно. Возникает электрическое поле напряженностью E , направленное по радиусам диска от его центра. Это поле противодействует дальнейшему движению электронов на края диска. Равновесие наступает, когда центробежная сила инерции $m\omega^2 r$ станет равной электрической силе eE_r :

$$m\omega^2 r = eE_r.$$

Здесь e – заряд электрона, m – его масса, E_r – проекция вектора напряженности E на радиальное направление. Отсюда получим:

$$E_r = \frac{\omega^2}{(e/m)} r.$$

Разность потенциалов между центром диска и его краями

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_0^R E_r dr = \frac{\omega^2}{(e/m)} \int_0^R r dr = \frac{\omega^2 R^2}{2(e/m)}. \quad (\text{П. 30.1})$$

Подставив числа, найдем

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{10^8 \cdot 0,25}{2 \cdot 1,76 \cdot 10^{11}} = 71 \cdot 10^{-6} (\text{В}) = 71 \text{ мкВ}.$$

Можно говорить о средней длине свободного пробега электронов, которая по порядку величины должна быть равной периоду кристаллической решетки металла, т.е. $\langle \lambda \rangle \approx 10^{-10}$ м.

Полагая, что на электронный газ могут быть распространены результаты кинетической теории газов, можно произвести оценку средней **скорости теплового движения** электронов в металлах.

Согласно молекулярно-кинетической теории средняя энергия поступательного движения молекул газа зависит только от температуры газа, но не от массы его молекул:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{3}{2} kT.$$

Здесь k – постоянная Больцмана, m – масса частицы, T – абсолютная температура. Отсюда находится средняя квадратическая скорость хаотического движения частиц

$$v = \sqrt{\frac{3kT}{m}}. \quad (30.1)$$

Если применить эту формулу к электронному газу при комнатной температуре $T = 300$ К, то получим среднюю квадратическую скорость электронов:

$$v = \sqrt{\frac{3 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{9,1 \cdot 10^{-31}}} = 11,68 \cdot 10^4 = 1,17 \cdot 10^5 \text{ (м/с)} = 117 \text{ км/с}.$$

Такого же порядка будет и средняя арифметическая скорость теплового движения электронов $\langle v \rangle$.

Хаотическое движение электронов не создает электрического тока. При включении электрического поля на хаотическое *тепловое движение*, происходящее со средней скоростью $\langle v \rangle$, накладывается *упорядоченное движение* электронов со средней скоростью $\langle u \rangle$ (так называемой **дрейфовой скоростью**). Величину этой скорости можно оценить, исходя из формулы, связывающей плотность тока j с числом n электронов проводимости в единице объема, их зарядом e и средней скоростью $\langle u \rangle$:

$$j = ne \langle u \rangle.$$

Оценим вначале концентрацию n электронов в металле, например, в меди. Медь находится в первой группе таблицы элементов Менделеева, атомы меди имеют один валентный электрон, который может быть отдан в электронный газ проводимости. Поэтому число свободных электронов примерно совпадает с числом атомов. Разделив плотность ρ меди на ее молярную массу M , определим число молей в единице объема. Умножив его затем на число Авогадро N_A , получим число атомов в единице объема, т.е. концентрацию электронов

$$n = N_A \frac{\rho_{Cu}}{M_{Cu}} = 6,02 \cdot 10^{23} \frac{8,9 \cdot 10^3}{63,5 \cdot 10^{-3}} = 8,4 \cdot 10^{28} \text{ (м}^{-3}\text{)}. \quad (30.2)$$

Для оценки дрейфовой скорости электронов воспользуемся предельной допустимой техническими нормами плотностью тока j для медных проводов, которая составляет около $10 \text{ А/мм}^2 = 10^7 \text{ А/м}^2$.

Взяв для меди концентрацию электронов проводимости $n = 10^{29} \text{ м}^{-3}$, получим оценку дрейфовой скорости электронов

$$\langle u \rangle = \frac{j}{ne} = \frac{10^7}{10^{29} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} \approx 10^{-3} \text{ (м/с)}. \quad (30.3)$$

Таким образом, даже при больших плотностях тока средняя скорость упорядоченного движения электронов $\langle u \rangle \sim 1 \text{ мм/с}$ ничтожно мала (в 10^8 раз меньше) по сравнению с тепловой скоростью электронов $\langle v \rangle \sim 100 \text{ км/с}$. Чрезвычайно малая скорость упорядоченного движения электронов по сравнению со скоростью их теплового движения объясняется очень частыми столкновениями электронов с ионами кристаллической решетки.

Как же согласовать очень малую величину скорости упорядоченного движения электронов с практически мгновенной передачей электрических сигналов на большие расстояния? Высокая скорость распространения электрического тока по цепи обусловлена не скоростью направленного движения электронов, а скоростью распространения электромагнитного поля, вызывающего направленное движение электронов по всей цепи. Эта скорость в вакууме равна $c \approx 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ (скорость света). Поэтому движение электронов под действием

внешнего электрического поля возникает на всем протяжении провода практически одновременно с замыканием цепи.

Объяснение закона Ома в классической электронной теории. Будем считать, что при каждом соударении электрон передает решетке накопленную энергию полностью и поэтому после соударения начинает движение без начальной скорости. Под действием поля электрон получит ускорение

$$a = \frac{F}{m} = \frac{eE}{m}, \quad (30.4)$$

и к концу свободного пробега скорость упорядоченного движения достигнет значения

$$u_{\max} = a\tau = \frac{eE}{m}\tau, \quad (30.5)$$

где τ – среднее время между двумя последовательными соударениями электрона с ионами решетки. Если средняя скорость движения электронов относительно кристаллической решетки металла равна $\langle v \rangle + \langle u \rangle$, то для среднего времени свободного пробега τ получаем:

$$\tau = \frac{\langle \lambda \rangle}{\langle v \rangle + \langle u \rangle} \approx \frac{\langle \lambda \rangle}{\langle v \rangle}.$$

Здесь учтено, что, как было показано выше, $\langle u \rangle \ll \langle v \rangle$. Тогда скорость к концу пробега

$$u_{\max} = \frac{eE \langle \lambda \rangle}{m \langle v \rangle}. \quad (30.6)$$

Поскольку скорость изменяется за время пробега равномерно от нуля до u_{\max} , ее среднее (за пробег) значение равно половине максимального

$$\langle u \rangle = \frac{1}{2} u_{\max} = \frac{eE \langle \lambda \rangle}{2m \langle v \rangle}.$$

Подставив эту скорость в выражение для плотности тока $j = neu$, получим

$$j = \frac{ne^2 \langle \lambda \rangle}{2m \langle v \rangle} E. \quad (30.7)$$

Это выражение совпадает с законом Ома

$$j = \sigma E$$

и дает теоретическое выражение эмпирической постоянной, т.е. удельной электропроводности металла

$$\sigma = \frac{ne^2 \langle \lambda \rangle}{2m \langle v \rangle}. \quad (30.8)$$

Проанализируем формулу (30.8). Электропроводность σ больше в том металле, в котором больше концентрация электронов проводимости n .

Если бы электроны не сталкивались с ионами решетки, средняя длина свободного пробега $\langle \lambda \rangle$, а, следовательно, и проводимость были бы бесконечно велики. Таким образом, согласно классическим представлениям электрическое сопротивление металлов обусловлено соударениями свободных электронов с ионами кристаллической решетки.

Кроме того, электропроводность зависит от средней скорости хаотического движения электронов, которая пропорциональна квадратному корню из температуры, $\langle v \rangle \sim \sqrt{T}$. Поэтому формула (30.8) объясняет факт уменьшения электропроводности при нагревании металлического проводника.

Пример 30.2. Удельное сопротивление меди $\rho = 17$ нОм·м, концентрация свободных электронов в меди $n = 10^{29}$ м⁻³. Исходя из классической теории электропроводности металлов, определить среднюю длину свободного пробега $\langle \lambda \rangle$ электронов в меди. Среднюю скорость теплового движения электронов принять равной $\langle v \rangle = 100$ км/с.

Пользуясь выражением (60.8) для электропроводности

$$\sigma = \frac{1}{\rho} = \frac{ne^2 \langle \lambda \rangle}{2m \langle v \rangle},$$

определим

$$\lambda = \frac{2m \langle v \rangle}{ne^2 \rho} = \frac{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 10^5}{10^{29} \cdot (1,6 \cdot 10^{-19})^2 \cdot 17 \cdot 10^{-9}} = 4,2 \cdot 10^{-9} (\text{м}) = 4,2 \text{ нм}.$$

Объяснение закона Джоуля – Ленца в классической электронной теории. Причиной возникновения электрического сопротивления является взаимодействие электронов с ионами кристаллической решетки. Сталкиваясь с ионами, электроны передают решетке кинетическую энергию, приобретенную ими под действием поля. Вследствие этого увеличивается амплитуда колебаний ионов решетки, и, следовательно, температура металла повышается.

К концу свободного пробега электрон приобретает скорость u_{\max} , и, следовательно, дополнительную кинетическую энергию

$$W_k = \frac{mu_{\max}^2}{2} = \frac{e^2 \langle \lambda \rangle E^2}{2m \langle v \rangle^2}. \quad (30.9)$$

Число столкновений электрона в единицу времени равно

$$\langle z \rangle = \frac{\langle v \rangle}{\langle \lambda \rangle}. \quad (30.10)$$

Все n электронов проводимости, содержащихся в единице объема проводника, испытывают $n \langle z \rangle$ столкновений в единицу времени и передают кристаллической решетке энергию

$$w = n \langle z \rangle \frac{mu_{\max}^2}{2}. \quad (30.11)$$

Эта энергия превращается в энергию теплового движения ионов металла, т.е. расходуется на нагревание проводника. Подставляя в формулу (30.11) выражения (30.10) и u_{\max} из формулы (30.6), определим энергию, которая превращается в теплоту в единице объема проводника в единицу времени

$$w = \frac{ne^2 \langle \lambda \rangle}{2m \langle v \rangle} E^2. \quad (30.12)$$

Величина w является удельной тепловой мощностью тока, а коэффициент пропорциональности между w и E^2 по формуле (30.8) есть электропроводность

σ , следовательно, выражение (30.12) представляет собой закон Джоуля-Ленца в дифференциальной форме

$$w = \sigma E^2.$$

Объяснение закона Видемана - Франца в классической электронной теории. Из опыта известно, что наряду с высокой электропроводностью металлы отличаются также большой теплопроводностью. Видеман и Франц установили эмпирический закон, согласно которому отношение коэффициента теплопроводности к электропроводности для всех металлов приблизительно одинаково и изменяется пропорционально абсолютной температуре.

$$\frac{K}{\sigma} = CT, \quad (30.13)$$

где C – некоторая константа.

Способностью проводить тепло обладают и неметаллические кристаллы. Однако теплопроводность металлов значительно превосходит теплопроводность диэлектриков. Из этого можно заключить, что теплопередача в металлах осуществляется в основном не кристаллической решеткой, а электронами.

Рассматривая электроны как одноатомный газ, для коэффициента теплопроводности можно привести выражение из кинетической теории газа

$$K = \frac{1}{3} \rho c_v \langle \lambda \rangle \langle v \rangle, \quad (30.14)$$

где $\rho = mn$ – плотность газа, c_v – его удельная теплоемкость при постоянном объеме. Для одноатомного идеального газа, каким в электронной теории является электронный газ, частицы имеют три степени свободы. Поэтому

$$c_v = \frac{C_V}{M} = \frac{3 R}{2 M} = \frac{3 k N_A}{2 M}. \quad (30.15)$$

Здесь k – постоянная Больцмана.

Молярная масса электронного газа $M = m N_A$, где m – масса электрона.

Тогда

$$\rho c_v = mn \frac{3 k N_A}{2 m N_A} = \frac{3}{2} nk. \quad (30.16)$$

Для теплопроводности получается выражение

$$K = \frac{1}{2} nk \langle \lambda \rangle \langle v \rangle. \quad (30.17)$$

А отношение теплопроводности K к удельной электропроводности σ :

$$\frac{K}{\sigma} = \frac{k}{e^2} m \langle v \rangle^2. \quad (30.18)$$

В качестве средней скорости теплового движения берется средняя квадратическая скорость

$$\langle v \rangle = v_{кв} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}.$$

Тогда окончательно

$$\frac{K}{\sigma} = 3 \frac{k^2}{e^2} T. \quad (30.19)$$

Соотношение (30.19) выражает закон Видемана – Франца (30.13), если значение эмпирической величины C положить равной

$$C = 3 \left(\frac{k}{e} \right)^2. \quad (30.20)$$

Вычисленное по этой формуле значение $C = 2,23 \cdot 10^{-8}$ (Дж/Кл·К)³ несколько меньше найденного на опыте, но достаточно близко к нему. Таким образом, теоретическое выражение (30.19) хорошо согласуется с результатами опытов.

Недостатки классической электронной теории электропроводности металлов. Достоинством классической электронной теории является ее физическая наглядность. Выводы теории хорошо согласовывались с экспериментальными законами Ома и Джоуля – Ленца и позволяли объяснить природу проводимости металлов.

Однако классическая электронная теория не могла объяснить некоторые важные свойства металлов.

1. Экспериментально установлено, что удельное сопротивление металлических проводников прямо пропорционально абсолютной температуре, $\rho \sim T$, или электропроводность металлических проводников обратно пропорциональна абсолютной температуре, $\sigma \sim \frac{1}{T}$. В классической электронной теории

$$\sigma = \frac{ne^2 \langle \lambda \rangle}{2m \langle v \rangle}, \text{ кроме того } \langle v \rangle \sim \sqrt{T}, \text{ следовательно } \sigma \sim \frac{1}{\sqrt{T}}, \text{ что противоре-}$$

чит опытными данным.

2. По закону Дюлонга и Пти молярная теплоемкость твердых кристаллических тел (металлов и диэлектриков) равна $3R$. Этот закон достаточно хорошо выполняется и для диэлектриков, и для металлов, что непонятно с точки зрения электронной теории.

В металлах, с точки зрения электронной теории, молярная теплоемкость должна складываться из молярной теплоемкости кристаллической решетки ($3R$) и молярной теплоемкости одноатомного электронного газа ($3R/2$) и, следовательно, быть около $4,5 R$. Отсутствие электронной составляющей теплоемкости металлов классическая теория объяснить не может.

3. Если подставить экспериментально определенную проводимость в формулу (30.8) и определить длину свободного пробега $\langle \lambda \rangle$ электрона, получим, что она на два порядка превышает период кристаллической решетки металла. То есть приходится допустить, что электрон пробегает без столкновений с ионами решетки сотни межузловых расстояний, что не соответствует классической электронной теории.

Эти расхождения теории и опыта объясняются тем, что движение электронов в металлах подчиняется законам квантовой теории.

Пример 30.3. В качестве примера приведем еще одно несоответствие классической теории и опыта.

Классическая электронная теория так раскрывает механизм выделения тепла электрическим током в металлах. Электроны ускоряются электрическим полем, сталкиваются с ионами кристаллической решетки, а накопленная электронами энергия передается ионам и нагревает металл.

Пусть скорость электрона до соударения с ионом решетки равна v , его масса известна: $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг. Скорость иона до соударения полагаем равной нулю, после соударения обозначим через u . Масса M иона, например, иона меди, тоже известна:

$$M = \frac{\mu}{N_A} = \frac{64 \cdot 10^{-3}}{6,02 \cdot 10^{23}} \approx 10^{-25} \text{ кг.}$$

В классической электронной теории полагается, что в конце свободного пробега электрон сталкивается с ионом решетки, отдает ему накопленную в поле энергию, и его дрейфовая скорость падает до нуля.

Теоретически возможны два типа соударений электронов с ионом – абсолютно упругое и абсолютно неупругое. Определим отношение $\frac{\Delta W_e}{W_e}$ энергии, потерянной электроном при одном соударении, к его первоначальной кинетической энергии в обоих случаях.

Из законов сохранения энергии и импульса следует [см., например, «Физика. Учебное пособие в 7 частях. Ч.1. Механика.» Авт. И.П. Гаркуша, В.П. Куринной], что в случае абсолютно упругого удара скорость иона после удара

$$u = \frac{2m_e v}{m_e + M}.$$

Энергия ΔW_e , потерянная электроном при столкновении с ионом, равна энергии, которую получил ион.

$$\Delta W_e = W_{\text{иона}} = \frac{Mu^2}{2} = \frac{2Mm_e^2 v^2}{(m_e + M)^2}.$$

Кинетическая энергия электрона $W_e = \frac{m_e v^2}{2}$.

Искомое отношение

$$\frac{\Delta W_e}{W_e} = \frac{4m_e M}{(m_e + M)^2}. \quad (\text{П. 30.2})$$

В случае абсолютно неупругого удара скорость иона вместе с «прилипшим» к нему электроном

$$u = \frac{m_e v}{m_e + M}.$$

Отношение переданной иону энергии к первоначальной энергии электрона

$$\frac{\Delta W_e}{W_e} = \frac{(m_e + M)u^2}{2} \cdot \frac{2}{m_e v^2} = \frac{m_e}{m_e + M}. \quad (\text{П. 30.3})$$

С учетом того, что масса электрона гораздо меньше массы иона, $m_e \ll M$, в обоих случаях получаем

$$\frac{\Delta W_e}{W_e} \approx \frac{m_e}{M} = \frac{9,1 \cdot 10^{-31}}{10^{-25}} \approx 10^{-5}.$$

Таким образом, доля энергии, потерянной в результате столкновения электрона с ионом, *очень мала* и не зависит от характера (упругого или неупругого) столкновения. Это обстоятельство противоречит положениям классической электронной теории металлов.

Контрольные вопросы

1. Какие условия необходимы для появления и существования электрического тока в проводящей среде?
2. Как связаны между собой векторная характеристика тока – плотность тока и скалярная характеристика – сила тока?
3. Какой вид имеет электрическое поле проводника с током?
4. Какие силы называются сторонними? Какова их роль в цепи постоянного тока? Почему для получения постоянного тока необходима замкнутая электрическая цепь?
5. От чего зависит точность измерений сопротивлений с помощью моста Уитстона?
6. Как связано напряжение на включенном источнике с его ЭДС? Можно ли вольтметром измерить ЭДС источника тока?
7. Совпадает ли напряжение с разностью потенциалов на неоднородном участке цепи?
8. Сформулируйте закон Ома для однородного участка цепи; для неоднородного участка цепи; для замкнутой цепи.
9. Как из закона Ома для неоднородного участка цепи получить закон Ома для замкнутой цепи?
10. Работа каких сил определяет работу электрического тока?
11. При какой нагрузке источник тока развивает максимальную полезную мощность?
12. Какие законы используют при выводе правил Кирхгофа?
13. Разветвленная цепь содержит a узлов, и в ней можно выделить b простых контуров. Сколько независимых уравнений можно составить, используя первое правило Кирхгофа? Второе правило Кирхгофа?
14. Каковы основные положения классической электронной теории проводимости металлов? Каковы недостатки этой теории?
15. Каковы скорости теплового и дрейфового движения электронов в металле?
16. Какова природа электрического сопротивления с точки зрения классической электронной теории проводимости металлов?
17. Почему при малой скорости упорядоченного движения электронов ток к потребителю доходит по проводам практически мгновенно?

Глава 6. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ

§ 31. Магнитное поле. Вектор магнитной индукции.

Более двух тысяч лет назад в Китае уже использовалось свойство магнитных стрелок устанавливаться в направлении прямой, проходящей с севера на юг.

Конец магнитной стрелки, который указывает на север, условно называли северным (N), а противоположный – южным (S) (рис. 31.1).

Если в некоторой области пространства на магнитную стрелку действуют силы, стремящиеся установить ее в

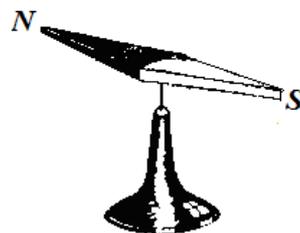


Рис. 31.1.

определенном направлении, то говорят, что там имеется *магнитное поле*.

Подобно тому, как электрическое поле характеризуется векторной величиной E , которая называется *напряженностью* поля, для характеристики магнитного поля вводят векторную величину B , которую следовало бы тоже назвать напряженностью, но по историческим причинам ее называли *магнитной индукцией* поля.

Поведение стрелки компаса в магнитном поле позволяет ввести *линии магнитной индукции* по аналогии с силовыми линиями электрического поля.

Вектор магнитной индукции B касательный к силовой линии, проходящей через данную точку. Величина вектора B пропорциональна силе, которая действует на северный конец бесконечно малой магнитной стрелки, помещенной в данную точку магнитного поля.

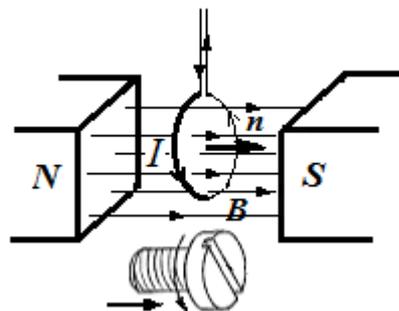


Рис. 31.2.

Более удобным, чем магнитная стрелка, для количественного исследования магнитного поля является замкнутый плоский контур с током (рамка с током) очень малых размеров (рис. 31.2).

Опыты показывают, что магнитное поле поворачивает рамку с током и ориентирует ее в определенном направлении.

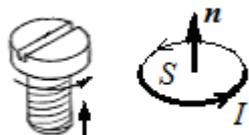


Рис. 31.3.

Ориентацию рамки в пространстве характеризуют направлением нормали n к плоскости рамки, связанной с направлением тока I *правилом правого винта*: за направление нормали n принимают то направление, в котором будет перемещаться винт с правой нарезкой, если вращать его по направлению тока в рамке (рис. 31.3). Такую нормаль называют *положительной*.

Если поместить такой контур в магнитное поле, то на него будет действовать пара сил и поле установит контур положительной нормалью в определенном направлении. Это направление и принимают за направление магнитного поля в данной точке (рис. 31.4).

Действие магнитного поля на плоский контур с током определяется величиной

$$p_m = iS ,$$

которую называют *магнитным моментом* контура с током. Магнитный момент следует рассматривать как вектор, направление которого совпадает с направлением положительной нормали, т.е.

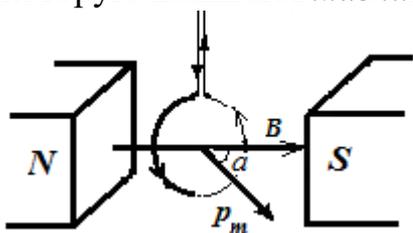


Рис. 31.4

$$p_m = iSn . \tag{31.1}$$

Если повернуть контур на некоторый угол α относительно его установившегося положения, то возникает вращающий момент, стремящийся вернуть контур в равновесное положение. Как показы-

вает опыт, на контур будет действовать момент сил, пропорциональный силе тока I в контуре, его площади S и синусу угла поворота:

$$M \sim IS \sin \alpha.$$

Этот вращающий момент максимален, когда контур ориентирован перпендикулярно магнитным линиям, т.е. когда $\sin \alpha = 1$; $M_{\max} \sim IS$. Отношение максимального вращающего момента к произведению силы тока I на площадь поперечного сечения контура S характеризует магнитное поле в том месте, где расположен контур. Это отношение и принимают по определению за модуль B вектора магнитной индукции:

$$B = \frac{M_{\max}}{IS} = \frac{M_{\max}}{p_m}. \quad (31.2)$$

Магнитная индукция B – вектор, модуль которого равен максимальному вращающему моменту, действующему на пробный контур с магнитным моментом, равным единице, а направление определяется равновесным направлением положительной нормали к пробному контуру.

Из сказанного вытекает, что магнитная индукция B характеризует силовое действие магнитного поля на ток и, следовательно, является аналогом напряженности электрического поля E , которая характеризует силовое действие электрического поля на заряд.

Направление магнитного поля B можно также определить с помощью магнитной стрелки. В этом случае ось стрелки (от южного полюса к северному) совпадает с направлением магнитного поля (рис. 31.5).



Рис. 31.5.

С помощью железных опилок, которые намагничиваются в исследуемом поле и подобно маленьким магнитным стрелкам ориентируются вдоль линий магнитной индукции, картину магнитных силовых линий можно сделать «видимой».

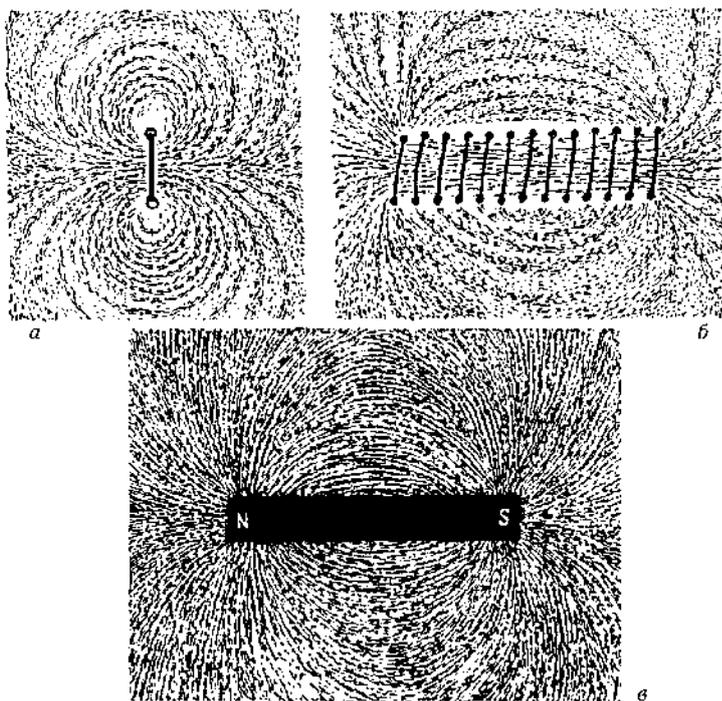


Рис. 31.6.

В отличие от потенциального электростатического поля, где силовые линии начинаются на положительных зарядах и оканчиваются на отрицательных или на бесконечности, магнитное поле является **вихревым**: его силовые линии всегда замкнуты. Другими словами, магнитное поле не имеет источников – магнитных зарядов в природе нет.

На рис. 31.6 приведены полученные таким

способом картины магнитных полей кругового тока (а), длинной катушки-соленоида (б), прямого постоянного магнита (в).

Если говорить о магнитном поле постоянного магнита, то принято считать, что линии выходят из северного полюса, входят в южный и замыкаются внутри магнита (рис. 31.7).

За единицу магнитной индукции принята индукция такого поля, в котором на контур площадью 1 м^2 при силе тока 1 А действует максимальный вращающий момент $1 \text{ Н}\cdot\text{м}$. Такая единица называется тесла (Тл):

$$1 \text{ Тл} = \frac{1 \text{ Н}\cdot\text{м}}{1 \text{ А}\cdot 1 \text{ м}^2} = 1 \frac{\text{Н}}{\text{А}\cdot\text{м}} = 1 \frac{\text{кг}}{\text{А}\cdot\text{с}^2}.$$

На основании опыта установлено, что разноименные магнитные полюса притягиваются (как и электрические заряды), одноименные отталкиваются.

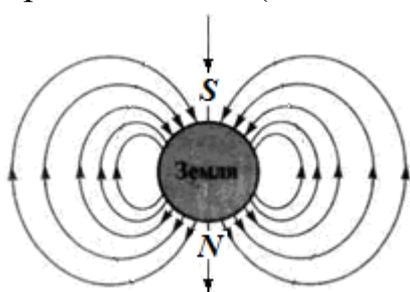


Рис. 31.8.

Поскольку обращенный к северу конец стрелки назвали северным полюсом, а притягиваются разноименные полюса, то вблизи северного географического полюса Земли находится южный магнитный. Иными словами, магнитное поле Земли направлено с географического юга на север (рис. 31.8).

Благодаря магнитному полю Земли задерживаются заряженные частицы космических лучей. Это делает возможным жизнь на Земле.

Поскольку существуют элементарные заряженные частицы – носители электрических зарядов двух разных видов, то отдельные тела можно зарядить либо только положительно, либо только отрицательно.

Однако отделить один из магнитных полюсов от противоположного невозможно. Казалось бы, мы можем разделить или изолировать друг от друга северный и южный полюсы, разрезав магнит пополам (рис. 31.9).

Разрезав магнит пополам, мы получим два магнита, причем каждый с двумя полюсами. Если мы продолжали бы этот процесс и дальше, то, как показывает опыт, нам никогда не удастся получить магнит с одним полюсом. Полюсы магнита не существуют раздельно.

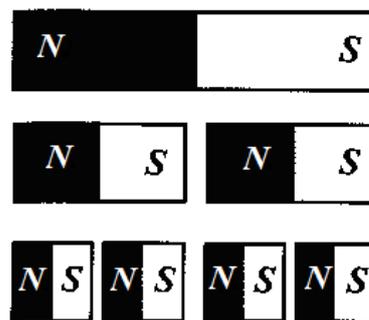


Рис. 31.9.

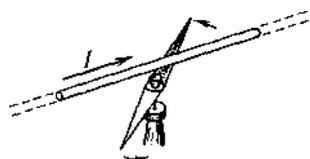


Рис. 31.10.

Следовательно, и элементарные носители магнетизма, или, как их называют, элементарные магнитики, также должны обладать двумя полюсами. Дойдя в нашем воображаемом делении до отдельных атомов, мы получим микроскопические магниты с северным и южным полюсами. Микромагнитами являются и отдельные электроны.

В 1820 г датским физиком Г. Х. Эрстедом было экспериментально установлено, что проводники, по которым текут токи, способны действовать на магнитную стрелку, т.е. создавать магнитное поле.

В опыте Эрстеда (рис. 31.10) магнитная стрелка, которая могла свободно вращаться вокруг вертикальной оси, помещалась под прямолинейным проводником с постоянным током. При включении тока стрелка устанавливалась перпендикулярно к проводнику. Изменение направления тока вызывало поворот стрелки в противоположную сторону.

Из опыта Эрстеда следует, что движущиеся заряды (токи) изменяют свойства окружающего их пространства, создают особое пространство, в котором проявляется действие магнитных сил. Магнитные силы действуют, в отличие от электростатических, только на движущиеся заряды или токи.

Т.о. способностью создавать магнитное поле обладают лишь движущиеся электрические заряды (электрический ток), а вокруг неподвижных зарядов существует только электростатическое поле.

Магнитное поле, в отличие от электрического, не оказывает действия на покоящийся заряд. Сила возникает лишь тогда, когда заряд движется.

Следовательно, магнитное поле порождается движущимися электрическими зарядами и, в свою очередь, действует только на движущиеся заряды.

Магнитное поле, возникающее в пространстве вокруг проводников с током, как и электрическое поле, обусловленное неподвижными зарядами, является одним из видов материи. Оно обладает определенными физическими свойствами и характеризуется энергией.

Подытоживая сказанное, сформулируем современную **концепцию магнитного поля**.

Источниками магнитного поля являются движущиеся электрические заряды, т.е. электрические токи, а также намагниченные тела (постоянные магниты), в которых магнитное поле создается магнитными моментами электронов в атомах. Кроме того, магнитное поле возникает вокруг изменяющегося во времени электрического поля.

Отличительная особенность магнитного поля состоит в том, что оно действует только на движущиеся заряды (токи).

Магнитным полем является одна из частей *электромагнитного поля*. Как увидим дальше, разделение единого электромагнитного поля на электрическую и магнитную части относительно и зависит от выбора системы отсчета.

§ 32. Закон Био-Савара-Лапласа и его применение к расчету полей прямого и кругового токов

Электрический ток, проходя по проводнику, создает вокруг проводника магнитное поле. Для расчета магнитных полей, создаваемых проводниками различной конфигурации, нужно учесть, что индукция магнитного поля определяется совместным действием всех отдельных участков проводника.

Опыты, проведенные французскими физиками Ж. Био и Ф. Саваром и обработанные математически П. Лапласом, привели к выводу о том, что магнитная индукция $d\mathbf{B}$ поля, создаваемого в данной точке пространства элементом тока $I dl$, обратно пропорциональна квадрату расстояния r от элемента тока до точки наблюдения. **Элементом тока $I dl$** называют вектор, модуль которого равен произведению силы тока вдоль проводника и бесконечно малого отрезка этого проводника, а направление совпадает с направлением вектора плотности тока на этом участке проводника. Если обозначить через \mathbf{r} радиус-вектор, проведенный от элемента тока в рассматриваемую точку поля, то закон Био-Савара-Лапласа имеет вид:

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{[d\mathbf{l}, \mathbf{r}]}{r^3}, \quad (32.1)$$

где μ_0 – так называемая *магнитная постоянная*, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м.

Вектор $d\mathbf{B}$ перпендикулярен плоскости, содержащей элемент тока $I dl$ и радиус-вектор \mathbf{r} (рис. 32.1). Направление $d\mathbf{B}$ определяется **правилом правого винта**: оно совпадает с направлением вращения головки винта при его поступательном перемещении вдоль тока. Из закона Био-Савара-Лапласа следует, что модуль вектора магнитной индукции $d\mathbf{B}$

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl \cdot \sin \alpha}{r^2}, \quad (32.2)$$

где α – угол между направлением на точку наблюдения и направлением элемента тока.

Для магнитного поля, так же, как и для электрического, справедлив **принцип суперпозиции** полей: вектор магнитной индукции \mathbf{B} поля, созданного системой проводников с токами, равен сумме векторов магнитной индукции полей, созданных каждым из проводников в отсутствие остальных.

$$\mathbf{B} = \int d\mathbf{B}.$$

Если магнитное поле создается проводящим контуром L с током I , то

$$\mathbf{B} = \int_L d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_L \frac{[d\mathbf{l}, \mathbf{r}]}{r^3}, \quad (32.3)$$

где $d\mathbf{B}$ – вклад элемента тока $I dl$ в результирующее магнитное поле, \mathbf{r} – вектор, проведенный из элемента тока в данную точку.

С помощью закона Био-Савара-Лапласа, применяя принцип суперпозиции, по вкладам каждого элемента тока можно найти полное магнитное поле.

В качестве примера вычислим индукцию магнитного поля, создаваемого током I , текущим **по прямому проводу**, в точке, удаленной на расстояние r_0 от провода (рис. 32.2).

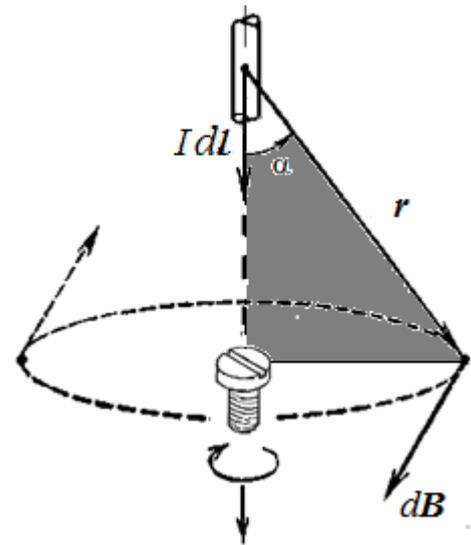


Рис. 32.1.

Векторы полей $d\mathbf{B}$ всех малых элементов тока в этой точке имеют одинаковое направление (перпендикулярно плоскости чертежа) и поэтому можно складывать абсолютные значения магнитных индукций, т.е.

$$B = \int dB. \quad (32.4)$$

Из рис. 32.2 видно, что

$$r = \frac{r_0}{\sin \alpha}, \quad dl = \frac{r d\alpha}{\sin \alpha} = \frac{r_0 d\alpha}{\sin^2 \alpha}.$$

Подставляя эти выражения в формулу (32.2), находим, что магнитная индукция, создаваемая одним элементом тока, равна по модулю

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{r_0 d\alpha}{\sin^2 \alpha} \frac{\sin^2 \alpha}{r_0^2} \sin \alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0} \sin \alpha d\alpha. \quad (32.5)$$

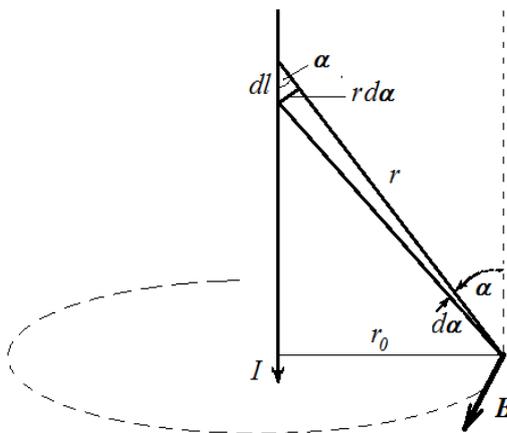


Рис. 32.2.

Для **проводника конечной длины**

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha d\alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2). \quad (32.6)$$

Здесь α_1 и α_2 – углы между направлением тока и направлением к той точке, где определяется магнитное поле (рис. 32.3).

Если точка, в которой определяется магнитное поле,

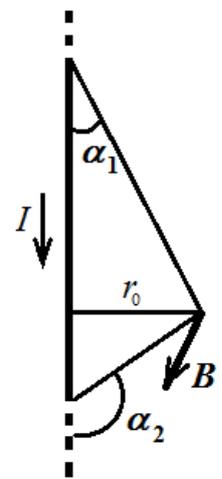


Рис. 32.3.

расположена на одинаковом расстоянии от концов проводника, то

$$\cos \alpha_2 = -\cos \alpha_1.$$

Тогда формула (32.6) приобретает вид

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_0} \cos \alpha_1. \quad (32.7)$$

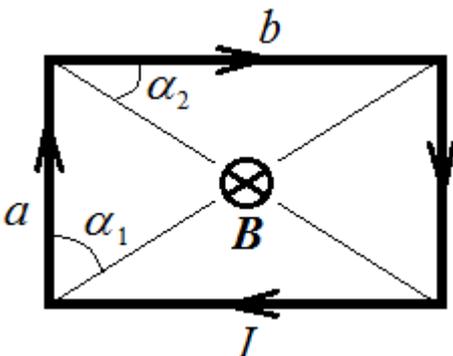


Рис. П. 32.1.

Пример 32.1. Ток силой $I = 5$ А течет по прямоугольной рамке со сторонами $a = 10$ см и $b = 15$ см. Определить магнитную индукцию в центре рамки.

Пользуясь правилом винта, определим, что магнитное поле в центре рамки, созданное каждой из сторон, направлено перпендикулярно плоскости рамки за чертеж. Поэтому модуль вектора магнитной индукции результирующего магнитного поля в центре рамки

$$B = B_1 + B_2 + B_3 + B_4.$$

Воспользуемся формулой (32.7) для магнитного поля, создаваемого отрезком прямого проводника с током в точке, лежащей против середины отрезка. Тогда

$$B_1 = B_3 = \frac{\mu_0 I}{2\pi(b/2)} \cos \alpha_1, \quad \text{и} \quad B_2 = B_4 = \frac{\mu_0 I}{2\pi(a/2)} \cos \alpha_2.$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{(\pi/2)} \left(\frac{\cos \alpha_1}{b} + \frac{\cos \alpha_2}{a} \right).$$

Из рис. П.32.1. видно, что

$$\cos \alpha_1 = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \cos \alpha_2 = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Подставляя эти значения и производя преобразования, получим

$$B = \frac{2\mu_0 I \sqrt{a^2 + b^2}}{\pi ab} \approx 48 \text{ мкТл}.$$

Для случая **бесконечно длинного** прямолинейного проводника углы $\alpha_1 = 0$ и $\alpha_2 = \pi$, так что по формуле (32.6) магнитное поле на расстоянии r_0 от бесконечного прямолинейного проводника с током будет равно

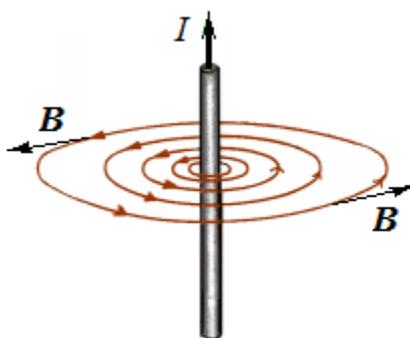


Рис. 32.4.

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_0}. \quad (32.8)$$

Как следует из формулы (32.8) магнитная индукция бесконечного прямолинейного проводника с током убывает обратно пропорционально расстоянию r_0 от провода. Линии магнитной индукции представляют собой концентрические окружности, плоскости которых перпендикулярны току, а центры расположены на оси тока (рис. 32.4). Их направление определяют по универсальному для магнетизма **правилу винта** – крутим винт по линиям, получаем направление тока, крутим по току – получаем направление линий. Расстояние между соседними силовыми линиями возрастает по гиперболическому закону – чем ближе к проводнику, тем больше густота магнитных силовых линий.

магнетизма **правилу винта** – крутим винт по линиям, получаем направление тока, крутим по току – получаем направление линий. Расстояние между соседними силовыми линиями возрастает по гиперболическому закону – чем ближе к проводнику, тем больше густота магнитных силовых линий.

Пример 32.2. Два параллельных бесконечно длинных проводника, по которым текут в одном направлении токи $I_1 = 40$ А и $I_2 = 80$ А, расположены на расстоянии $d = 12$ см друг от друга. Определить магнитную индукцию B в точке, отстоящей от первого проводника на расстоянии $r_1 = 8$ см и от второго на расстоянии $r_2 = 16$ см.

Для нахождения магнитной индукции в указанной точке A (рис. П.32.1) определим направления векторов магнитной индукции B_1 и B_2 полей, создаваемых каждым проводником в отдельности.

Векторы магнитной индукции направлены по касательным к соответствующим линиям магнитной индукции, проходящим через точку A . Эти линии являются окружностями с центрами на оси соответствующих проводников и расположены в плоскости, перпендикулярной к оси проводника. Их направления определяются по правилу винта. На рис. П.32.1 направления токов I_1 и I_2 выбраны «от нас» и обозначены крестиками. Тогда по правилу винта линии магнитной индукции будут направлены по часовой стрелке. Вектор B_1 перпендикулярен к r_1 (касательная перпендикулярна к радиусу

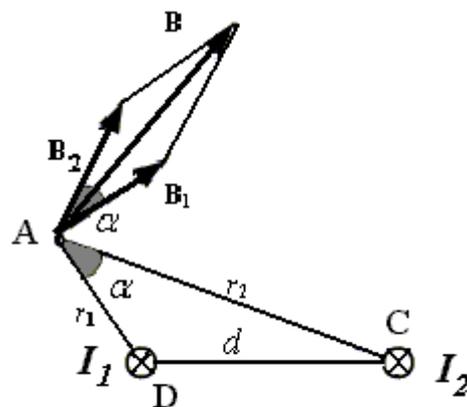


Рис. П 32.1.

окружности) и направлен вправо в точке A . Соответственно, \mathbf{B}_2 перпендикулярен к r_2 и тоже направлен вправо.

Согласно *принципу суперпозиции* магнитная индукция в точке A

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2.$$

Модуль вектора \mathbf{B} определим по теореме косинусов:

$$B^2 = B_1^2 + B_2^2 - 2 B_1 B_2 \cos (180^\circ - \alpha) = B_1^2 + B_2^2 + 2 B_1 B_2 \cos \alpha.$$

Отсюда

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2 + 2 B_1 B_2 \cos \alpha}. \quad (\text{П.32.1})$$

Модули векторов \mathbf{B}_1 и \mathbf{B}_2 :

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_1}, \quad B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r_2}. \quad (\text{П.32.2})$$

Подставляя эти выражения в формулу (П.32.1), найдем искомое B :

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \sqrt{\left(\frac{I_1}{r_1}\right)^2 + \left(\frac{I_2}{r_2}\right)^2 + \frac{2 I_1 I_2}{r_1 r_2} \cos \alpha}. \quad (\text{П.32.3})$$

Для нахождения $\cos \alpha$ заметим, что $\alpha = \angle DAC$, как углы со взаимно перпендикулярными сторонами. Поэтому по теореме косинусов запишем $d^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2 r_1 r_2 \cos \alpha$. Подставив данные, вычислим значение косинуса: $\cos \alpha = 0,688$. Подставив в формулу (3) значения μ_0 , I , r_1 , r_2 и $\cos \alpha$, найдем $B = 184$ мкТл.

Применим закон Био – Савара - Лапласа к вычислению магнитного поля **в центре кругового витка** радиуса R , по которому течет ток I (рис. 32.5).

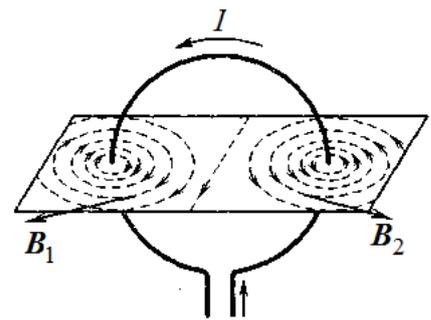


Рис. 32.5.

В рассматриваемом случае в выражении (32.2) следует положить, как видно из рис. 32.6, $r = R$ и $\alpha = \pi/2$, $\sin \alpha = 1$.

Все элементы тока создают магнитные поля одинакового направления, перпендикулярные к плоскости витка и связанные с направлением тока правилом правого винта, т.е. вдоль положительной нормали \mathbf{n} к контуру. Поэтому суммарная индукция магнитного поля \mathbf{B} от всех элементов кольцевого тока направлена в ту же сторону (рис. 32.7), а ее модуль равен сумме всех dB .

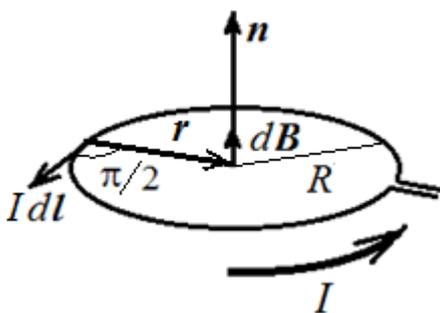


Рис. 32.6.

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{R^2}. \quad (32.9)$$

$$B = \int dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R^2} \oint dl = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R^2} 2\pi R = \frac{\mu_0 I}{2R}. \quad (32.10)$$

(здесь учтено, что сумма всех элементарных участков dl равна длине окружности $2\pi R$).

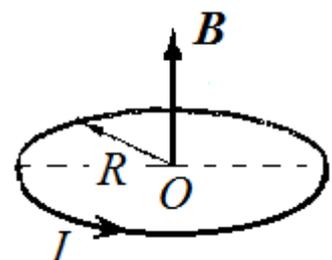


Рис. 32.7.

Пример 32.3. Определим магнитную индукцию поля, создаваемого круговым током в точке, лежащей на оси кругового тока на расстоянии h от его центра (рис. П. 32.2).

Как следует из закона Био-Савара-Лапласа (32.1), вектор $d\mathbf{B}$ должен быть перпендикулярным к плоскости, проходящей через элемент тока $I d\mathbf{l}$ и точку, в которой определяется поле.

Из рис. П. 32.2 следует, что $d\mathbf{l}$ перпендикулярно \mathbf{r} . Следовательно, в формуле (32.2) $\alpha = 90^\circ$, $\sin \alpha = 1$ и вектор $d\mathbf{B}$ по величине равен

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I d\mathbf{l}}{4\pi r^2}.$$

Разложим вектор $d\mathbf{B}$ на две составляющих: перпендикулярную к оси $d\mathbf{B}_\perp$ и параллельную оси $d\mathbf{B}_\parallel$. Любому элементу $d\mathbf{l}$ соответствует диаметрально противоположный элемент $d\mathbf{l}'$, который дает такую же составляющую магнитной индукции вдоль оси, и перпендикулярную к оси составляющую противоположного знака. Следовательно, при сложении всех перпендикулярных составляющих (интегрирование по контуру) они взаимно уничтожатся, а параллельные составляющие будут складываться. Результирующий вектор \mathbf{B} будет направлен вдоль оси контура и по модулю равен

$$B = \int d\mathbf{B} \sin \beta = \int \frac{\mu_0 I d\mathbf{l}}{4\pi r^2} \frac{R}{r} = \frac{\mu_0 I R}{4\pi r^3} \oint d\mathbf{l}$$

Заменяя

$$r = \sqrt{R^2 + h^2} \text{ и } \oint d\mathbf{l} = 2\pi R,$$

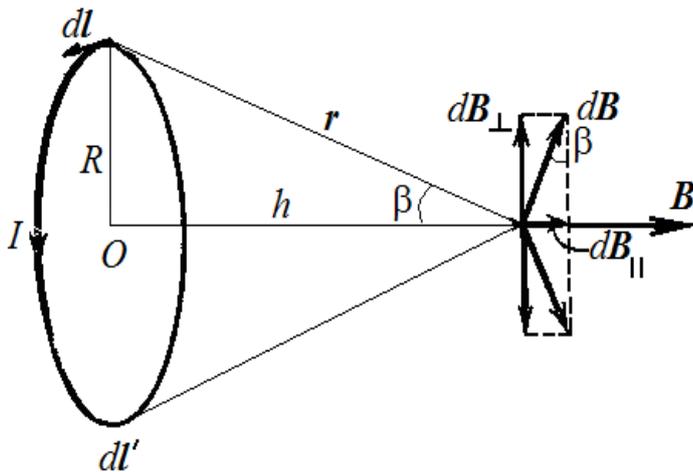


Рис. П. 32.2.

получим магнитную индукцию на оси кругового тока

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2(I\pi R^2)}{(R^2 + h^2)^{3/2}} \quad (\text{П. 32.4})$$

Используя выражение (31.1) для магнитного момента, запишем это уравнение в векторном виде

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\mathbf{p}_m}{(R^2 + h^2)^{3/2}} \quad (\text{П. 32.5})$$

При $h \gg R$ из формулы (П. 32.5) следует

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\mathbf{p}_m}{h^3}.$$

В центре кругового витка ($h = 0$) маг-

нитная индукция, как было получено ранее, равна

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R}.$$

Пример 32.4.

Согласно теории Н.Бора электрон в атоме водорода движется вокруг ядра по круговой орбите радиуса $r_B = 53$ пм (первый боровский радиус). Определить: 1) индукцию магнитного поля \mathbf{B} , которую создает электрон в центре круговой орбиты; 2) орбитальный магнитный момент \mathbf{p}_m электрона.

Представим себе площадку, пересекающую орбиту электрона и перпендикулярную к орбите (рис.П. 32.3).

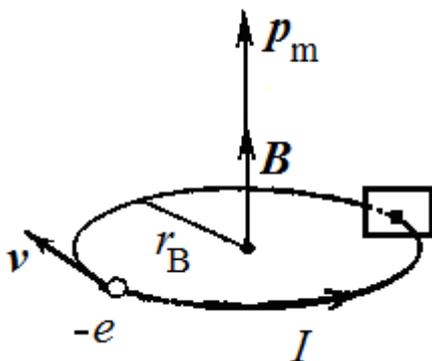


Рис. П. 32.3

Сила тока равна заряду, переносимому через эту площадку за 1 с. Если ν – число оборотов электрона в секунду, то с каждым оборотом через выделенную площадку будет перенесен заряд e – заряд электрона, а сила кругового тока будет равна

$$I = e\nu.$$

Чтобы определить частоту ν обращения электрона вокруг ядра, применим второй закон Ньютона. Сила кулоновского притяжения между электроном и ядром (протоном), заряд которого $+e$, сообщает электрону нормальное (центростремительное) ускорение:

$$F_{\text{кул}} = ma_n,$$

или

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_B^2} = m\omega^2 r_B.$$

Откуда находим угловую скорость вращения электрона

$$\omega = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m r_B^3}}, \quad (\text{П.32.6})$$

частоту вращения $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ и силу эквивалентного кругового тока

$$I = e\nu = \frac{e^2}{4\pi r_B \sqrt{\pi\epsilon_0 m r_B}} = \frac{(1,6)^2 \cdot 10^{-38}}{4 \cdot 3,14 \cdot 5,3 \cdot 10^{-11} \sqrt{3,14 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 5,3 \cdot 10^{-11}}} = 1,05 \cdot 10^{-3} \text{ А} = 1,05 \text{ мА}.$$

Магнитная индукция в центре круговой орбиты

$$B = \frac{\mu_0 I}{2r_B} = \frac{4 \cdot 3,14 \cdot 10^{-7} \cdot 1,05 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 5,3 \cdot 10^{-11}} = 12,44 \text{ Тл}.$$

Для сравнения отметим, что самые сильные магнитные поля, полученные в земных лабораториях, имеют порядок 10 Тл.

Орбитальный магнитный момент электрона

$$p_m = IS = I \cdot \pi r_B^2 = 1,05 \cdot 10^{-3} \cdot 3,14 \cdot 5,3^2 \cdot 10^{-22} = 9,27 \cdot 10^{-24} \text{ (А} \cdot \text{м}^2\text{)}.$$

Эта величина получила название *магнетона Бора*. Она играет роль элементарного магнитного момента – «кванта» магнитного момента электрона.

Пример 32.5. Бесконечно длинный проводник изогнут так, как показано на рис. П. 32.4. По проводнику течет ток $I = 10$ А. Определить магнитную индукцию в центре окружности (радиус окружности $R = 5$ см).

Магнитную индукцию в точке O определим, используя принцип суперпозиции магнитных полей, создаваемых двумя прямолинейными проводниками (1 и 3), одним концом уходящими на бесконечность, и дугой окружности (2) радиуса R . Тогда

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_3.$$

Учитывая, что все векторы \mathbf{B}_1 , \mathbf{B}_2 и \mathbf{B}_3 направлены в соответствии с правилом винта перпендикулярно плоскости чертежа «к нам», векторную сумму можно заменить скалярной

$$B = B_1 + B_2 + B_3.$$

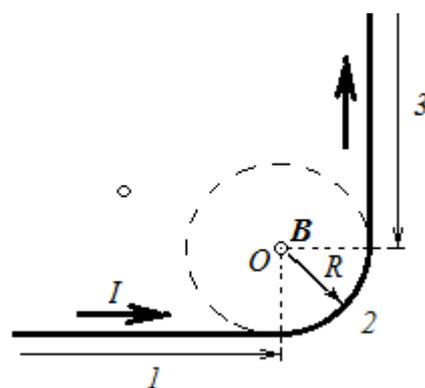


Рис. П. 32.4.

Магнитную индукцию поля B_2 можно найти, используя формулу для магнитной индукции в центре кругового тока $B = \frac{\mu_0 I}{2R}$. Так как магнитная индукция B_2 создается в точке O четвер-

тью такого кругового проводника с током, то $B_2 = \frac{\mu_0 I}{8R}$.

Магнитную индукцию поля B_1 полубесконечного проводника с током найдем, используя формулу для магнитного поля бесконечного проводника с током $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$. Учитывая равный вклад в магнитную индукцию от каждой половины проводника, можно написать

$$B_1 = B_3 = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}.$$

В итоге получаем модуль магнитной индукции в точке O :

$$B = \frac{\mu_0 I}{8R} + 2 \frac{\mu_0 I}{4\pi R} = \frac{\mu_0 I}{8\pi R} (\pi + 4). \quad (\text{П.32.7})$$

Подставляя числа, найдем $B = 71,4$ мкТл.

§ 33. Магнитное поле движущегося заряда

Электрический ток в проводнике есть упорядоченное движение заряженных частиц – электронов в металлах, ионов в электролитах и т.д. Каждый проводник с током создает в окружающем пространстве магнитное поле. Тогда можно заключить, что магнитное поле проводника с током образуется при наложении магнитных полей всех движущихся заряженных частиц. Воспользуемся законом Био-Савара-Лапласа (32.1) и рассмотрим входящее в него произведение $I dl$. Сила тока I равна величине заряда, протекающего через поперечное сечение S проводника в единицу времени

$$I = nqvS.$$

Здесь q – заряд одной частицы, v – скорость упорядоченного движения частиц, n – их концентрация. Поэтому

$$I dl = nqvSdl = nqv dV,$$

где $dV = Sdl$ – объем элемента проводника.

Если подставить выражение для $I dl$ в закон Био-Савара-Лапласа (32.1)

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{[d\mathbf{l}, \mathbf{r}]}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{nq dV [\mathbf{v}, \mathbf{r}]}{r^3}$$

и разделить на число носителей заряда в элементе проводника ndV , то получится выражение для магнитной индукции поля, создаваемого одним зарядом q , движущимся со скоростью v в вакууме

$$\mathbf{B}_q = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q[\mathbf{v}, \mathbf{r}]}{r^3}. \quad (33.1)$$

Здесь \mathbf{r} – радиус-вектор, проведенный от заряда к точке, в которой определяется магнитная индукция \mathbf{B}_q , r – модуль этого вектора (рис. 33.1).

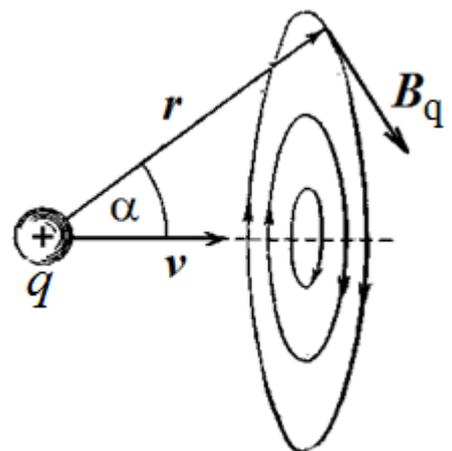


Рис. 33.1.

Направление вектора B_q легко определить, если вспомнить, что магнитное поле вокруг тока направлено по правилу винта (рис. 33.1, в данном случае вместо тока имеем движущийся прямолинейно положительный заряд).

Модуль вектора магнитной индукции (33.1)

$$B_q = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qv \sin \alpha}{r^2}, \quad (33.2)$$

где α – угол между скоростью заряда и направлением на точку наблюдения.

Согласно формуле (33.2) на прямой, проходящей через вектор скорости, магнитное поле отсутствует.

Заметим также, что магнитное поле движущегося заряда переменное, так как в формуле (33.1) при движении заряда изменяется радиус вектор r . Однако результирующее поле очень большого количества носителей тока в проводнике с током является стационарным.

Пример 33.1. Определить максимальную магнитную индукцию $B_{q \max}$ поля, создаваемого протоном, движущимся прямолинейно со скоростью $v = 10^6$ м/с, в точке, отстоящей от траектории на расстоянии $d = 1$ нм.

Магнитная индукция поля, создаваемого зарядом q , движущимся со скоростью v в вакууме равна (33.2)

$$B_q = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qv \sin \alpha}{r^2}.$$

Очевидно, она будет максимальной при $\alpha = \pi/2$. Подставляя числа, найдем

$$B_q = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^6}{4\pi (10^{-9})^2} = 1,6 \cdot 10^{-2} = 16 \text{ (мТл)}$$

§ 34. Действие магнитного поля на проводник с током. Закон Ампера

Отличительная особенность магнитного поля – действовать на движущиеся заряды и проводники с током некоторой силой.

Существование этой силы можно продемонстрировать простым опытом (рис. 34.1).

По двум параллельным горизонтальным проводникам как по рельсам может перекачиваться легкий проводящий (алюминиевый) цилиндрический стержень-перемычка. Концы рельсов подключены к источнику постоянного тока, перемычка замыкает цепь. Если поднести к перемычке без тока магнит, она остается неподвижной – алюминий является слабомагнитным веществом, притяжением алюминиевого стержня к магниту можно пренебречь. Но если через контур пропускать ток, перемычка под действием силы Ампера начинает перекачиваться по рельсам в ту или иную сторону.

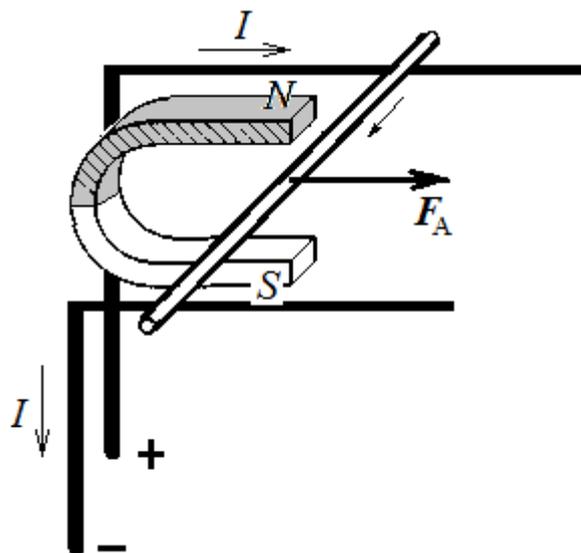


Рис. 34.1.

Опытным путем А. Ампер установил, что сила, действующая на элемент проводника с током $I dl$ в магнитном поле, равна векторному произведению элемента тока на вектор магнитной индукции (**закон Ампера**)

$$dF = I[dl, B]. \quad (34.1)$$

Модуль силы Ампера равен

$$dF = I B dl \sin \alpha, \quad (34.2)$$

где α – угол между векторами dl и B .

Направление силы Ампера определяется правилом векторного произведения (правилом винта). Сила dF перпендикулярна к плоскости, в которой лежат векторы элемента тока $I dl$ и магнитной индукции B .

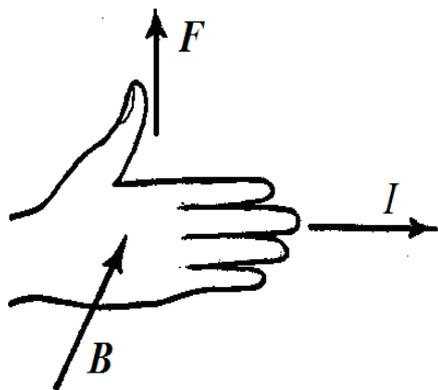


Рис. 34.2.

Удобно также определять направление силы Ампера с помощью *правила левой руки*: если поместить левую руку так, чтобы магнитные силовые линии входили в ее ладонь, четыре выпрямленных пальца указывали направление тока, то отставленный в сторону большой палец указывает направление силы Ампера (рис. 34.2).

В случае однородного магнитного поля ($B = \text{const}$) и прямолинейного проводника ($\alpha = \text{const}$), сила, действующая на проводник с током

$$F = \int dF = IB \sin \alpha \int dl = IB l \sin \alpha. \quad (34.3)$$

§ 35. Взаимодействие двух параллельных токов. Определение единицы силы тока – ампера

Используя закон Ампера, определим силу, с которой взаимодействуют два параллельных проводника с током. Рассмотрим два находящихся на расстоянии b друг от друга параллельных бесконечно длинных проводника, по которым текут токи I_1 и I_2 (рис. 35.1). На отрезок длиной l второго проводника со стороны магнитного поля, создаваемого током в первом проводнике, согласно формуле (34.3) действует сила Ампера (магнитная индукция B_1 перпендикулярна проводнику 2, поэтому $\sin \alpha = 1$):

$$F_1 = I_2 B_1 l. \quad (35.1)$$

Магнитная индукция поля, созданного проводником 1 в месте нахождения проводника 2, выражается формулой (32.8), следовательно

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi b}. \quad (35.2)$$

Тогда

$$F_1 = I_2 \frac{\mu_0 I_1}{2\pi b} l, \quad (35.3)$$

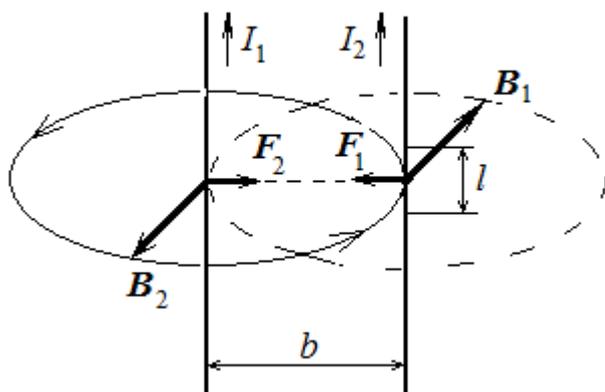


Рис. 35.1.

а сила, приходящаяся на единицу длины этого проводника,

$$F_0 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi b}. \quad (35.4)$$

Если бы мы вычислили индукцию B_2 , создаваемую током I_2 , а затем нашли силу, действующую на проводник I , то получили бы ту же формулу. Следовательно, точно такая же по величине сила, только направленная противоположно, будет действовать на единицу длины первого проводника со стороны магнитного поля второго. Это, кстати, следует из третьего закона Ньютона о равенстве сил действия и противодействия.

Следовательно, проводники с *одинаково направленными* токами *притягиваются*. Легко показать, что проводники с *противоположно направленными* токами *отталкиваются*.

При единичной силе тока в проводниках, расположенных на расстоянии 1 м друг от друга на единицу длины каждого из них будет действовать в вакууме сила

$$F_0 = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1 \cdot 1}{2\pi \cdot 1} = 2 \cdot 10^{-7} \text{ Н / м}. \quad (35.5)$$

На основе эффекта магнитного взаимодействия токов вводится четвертая (вместе с килограммом, метром и секундой) основная единица Международной системы единиц СИ – единица силы тока – ампер.

Ампер – сила неизменяющегося тока, который проходя по двум параллельным прямолинейным проводникам бесконечной длины и ничтожно малого кругового сечения, расположенным на расстоянии 1 м один от другого в вакууме, вызвал бы между этими проводниками силу, равную $2 \cdot 10^{-7}$ Н на каждый метр длины.

§ 36. Действие магнитного поля на движущийся заряд. Сила Лоренца

Зная закон Ампера – выражение для силы, действующую на элемент тока в магнитном поле $d\mathbf{F} = I[d\mathbf{l}, \mathbf{B}]$, – можно определить силу, действующую на отдельный движущийся заряд.

Обозначим через n число упорядоченно движущихся электронов в единице объема проводника, v – скорость этого движения, S – площадь сечения проводника, e – заряд электрона. Тогда сила тока $I = nevS$, а произведение $I dl$ (элемент тока) равно $nevSdl = Nev$, где N – число упорядоченно движущихся электронов в объеме участка тока. Подставив $I dl = Nev$ в формулу амперовой силы и разделив на N , получим силу, действующую на один электрон. Заменив в общем случае e на q , получим

$$\mathbf{F}_\text{Л} = q[\mathbf{v}, \mathbf{B}]. \quad (36.1)$$

Эту силу F_L , действующая на частицу с электрическим зарядом q , движущуюся со скоростью v , во внешнем магнитном поле с индукцией B называют *силой Лоренца* (или *магнитной силой*).

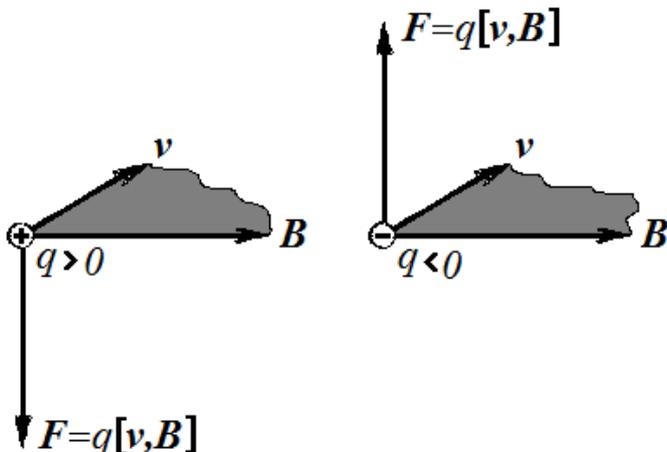


Рис. 36.1.

Модуль силы Лоренца равен

$$F_L = qvB \sin \alpha, \quad (36.2)$$

где q – абсолютное значение движущегося заряда, v – модуль его скорости, B – модуль индукции магнитного поля, α – угол между векторами B и v . Следует подчеркнуть, что на *покоящийся электрический заряд магнитное поле не действует*. Это отличает магнитное поле от электрического.

Направлена сила Лоренца перпендикулярно к плоскости, в которой лежат векторы v и B . Если заряд положительный, направление силы F_L (направление векторного произведения $[v, B]$) определяется *правилом правого винта* (рис. 36.1): если головку винта вращать по направлению от первого сомножителя векторного произведения ко второму (от v к B), то винт продвинется в направлении вектора $[v, B]$. Если заряд отрицательный (рис. 36.1), то направление силы меняется на противоположное.

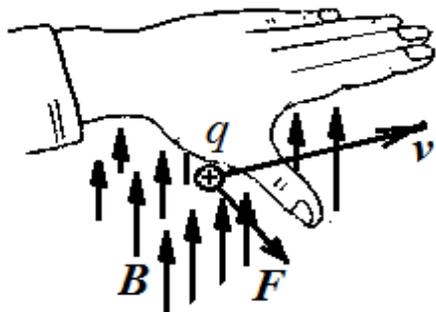


Рис. 36.2.

Другое удобное правило определения направления силы Лоренца F_L , действующей на положительный заряд, – это *правило левой руки* (рис. 36.2): когда магнитные силовые линии входят в ладонь, а четыре вытянутых пальца направлены вдоль скорости заряда, то отогнутый на 90° большой палец укажет направление силы.

В электрическом поле напряженностью E на заряд q независимо от того, движется он или покоится, действует сила $F_e = qE$. Как показывает опыт, электрическое и магнитное поля действуют независимо. Поэтому в случае совместного действия электрического и магнитного полей результирующая сила

$$F = F_e + F_m = qE + q[v, B]. \quad (36.3)$$

Эту полную силу так же часто называют *силой Лоренца*.

Пример 36.1. Два точечных заряда q_1 и q_2 движутся параллельно друг другу с одинаковыми нерелятивистскими скоростями $v \ll c$. Расстояние между зарядами r . Сравнить, во сколько раз сила $F_{Кул}$ электрического взаимодействия между

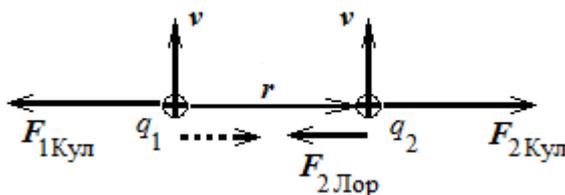


Рис. П. 36.1.

зарядами больше силы $F_{Лор}$ магнитного взаимодействия между ними.

Согласно закону Кулона электрическая сила, действующая, например, на второй заряд со стороны первого, равна

$$F_{2Кул} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^3} \mathbf{r} . \quad (\text{П. 36.1})$$

Здесь \mathbf{r} – радиус–вектор, проведенный от первого заряда ко второму. Магнитная сила (сила Лоренца), действующая на второй заряд, со стороны магнитного поля \mathbf{B}_q , создаваемого движущимся первым зарядом, равна

$$\mathbf{F}_{2Лор} = q_2 [\mathbf{v}, \mathbf{B}_q] , \quad (\text{П.36.2})$$

где согласно (33.1) индукция магнитного поля движущегося заряда q_1 в точке, где находится второй заряд

$$\mathbf{B}_q = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_1}{r^3} [\mathbf{v}, \mathbf{r}] . \quad (\text{П.36.3})$$

Подставляя значение магнитной индукции в формулу силы Лоренца, получим

$$\mathbf{F}_{Лор} = \frac{\mu_0 q_1 q_2}{4\pi r^3} [\mathbf{v}, [\mathbf{v}, \mathbf{r}]] . \quad (\text{П.36.4})$$

Здесь мы встречаемся с двойным векторным произведением векторов. Раскрываем его по известному правилу «БАЦ минус ЦАБ»

$$[\mathbf{a}[\mathbf{b}, \mathbf{c}]] = \mathbf{b}(\mathbf{a}\mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}\mathbf{b}) .$$

Тогда выражение для силы Лоренца приобретает вид

$$\mathbf{F}_{Лор} = \frac{\mu_0 q_1 q_2}{4\pi r^3} (\mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{r}) - \mathbf{r}(\mathbf{v}\mathbf{v})) = \frac{\mu_0 q_1 q_2 v^2}{4\pi r^3} (-\mathbf{r}) . \quad (\text{П.36.5})$$

Здесь учтено, что скалярные произведения векторов равны соответственно:

$$(\mathbf{v}\mathbf{r}) = v \cdot r \cdot \cos 90^\circ = 0, \quad (\mathbf{v}\mathbf{v}) = v^2 .$$

Осталось найти отношение электрической и магнитной сил. Разделив (П.36.1) на (П.36.5), получим:

$$\frac{F_{Кул}}{F_{Лор}} = -\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0 v^2} . \quad (\text{П.36.6})$$

Выясним значение комбинации двух констант:

$$\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} = \frac{1}{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 4 \cdot 3,14 \cdot 10^{-7}} = 9 \cdot 10^{16} \text{ м}^2 / \text{с}^2 . \quad (\text{П.36.7})$$

Величина $1/(\epsilon_0 \mu_0)$ и по числовому значению, и по размерности равна квадрату скорости света в вакууме $c \approx 3 \cdot 10^8$ м/с. Окончательно получаем, что электрическая сила больше магнитной в c^2/v^2 раз.

$$\frac{F_{Кул}}{F_{Лор}} = -\frac{c^2}{v^2} . \quad (\text{П.36.8})$$

Даже для очень больших достижимых скоростей v это отношение огромно, т.е. электрическая сила во много раз превосходит магнитную.

Тем не менее, магнитную силу следует учитывать, например, в проводах с током. Электрические силы в этом случае исчезают вследствие баланса положительных и отрицательных зарядов в проводах, остаются только магнитные силы, которые оказываются достаточно большими.

§ 37. Движение заряженных частиц в однородном магнитном поле

1. Рассмотрим *первый частный случай*, когда частица массой m и зарядом

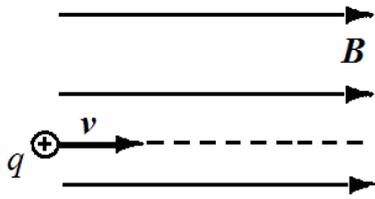


Рис. 37.1

q движется в однородном магнитном поле с индукцией \mathbf{B} так, что скорость частицы \mathbf{v} направлена *параллельно магнитному полю*. В этом случае сила Лоренца

$$\mathbf{F}_L = q[\mathbf{v}, \mathbf{B}] = 0, \quad (37.1)$$

и, следовательно, частица будет двигаться равномерно и прямолинейно (рис. 37.1).

2. *Второй частный случай* имеет место, когда частица движется со скоростью, *перпендикулярной к вектору \mathbf{B}* . В этом случае сила Лоренца равна по модулю

$$F_L = qvB \sin(\pi/2) = qvB \quad (37.2)$$

и направлена по нормали к траектории частицы, сообщая ей нормальное ускорение, равное по модулю

$$a_n = \frac{F_L}{m} = \frac{q}{m} vB. \quad (37.3)$$

Поскольку сила Лоренца \mathbf{F}_L всегда направлена перпендикулярно к скорости \mathbf{v} движения заряженной частицы, она не изменяет величины скорости, а изменяет лишь ее направление. Следовательно, кинетическая энергия заряженной частицы при движении в магнитном поле не изменяется, и *сила Лоренца не совершает работы* при любом перемещении заряженной частицы.

Частица будет двигаться по окружности, радиус которой определится, если приравнять выражение для нормального ускорения выражению (37.3):

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{q}{m} vB. \quad (37.4)$$

Откуда

$$R = \frac{v}{\frac{q}{m} B}. \quad (37.5)$$

Отношение q/m называется удельным зарядом частицы.

Период T обращения частицы, т.е. время, затрачиваемое на один оборот, определим, разделив длину окружности $2\pi R$ на скорость частицы v :

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi}{\frac{q}{m} B}. \quad (37.6)$$

Как следует из (37.6), период обращения частицы не зависит от ее скорости (энергии), а определяется только удельным зарядом частицы и магнитной индукцией поля.

Направление вращения частицы по окружности показано на рис. 37.2 (магнитное поле направлено от нас). Если заряд q положителен, то направление вектора \mathbf{B} и угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ противоположны. В случае отрицательного за-

ряда q эти направления совпадают. (Напомним, что угловая скорость ω направлена по оси вращения по правилу правого винта).

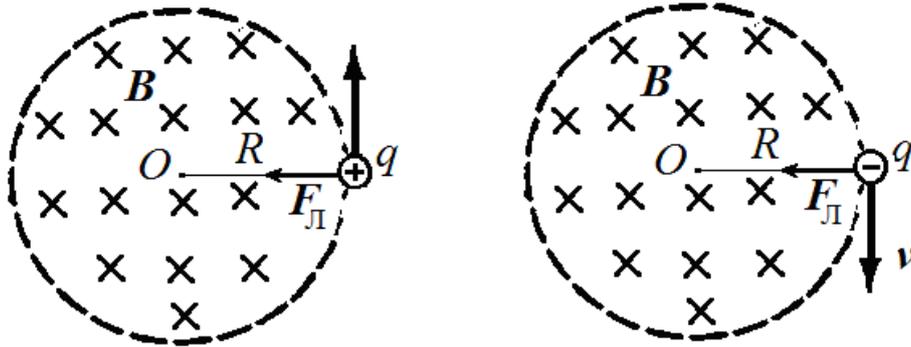


Рис. 37.2.

3. *Третий случай* является общим случаем движения заряженной частицы в однородном магнитном поле, когда ее скорость v направлена под произвольным углом α к вектору магнитной индукции B . Разложим вектор скорости v на две составляющие: скорость вдоль поля (v_{\parallel}) и скорость, перпендикулярную к полю (v_{\perp}) (рис. 37.3):

$$v = v_{\parallel} + v_{\perp}$$

Модули этих составляющих равны

$$v_{\parallel} = v \cos \alpha, \quad v_{\perp} = v \sin \alpha. \quad (37.7)$$

Движения с этими скоростями независимы. Скорость v_{\parallel} в магнитном поле не изменяется, т.к. при движении параллельно полю магнитная сила (сила Лоренца) равна нулю. Поэтому в направлении поля частица движется по инерции равномерно и прямолинейно со скоростью $v_{\parallel} = v \cos \alpha$. Благодаря составляющей v_{\perp} частица должна двигаться по окружности, плоскость которой перпендикулярна к вектору B , а радиус по формуле (37.5) равен

$$R = \frac{v_{\perp}}{\frac{q}{m} B} = \frac{v \sin \alpha}{\frac{q}{m} B}. \quad (37.8)$$

В результате сложения обоих независимых движений частица будет двигаться по цилиндрической спирали (*винтовой линии*), ось которой совпадает с линией магнитной индукции (рис. 37.3).

37.3).

Расстояние h между соседними витками (шаг винтовой линии) равно

$$h = v_{\parallel} \cdot T.$$

Заменяв v_{\parallel} по формуле (37.7), а T по (37.6), получим

$$h = \frac{2\pi m}{B q} v \cos \alpha \quad (37.9)$$

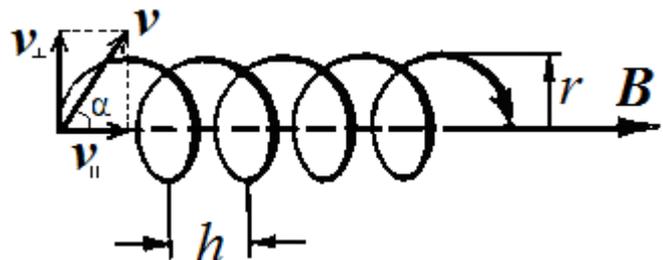


Рис. 37.3

Пример 37.1. Электрон движется в однородном магнитном поле с индукцией $B = 1$ мТл по окружности радиусом $r = 5$ см. Определить кинетическую энергию электрона. Увеличение массы электрона со скоростью не учитывать.

Из соотношения $R = \frac{v}{\frac{q}{m}B}$ получим

$$v = \frac{qBR}{m},$$

откуда нерелятивистское выражение для кинетической энергии дает

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{(qBR)^2}{2m} = 3,52 \cdot 10^{-17} \text{ Дж}.$$

Пример 37.2. В однородное магнитное поле с индукцией 1 Тл влетает протон. Траектория протона представляет собой винтовую линию с радиусом $R = 8$ см и шагом $h = 40$ см. Определить скорость протона. Какую ускоряющую разность потенциалов U прошел протон, прежде чем влететь в магнитное поле?

Если подставить в формулу (37.9) значение радиуса винтовой линии (37.8), то получим

$$h = 2\pi R / \operatorname{tg} \alpha,$$

откуда

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2\pi R}{h}.$$

Выразим косинус угла α между скоростью протона и направлением магнитной индукции через тангенс по формулам тригонометрии:

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2\pi R}{h}\right)^2}}.$$

Теперь по формуле (37.9) можно определить скорость протона

$$v = \frac{qBh}{2\pi m \cos \alpha} = \frac{qBh}{2\pi m} \sqrt{1 + \left(\frac{2\pi R}{h}\right)^2} = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 1 \cdot 0,4}{2 \cdot 3,14 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27}} \sqrt{1 + \left(\frac{6,28 \cdot 0,08}{0,4}\right)^2} = 9,8 \cdot 10^6 \text{ м/с}$$

Кинетическую энергию протона, прошедшего ускоряющую разность потенциалов, приравняем работе ускоряющего поля

$$\frac{mv^2}{2} = qU.$$

Отсюда находим разность потенциалов

$$U = \frac{mv^2}{2q} = \frac{1,67 \cdot 10^{-27} \cdot (9,8 \cdot 10^6)^2}{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} = 5 \cdot 10^5 \text{ В} = 0,5 \text{ МВ}$$

Пример 37.3. В близких к полюсам Земли широтах (северных и южных) наблюдаются *полярные сияния*. Это свечение на высотах 90—1000 км разреженных слоев атмосферы. Оно вызывается взаимодействием компонентов высоких слоев атмосферы - атомов и молекул кислорода, азота и водорода - с заряженными частицами больших энергий (электронами и протонами), испускаемых активными областями на Солнце (вспышками).

При этом ускоренные заряженные частицы проникают в зоны полярных сияний под воздействием магнитного поля Земли. Они движутся к магнитным полюсам Земли под действием силы Лоренца вдоль магнитных силовых линий Земли, навиваясь на них.

Соударения частиц с молекулами и атомами кислорода и азота приводят к возбуждению последних, т. е. к переходу в состояние с более высокой энергией. Возврат в начальное,

равновесное состояние происходит путём излучения квантов света характерных длин волн. Такова одна из гипотез северного сияния.

Пример 37.4. Циклотрон. Рассмотрим в качестве примера ускорение заряженных частиц. Ускорителями заряженных частиц называются устройства для получения заряженных частиц больших энергий. В ускорителях используется комбинированное воздействие на заряженные частицы электрического и магнитного полей (рис. П.37.1).

Электрическое поле используется для ускорения заряженных частиц. Известно, что, пройдя разность потенциалов U , частица с зарядом q приобретает кинетическую энергию $E_k = qU$. Однако для получения больших энергий создать разности потенциалов в сотни миллионов и миллиарды вольт не представляется возможным. Эту трудность можно обойти, используя *циклический способ ускорения* заряженных частиц. В этом способе заряженную частицу заставляют многократно проходить через электрическое поле, каждый раз увеличивая ее энергию.

Простейший циклический резонансный ускоритель тяжелых частиц (протонов, ионов) – *циклотрон*. Он состоит из двух полых электродов (дуантов), представляющих собой две половины невысокой цилиндрической коробки, разделенных узкой щелью (рис. П.37.1).

Дуанты заключены в вакуумную камеру (давление $\sim 10^{-6}$ мм. рт.ст), которая помещена между полюсами сильного электромагнита. Магнитное поле однородно и перпендикулярно плоскости дуантов (рис. П.37.1). На дуанты подается переменное напряжение от генератора высокой частоты.

Вблизи центра магнита в промежутке между дуантами располагается источник заряженных частиц – например, ионов.

Пусть отрицательный ион, вылетает из источника в то время, когда дуант 1 имеет положительный потенциал (рис. П.37.2). Ион будет втянут внутрь дуанта, приобретет некоторую скорость и опишет внутри дуанта 1 полуокружность постоянного радиуса.

Когда ион входит в дуант, ускоряющее действие электрического поля прекращается. Это связано с тем, что металлические стенки дуанта экранируют его внутреннюю полость от электрического поля. Внутри дуанта частица находится под действием только магнитного поля.

Как следует из формулы (37.6), период обращения иона в магнитном поле

$$T = 2\pi \frac{m}{qB}$$

не зависит от его скорости.

Можно подобрать магнитную индукцию B так, чтобы период обращения иона совпал с периодом генератора высокой частоты. Это означает, что к моменту выхода иона из дуанта 1 напряжение электрического поля от высокочастотного генератора изменится на обратное: дуант 2 приобретет положительный потенциал, а дуант 1 отрицательный. Поэтому ион вновь ускорится и внутри дуанта 2 опишет полуокружность уже большего радиуса, но время, за которое он пройдет половину окружности, останется прежним.

Таким образом ион будет попадать в зазор между дуантами каждый раз в одной и той же фазе переменного высокочастотного электрического поля, т.е. когда сила действия электрического поля направлена в сторону движения иона.

Двигаясь в резонансе с высокочастотным полем, ионы по спирали приближаются к краю магнита. Их энергия будет расти на величину qU после каждого прохождения зазора между дуантами.

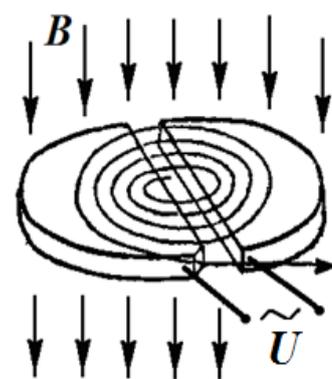


Рис. П.37.1.

Располагая источником напряжения сравнительно небольшой величины, можно ускорять протоны до энергий порядка 25 МэВ (т.е. энергии, которую получил бы протон, пройдя ускоряющую разность потенциалов в 25 миллионов вольт).

Однако имеются причины, ограничивающие возможности значительного увеличения энергии частиц в циклотроне. Когда частицы разгоняются до скоростей, близких к скорости света, приходится учитывать зависимость массы ускоряемых частиц от скорости. Поэтому для достижения больших энергий частиц изменяют либо частоту переменного напряжения (фазотроны), либо величину магнитного поля (синхротроны), либо и то, и другое (синхрофазотроны).

Пример. 37.5. Циклотрон ускоряет протоны до энергии 20 МэВ. Каков радиус дуантов циклотрона, если магнитная индукция $B = 2$ Тл? Масса протона $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$ кг, его удельный заряд $e/m_p = 0,959 \cdot 10^8$ Кл/кг.

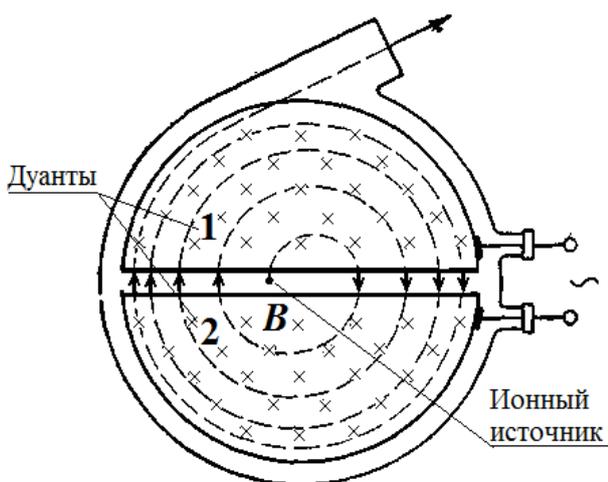


Рис. П.37.2

Согласно формуле (37.5) радиус окружности, по которой движется заряженная частица в магнитном поле,

$$R = \frac{v}{\frac{q}{m} B}$$

Скорость протона выразим через его кинетическую энергию. При этом будем пользоваться нерелятивистским выражением для кинетической энергии

$$E_k = \frac{m_p v^2}{2},$$

т.к. кинетическая энергия протона по условию 20 МэВ, что гораздо меньше его энергии покоя $E_0 = 938,2$ МэВ. Отсюда скорость протона

$$v = \sqrt{\frac{2E_k}{m_p}}$$

Радиус дуанта очевидно не может быть меньшим радиуса описываемой протоном окружности. Определим его в системе СИ, заменив электронвольты на джоули ($1 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Дж):

$$R \geq \frac{\sqrt{\frac{2E_k}{m_p}}}{\frac{e}{m_p} B} = \frac{\sqrt{\frac{2 \cdot 20 \cdot 10^6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{1,67 \cdot 10^{-27}}}}{0,959 \cdot 10^8 \cdot 2} = 0,323 \text{ м} = 32,3 \text{ см}.$$

§ 38. Эффект Холла

Если вдоль проводящей пластины, помещенной в поперечное магнитное поле, идет ток, то на носители тока будет действовать сила Лоренца в направлении, перпендикулярном и к магнитному полю, и к току (рис. 38.1).

Действием этой силы объясняется возникновение поперечного электрического поля в проводнике или полупроводнике с током при помещении его в

магнитное поле. Это явление было обнаружено американским физиком Э.Холлом еще до открытия электронов.

Рассмотрим проводящую пластину с током, которую пронизывает магнитное поле с индукцией \mathbf{B} , направленное «от нас» (рис. 38.1). Каждый носитель тока оказывается под действием силы Лоренца.

У отрицательных зарядов вектор скорости упорядоченного движения \mathbf{v} и ток I направлены в противоположные стороны, у положительных зарядов эти направле-

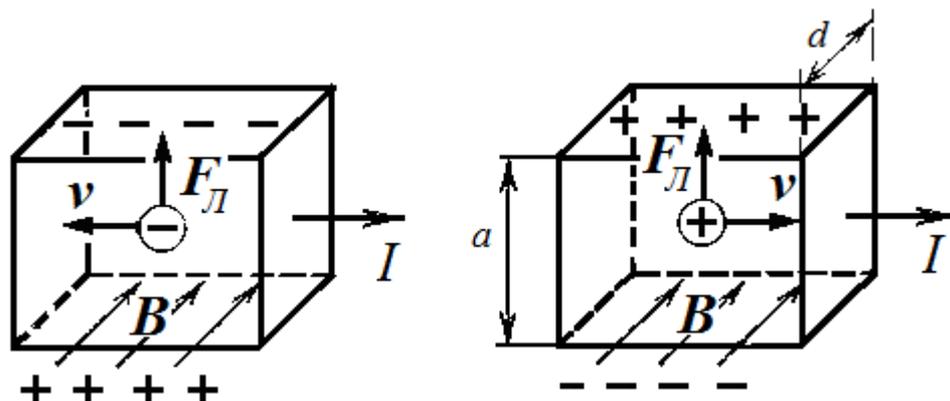


Рис. 38.1.

ния совпадают. Применяя правило левой руки, находим, что в обоих случаях, изображенных на рис. 38.1, сила Лоренца направлена к верхней грани пластины. Следовательно, носители зарядов, независимо от их знака, накапливаются на верхней грани пластины.

Если носителями тока являются электроны (у металлов и полупроводников n -типа), у верхней грани образуется избыток отрицательных зарядов, соответственно у нижней грани – избыток положительных зарядов. У полупроводников p -типа носителями тока являются так называемые «дырки», имеющие положительный заряд. В этом случае верхняя грань заряжается положительно, а нижняя – отрицательно.

Заряды, скопившиеся на верхней и нижней гранях пластины, создают внутри пластины поперечное (и к току, и к полю) электрическое поле напряженностью \mathbf{E}_x . Это поле действует на электрические заряды с силой

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}_x. \quad (38.1)$$

С другой стороны, на заряды действует сила Лоренца, равная по модулю

$$F_L = qvB$$

(т.к. \mathbf{v} перпендикулярно \mathbf{B}).

Эти две силы уравновешивают друг друга:

$$qvB = qE_x,$$

откуда

$$E_x = vB. \quad (38.2)$$

Из формулы для плотности тока $\mathbf{j} = qn\mathbf{v}$ находим скорость упорядоченного движения зарядов

$$v = \frac{j}{qn}. \quad (38.3)$$

Тогда для напряженности поперечного (холловского) электрического поля получаем

$$E_X = \frac{B}{qn} j . \quad (38.4)$$

Умножив напряженность E_X на расстояние a между гранями пластины, получим поперечное напряжение (разность потенциалов между этими гранями)

$$U_X = E_X a = \frac{B}{qn} ja = R_X Bja . \quad (38.5)$$

Здесь коэффициент

$$R_X = \frac{1}{qn} \quad (38.6)$$

называется *постоянной Холла*.

Поскольку сила тока $I = j \cdot S = j \cdot ad$,

$$U_H = R_X \frac{IB}{d} . \quad (38.7)$$

Определив знак холловской разности потенциалов, можно установить знак носителей тока, а измерив постоянную Холла, можно определить концентрацию носителей тока в соответствующих металлах и полупроводниках. Так, было найдено, что плотность электронов в металлах составляет $n \approx 10^{28} \text{ м}^{-3}$, а в полупроводниках $n \approx 10^{20} \text{ м}^{-3}$ (в кубическом сантиметре, соответственно, 10^{22} и 10^{14}).

На основе эффекта Холла работают датчики Холла: приборы, позволяющие прямо и точно измерять индукцию магнитного поля, а также выполняющие другие задачи автоматики.

Пример 38.1. По серебряной ленте толщиной $d = 0,1$ мм проходит ток силой $I = 10$ А. Лента находится в магнитном поле с индукцией $B = 1$ Тл. Линии индукции перпендикулярны к ленте. Холловская разность потенциалов оказалась равной $U_H = -8,87$ мкВ. Определить концентрацию n носителей тока в серебре.

Поскольку холловская разность потенциалов по условию отрицательна, носители тока имеют отрицательный заряд. Это электроны, что, вообще говоря, очевидно, т.к. серебро – металл.

Концентрацию электронов в серебре можно найти из соотношения

$$n = \frac{1}{R_H e} .$$

Постоянная Холла определяется выражением

$$R_H = \frac{U_H d}{IB} .$$

Откуда концентрация электронов в серебре

$$n = \frac{IB}{U_H d e} = \frac{10 \cdot 1}{(-8,87 \cdot 10^{-6}) \cdot 10^{-4} \cdot (-1,6 \cdot 10^{-19})} = 7,05 \cdot 10^{28} \text{ 1/м}^3 .$$

§ 39. Циркуляция вектора магнитной индукции в вакууме

Напомним, что *циркуляцией вектора \mathbf{B}* по заданному замкнутому контуру L называется криволинейный интеграл по замкнутому контуру от скалярного произведения вектора \mathbf{B} и вектора элемента длины контура $d\mathbf{l}$. Модуль вектора $d\mathbf{l}$ равен малому элементу длины dl , а направление совпадает с направлением обхода контура.

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \oint_L B dl \cos \alpha = \oint_L B_l dl. \quad (39.1)$$

Здесь $B_l = B \cos \alpha$ – проекция вектора \mathbf{B} на направление $d\mathbf{l}$, α – угол между вектором \mathbf{B} и вектором элемента длины $d\mathbf{l}$.

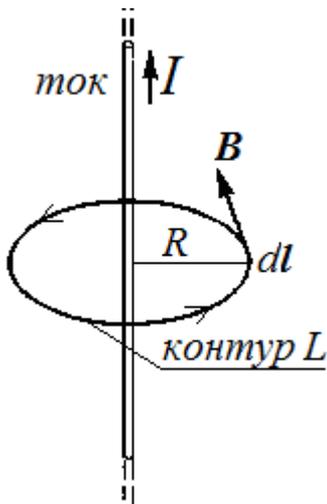


Рис. 39.1.

Циркуляцию вектора \mathbf{B} проще всего вычислить на примере магнитного поля прямолинейного проводника с током (рис. 39.1). Линии магнитной индукции поля прямого тока представляют собой концентрические окружности, лежащие в плоскости, перпендикулярной к проводу, по которому течет ток, и согласованные с направлением тока правилом правого винта. Выберем одну из таких линий в качестве замкнутого контура L , направление обхода контура также согласуем с направлением тока правилом правого винта. Вычислим интеграл (39.1) по этому замкнутому контуру.

В каждой точке данного контура вектор \mathbf{B} направлен по касательной к окружности и равен по модулю

$$B_l = B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}.$$

Подставив это значение в формулу (39.1), и учитывая, что $\oint_L dl = 2\pi R$ (длина окружности), получим

$$\oint_L B_l dl = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \oint_L dl = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} 2\pi R = \mu_0 I. \quad (39.2)$$

Мы доказали, что циркуляция вектора \mathbf{B} поля прямолинейного тока в вакууме по окружности, *охватывающей* ток, равна произведению магнитной постоянной на силу тока.

Равенство (39.2) справедливо также для контура L произвольной формы, который *охватывает* проводник с током I .

Если замкнутый контур L *не охватывает* проводника с током, то криволинейный интеграл по такому пути равен нулю.

Докажем это также на примере. Пусть замкнутый контур L ограничивает сегмент $ABCD$ и образован двумя дугами AB и CD , являющимися частями магнитных силовых линий прямого тока I (рис. 39.2), и двумя отрезками радиусов AD и BC этих окружностей. Ток I перпендикулярен к плоскости рисунка, направлен «к нам» и не охватывается контуром.

Вычислим циркуляцию $\oint_{ABCD} B_l dl$ вектора \mathbf{B}

по этому контуру. Контур будем обходить, например, против часовой стрелки. Разобьем криволинейный интеграл на 4 интеграла по отдельным участкам контура:

$$\oint_{ABCD} B_l dl = \int_{AB} B_l dl + \int_{BC} B_l dl + \int_{CD} B_l dl + \int_{DA} B_l dl.$$

Напомним, что B_l – это проекция вектора магнитной индукции \mathbf{B} на направление dl , которое задается выбором направления обхода контура, т.е.

$$B_l = B \cdot \cos \alpha,$$

где α – угол между векторами \mathbf{B} и dl .

Поскольку отрезки BC и AD (радиусы) перпендикулярны к вектору \mathbf{B} (направленному по касательной), то проекции B_l вектора \mathbf{B} на эти отрезки равны нулю. Поэтому второй и четвертый интегралы равны нулю.

Для выбранного нами направления обхода контура всюду на дуге CD угол α равен нулю (рис. 39.2), $\cos 0 = 1$ и $B_l = B_2$.

На дуге AB угол α равен 180° (рис. 39.2), $\cos 180^\circ = -1$ и $B_l = -B_1$.

Учитывая, что на дугах AB и CD магнитная индукция имеет постоянное числовое значение, получим

$$\oint_{ABCD} B_l = -B_1 \int_{AB} dl + B_2 \int_{CD} dl = -B_1 \cdot AB + B_2 \cdot CD. \quad (39.2)$$

Из формулы $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$ следует отношение

$$\frac{B_1}{B_2} = \frac{R_2}{R_1}. \quad (39.3)$$

Однако, CD длиннее AB в то же число раз, так как эти две дуги стягивают один и тот же угол относительно проводника:

$$\frac{CD}{AB} = \frac{R_2}{R_1}. \quad (39.4)$$



Рис. 39.3.

Тогда полный интеграл (39.2) обращается в нуль.

Мы доказали, что циркуляция вектора магнитной индукции поля прямолинейного проводника с током вдоль замкнутого контура, не охватывающего этот проводник, равна нулю.

Любой замкнутый контур произвольной формы можно представить в виде построенного из радиальных сегментов и дуг (рис. 39.3). Если этот контур не охватывает тока, криволинейный интеграл по такому контуру равен нулю.

Если имеется большое количество проводников с токами и часть из них охватывается контуром интегрирования, то циркуляция вектора \mathbf{B} определяется алгебраической суммой только

таких токов, которые охватываются контуром.

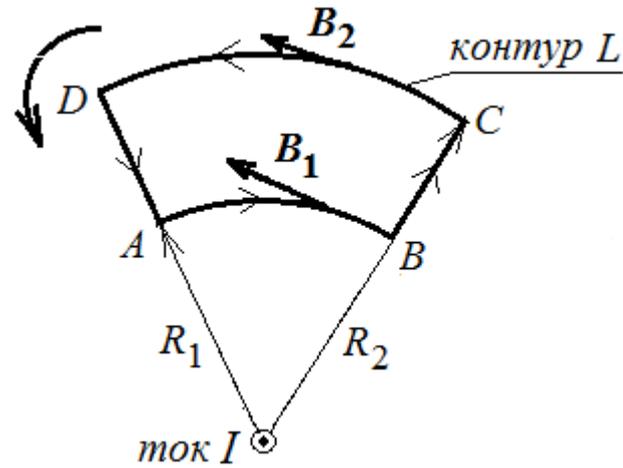


Рис. 39.2.

В силу принципа суперпозиции

$$\oint_L \mathbf{B}_i d\mathbf{l} = \oint_L (\mathbf{B}_{1l} + \mathbf{B}_{2l} + \dots) d\mathbf{l} = \mu_0 I_1 + \mu_0 I_2 + \dots \quad (39.5)$$

Таким образом, **циркуляция вектора магнитной индукции по произвольному контуру равна умноженной на магнитную постоянную алгебраической сумме токов, охватываемых этим контуром:**

$$\oint_L \mathbf{B}_i d\mathbf{l} = \mu_0 \sum_i I_i . \quad (39.6)$$

Выражение (39.6) теоремы о циркуляции называют также **законом полного тока.**

При вычислении алгебраической суммы токов будем пользоваться таким **правилом знаков.** Положительным будем считать ток, направление которого связано с направлением обхода по контуру правилом правого винта, ток противоположного направления будем считать отрицательным.

Пример 39.1. Ток силой $I = 6$ А течет по сплошному однородному стержню круглого сечения радиуса $R = 1$ см. Пользуясь теоремой о циркуляции вектора \mathbf{B} , определить магнитную индукцию в точках, расположенных внутри стержня и удаленных на расстояние $r = 0,5$ см от оси стержня и вне стержня ($r = 1,5$ см).

Пусть точка наблюдения лежит *вне* стержня, $r \geq R$. В качестве контура для вычисления циркуляции выберем окружность радиуса r , лежащую в плоскости, перпендикулярной току и имеющую центр на оси стержня (рис. П.39.1).

Теорема о циркуляции дает

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 I,$$

откуда

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (\text{вне стержня, } r \geq R).$$

Этот результат уже известен – это магнитное поле прямого тока.

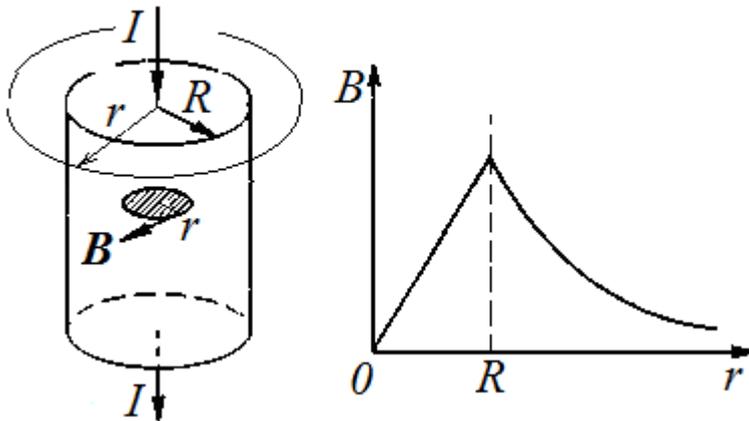


Рис. П. 39.1.

$$B = \frac{4 \cdot 3,14 \cdot 10^{-7} \cdot 6}{2 \cdot 3,14 \cdot 1,5 \cdot 10^{-2}} = 80 \text{ (мкТл)}$$

Определим теперь магнитную индукцию в какой-либо точке *внутри* стержня ($r \leq R$). Замкнутый контур опять выберем в виде окружности, проходящей через эту точку с центром на оси стержня. Тогда по теореме о циркуляции имеем:

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 j \pi r^2 ,$$

где $j = I / \pi R^2$ – плотность тока, текущего через стержень.

Отсюда

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r . \quad (\text{П.39.1})$$

$$B = \frac{4 \cdot 3,14 \cdot 10^{-7} \cdot 6}{2 \cdot 3,14 \cdot 10^{-4}} 0,5 \cdot 10^{-2} = 60(\text{мкТл})$$

Таким образом, *внутри* однородного стержня магнитная индукция увеличивается с расстоянием от оси по линейному закону, а *вне* стержня уменьшается по гиперболическому закону (рис. П.39.1).

Пусть теперь ток течет по поверхности полой тонкостенной трубки. Каким будет магнитное поле внутри трубки?

Если взять замкнутый контур, лежащий внутри трубки, то он не охватывает токов. Тогда из теоремы о циркуляции вытекает, что магнитного поля внутри трубки с током нет.

Сравним циркуляцию электростатического и магнитного полей в вакууме. Как было показано в § 37, **циркуляция вектора напряженности электростатического поля по произвольному замкнутому контуру равна нулю.**

$$\oint_L E_l dl = 0.$$

Это условие позволило ввести скалярный потенциал электростатического поля φ .

Циркуляция вектора магнитной индукции пропорциональна алгебраической сумме токов, охватываемых контуром. Поэтому для магнитного поля нельзя ввести скалярный потенциал, как это было сделано для электростатического поля.

Поле, у которого циркуляция отлична от нуля, называется **вихревым**.

Основное отличие магнитного поля от электростатического заключается в том, что в то время, как электростатическое поле потенциально, магнитное поле является вихревым.

Наиболее наглядно разницу потенциальных и вихревых полей можно представить по картине силовых линий. Силовые линии электростатического поля начинаются и заканчиваются на электрических зарядах или уходят на бесконечность. Силовые линии магнитного поля всегда замкнуты и охватывают текущие токи, либо приходят из бесконечности и уходят на бесконечность.

§ 40. Магнитное поле соленоида и тороида

Соленоид представляет собой изолированный проводник, намотанный по винтовой линии на цилиндрический каркас. Если длина соленоида гораздо

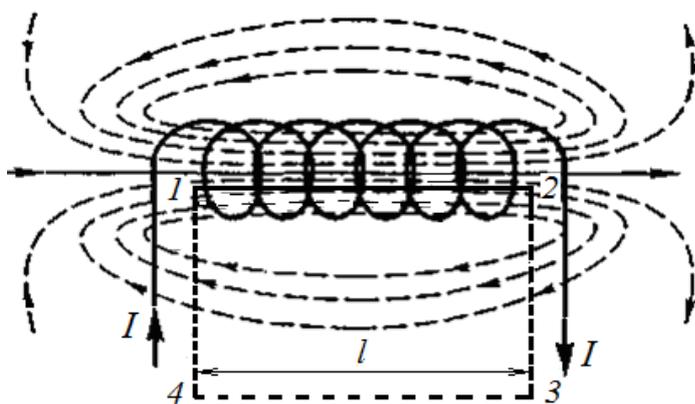


Рис. 40.1.

больше его диаметра, соленоид считается бесконечно длинным. Каждый из витков соленоида представляет собой круговой ток, создающий в центре магнитное поле, направленное по оси витка. Очевидно, так же будет направлено и магнитное поле на оси соленоида.

Экспериментальное изучение магнитного поля соленоида показывает, что внутри соленоида поле является однородным и направлено параллельно оси, вне соленоида — неоднородным и очень слабым.

Линии магнитного поля соленоида показаны на рис. 40.1. Внутри соленоида направление линий образует с направлением тока правовинтовую систему.

Рассчитаем, применяя теорему о циркуляции, индукцию магнитного поля внутри соленоида. Рассмотрим соленоид длиной l , имеющий N витков, по которому течет ток I . Число витков соленоида, приходящихся на единицу длины, $n=N/l$.

Возьмем прямоугольный контур 1234 (рис. 40.1) и вычислим циркуляцию вектора \mathbf{B} по этому контуру, охватывающему все N витков. Интеграл по 12341 можно представить в виде четырех интегралов: по 12 , 23 , 34 , 41 :

$$\oint_L \mathbf{B}_l dl = \int_{1 \rightarrow 2} \mathbf{B}_l dl + \int_{2 \rightarrow 3} \mathbf{B}_l dl + \int_{3 \rightarrow 4} \mathbf{B}_l dl + \int_{4 \rightarrow 1} \mathbf{B}_l dl. \quad (40.1)$$

На участках 23 и 41 контур перпендикулярен линиям магнитной индукции, откуда следует $B_l = 0$, и второй и четвертый интегралы равны нулю. Участок 34 можно выбрать достаточно далеко от соленоида, где магнитное поле равно нулю. Таким образом, учитывая, что на участке 12 вектор магнитной индукции \mathbf{B} параллелен вектору элементарной длины контура $d\mathbf{l}$ и, следовательно, $B_l = B$, получим

$$\oint_L \mathbf{B}_l dl = \int_{1 \rightarrow 2} \mathbf{B}_l dl = Bl. \quad (40.2)$$

Рассмотренный контур охватывает суммарный ток $NI = nIl$, где n — число витков соленоида, приходящееся на единицу длины, I — сила тока в соленоиде. Следовательно, $Bl = \mu_0 nIl$ или

$$B = \mu_0 nI, \quad (40.3)$$

т.е. поле внутри длинного соленоида всюду одинаково (однородно). Искажением поля вблизи торцов соленоида обычно пренебрегают.

Поскольку две половины бесконечного соленоида в точке их соединения вносят одинаковый вклад в магнитное поле, то магнитная индукция полубесконечного соленоида у его края вдвое меньше, чем в объёме:

$$B = \frac{1}{2} \mu_0 nI. \quad (40.4)$$

Тороидом называется кольцевая катушка, витки которой намотаны на каркас, имеющий форму тора (рис. 40.2). Вычислим индукцию магнитного поля внутри замкнутой тороидальной катушки. Из условий симметрии следует, что силовые линии магнитного поля тороида должны иметь форму окружностей, центры которых совпадают с центром тороида. Возьмем контур в виде окружности радиуса $r_1 < r < r_2$ и вычислим циркуляцию вектора магнитной индукции вдоль этого контура. Из соображений симметрии очевидно также, что вектор \mathbf{B} в каждой точке силовой линии должен быть направлен по касательной к контуру (окружности), а его модуль одинаков во всех точках окружности.

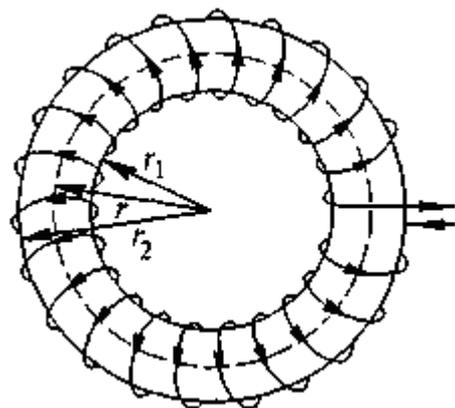


Рис. 40.2

Тогда по теореме о циркуляции имеем

$$\oint_L B_l dl = B \cdot 2\pi r = \mu_0 IN,$$

где N – полное число витков, а I – ток в обмотке тороида. Отсюда

$$B = \frac{\mu_0 IN}{2\pi r}. \quad (40.5).$$

Формула (40.5) показывает, что поле тороида зависит от расстояния r до центра, т.е. в отличие от поля соленоида, не является однородным. Магнитная индукция в торе максимальна вблизи внутренней стороны и минимальна вблизи внешней стороны тора.

Если $r < r_1$, то окружность радиуса r не охватывает проводников с током, $\sum I_i = 0$, и по теореме о циркуляции (39.6) $B = 0$.

Если $r > r_2$, то окружность радиуса r охватывает $2N$ проводников с током, причем в N из них ток течет в одном направлении, а в других N – в противоположном. Поэтому $\sum I_i = 0$ и $B = 0$.

Следовательно, вне тороида магнитного поля нет.

§ 41. Поток вектора магнитной индукции

Аналогично тому, как в электростатике был введен поток вектора напряженности \mathbf{E} , введем понятие потока вектора магнитной индукции \mathbf{B} .

Потоком вектора \mathbf{B} магнитной индукции или магнитным потоком через малую площадку dS называется физическая величина, равная произведению величины площадки и проекции B_n вектора на нормаль к этой площадке, т.е.

$$d\Phi_B = B_n dS. \quad (41.1)$$

Введем в рассмотрение вектор $d\mathbf{S}$ – *вектор площадки*, направленный перпендикулярно к плоскости площадки в направлении внешней нормали и равный по величине площади этой элементарной площадки (рис. 41.1).

Тогда элементарный магнитный поток через малую площадку dS можно записать как *скалярное произведение* векторов \mathbf{B} и $d\mathbf{S}$:

$$d\Phi_B = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = B dS \cos \alpha = B_n dS, \quad (41.2)$$

где B_n – проекция вектора \mathbf{B} на нормаль к площадке, $B_n = B \cos \alpha$, α – угол между нормалью к площадке и направлением магнитного поля (рис. 41.1).

Полный поток Φ_B вектора магнитной индукции через произвольную поверхность S равен алгебраической сумме потоков через все малые участки этой поверхности – интегралу по поверхности:

$$\Phi_B = \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = \int_S B dS \cos \alpha = \int_S B_n dS = \int_S B dS_n. \quad (41.3)$$

В СИ единица магнитного потока называется *вебер* (Вб). Магнитный поток в 1 Вб создается магнитным полем с индукцией, равной 1 Тл, через площадку в 1 м², расположенную перпендикулярно к направлению поля:

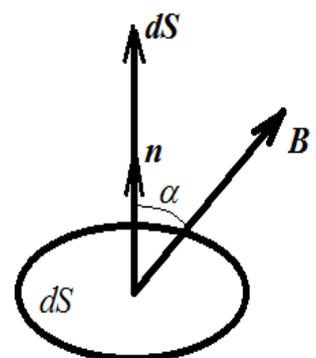


Рис. 41.1

$$1 \text{ Вб} = 1 \text{ Тл} \cdot 1 \text{ м}^2.$$

Так же, как в случае электрического поля, можно условиться проводить столько магнитных силовых линий через единичную площадку, перпендикулярную направлению поля, какова в этом месте магнитная индукция. Тогда магнитный поток приобретает наглядный образ – это полное число магнитных силовых линий, проходящих через данную поверхность.

Отсутствие в природе магнитных зарядов приводит к тому, что линии вектора магнитной индукции \mathbf{B} не имеют ни начала, ни конца – линии магнитной индукции всегда замкнуты. Поэтому число линий, входящих в некоторый объем пространства, равно числу линий, выходящих из объема. Если входящие потоки брать с одним знаком, а выходящие – с другим, то суммарный поток вектора магнитной индукции через замкнутую поверхность будет равен нулю.

Следовательно, **поток вектора магнитной индукции \mathbf{B} через любую замкнутую поверхность равен нулю.** Т.о. для любого магнитного поля и произвольной замкнутой поверхности S выполняется условие

$$\oint_S \mathbf{B}_n dS = 0. \quad (41.4)$$

Формула (41.4) выражает *теорему Гаусса для вектора \mathbf{B}* и является интегральным признаком любого вихревого векторного поля.

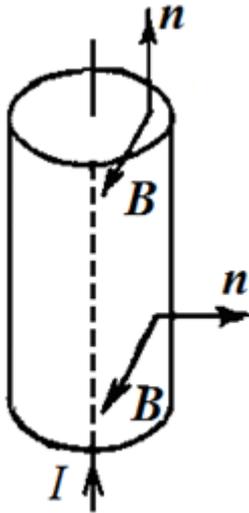


Рис. 41.2.

Продemonстрируем справедливость теоремы Гаусса для магнитного поля на *примере*.

Рассмотрим отрезок прямого проводника с током и найдем магнитный поток через окружающую его замкнутую поверхность. В качестве замкнутой поверхности S возьмем поверхность прямого кругового цилиндра, ось которого совпадает с проводником (рис. 41.2). Линии индукции магнитного поля прямого тока представляют собой концентрические окружности, центры которых лежат на оси проводника, а плоскости перпендикулярны к нему. Поэтому линии индукции

не пересекают ни боковой поверхности цилиндра, ни его оснований. В любой точке поверхности цилиндра проекция вектора \mathbf{B} на направление нормали \mathbf{n} к поверхности равна нулю

($B_n = 0$), так что действительно $\oint_S \mathbf{B}_n dS = 0$.

Для сравнения отметим, что электростатическая теорема Гаусса утверждает, что поток вектора напряженности \mathbf{E} электростатического поля через замкнутую поверхность определяется суммой электрических зарядов, заключенных внутри этой поверхности. Равенство нулю магнитного потока через произвольную замкнутую поверхность равносильно, по сути дела, утверждению об отсутствии в природе магнитных зарядов.

§ 42. Работа, совершаемая при перемещении проводника с током в магнитном поле

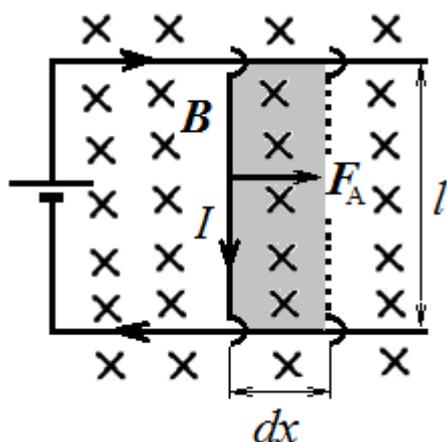


Рис. 42.1.

Пусть прямолинейный проводник длиной l , по которому течет ток силой I , помещен в однородное магнитное поле B перпендикулярно линиям магнитной индукции (рис. 42.1). В таком случае на него со стороны магнитного поля будет действовать в соответствии с законом Ампера сила, модуль которой

$$F_A = IBl. \quad (42.1)$$

Направление силы легко определить с помощью правила левой руки – при указанных на рисунке направлениях тока и магнитного поля сила направлена вправо. Под действием этой силы проводник будет перемещаться (например, с помощью скользящих контактов)

и передвинется на некоторое расстояние dx .

Определим работу амперовой силы на пути dx :

$$dA = F_A dx = IBl dx.$$

Произведение $l dx$ равно заштрихованной на рис. 42.1 площади dS , а BdS – потоку магнитной индукции через эту площадь:

$$dA = IBdS = Id\Phi. \quad (42.2)$$

Работа при перемещении проводника с током в магнитном поле равна произведению силы тока в проводнике на магнитный поток, пересеченный проводником при его движении.

Необходимо подчеркнуть, что работа перемещения проводника с током в магнитном поле совершается не за счет энергии магнитного поля, а за счет энергии источника, поддерживающего постоянный ток в проводнике.

Пусть теперь замкнутый контур, для простоты прямоугольной формы (рис. 42.2), с постоянным током I перемещается в перпендикулярном к плоскости чертежа магнитном поле B (направленном «от нас» за чертеж) из положения A в положение B . Определим работу перемещения.

Силы F_1 и F_2 , действующие на боковые участки контура, направлены в противоположные стороны и равны по модулю. Работа силы F_2 положительна, работа силы F_1 отрицательна. Силы, действующие на верхний и нижний участки контура работы не производят, т.к. эти силы перпендикулярны перемещению. Сторона 2 пересекает при движении магнитный поток через поверхности B и B , работа силы F_2 :

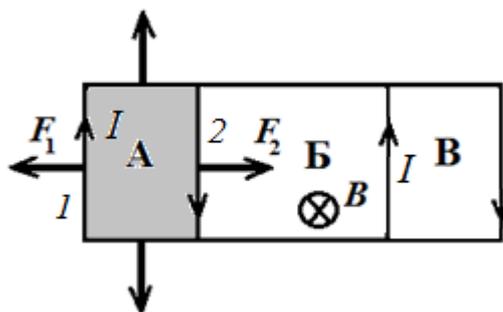


Рис. 42.2.

$$A_2 = I(\Phi_B + \Phi_B).$$

Соответственно, сторона I пересекает поверхности A и B , работа силы F_1

$$A_1 = -I(\Phi_A + \Phi_B).$$

Результирующая работа

$$A = A_1 + A_2 = -I(\Phi_A + \Phi_B) + I(\Phi_B + \Phi_B) = I(\Phi_B - \Phi_A) = I(\Phi_K - \Phi_H) = I \Delta\Phi. \quad (42.3)$$

Здесь Φ_H – магнитный поток через контур в начале перемещения, Φ_K – магнитный поток через контур в конце перемещения, $\Delta\Phi$ – приращение потока через контур. Можно доказать, что эта формула верна для контура произвольной формы в произвольном постоянном магнитном поле.

Работа перемещения замкнутого контура с током в магнитном поле равна произведению силы тока в контуре на приращение магнитного потока через контур.

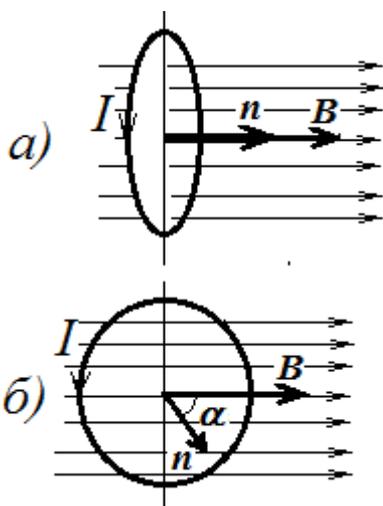


Рис. П. 42.1.

Пример 42.1. В однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,01$ Тл расположен перпендикулярно полю проводник длиной $l = 8$ см, по которому протекает ток $I = 5$ А. Определить работу A силы Ампера при поступательном перемещении проводника на расстояние $x = 5$ см.

Очевидно, что магнитный поток, пересеченный проводником при его движении, $\Delta\Phi = Blx$. Тогда работа сил поля $A = IBlx = 0,2$ мДж.

Пример 42.2. Круговой контур диаметром $d = 10$ см, по которому течет постоянный ток $I = 2$ А свободно установился в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,5$ Тл, перпендикулярно плоскости контура. Какую работу надо совершить, чтобы медленно повернуть виток на угол $\alpha = \pi/2$ вокруг оси, совпадающей с диаметром?

Изменение магнитного потока в данном случае

$$\Delta\Phi = \Phi_K - \Phi_H = B \cdot S (\cos \alpha_K - \cos \alpha_H).$$

В начальном положении (рис. П.42,1 а) контур установился свободно, и нормаль к плоскости контура образует угол $\alpha_H = 0$ с направлением вектора магнитной индукции ($\cos \alpha_H = 1$).

В конечном положении (рис. П.42.1 б) угол между направлением поля и нормалью $\alpha_K = 90^\circ$, $\cos \alpha_K = 0$. Работа сил поля отрицательна:

$A = I(\Phi_K - \Phi_H) = IB \cdot S (\cos \alpha_K - \cos \alpha_H) = -IBS$. Работа внешних сил равна по модулю и противоположна по знаку работе сил поля:

$$A_{\text{внеш}} = IBS = IB (\pi d^2/4) = 7,85 \text{ мДж.}$$

Условие медленности поворота необходимо, чтобы можно было пренебречь токами индукции, наводимыми в контуре.

§ 43. Момент сил, действующих на контур с током в однородном магнитном поле

Рассмотрим плоский прямоугольный контур с текущим по нему током I , который поме-

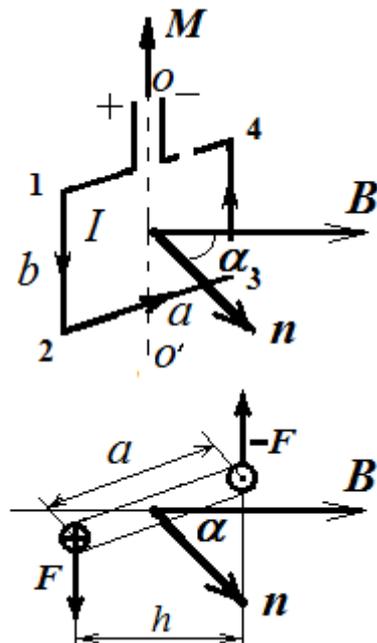


Рис. 43.1.

щен в однородное магнитное поле с индукцией \mathbf{B} (рис. 43.1). Контур может вращаться вокруг вертикальной оси OO' . Обозначим через α угол между направлением магнитного поля и направлением нормали к плоскости контура. Согласно закону Ампера силы, действующие на участки 1-4 и 2-3 контура, направлены вертикально, они только деформируют контур, стремясь растянуть его. Силы же, действующие на участки 1-2 и 3-4 контура, определяются выражением

$$F = IbB$$

и стремятся повернуть контур так, чтобы его плоскость была перпендикулярна магнитному полю.

Т.о. со стороны магнитного поля на контур действует пара сил с моментом, равным, как видно из рис. 43.1 внизу (на нижнем рисунке показан вид на контур сверху вдоль вертикальной оси):

$$M = Fh = IbB a \sin \alpha = BIS \sin \alpha,$$

где h – плечо пары сил, $S = ab$ – площадь контура. Направление – по оси вверх - механического момента, вращающего контур, показано на рис. 43.1 (для заданного направления тока и магнитного поля).

Величина, численно равная произведению силы тока I , протекающего в контуре, на площадь контура S называется магнитным моментом p_m

$$p_m = IS.$$

Таким образом, можно записать момент пары сил в виде

$$M = p_m B \sin \alpha, \quad (43.1)$$

Магнитный момент контура с током – векторная величина. Направление магнитного момента p_m совпадает с направлением положительной нормали к плоскости контура, которое определяется правилом винта: если головку винта вращать по направлению тока в контуре, то поступательное движение винта показывает направление вектора p_m .

Выражение для момента сил может быть записано в векторной форме

$$\mathbf{M} = [p_m, \mathbf{B}]. \quad (43.2)$$

Можно показать, что эта формула справедлива для плоского контура любой формы.

Под действием момента \mathbf{M} контур поворачивается так, чтобы векторы p_m и \mathbf{B} стали параллельными и одинаково направленными. Это соответствует положению устойчивого равновесия. Состояние, при котором векторы антипараллельны, неустойчиво.

При повороте контура на малый угол $d\alpha$ вокруг оси OO' (рис. 43.1) нужно совершить против сил, действующих на контур в магнитном поле, работу

$$dA = M d\alpha = p_m B \sin \alpha d\alpha.$$

Эта работа затрачивается на увеличение потенциальной энергии $W_{\text{пот}}$, которой обладает контур в магнитном поле. Действительно, поворачиваясь в первоначальное положение, контур возвращает затраченную на его поворот работу.

$$dW_{\text{пот}} = M d\alpha = p_m B \sin \alpha d\alpha.$$

Интегрируя, получим

$$W_{\text{пот}} = -p_m B \cos \alpha + \text{const.}$$

Постоянную можно принять равной нулю (потенциальная энергия, как известно, определяется с точностью до постоянной величины).

Тогда потенциальная энергия запишется в виде скалярного произведения

$$W_{\text{пот}} = -p_m B \cos \alpha = -p_m B . \quad (43.3)$$

Устойчивому равновесию, при котором потенциальная энергия минимальна, соответствует случай, когда магнитный момент ориентирован параллельно направлению магнитного поля.

Пример 43.1. Квадратный проволочный контур со стороной $a = 5$ см может вращаться вокруг вертикальной оси. По контуру пропускают ток силой $I = 4$ А и помещают в магнитное поле с индукцией $B = 0,01$ Тл. Контур удерживают от поворота в положении, когда угол между нормалью к плоскости контура и направлением поля составляет $\alpha_H = 45^\circ$. Какую работу необходимо совершить, чтобы повернуть контур в положение, когда указанный угол составит $\alpha_K = 60^\circ$?

Работа внешних сил, преодолевающих действие амперовых сил и поворачивающих контур вокруг вертикальной оси, пойдет на увеличение потенциальной энергии контура с током в магнитном поле. Ситуация подобна закручиванию упругой пружины. Закручивая пружину, мы увеличиваем ее потенциальную энергию. Итак, работа внешних сил равна приращению потенциальной энергии контура:

$$A_{\text{внеш}} = \Delta W_{\text{пот}}.$$

Напомним, что *приращение* какой-либо величины – это *разность между тем, что стало и тем, что было*. Формула потенциальной энергии (с точностью до произвольной постоянной)

$$W_{\text{пот}} = -p_m B \cos \alpha.$$

Учитывая, что магнитный момент контура с током равен $p_m = IS = Ia^2$, получим

$$A_{\text{внеш}} = \Delta W_{\text{пот}} = -p_m B \cos \alpha_K - (-p_m B \cos \alpha_H) = Ia^2 B (\cos \alpha_H - \cos \alpha_K) = 4 \cdot 25 \cdot 10^{-4} \cdot 0,01 \cdot (\cos 45^\circ - \cos 60^\circ) = 10^{-4} (\sqrt{2}/2 - 1/2) = 20 \text{ (мкДж)}.$$

Контрольные вопросы.

1. Какой физический смысл вектора \mathbf{B} магнитной индукции?
2. Известно, что существуют два вида электрических зарядов - положительные и отрицательные, которые можно разделить пространственно. Можно ли разделить магнит на два разноименных полюса - северный и южный?
3. По двум параллельным прямым проводникам в одном направлении проходят одинаковые токи. Чему равна индукция магнитного поля в точке, расположенной строго посередине расстояния между проводниками? Каким будет поле, если токи имеют противоположное направление?
4. Как определить направление вектора магнитной индукции поля, создаваемого движущимся зарядом в данной точке пространства? Носители тока в проводнике участвуют в тепловом движении, создавая при этом магнитные поля. Почему они не учитываются?
5. Как должен быть расположен по отношению к магнитному полю проводник с током, чтобы действующая на него сила со стороны поля была максимальной?
6. Можно ли выделить отдельно (осуществить на опыте) элемент тока?
7. По двум параллельным прямым проводникам в одном направлении проходят токи. Известно, что такие проводники притягиваются. Будут ли притягиваться два параллельных пучка электронов?
8. Проводник с током электрически нейтрален, полный заряд его равен нулю. Почему же на него действует магнитное поле?

9. По двум параллельным прямым проводникам проходят постоянные токи. За счет какой энергии совершается работа притяжения или отталкивания проводников?
10. При движении контура с током в постоянном магнитном поле силы Ампера совершают работу. За счет какой энергии совершается эта работа?
11. Чем отличаются взаимодействия неподвижных зарядов и движущихся (например, в проводнике, по которому течет ток)?
12. Прочему сила Лоренца не выполняет работу?
13. Чему равна и как направлена сила, действующая со стороны магнитного поля на движущийся заряд?
14. Пучок заряженных частиц влетает в магнитное поле. Траектории частиц представляют собой окружности разного радиуса. Какие характеристики частиц определяют размеры окружностей? Почему одни частицы закручиваются в одну сторону, другие – в другую?
15. Какой вид может иметь траектория электрона, если в той области пространства, где он движется, существуют: а) только электрическое поле; б) только магнитное поле; в) одновременно оба поля? Какой вид имеет траектория электрона, влетевшего в магнитное поле Земли из космоса?
16. Электрон в некоторой области пространства движется прямолинейно. Свидетельствует ли это об отсутствии магнитного поля в данной области пространства?
17. Чем объясняется синхронность движения ионов в дуантах и изменения электрического поля в зазоре между ними?
18. Как с помощью явления Холла определить тип примесной проводимости полупроводников и концентрацию носителей тока?
19. Может ли циркуляция вектора напряженности электрического поля быть отличной от нуля?
20. Чем отличаются циркуляции вектора напряженности электрического поля и вектора магнитной индукции? В чем заключается физический смысл такого различия?
21. Какое соотношение является выражением вихревого характера магнитного поля?
22. Какой физический смысл имеют выражения $\oint E_l dl$ и $\oint B_l dl$?
23. Чему равен поток вектора магнитной индукции через замкнутую поверхность?
24. Чем отличаются потоки вектора напряженности электрического поля и вектора магнитной индукции? В чем заключается физический смысл такого различия?
25. Рамка с током ориентирована своим магнитным моментом p_m по отношению к магнитному полю: а) параллельно; б) антипараллельно; в) перпендикулярно. Какое положение рамки является положением устойчивого равновесия?
26. Как действует однородное магнитное поле на плоский замкнутый контур с током?

Глава 7. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВЕЩЕСТВЕ

§ 44. Намагничивание вещества

Как было отмечено ранее, источниками магнитного поля являются движущиеся заряды. Любой движущийся заряд создает в окружающем его пространстве магнитное поле. Поэтому магнитные поля могут создаваться не только электрическими токами, текущими по проводам (токами проводимости или *макротоками*), но и движением электронов в атомах, ионах и молекулах вещества (молекулярными токами или *микротоками*).

Движение электронов в атомах подчиняется квантовым законам. Однако для объяснения многих магнитных явлений можно использовать полуклассическую боровскую модель атома.

Согласно теории Н. Бора электроны вращаются вокруг атомных ядер по замкнутым орбитам. Кроме того, они совершают вращения вокруг собственных осей подобно вращениям планет вокруг своих осей. С таким внутренним вращением связан определенный момент импульса, называемый *спином* электрона. Спином обладают не только электроны, но и атомные ядра. Орбитальные и спиновые вращения заряженных частиц аналогичны токам и возбуждают магнитные поля.

Квантовая механика заменила наглядное представление о движении электронов по орбитам и об их вращениях вокруг собственных осей более общей картиной движения. В этой картине не существует понятия траектории электрона. Хотя электрону в атоме нельзя приписать движение по какой-то определенной траектории (орбите), термин «орбитальное движение» сохранился. Электрон обладает как магнитным моментом, связанным с движением относительно атомного ядра (орбитальный магнитный момент), так и спиновым магнитным моментом, связанным с наличием у него собственного момента импульса (спина).

Магнитный момент атома является векторной суммой магнитных моментов отдельных электронов и может быть отличен от нуля или равняться нулю (только у атомов с четным числом электронов).

Магнитный момент атомного ядра примерно в тысячи раз меньше электронного магнитного момента, поскольку тяжелые атомные ядра движутся значительно медленнее легких электронов. Поэтому магнитным моментом атомного ядра, как правило, пренебрегают, и ответственными за магнитные свойства атомов являются электроны.

Из-за наличия беспорядочного теплового движения магнитные моменты атомов в отсутствие внешнего магнитного поля обычно, ориентированы хаотически. Возбуждаемые ими магнитные поля в окружающем пространстве компенсируют друг друга.

При наложении внешнего магнитного поля \mathbf{B}_0 магнитные моменты атомов ориентируются в направлении этого поля, и тогда компенсация нарушается. В таких случаях говорят, что тело *намагничено*.

Современные представления о природе магнетизма вещества хорошо согласуются с гипотезой французского физика А. Ампера, выдвинутой еще в первой половине 19-го века. Согласно гипотезе Ампера, магнитные свойства вещества обусловлены особыми, текущими внутри молекул вещества молекулярными токами.

Эти микроскопические молекулярные токи могут поворачиваться в магнитных полях макротоков, создавая в теле дополнительное магнитное поле. Блестящая догадка Ампера подтвердилась и дополнилась дальнейшим развитием науки, начиная с открытия строения атомов и молекул

Все вещества способны намагничиваться, они называются *магнетиками*.

Когда вещество намагничивается, то возникает дополнительное поле \mathbf{B}' , которое складывается с внешним полем \mathbf{B}_0 , так что, согласно принципу суперпозиции, полное поле в веществе

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}' \quad (44.1)$$

Для того, чтобы характеризовать степень намагничивания вещества, вводится понятие **намагниченности** J .

Намагниченность называется величина, равная отношению суммарного магнитного момента атомов, содержащихся в малом объеме ΔV вещества, к величине этого объема:

$$J = \frac{1}{\Delta V} \sum_{\Delta V} p_m, \quad (44.2)$$

здесь ΔV – физически бесконечно малый объем магнетика, p_m – магнитный момент отдельного атома (молекулы). Таким образом, намагниченность есть магнитный момент единицы объема.

Из формулы (44.2) установим размерность J . Так как размерность магнитного момента

$$[p_m] = [I] [S] = A \cdot m^2, \text{ то}$$

$$[J] = \frac{A \cdot m^2}{m^3} = \frac{A}{m}.$$

§ 45.1. Описание магнитного поля в веществе Циркуляция вектора магнитной индукции в веществе. Напряженность магнитного поля. Магнитная восприимчивость и магнитная проницаемость

В вакууме магнитное поле создают только макротоки, а в веществе – макротоки и микротоки. Вектор магнитной индукции \mathbf{B} в веществе складывается из двух полей: \mathbf{B}_0 , создаваемого намагничивающими токами в вакууме (макротоками), и поля \mathbf{B}' намагниченного вещества (микротоками)

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}'.$$

Обобщим закон полного тока для магнитного поля в вакууме (39.6) на магнитное поле в веществе, т.е. определим циркуляцию вектора \mathbf{B} .

Для поля в веществе в правую часть закона полного тока (69.6) должна входить сумма как токов проводимости, так и молекулярных токов, пронизывающих рассматриваемый контур, т.е.

$$\oint_L \mathbf{B} d\mathbf{l} = \mu_0 (\sum I_{\text{макро}} + \sum I_{\text{мол}}). \quad (45.1)$$

Здесь $\sum I_{\text{макро}}$ и $\sum I_{\text{мол}}$ – алгебраические суммы макро- и микротоков (молекулярных токов), охватываемых замкнутым контуром L , т.е. результирующие макро- и микротоки сквозь поверхность, натянутую на контур L .

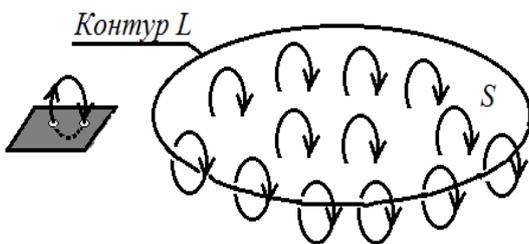


Рис. 45.1.

Согласно представлениям классической физики, электроны в атомах движутся по некоторым замкнутым орбитам. Такое движение электрона эквивалентно замкнутому круговому току (*молекулярному току*).

Вычислим алгебраическую сумму молекулярных токов, текущих через поверхность S , ограниченную некоторым контуром

L (рис. 45.1).

Для *внутренних точек* поверхности S каждый молекулярный ток пересекает поверхность S дважды – в одну сторону и другую в противоположных направлениях. Вклад такого тока в сумму токов равен нулю (рис. 45.1, слева).

Для *приграничных точек* поверхности S (рис. 45.1, справа) имеются молекулярные токи, которые огибают контур L поверхности, т.е. пересекают рассматриваемую поверхность в одном направлении, создавая нескомпенсированный результирующий ток через поверхность.

Найдем сумму молекулярных токов, которые обвиваются вокруг контура, как говорят, «нанизанных» на контур L . Обозначим через α угол между вектором dl малого элемента замкнутого контура L и вектором намагниченности \mathbf{J}

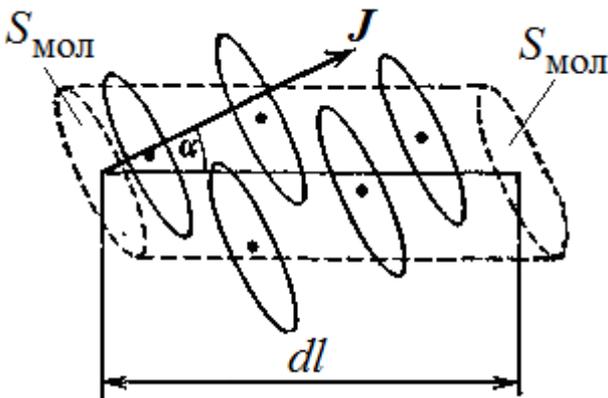


Рис. 45.2.

На элемент dl контура «нанизаны» молекулярные токи всех молекул, находящихся в объеме косоугольного цилиндра с образующей dl и основанием, равным $S_{\text{мол}}$ ($S_{\text{мол}}$ – площадь, охватываемая отдельным молекулярным током). Объем косоугольного цилиндра $S_{\text{мол}} dl \cos \alpha$. Если n – число молекул в единице объема, то суммарный ток, охватываемый элементом dl равен

$$n I_{\text{мол}} S_{\text{мол}} dl \cos \alpha.$$

По определению магнитный момент

отдельного кругового тока

$$p_m = I_{\text{мол}} \cdot S_{\text{мол}}.$$

Тогда намагниченность или магнитный момент единицы объема (по модулю)

$$\mathbf{J} = n I_{\text{мол}} S_{\text{мол}}, \quad (45.2)$$

а выражение $n I_{\text{мол}} S_{\text{мол}} \cos \alpha$ дает проекцию J_l вектора \mathbf{J} на направление элемента dl .

Следовательно, на элемент dl «нанизан» молекулярный ток $J_l dl$, а на весь контур L «нанизаны» молекулярные токи

$$\sum I_{\text{мол}} = \oint_L J_l dl = \oint_L \mathbf{J} dl. \quad (45.3)$$

Теперь выражение (45.1) для закона полного тока в веществе примет вид

$$\oint_L \mathbf{B} dl = \mu_0 \sum I_{\text{макро}} + \mu_0 \oint_L \mathbf{J} dl.$$

Разделив на μ_0 и объединив обе циркуляции, получим

$$\oint_L \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{J} \right) dl = \sum I_{\text{макро}}. \quad (45.4)$$

Выражение упрощается, если ввести вспомогательную величину

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{J}. \quad (45.5)$$

Эта вспомогательная величина \mathbf{H} называется *напряженностью магнитного поля*.

Ее циркуляция определяется только макроскопическими токами:

$$\oint_L \mathbf{H} dl = \oint_L H_l dl = \sum I_{\text{макро}}. \quad (45.6)$$

Т.е. *циркуляция вектора напряженности магнитного поля по произвольному замкнутому контуру равна алгебраической сумме токов проводимости, пронизывающих этот контур*.

Единицей напряженности магнитного поля является ампер на метр (А/м). В технике используется также внесистемная единица – *эрстед*. $1 \text{ Э} \approx 79,58 \text{ А/м}$.

Как показывает опыт, для достаточно слабых магнитных полей и большинства встречающихся в природе веществ зависимость \mathbf{J} от \mathbf{H} имеет линейный характер

$$\mathbf{J} = \chi \cdot \mathbf{H}. \quad (45.7)$$

Коэффициент пропорциональности χ называется *магнитной восприимчивостью* данного вещества.

Так как \mathbf{J} и \mathbf{H} имеют одинаковую размерность, χ – безразмерная величина. Магнитная восприимчивость χ характеризует способность вещества намагничиваться во внешнем магнитном поле.

Для вакуума $\chi = 0$, а для любого вещества $\chi \neq 0$, т.е. все вещества способны намагничиваться и потому являются магнетиками. Для одних веществ (*диамагнетиков*) $\chi < 0$ (т.е. направление \mathbf{J} противоположно \mathbf{H} и внешнее поле в диамагнетиках ослабляется).

Для других – (*парамагнетиков*) $\chi > 0$ (т.е. направление \mathbf{J} и \mathbf{H} совпадают и внешнее поле усиливается).

Из равенства (45.5) вытекает $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{J}$, т.е. магнитное поле в магнетике состоит из внешнего магнитного поля $\mu_0 \mathbf{H}$ и магнитного поля намагниченного магнетика $\mu_0 \mathbf{J}$. С учетом (45.7) это равенство можно переписать так:

$$\mathbf{B} = \mu_0 (1 + \chi) \mathbf{H},$$

и материальное уравнение для магнитного поля принимает вид

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H}. \quad (45.8)$$

Безразмерная величина

$$\mu = (1 + \chi) \quad (45.9)$$

называется *магнитной проницаемостью* вещества.

Магнитная проницаемость μ – макроскопический параметр, материальная константа, которая характеризует магнитные свойства разных магнетиков.

Магнитную проницаемость μ определяют экспериментально.

Описание магнитного поля в терминах векторов \mathbf{B} и \mathbf{H} позволяет не рассматривать молекулярных токов. Для однородной намагничивающейся среды формулы закона Био-Савара-Лапласа и др. могут быть получены заменой в них μ_0 на $\mu_0 \mu$:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 \mu I}{4\pi} \int_L \frac{[d\mathbf{l}, \mathbf{r}]}{r^3} \text{ и т.д.}$$

Чтобы выяснить *физический смысл напряженности* магнитного поля H и

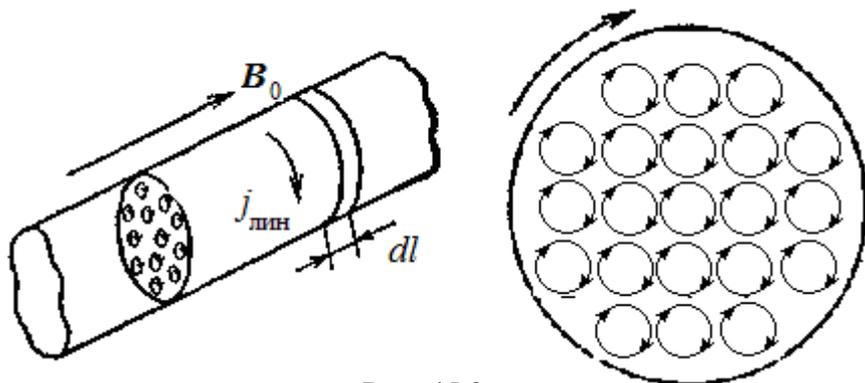


Рис. 45.3

магнитной проницаемости μ , рассмотрим магнетик в виде кругового цилиндра, внесенного в однородное внешнее магнитное поле с индукцией B_0 и расположенного вдоль внешнего поля (рис. 45.3, слева).

Под действием поля мо-

лекулярные токи установятся так, что их магнитные моменты расположатся вдоль оси цилиндра, а плоскости токов станут перпендикулярными этой оси. Рассмотрим молекулярные токи, лежащие в одном из поперечных сечений цилиндра. (рис. 45.3, справа).

Молекулярные токи соседних молекул в местах их соприкосновения текут в противоположных направлениях и компенсируют друг друга. Нескомпенсированными остаются только молекулярные токи, выходящие на наружную боковую поверхность цилиндра. Эти токи складываются в макроскопический поверхностный ток, циркулирующий по боковой поверхности цилиндра.

Обозначим линейную плотность поверхностного тока через $j_{\text{лин}}$. Ток, текущий по боковой поверхности цилиндра, подобен току в соленоиде с числом ампер-витков $nI = j_{\text{лин}}$.

Магнитная индукция внутри такого соленоида определяется формулой (40.3)

$$B' = \mu_0 j_{\text{лин}}. \quad (45.10)$$

В соответствии с правилом правого винта направление B' совпадает с направлением B_0 . Вне цилиндра $B' = 0$.

Выделим мысленно в цилиндре перпендикулярно к его оси слой толщины dl (рис. 45.3). Молекулярные токи, расположенные в этом слое, эквивалентны круговому току силы $j_{\text{лин}} dl$. По определению магнитного момента кругового тока

$$dp_m = j_{\text{лин}} S dl,$$

где S – площадь поперечного сечения цилиндра. Разделив dp_m на объем слоя $dV = S dl$, получим магнитный момент единицы объема – намагниченность цилиндра:

$$J = j_{\text{лин}}. \quad (75.11)$$

Т.о. модуль намагниченности цилиндра равен линейной плотности обтекающего цилиндра молекулярного тока.

Тогда дополнительное поле B' , создаваемое молекулярными токами

$$B' = \mu_0 J. \quad (45.12)$$

Сложив векторы \mathbf{B}_0 и \mathbf{B}' , найдем магнитную индукцию результирующего поля внутри цилиндра

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}' = \mathbf{B}_0 + \mu_0 \mathbf{J}.$$

Подстановка этого выражения в формулу (45.5) дает напряженность поля внутри цилиндра

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{J} = \frac{\mathbf{B}_0}{\mu_0} = \mathbf{H}_0. \quad (45.13)$$

Следовательно, *напряженность поля в цилиндре оказывается совпадающей с напряженностью внешнего поля*. В данном примере напряженность магнитного поля не зависит от магнитных свойств среды. В веществе напряженность магнитного поля \mathbf{H} определяет тот вклад в магнитную индукцию \mathbf{B} , который дают внешние источники поля (макротоки, другие магниты и т.д.).

Если, например, поле создается катушкой с током, в которую вставлен железный сердечник, то напряженность магнитного поля \mathbf{H} внутри сердечника имеет физический смысл внешнего поля и может быть рассчитана, исходя из геометрии катушки и тока в ней. Напряженность \mathbf{H} совпадает с точностью до постоянного размерного коэффициента μ_0 с вектором \mathbf{B}_0 , который был бы создан этой катушкой при отсутствии сердечника.

Умножив \mathbf{H} на $\mu_0 \mu$, получим магнитную индукцию внутри цилиндра:

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H} = \mu_0 \mu \frac{\mathbf{B}_0}{\mu_0} = \mu \mathbf{B}_0. \quad (45.14)$$

Отсюда вытекает, что *магнитная проницаемость μ показывает, во сколько раз усиливается поле в магнетике*.

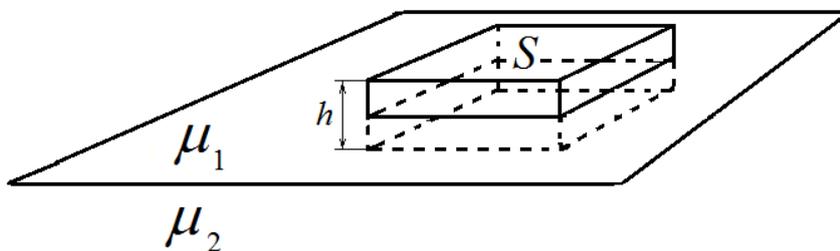
Примечание. Полученная трактовка напряженности справедлива лишь в тех случаях, когда однородный и изотропный магнетик заполняет весь объем, ограниченный поверхностями, которые образованы линиями вектора \mathbf{B}_0 .

§ 45.2. Граничные условия на границе раздела двух магнетиков

Рассмотрим магнитное поле на границе раздела двух магнетиков с различными магнитными проницаемостями μ_1 и μ_2 . Чтобы найти, как меняется магнитное поле на этой границе, мы воспользуемся теоремой Гаусса для магнитного поля и теоремой о циркуляции вектора напряженности \mathbf{H} .

Согласно теореме Гаусса поток вектора магнитной индукции \mathbf{B} через любую замкнутую поверхность всегда равен нулю:

$$\oint_S \mathbf{B}_n dS = 0.$$



Выберем поверхность S в виде параллелепипеда, основания которого лежат по разные стороны границы раздела

Рис. 45.4.

магнетиков (рис. 45.4) Одно из оснований лежит в среде 1 с магнитной проницаемостью μ_1 , а другое – в среде 2 с магнитной проницаемостью μ_2 . Если устремить высоту h параллелепипеда к нулю, то поток вектора \mathbf{B} через боковую поверхность параллелепипеда также окажется бесконечно малым, и мы получим полный поток, т.е. разность потоков через верхнюю и нижнюю грани :

$$B_{1n}S - B_{2n}S = 0.$$

где S – площадь основания. Это дает

$$B_{1n} = B_{2n}. \quad (45.15)$$

Рассмотрим теперь небольшой прямоугольный контур на границе раздела двух магнетиков, одно ребро которого длиной a лежит в среде 1, а другое – в среде 2 (рис. 45.5). Вычислим для него циркуляцию вектора \mathbf{H} . Ширину контура b возьмем настолько малой, чтобы вкладом в циркуляцию сторон, перпендикулярных к границе раздела, можно было пренебречь. Тогда для циркуляции получаем:

$$\oint_L \mathbf{H}_l d\mathbf{l} = (H_{2\tau} - H_{1\tau})a, \text{ где } H_{\tau} - \text{модуль}$$

тангенциальной составляющей вектора \mathbf{H} .

Так как контур не охватывает токов проводимости, то в соответствии с теоремой о циркуляции вектора напряженности \mathbf{H} циркуляция должна быть равна нулю, поэтому:

$$H_{1\tau} = H_{2\tau}. \quad (45.16)$$

Таким образом, на границе раздела двух магнетиков нормальная составляющая магнитной индукции и тангенциальная составляющая напряженности магнитного поля остаются непрерывными, а тангенциальная составляющая магнитной индукции и нормальная составляющая напряженности магнитного поля терпят разрыв.

Технические приложения законов магнетостатики. В устройствах современной электротехники – электромагнитах, генераторах электрического тока, электродвигателях и т.д. – широко используют магнитные потоки.

На практике часто возникает задача об определении магнитного поля в зазоре между полюсами электромагнита. В изображенном на рис. 45.6 электромагните магнитное поле направлено вдоль оси железного сердечника, так что на границе между сердечником и воздушным зазором вектор \mathbf{B} направлен по нормали к поверхности раздела. В соответствии с формулой (45.15) это означает, что магнитная индукция в сердечнике и магнитная индукция в зазоре одинаковы по величине.

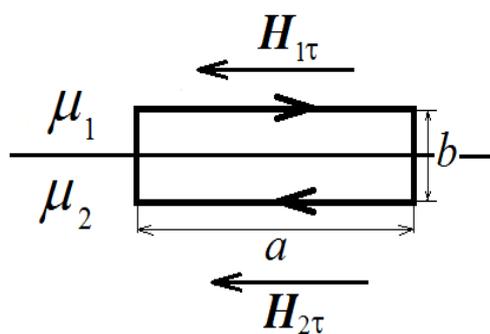


Рис. 45.5

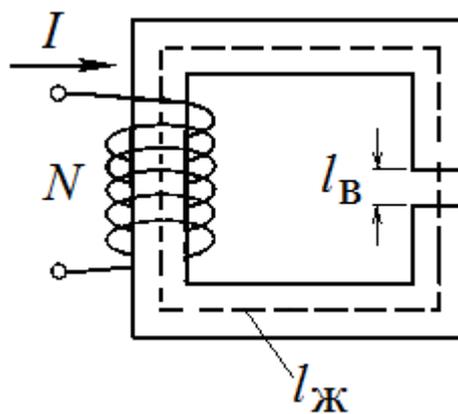


Рис. 45.6.

Применим теперь теорему о циркуляции вектора \mathbf{H} к контуру, проходящему по оси сердечника. Полный ток, охватываемый контуром, равен NI , где N – число витков обмотки электромагнита, а I – сила тока в ней. Обозначим через $l_{\text{ж}}$ и $l_{\text{в}}$ длины участков контура, проходящие соответственно через железный сердечник и через воздушный зазор. Имея в виду, что напряженность магнитного поля в сердечнике равна $H_{\text{ж}} = B/(\mu_0 \mu_{\text{ж}})$, где $\mu_{\text{ж}}$ – магнитная проницаемость железа, а напряженность магнитного поля в зазоре равна $H_{\text{в}} = B/(\mu_0 \mu_{\text{в}})$, где $\mu_{\text{в}}$ – магнитная проницаемость вещества в зазоре, мы можем записать теорему о циркуляции вектора \mathbf{H} :

$$\oint_L \mathbf{H}_l dl = H_{\text{ж}} l_{\text{ж}} + H_{\text{в}} l_{\text{в}} = NI,$$

или

$$\frac{B}{\mu_0 \mu_{\text{ж}}} l_{\text{ж}} + \frac{B}{\mu_0 \mu_{\text{в}}} l_{\text{в}} = NI.$$

Отсюда

$$B = \frac{NI}{\frac{l_{\text{ж}}}{\mu_0 \mu_{\text{ж}}} + \frac{l_{\text{в}}}{\mu_0 \mu_{\text{в}}}}. \quad (45.17)$$

Последнюю формулу можно преобразовать. Обычно длина $l_{\text{ж}}$ сердечника электромагнита бывает порядка 1 м, длина воздушного зазора $l_{\text{в}}$ – порядка нескольких сантиметров, магнитная проницаемость воздуха $\mu_{\text{в}} = 1$ с большой точностью, а магнитная проницаемость железа $\mu_{\text{ж}}$ порядка нескольких тысяч. Поэтому первым слагаемым в знаменателе формулы (45.17) можно пренебречь. Тогда

$$B \approx \frac{\mu_0 NI}{l_{\text{в}}}. \quad (45.18)$$

Увеличивая число витков N электромагнита и уменьшая размеры воздушного зазора $l_{\text{в}}$, можно получить поля с большим значением B . Напомним, что значение магнитной индукции B , полученное в лабораториях, имеет порядок нескольких тесла.

Пример 45.1. Электромагнит, изображенный на рис. 45.6, имеет следующие параметры: магнитная проницаемость железа $\mu_{\text{ж}} = 2000$, длина воздушного зазора $l_{\text{в}} = 5$ мм, число витков в обмотке $N = 1200$. Какой ток I должен протекать по обмотке, чтобы магнитная индукция в зазоре составляла $B = 1,5$ Тл?

Пользуясь формулой (45.18), находим

$$I = \frac{Bl_{\text{в}}}{\mu_0 N} = \frac{1,5 \cdot 5 \cdot 10^{-3}}{4 \cdot 3,14 \cdot 10^{-7} \cdot 1,2 \cdot 10^3} \approx 5 \text{ А}.$$

§ 46. Природа молекулярных токов. Магнитные свойства атомов

Используем боровскую модель атома. Электрон, движущийся в атоме по круговой орбите (рис 46.1), можно условно уподобить контуру с током и считать, что электрон образует круговой ток.

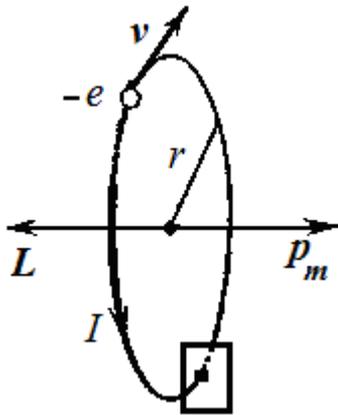


Рис. 46.1.

Представим себе площадку, пересекающую орбиту электрона и перпендикулярную к орбите. Сила тока равна заряду, переносимому через площадку за 1 с. За 1 с через нее будет перенесен заряд $I = ev$, где e – заряд электрона, v – число оборотов электрона в секунду. Следовательно, магнитный момент такого контура равен

$$p_m = IS = ev \cdot \pi r^2, \quad (46.1)$$

где r – радиус электронной орбиты. Свяжем p_m со скоростью электрона $v = \frac{2\pi r}{T} = 2\pi r \nu$ (T – период вращения электрона), получим отсюда $\pi r \nu = \frac{v}{2}$, подставляя в

выражение для p_m , получим:

$$p_m = \frac{evr}{2}. \quad (46.2)$$

Эта величина называется **орбитальным магнитным моментом** электрона.

На рис. 46.1 электрон движется по часовой стрелке, а ток направлен в противоположную сторону – против часовой стрелки, т.к. заряд электрона отрицательный. Направление вектора p_m образует с направлением тока правовинтовую систему. Вектор p_m направлен перпендикулярно плоскости орбиты на рис. 46.1 вправо.

С другой стороны, движущийся по орбите электрон обладает моментом импульса

$$L = m_e vr,$$

где m_e — масса электрона. Вектор L называют **орбитальным механическим моментом** электрона. Он также образует с направлением движения электрона правовинтовую систему. Вектор L направлен перпендикулярно плоскости орбиты на рис. 46.1 влево.

Следовательно, для электрона (как отрицательно заряженной частицы) направления векторов p_m и L противоположны.

Отношение магнитного момента элементарной частицы к ее механическому моменту называется **магнитомеханическим** (или **гиромангнитным**) отношением. Для орбитального движения электрона оно равно

$$\frac{p_m}{L} = -\frac{e}{2m_e}. \quad (46.3)$$

Знак минус указывает на то, что направления моментов противоположны.

Кроме орбитальных моментов электрон обладает *собственным механическим* L_s и *магнитным* $p_{m,s}$ *моментами*, для которых магнитомеханическое отношение в два раза больше:

$$\frac{p_{m,s}}{L_s} = -\frac{e}{m_e}. \quad (46.4)$$

Собственный механический момент (*спин*) и связанный с ним собственный (спиновый) магнитный момент является неотъемлемым свойством элементарных частиц, как их масса и заряд. Спин имеет квантовую природу и не связан с перемещением частицы как целого. В очень грубом приближении его связывают с вращением частицы вокруг собственной оси.

Спин элементарных частиц (в проекции на направление внешнего магнитного поля \mathbf{B}_0) оказывается целым или полуцелым кратным фундаментальной постоянной физики – постоянной Планка $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34}$ Дж·с.

В частности, эта проекция вектора L_s для электрона равна $\frac{\hbar}{2}$, поэтому обычно говорят, что спин электрона равен половине. Соответственно, собственный магнитный момент электрона (в проекциях на направление \mathbf{B}_0) равен

$$p_{m,s} = -\frac{e}{m_e} L_s = -\frac{e\hbar}{2m_e}. \quad (46.5)$$

Величину $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 0,927 \cdot 10^{-23}$ Дж/Тл называют *магнетон Бора*.

Следовательно, собственный магнитный момент электрона равен одному магнетону Бора.

Как показывается в квантовой теории Бора, орбитальный механический момент может принимать значения, кратные постоянной Планка: $L = n\hbar$, $n = 1, 2, \dots$. С учетом (46.3) получаем, что наименьший отличный от нуля орбитальный магнитный момент равен $|p_m| = \frac{e\hbar}{2m_e} = \mu_B$. Таким образом, *магнетон Бора* — *наименьшая единица магнитного момента, «квант» магнитного момента*.

Как видим, магнитный момент электрона складывается из орбитального и спинового магнитных моментов. Результирующий магнитный момент атома образуется в результате векторного сложения магнитных моментов всех элементарных частиц, содержащихся в атоме. Как уже указывалось, магнитные моменты ядер в тысячи раз меньше магнитных моментов электронов, поэтому ими пренебрегают. Поэтому общий магнитный момент атома (молекулы) p_a равен векторной сумме магнитных моментов (орбитальных и спиновых) входящих в атом (молекулу) электронов:

$$p_a = \Sigma p_m + \Sigma p_{ms}. \quad (46.6)$$

§ 47. Диа- и парамагнетизм

Все вещества являются магнетиками – при внесении их во внешнее магнитное поле намагничиваются, т.е. создают свое собственное магнитное поле, накладывающееся на внешнее поле.

По своим магнитным свойствам магнетики подразделяются на три основные группы:

- 1) *диамагнетики*, у которых магнитная восприимчивость χ отрицательна и мала по модулю, $\chi < 0$, $|\chi| \ll 1$, $|\chi| \sim 10^{-6} - 10^{-9}$, а магнитная проницаемость $\mu < 1$;
- 2) *парамагнетики*, у которых χ тоже мала, но положительна, $\chi > 0$, $\chi \sim 10^{-3} - 10^{-6}$, $\mu > 1$;
- 3) *магнитоупорядоченные вещества* (ферро-, антиферро-, и ферримагнетики) у которых χ положительна, $\chi > 0$ и достигает очень больших значений, $\chi \gg 1$, $10^2 < \chi < 10^5$, $\mu \gg 1$.

Диамагнетики – вещества, которые очень слабо намагничиваются против намагничивающего поля.

Диамагнетики состоят из таких частиц (атомов, ионов, молекул), в которых в отсутствие внешнего магнитного поля магнитный момент атома (сумма спиновых и орбитальных магнитных моментов) равен нулю.

Рассмотрим, что происходит с атомами диамагнетика во внешнем магнитном поле. Поскольку электрон в атоме можно уподобить круговому току, характеризующемуся магнитным моментом p_m , то при помещении атома во внешнее магнитное поле на электрон, движущийся по орбите, начнет действовать вращательный момент

$$M = [p_m, B_0],$$

стремящийся установить орбитальный момент электрона p_m по направлению поля B_0 (рис. 47.1). Под действием этого момента M вектор орбитального момента электрона p_m будет прецессировать вокруг направления вектора магнитной индукции B_0 , т. е. получит дополнительное равномерное вращение, при котором вектор p_m станет описывать конус вокруг направления B_0 (рис. 47.1). Таким образом, вектор p_m , перпендикулярный к плоскости электронной орбиты, сохраняет неизменный угол α наклона к внешнему полю и вращается вокруг B_0 с некоторой угловой скоростью. Это движение напоминает прецессию оси волчка вокруг вертикальной оси в поле силы тяжести.

Частота прецессии электронной орбиты

$$\Omega = eB/(2m_e), \quad (47.1)$$

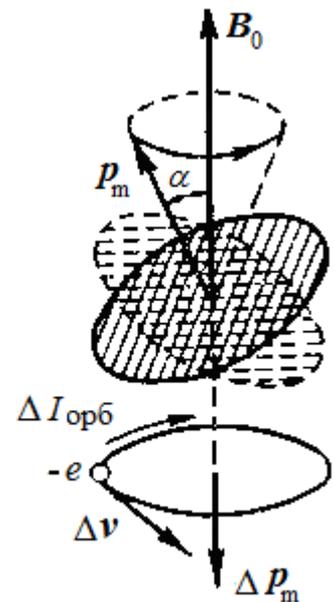


Рис. 47.1.

которую называют *ларморовской* частотой, не зависит ни от угла наклона орбиты электрона к вектору \mathbf{B}_0 , ни от радиуса орбиты или скорости электрона и, следовательно, для всех электронов одинакова.

Прецессия электронной орбиты создает дополнительное движение электрона во внешнем магнитном поле \mathbf{B}_0 . Это движение, как и любое движение зарядов, приводит к возникновению *индуцированного магнитного момента*, причем, в данном случае, направленного против поля.

На рис. 47.1 показано прецессионное движение электрона и его орбитального магнитного момента \mathbf{p}_m . Прецессионное движение электрона создает индуцированный орбитальный магнитный момент $\Delta\mathbf{p}_m$, противоположный вектору \mathbf{B}_0 по направлению.

Следовательно, *у диамагнитных веществ во внешнем магнитном поле \mathbf{B}_0 возникает противоположное индуцированное магнитное поле \mathbf{B}' , которое ослабляет внешнее:*

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 - \mathbf{B}'$$

т.е. магнитная восприимчивость $\chi < 0$, а магнитная проницаемость $\mu < 1$.

К диамагнетикам относятся инертные газы, азот, водород, многие металлы: висмут Bi, цинк Zn, медь Cu, золото Au, серебро Ag, вода, смолы, стекло, мрамор, кремний Si, фосфор P, также многие другие, как органические, так и неорганические, соединения. Человек в магнитном поле ведет себя как диамагнетик.

Пример 47.1. Приведем значения магнитной восприимчивости для некоторых диамагнетиков.

Диамагнетик	Магнитная восприимчивость, χ
N ₂ (газ)	$-6,75 \cdot 10^{-9}$
Bi	$-1,5 \cdot 10^{-4}$
Au	$-2,9 \cdot 10^{-5}$
Cu	$-1 \cdot 10^{-5}$
H ₂ O	$-7 \cdot 10^{-6}$

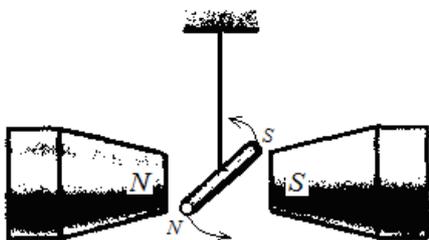


Рис. 47.2.

Можно показать на опыте, что намагничивание диамагнетика происходит против внешнего поля. Подвешенный между полюсами сильного электромагнита висмутовый стерженек (рис. 47.2) намагничивается так, что северный полюс диамагнетика оказывается против северного полюса магнита, а южный – против южного. Диамагнетик слабо выталкивается из магнитного поля. Стерженек устанавливается перпендикулярно полю.

Парамагнетики – также слабомагнитные вещества, но они намагничиваются по полю. У парамагнетиков векторная сумма орбитальных и спиновых моментов электронов не равна нулю, поэтому молекулы парамагнитного вещества имеют собственное магнитное поле.

В отсутствие внешнего магнитного поля эти магнитные микрополя молекул тепловым движением ориентированы в пространстве хаотически, и поэтому суммарное магнитное макрополе парамагнетика равно нулю.

При помещении парамагнитного вещества во внешнее магнитное поле B_0 у электронов вещества, также как у диамагнетиков, возникает ларморова прецессия. Однако внешнее магнитное поле не только индуцирует дополнительный магнитный момент Δp_m , но и ориентирует собственный момент атомов.

Возникающий при этом направленный по полю магнитный момент оказывается гораздо больше, чем индуцированный магнитный момент Δp_m , направленный против поля.

В результате суммарное собственное магнитное поле парамагнетика B становится отличным от нуля и направлено вдоль внешнего поля B_0 .

Следовательно, парамагнетик, помещенный во внешнее магнитное поле, усиливает это поле:

$$B = B_0 + B',$$

магнитная восприимчивость $\chi > 0$ и магнитная проницаемость $\mu > 1$.

Парамагнитный эффект зависит от температуры, поскольку тепловое движение атомов и молекул нарушает преимущественную ориентацию магнитных моментов во внешнем магнитном поле. П. Кюри экспериментально установил закон зависимости магнитной восприимчивости парамагнетиков от температуры

$$\chi = \frac{C}{T}, \quad (47.2)$$

где C – постоянная Кюри, зависящая от вещества, T – абсолютная температура.

При внесении парамагнитного стерженька (например, магниевого) в поле сильного электромагнита, он устанавливается вдоль поля и слабо притягивается к ближайшему полюсу (рис. 47.3).

К парамагнетикам относятся щелочно-земельные и щелочные металлы – натрий Na, калий K, кальций Ca, а также платина Pt, алюминий Al, из газов – кислород O_2 .

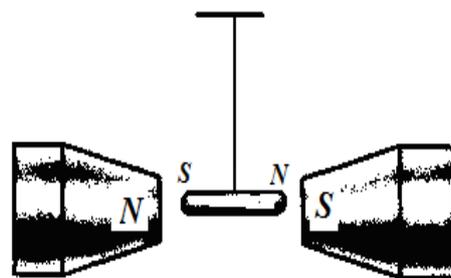


Рис. 47.3.

Пример 47.2. Приведем значения магнитной восприимчивости для некоторых парамагнетиков

Парамагнетик	Магнитная восприимчивость, χ
O_2 (жидк)	$3,6 \cdot 10^{-3}$
Pt	$2,5 \cdot 10^{-4}$
Al	$2,4 \cdot 10^{-3}$
O_2 (газ)	$1,5 \cdot 10^{-6}$

§ 48. Магнитоупорядоченные вещества (ферро -, антиферро-, ферримагнетики)

В отличие от диа- и парамагнетиков, которые называются слабомагнитными веществами, существуют сильномагнитные вещества – ферромагнетики.

Ферромагнетиками называются вещества, в которых собственное (внутреннее) магнитное поле в сотни и тысячи раз сильнее вызвавшего его внешнего магнитного поля. Ферромагнетики обладают самопроизвольной намагниченностью, т. е. они могут оставаться намагниченными даже в отсутствие внешнего магнитного поля.

К ферромагнетикам относятся кристаллы, построенные из атомов переходных элементов (атомов с недостроенными внутренними электронными слоями): железо Fe (от которого идет название «ферромагнетизм»), никель Ni, кобальт Co, гадолиний Gd, их оксиды и сульфиды, сплавы из неферромагнитных компонентов на основе марганца и хрома и др.

Ответственными за большую величину намагниченности ферромагнетиков являются собственные (*спиновые*) магнитные моменты электронов, принадлежащих ионам кристаллической решетки.

При определенных условиях в кристаллах могут возникать силы, которые заставляют спиновые магнитные моменты электронов выстраиваться параллельно друг другу. Происхождение этих сил – чисто квантовомеханический эффект, обусловленный волновыми свойствами электронов. В результате любое ферромагнитное тело оказывается разбитым на малые области *спонтанного* (самопроизвольного) *намагничивания*, которые называют **доменами**. Домены имеют размеры порядка 1 — 10 мкм.

В пределах каждого домена ферромагнетик спонтанно намагничен до предела и обладает определенным магнитным моментом. Направления этих моментов для разных доменов различны (рис. 48.1). Стрелками здесь условно изображены магнитные моменты электронов. Энергетически выгодным состоянием доменов являются замкнутые магнитные цепи, так что в отсутствие внешнего поля суммарный магнитный момент всего тела равен нулю.

Действие внешнего поля на домены на различных стадиях процесса намагничивания различно. Вначале, при слабых полях, наблюдается *смещение*

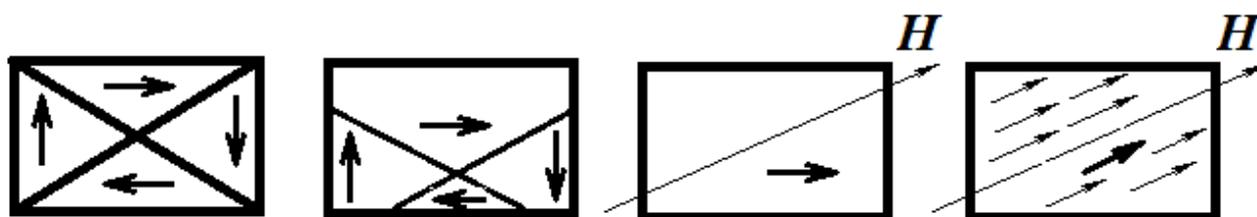


Рис. 48.1.

границ доменов (рис. 48.1). За счет объемов соседних доменов растут объемы доменов, у которых намагниченность ориентирована наиболее близко и выгод-

но к направлению внешнего магнитного поля. С увеличением напряженности поля этот процесс идет до тех пор, пока домены, которые обладают в магнитном поле меньшей энергией, не поглотят целиком энергетически менее выгодные домены.

На следующей стадии происходит изменение направления спонтанной намагниченности отдельных доменов путем поворота магнитных моментов доменов в направлении поля. При этом моменты электронов в пределах домена поворачиваются одновременно, без нарушения их строгой параллельности друг другу.

Основные *свойства ферромагнетиков*, связанные с их доменной структурой, таковы:

- 1) аномально большое значение магнитной проницаемости μ ;
- 2) способность намагничиваться до магнитного насыщения и способность сохранять состояние намагниченности после удаления ферромагнитных тел из пределов намагничивающего поля (остаточная намагниченность);
- 3) зависимость магнитной проницаемости μ и восприимчивости χ от напряженности H внешнего намагничивающего поля;
- 4) при перемагничивании обнаруживается «магнитный гистерезис», изменение намагниченности J или магнитной индукции B отстает от изменения напряженности H намагничивающего поля;
- 5) анизотропия магнитных свойств кристалла.

Отметим, что на графиках намагниченности J в качестве аргумента используется напряженность магнитного поля H .

Для ферромагнитных тел намагниченность является сложной нелинейной функцией H . На рис. 48.2 дана графическая зависимость намагниченности J от H для железа.

Если ферромагнетик не намагничен ($J = 0$), то суммарный магнитный момент доменов равен нулю. В слабых полях J круто нарастает с ростом H – домены выстраиваются преимущественно вдоль вектора H , во много раз усиливая внешнее поле.

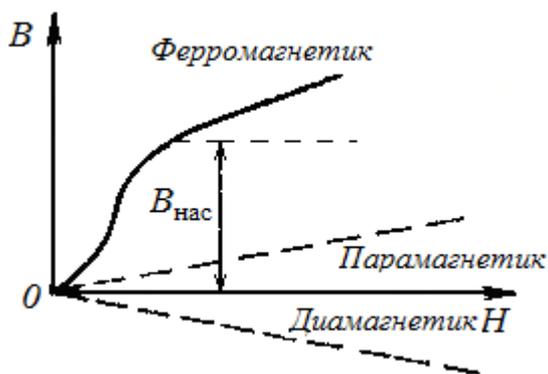


Рис. 48.3.

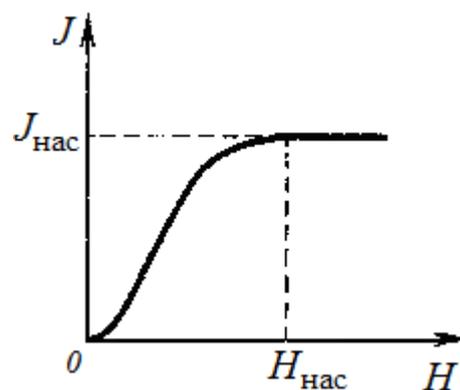


Рис. 48.2.

Однако этот процесс начнет замедляться, когда остается все меньше и меньше неориентированных моментов, и, наконец, когда

все магнитные моменты атомов упорядочиваются в направлении внешнего магнитного поля, дальнейшее увеличение J прекращается и наступает магнитное насыщение. В сильных полях ($H \geq 200$ А/м) намагниченность J достигает максимального значения, которое практически остается неизменным (насыщение) (на рис. 48.2 при $H > H_{нас}$)

Аналогично кривой намагничивания $J(H)$ получают кривую $B(H)$. На рис 48.3 изображено кривую зависимости B от H . Она отличается от предыдущей тем, что не имеет горизонтальной части. Это объясняется тем, что в состоянии насыщения второе слагаемое в $B = \mu_0(H + J)$ остается неизменным и B увеличивается только за счет увеличения первого слагаемого:

$$B = \mu_0 H + \mu_0 J_{\text{нас}} = \mu_0 H + \text{const.}$$

Как видно из рис. 48.2 и 48.3 намагниченность J и индукция B нелинейно зависят от напряженности поля H . Поэтому для ферромагнетиков магнитная восприимчивость χ и магнитная проницаемость μ не являются постоянными величинами, а зависят от H .

В слабом магнитном поле μ быстро возрастает, достигая максимума, а потом спадает, приближаясь к единице, как для вакуума (рис. 48.4). Это следует из таких рассуждений. Запишем выражение $B = \mu_0(H + J)$ иначе: $\mu_0 \mu H = \mu_0(H + J)$.

Отсюда

$$\mu = 1 + \frac{J}{H}. \quad (48.1)$$

При насыщении $J = \text{const}$, если $H \rightarrow \infty$, то $\mu \rightarrow 1$.

Максимальные значения μ очень велики: для железа – 5000, кремнистого железа – 10 000, пермаллоя (78 % Ni и 22 % Fe) – 100 000.

Характерная особенность ферромагнетиков состоит также в том, что для них зависимость J от H (а следовательно, и B от H) определяется предысторией намагниченности ферромагнетика, т.е. от того, в каких полях он побывал прежде.

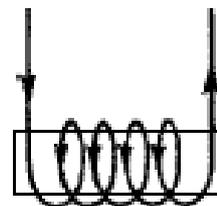


Рис. 48.5.

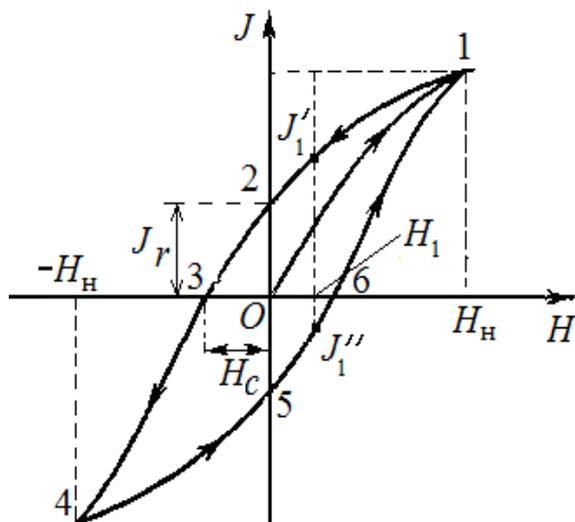


Рис. 48.6.

Пусть ненамагниченный ферромагнитный стержень помещен в катушку (рис. 48.5) и в ней увеличивается постоянный ток, начиная от нуля. Напряженность магнитного поля внутри катушки растет линейно с силой тока: $H = nI$. Зависимость намагниченности от напряженности магнитного поля выразится кривой $0 - 1$ (рис. 48.6). При $H = H_n$ наступает насыщение.

Если теперь уменьшать силу тока в катушке (т.е. напряженность магнитного поля от H_n до 0), то, как показывает опыт, график уже не пойдет по первоначальной кривой $1 - 0$, а пойдет по лежащей выше кривой $1 - 2$.

В результате, когда напряженность

внешнего поля становится равной нулю (точка 2), намагниченность не исчезает и характеризуется величиной J_r , которая называется *остаточной намагниченностью*. При этом часть магнитных моментов атомов остается ориентированной в первоначальном направлении. Магнитная индукция имеет, соответственно, значение B_r , называемое *остаточной индукцией*.

Итак, уменьшение H не сопровождается соответствующим уменьшением J , наблюдается отставание размагничивания. Явление отставания (запаздывание) изменений намагниченности тела от изменений напряженности магнитного поля называется магнитным *гистерезисом* (от греч. «запаздывание»). Для полного размагничивания образца будем увеличивать H в противоположном направлении (изменим направление тока в катушке на противоположное). При $H = -H_n$ остаточная намагниченность исчезает (кривая 2 — 3).

Напряженность поля H_c , при которой уничтожается остаточная намагниченность J_r , является мерой устойчивости ферромагнетика и называется задерживающей или *коэрцитивной силой*.

Существование остаточной намагниченности делает возможным изготовление *постоянных магнитов*, т. е. тел, которые без затраты энергии на поддержание макроскопических токов обладают магнитным моментом и создают в окружающем их пространстве магнитное поле. Постоянный магнит тем лучше сохраняет свои свойства, чем больше коэрцитивная сила материала, из которого он изготовлен.

Если дальше увеличивать H в противоположном направлении, то намагниченность изобразится кривой 3—4, и при $H = -H_n$ достигается насыщение (точка 4), ферромагнетик перемагничивается. Затем образец можно опять размагнитить (кривая 4—5—6) и вновь перемагнитить до насыщения (кривая 6 — 1).

Таким образом, при действии на ферромагнетик переменного магнитного поля намагниченность J изменяется в соответствии с кривой 1—2—3—4—5—6—1, которая называется **петлей гистерезиса**. Гистерезис приводит к тому, что намагниченность J ферромагнетика не является однозначной функцией H , т. е. одному и тому же значению H соответствует несколько значений J . Например, в поле напряженности H_1 (рис. 48.6) намагниченность может иметь любое значение в пределах от J'_1 до J''_1 .

Работа, необходимая для перемагничивания ферромагнетика совершается за счет энергии внешнего магнитного поля. Можно показать, что энергия, которая расходуется за один цикл перемагничивания ферромагнетика, пропорциональна площади петли гистерезиса.

Если коэрцитивная сила H_c велика, ферромагнетик называется **магнитно-жестким**. Для него характерна широкая петля гистерезиса. Ферромагнетик с малой H_c (и соответственно узкой петлей гистерезиса) называется **магнитно-мягким**. В зависимости от назначения используются ферромагнетики с той или иной характеристикой. Так, жесткие ферромагнетики (например, углеродистые и вольфрамовые стали) применяются для изготовления постоянных магнитов, а мягкие (например, мягкое железо, сплав железа с никелем) — для изготовления сердечников трансформаторов, электродвигателей и т.д., в

которых происходит перемагничивание в переменных магнитных полях, а потери энергии при этом будут незначительными.

Пример 48.1. Магнитно-мягкие материалы: железо (99,9% Fe) $\mu_{\max} = 5\,000$, коэрцитивная сила $H_c = 80$ А/м; пермаллой (78 % Ni, 22 % Fe) $\mu_{\max} \cong 10^6$, $H_c = 0,3$ А/м. Магнитно-жесткий материал: алнико (8 % Al, 14 % Ni, 24 % Co, 3 % Cu, 51% Fe): $H_c = 53\,000$ А/м.

Намагниченность ферромагнетиков зависит от температуры. С повышением температуры остаточное намагничивание уменьшается и при определенной температуре, которая называется **точкой Кюри**, исчезает совсем. Это объясняется достаточно интенсивным тепловым движением молекул ферромагнетика и дезориентацией спиновых магнитных моментов. Точка Кюри для разных ферромагнетиков неодинаковая: для железа $768\text{ }^\circ\text{C}$, никеля – это $358\text{ }^\circ\text{C}$, кобальта – $1127\text{ }^\circ\text{C}$, пермаллоя – $550\text{ }^\circ\text{C}$ и т. п. С переходом через точку Кюри ферромагнетик ведет себя во внешнем магнитном поле как парамагнетик. Переход вещества из ферромагнитного состояния в парамагнитное, происходящий в точке Кюри, не сопровождается поглощением или выделением теплоты, т. е. в точке Кюри происходит фазовый переход II рода.

Наконец, процесс намагничивания ферромагнетиков сопровождается изменением его линейных размеров и объема. Это явление получило название *магнитострикции*.

Существуют вещества, в которых обменные силы вызывают *антипараллельную* ориентацию спиновых магнитных моментов электронов. Такие тела называются *антиферромагнетиками*.

К антиферромагнетикам относят вещества, для которых обменное взаимодействие приводит к противоположной ориентации магнитных моментов соседних атомов. Кристаллическую структуру таких веществ можно представить как наложение двух или более кристаллических подрешеток, в каждой из которых магнитные моменты атомов параллельны друг другу и одинаковы по модулю. Для разных подрешеток магнитные моменты атомов направлены противоположно и равны по модулю (рис. 48.7, б). Поэтому в отсутствие магнитного

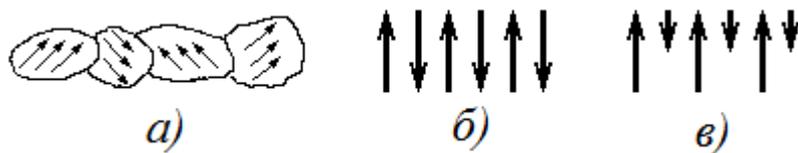


Рис. 48.7.

поля, несмотря на то, что векторы намагничивания каждой подрешетки отличны от нуля, намагниченность всего антиферромагнетика равна нулю.

Типичными примерами антиферромагнетиков являются такие металлы, как марганец, хром, самарий, неодим, а также окислы металлов MnO, FeO, CoO и др.

Для антиферромагнетиков существует температура, выше которой он теряет свои необычные свойства и становится парамагнетиком. Эта температура получила название температуры Нееля.

Так, например, для марганца она составляет $T_N = 100$ К, для хрома $T_N = 310$ К, для окисла NiO $T_N = 650$ К. Поведение ферромагнетика ниже температуры Кю-

ри и антиферромагнетика ниже температуры Нееля существенно отличаются. У ферромагнетика намагниченность может достигать больших значений, а для антиферромагнетика стремится к нулю.

Ферримагнетики имеют такую же кристаллическую структуру, как и антиферромагнетики – она состоит из нескольких подрешеток, магнитные моменты атомов соседних подрешеток направлены навстречу друг другу. Но в отличие от антиферромагнетика магнитные моменты атомов разных подрешеток не равны по модулю, что приводит к не равному нулю суммарному вектору намагниченности в отсутствии внешнего магнитного поля (рис. 48.7, в).

Поведение этих веществ во внешнем магнитном поле во многом аналогично поведению ферромагнетиков: они обладают высокими значениями магнитной проницаемости, для них существует температура Кюри, наблюдается магнитный гистерезис и т.д.

К таким веществам можно отнести, например, **ферриты** – двойные окислы переходных металлов, такие как NiFe_2O_4 , MnFe_2O_4 , и т.д. Они, как и ферромагнетики, обладают высокими значениями магнитной проницаемости, но при этом ферриты являются полупроводниками, их удельное сопротивление в (10^7 – 10^{11}) раз больше, чем у ферромагнетиков. Поэтому использование ферритов в высокочастотных полях резко уменьшает потери энергии на выделение тепла за счет протекания токов Фуко.

Отсюда их широкое применение в радиотехнике в качестве сердечников радиочастотных контуров. Ферриты применяются также для изготовления постоянных магнитов, ферритовых антенн, элементов оперативной памяти в вычислительной технике и т. д.

Контрольные вопросы.

1. Чем объясняется возникновение внутреннего дополнительного магнитного поля при помещении вещества во внешнее магнитное поле?
2. Каков физический смысл напряженности магнитного поля?
3. Что такое магнитная проницаемость и магнитная восприимчивость вещества?
4. Чей вклад больше – ядра атома или электронов – в суммарный магнитный момент атома?
5. Чему равен минимальный магнитный момент, и какая частица является его носителем?
6. В каких веществах – диа- или парамагнетиках – возникает ларморова прецессия электронных орбит?
7. Чем объясняется предел намагничивания – магнитное насыщение ферромагнетиков?
8. Чем объясняются сильномагнитные свойства ферромагнетиков?
9. Какой физический смысл имеет точка Кюри для ферромагнетиков?
10. Известен опыт по намагничиванию железного стержня, по торцу которого бьют молотком. Стержень располагают в направлении с севера на юг. Как объяснить намагничивание ферромагнитного стержня с позиций его доменной структуры?

Глава 8. ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

§ 49. Явление электромагнитной индукции. Закон Фарадея. Вывод закона электромагнитной индукции из закона сохранения энергии. Правило Ленца

1. опыты Фарадея. Индукционный ток. В 1831 году великий английский физик М.Фарадей открыл одно из наиболее фундаментальных явлений в электродинамике – явление электромагнитной индукции.

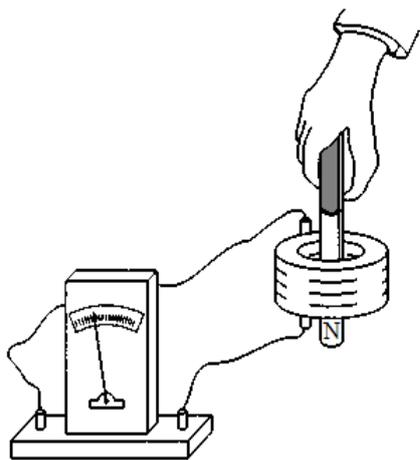


Рис. 49.1.

Напомним некоторые опыты, с помощью которых можно продемонстрировать это явление.

1. При вдвигании (или выдвигании) магнита в катушку, на которую намотана изолированная проволока, замкнутая на гальванометр, стрелка гальванометра отклоняется, свидетельствуя о появлении тока в цепи (рис. 49.1). Как только прекратится движение магнита, стрелка гальванометра возвращается к нулевому положению. То же явление наблюдается, если перемещать катушку относительно неподвижного магнита.

2. При движении катушки 1 в магнитном поле катушки 2 появляется ток в цепи катушки 1 (рис. 49.2). Ток в цепи катушки 1 возникает как при сближении катушек, так и при удалении их. Если оставить катушку 1 неподвижной, а двигать катушку с током 2, гальванометр также показывает ток.

3. Можно оставить обе катушки 1 и 2 неподвижными, но изменять силу тока в катушке 2 при помощи реостата. Тогда в цепи катушки 1 возникнет ток.

4. Индукционный ток возникнет, если оставить обе катушки 1 и 2 неподвижными, но в катушку 2 вдвигать или выдвигать железный сердечник (рис. 49.3). Этот опыт подчеркивает, что в явлении возникновения индукционного тока основную роль играет магнитная индукция, а не напряженность магнитного поля.

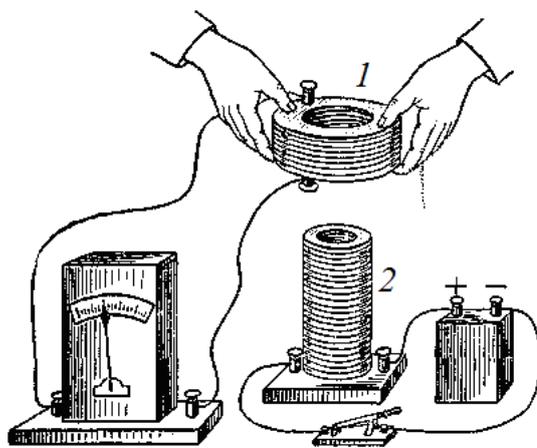


Рис. 49.2.

Опыты показывают, что во всех случаях причиной появления индукционного тока является *изменение потока магнитной индукции* через поверхность, ограниченную проводящим контуром.

Явление возникновения в проводнике электродвижущей силы при изменении магнитного поля, пронизывающего площадь контура проводника, называется электромагнитной индукцией.

Если проводник замкнут, то в нем возникает электрический ток, который называется **индукционным**.

ЭДС индукции возникает, если поток Φ_B магнитной индукции B через поверхность, ограниченную замкнутым проводящим контуром, *изменяется по любым причинам* – либо контур перемещается, поворачивается, деформируется, вращается в постоянном магнитном поле, либо контур неподвижен, а поток Φ_B изменяется за счет изменения магнитного поля B .

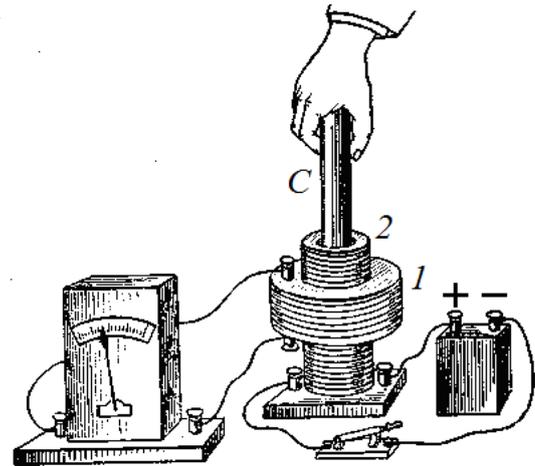


Рис. 49.3.

При этом ЭДС ε_i электромагнитной индукции в контуре пропорциональна скорости изменения потока, т.е. значению производной $\frac{d\Phi_B}{dt}$

2. Вывод закона электромагнитной индукции из закона сохранения энергии. Немецкий физик Г. Гельмгольц показал, что основной закон электромагнитной индукции – закон Фарадея – является следствием закона сохранения энергии.

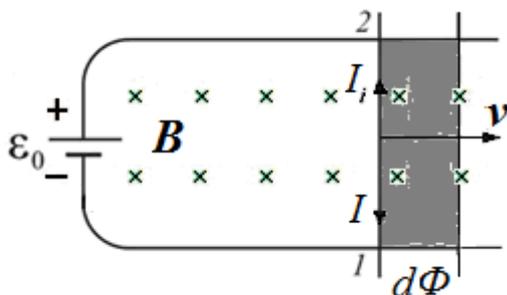


Рис. 49.4.

Рассмотрим замкнутый контур, изображенный на рис. 49.4. Одна сторона 1-2 (перемычка) контура может перемещаться. Контур помещен в однородное магнитное поле, перпендикулярное его плоскости, и содержит источник тока с ЭДС ε_0 .

За время dt источник совершает работу

$$dA = I \varepsilon_0 dt. \quad (49.1)$$

Если по перемычке проходит ток, то под действием сил Ампера перемычка придет в движение. Элементарная работа амперовых сил dA_1 , совершаемая при перемещении контура с током за время dt , выражается формулой

$$dA_1 = I d\Phi_B, \quad (49.2)$$

где $d\Phi_B$ – приращение магнитного потока через площадь контура при этом перемещении.

Кроме того, в перемычке выделяется джоулево тепло

$$dQ = I^2 R dt. \quad (49.3)$$

По закону сохранения энергии сумма двух величин (49.2) и (49.3) должна равняться работе (49.1) источника тока:

$$dA = dQ + dA_1$$

или

$$\varepsilon_0 I dt = I^2 R dt + I d\Phi_B, \quad (49.4)$$

откуда

$$I = \frac{\varepsilon_0 dt - d\Phi_B}{R dt} = \frac{\varepsilon_0 + \left(-\frac{d\Phi_B}{dt}\right)}{R}. \quad (49.5)$$

Полученное выражение можно рассматривать как запись закона Ома для замкнутого контура, в котором, кроме ЭДС источника ε_0 , имеется дополнительная ЭДС

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi_B}{dt}. \quad (49.6)$$

ЭДС электромагнитной индукции в замкнутом контуре численно равна и противоположна по знаку скорости изменения магнитного потока через поверхность, ограниченную этим контуром.

В этом состоит основной закон электромагнитной индукции – **закон Фарадея**.

Пример 49.1. Заряд, протекающий в контуре при изменении магнитного потока.

Пусть проволочный виток расположен в однородном магнитном поле так, что в начальный момент времени плоскость витка перпендикулярна к направлению вектора \mathbf{B} магнитной индукции. Затем виток поворачивают на 90° вокруг оси, перпендикулярной к вектору \mathbf{B} . Какое количество электричества протекает в контуре?

При повороте витка изменяется магнитный поток через его площадь, и в витке возникает индукционный ток. Из определения силы тока следует

$$i_i = \frac{dq}{dt}.$$

Поэтому $dq = i_i dt = \frac{\varepsilon_i}{R} dt$. Заменяя ε_i по формуле (49.6), получим

$$dq = -\frac{1}{R} \cdot \frac{d\Phi_B}{dt} \cdot dt = -\frac{1}{R} \cdot d\Phi_B.$$

Интегрирование дает выражение для заряда q , протекающего по витку при изменении магнитного потока

$$q = \frac{\Phi_H - \Phi_K}{R}, \quad (\text{П.49.1})$$

где Φ_H и Φ_K – значения магнитного потока через поверхность витка в его начальном и конечном положениях:

$$\begin{aligned} \Phi_H &= BS, & \Phi_K &= 0. \\ q &= \frac{BS}{R}. \end{aligned} \quad (\text{П.49.2})$$

Здесь S – площадь витка, R – его сопротивление. Измерив величину заряда q баллистическим гальванометром и зная площадь S и сопротивление R цепи, можно по формуле (П.49.2) определить магнитную индукцию B . На этом принципе основаны специальные приборы – флюксометры.

3. Правило Ленца.

Русский физик Э.Х. Ленц установил общее **правило нахождения направления индукционного тока**:

индукционный ток всегда направлен так, что магнитное поле этого тока препятствует изменению магнитного потока, вызывающего индукционный ток.

Например, при увеличении магнитного потока, пронизывающего поверхность, ограниченную проводящим контуром (рис. 49.5), в этом проводящем контуре возникает ток индукции такого направления, чтобы своим магнитным полем уменьшить магнитный поток.

Можно сформулировать правило Ленца короче: *индукционный ток всегда имеет такое направление, чтобы ослаблять действие причины, возбуждающей его.*

Такая формулировка облегчает нахождение направления индукционного тока.

Например, если к проводящему кольцу приближать прямой полосовой магнит северным полюсом (рис. 49.6), то на стороне кольца, обращенной к магниту, будет возникать тоже северный полюс (северный от северного отталкивается и противодействует приближению магнита). Затем, пользуясь правилом винта, можно определить направление тока индукции в кольце.

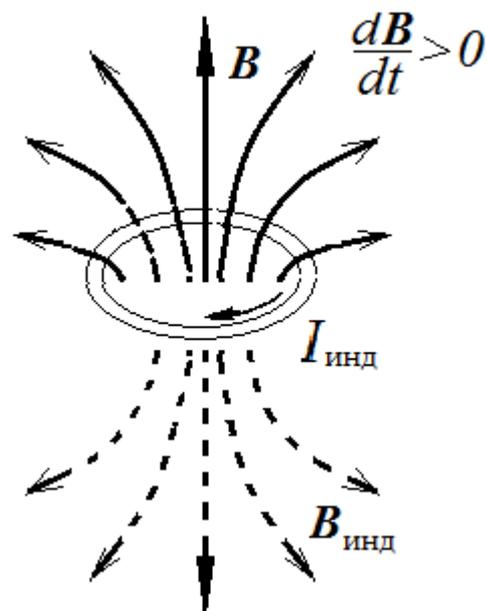


Рис. 49.5.

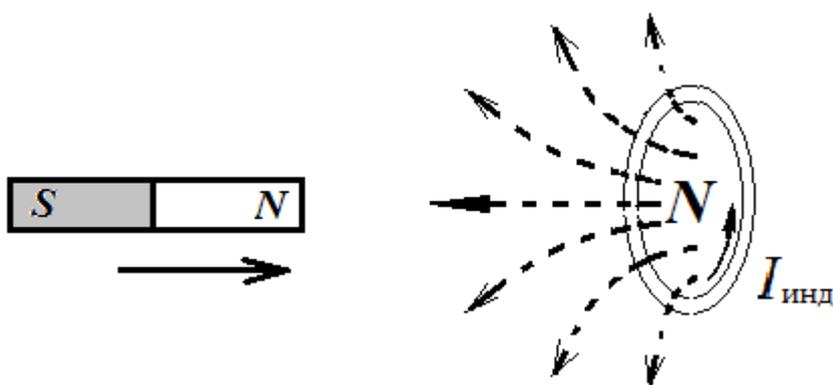


Рис. 49.6.

Математически правило Ленца отображается знаком минус в уравнении (49.6) закона Фарадея.

Чтобы пояснить смысл знака минус в законе Фарадея, рассмотрим контур, пронизываемый ли-

ниями магнитной индукции внешнего поля B (рис. 49.7).

Выберем произвольно направление *положительного обхода* контура, например, против часовой стрелки (рис. 49.7, а). Тогда по правилу правого винта *положительная нормаль n* к контуру будет направлена, как показано на рис. 49.7, а.

Выбирая определенное положительное направление нормали, мы тем самым определяем как знак потока, так и поло-

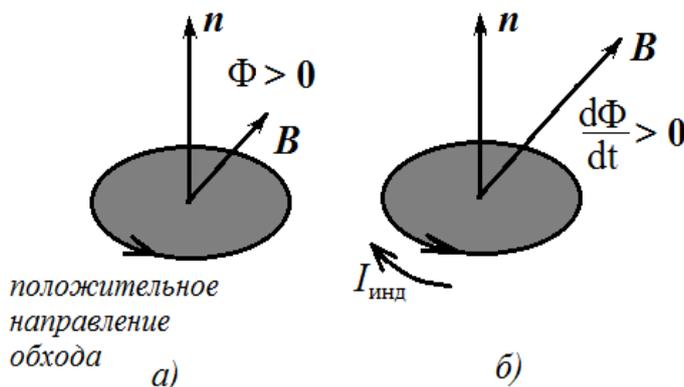


Рис. 49.7.

жительное направление тока и ЭДС в контуре.

При выбранном нами в качестве примера положительного направления обхода и остром угле между нормалью \mathbf{n} и вектором магнитной индукции \mathbf{B} магнитный поток через контур будет положительным, $\Phi > 0$.

Пусть теперь магнитное поле увеличивается (рис. 49.7, б). Положительный поток через контур также растет, $d\Phi/dt > 0$. Тогда по формуле (49.6) закона Фарадея ЭДС индукции $\varepsilon_{\text{инд}}$, а следовательно, и индукционный ток, будут отрицательными. Это означает, что ток течет в обратном направлении по отношению к выбранному пути обхода, т.е. по часовой стрелке, что соответствует правилу Ленца.

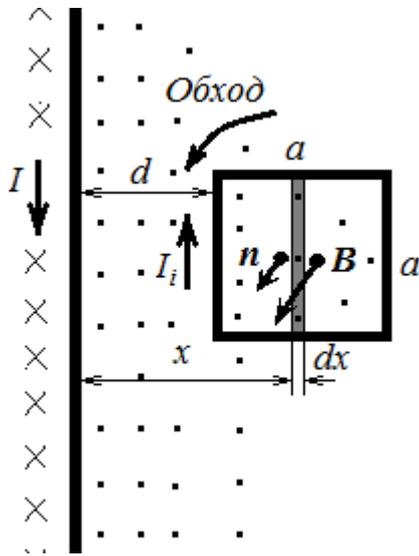


Рис. П. 49.1

Пример 49.2. В одной плоскости с бесконечно длинным проводом расположена проводящая квадратная рамка со стороной a так, что провод проходит параллельно одной из сторон рамки на расстоянии d от нее. Сопротивление рамки R . Сила тока в проводе изменяется по закону $I(t) = \alpha t^2$, где $\alpha = \text{const}$. Определить зависимость силы тока в рамке от времени.

Для решения этой задачи мы воспользуемся законом электромагнитной индукции

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Вначале определим магнитный поток Φ через рамку, создаваемый током, протекающим по проводу. Магнитное поле прямого бесконечного провода является неоднородным, убывающим обратно пропорционально расстоянию x до точки, где оно рассматривается (рис. П.49.1):

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \mathbf{n}.$$

Здесь \mathbf{n} – единичный вектор нормали к плоскости рамки. Направление нормали связано правилом правого винта с направлением обхода рамки. Выбираем произвольно направление обхода, например, против часовой стрелки (рис. П 49.1). Этим мы определяем направление положительной нормали – от чертежа «к нам», так же направлена магнитная индукция поля прямого провода с током в случае, изображенном на рис. П 49.1, и этим мы определяем знак потока Φ . При сделанном нами выборе направлений, поток Φ положительный, $\Phi > 0$.

Для определения величины потока Φ через рамку разделим площадь рамки на узкие полоски так, чтобы в пределах каждой полоски магнитное поле можно было бы считать однородным. Пусть одна из таких полосок шириной dx расположена на расстоянии x от провода. Тогда элементарный магнитный поток через полоску

$$d\Phi_B = B_n dS = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} a dx. \quad (\text{П.49.1})$$

После интегрирования находим полный поток через рамку

$$\Phi_B = \int_S \mathbf{B} dS = \int_S B_n dS = \frac{\mu_0 a I}{2\pi} \int_d^{d+a} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln \frac{d+a}{d}. \quad (\text{П.49.2})$$

Э.д.с. индукции в рамке:

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{a}{d}\right) \frac{dI}{dt} = -\frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{a}{d}\right) 2\alpha t. \quad (\text{П.49.3})$$

Наконец, по закону Ома находим ток индукции в рамке

$$I_i = \frac{\varepsilon_i}{R} = -\frac{\mu_0 \alpha t a}{\pi R} \ln\left(1 + \frac{a}{d}\right). \quad (\text{П.49.4})$$

Отрицательное значение силы тока означает, что он течет против выбранного нами положительного направления обхода рамки – ток индукции течет по часовой стрелке.

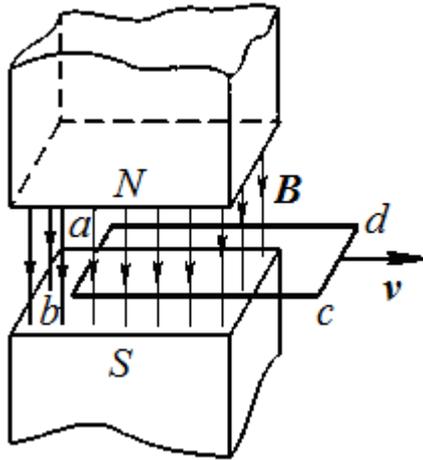


Рис. 50.1.

§ 50. Природа ЭДС индукции. Вывод закона электромагнитной индукции на основе электронной теории

Какова физическая причина возникновения ЭДС индукции? Возникновение электродвижущей силы индукции может быть обусловлено

сторонними силами разной физической природы.

При этом возможны два случая:

- 1) проводящий контур движется в постоянном магнитном поле;
- 2) проводящий контур в магнитном поле покоится, а магнитное поле изменяется.

Рассмотрим их по очереди.

1). Пусть прямоугольная металлическая рамка $abcd$ движется с постоянной скоростью v в магнитном поле, как показано на рис. 50.1. Сторона ab пересекает силовые линии однородного магнитного поля \mathbf{B} , существующего между полюсами магнита. ЭДС индукции в контуре $abcd$ может быть вычислена с помощью закона электромагнитной индукции (49.6).

Пусть за время dt контур передвинулся на dx . По определению скорость

$$v = \frac{dx}{dt}.$$

Площадь контура, пронизываемая магнитным потоком, уменьшилась на $dS = l dx$ (l – длина стороны ab). Магнитный поток уменьшился на

$$d\Phi_B = -B dS = -B l dx = -B l v dt,$$

откуда согласно закону Фарадея (79.6) ЭДС индукции в движущемся проводнике

$$\varepsilon_{\text{инд.}} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = Blv. \quad (50.1)$$

Вычислим теперь эту же ЭДС индукции на основе электронной теории.

Рассмотрим движение прямолинейного отрезка ab контура $abcd$ (рис. 50.1) в однородном магнитном поле \mathbf{B} (на рис. 50.2 поле направлено перпендикулярно чертежу «от нас»). При движении отрезка проводника со скоростью v электроны проводимости в нем начнут двигаться с такой же скоростью. В результате

на каждый движущийся в магнитном поле электрон начнет действовать лоренцева сила, и электроны станут перемещаться вдоль отрезка ab с некоторой скоростью упорядоченного движения u (скоростью дрейфа). Скорость u направлена вдоль отрезка ab от точки a к точке b (рис. 50.2).

Как показано на рис. 50.2, скорость электронов относительно лабораторной системы отсчета теперь станет равной

$$V = v + u. \quad (50.2)$$

Тогда на каждый из свободных электронов в проводнике со стороны магнитного поля будет действовать сила Лоренца

$$F_{\text{Л}} = -e [V, B] \quad (50.3)$$

(заряд электрона равен $-e$). Эта сила перпендикулярна вектору V и по правилу винта направлена, как указано на рис. 50.2.

Разложим силу Лоренца $F_{\text{Л}}$ на две составляющие — перпендикулярно проводнику и вдоль него.

Перпендикулярная проводнику составляющая $F_{\text{А}}$, просуммированная по всем носителям заряда на участке ab проводника, даст действующую на проводник с током силу Ампера. При равномерном движении проводника она уравнивается внешней силой F , приводящей проводник в движение.

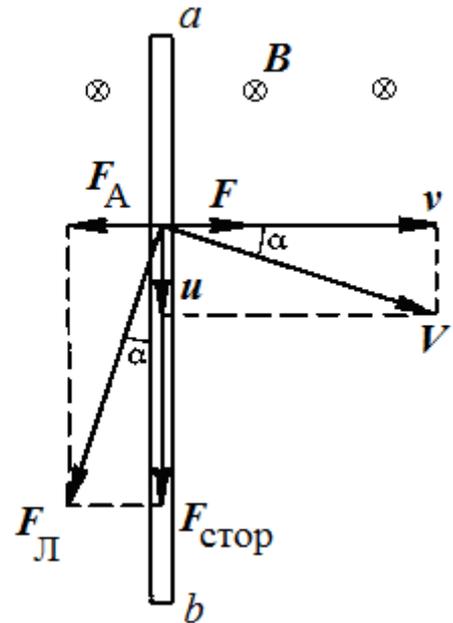


Рис. 50.2.

Направленная вдоль провода *составляющая $F_{\text{стор}}$ силы Лоренца — это и есть сторонняя сила, заставляющая электроны двигаться по проводнику*, т. е. создающая индукционный ток.

Работа силы Лоренца равна нулю, поскольку эта сила перпендикулярна скорости электронов V . Это значит, что равна нулю сумма работ силы Ампера и сторонней силы:

$$A_{\text{А}} + A_{\text{стор}} = 0,$$

откуда

$$A_{\text{стор}} = -A_{\text{А}}.$$

Но работа силы Ампера равна работе внешней силы, взятой со знаком минус

$$A_{\text{А}} = -A_{\text{внеш}}.$$

Отсюда следует, что работа сторонних сил при движении электронов в контуре равна работе внешних сил, приводящих этот контур в движение:

$$A_{\text{стор}} = A_{\text{внеш}}. \quad (50.4)$$

Другими словами, *электрическая энергия индукционного тока возникает благодаря механической работе, совершаемой внешними силами.*

Сторонняя сила $F_{\text{стор}}$ совершает работу только на участке ab длины l :

$$A_{\text{стор}} = F_{\text{стор}} l = F_{\text{Л}} \cos \alpha \cdot l = eVB l \cos \alpha,$$

где α — угол между векторами v и V , а, следовательно, $V \cos \alpha = v$.

В результате получаем окончательно для работы сторонних сил:

$$A_{\text{стор}} = evBl. \quad (50.5)$$

Отношение этой работы к заряду e , т.е. работа перемещения единицы заряда по определению представляет собой электродвижущую силу индукции $\varepsilon_{\text{инд}}$. Таким образом,

$$\varepsilon_{\text{инд}} = Blv,$$

что совпадает с формулой ЭДС в данном случае, выведенной другим путем (50.1).

Отметим, что ЭДС индукции в такой рамке возникает лишь тогда, когда только часть рамки находится в однородном магнитном поле (как показано на рис. 50.1), или, когда магнитное поле неоднородно. Если рамка целиком находится в однородном поле, то при ее поступательном движении магнитный поток не меняется и ЭДС индукции равна нулю: хотя на отдельных участках рамки сторонние силы действуют, но работа этих сил вдоль всей рамки равна нулю.

Таким образом, *если магнитное поле постоянно, а магнитный поток изменяется вследствие движения проводника, то возникающая ЭДС порождается силой Лоренца, которая определяется действием магнитного поля на движущиеся (с контуром) заряды.*

2). Иную физическую природу имеет вызывающая индукционный ток сторонняя сила, возникающая в случае, когда *контур неподвижен*, а изменяется магнитное поле (например, в неподвижную катушку вдвигается магнит, рис. 79.1, или неподвижная катушка находится в переменном магнитном поле и др.). Магнитное поле не действует на покоящиеся заряды. Какая же сила возбуждает индукционный ток в неподвижном проводнике, находящемся в переменном магнитном поле?

Ответ был дан выдающимся английским физиком Д. К. Максвеллом. Согласно Максвеллу, *всякое переменное магнитное поле возбуждает в окружающем пространстве электрическое поле* (рис. 50.3).

Такое поле имеет *вихревой характер*. В отличие от статического электрического поля, силовые линии которого всегда начинаются и заканчиваются на электрических зарядах или уходят на бесконечность, силовые линии вихревого электрического поля, порождаемого переменным магнитным полем, замыкаются сами на себя.

Это *вихревое электрическое поле и действует на неподвижные электрические заряды*, которые начинают двигаться, образуя ток индукции.

Как видим, механизм возникновения ЭДС индукции может быть разным, но конечный результат описывается одним и тем же законом Фарадея.

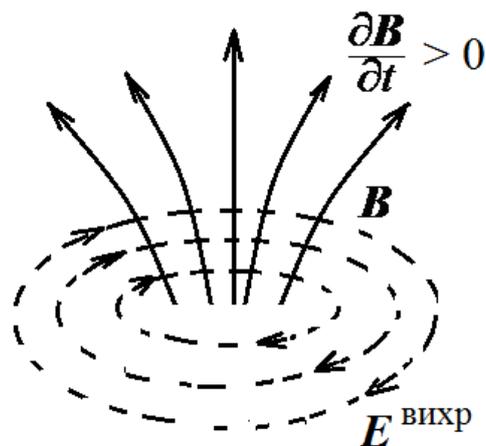


Рис. 50.3.

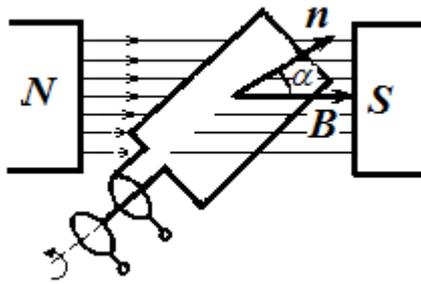


Рис. П.50.1.

Пример 50.1. Генераторами переменного тока называются устройства, преобразующие механическую энергию в энергию электрического тока. Принцип действия генератора основан на явлении электромагнитной индукции.

Пусть плоская проволочная рамка вращается в постоянном магнитном поле. Ось вращения рамки лежит в плоскости рамки и перпендикулярна вектору магнитной индукции B (рис. П.50.1).

Проведем вектор n нормали к плоскости рамки и обозначим через α угол между векторами n и B . Пусть в начальный момент времени $\alpha = 0$. Если угловая скорость

вращения рамки равна ω и она постоянна, то угол α зависит от времени по закону

$$\alpha = \omega t.$$

Магнитный поток через площадь S рамки

$$\Phi = BS \cos \alpha = BS \cos \omega t.$$

Используя основной закон электромагнитной индукции (79.6), найдем выражение для ЭДС индукции, возникающей в рамке

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} = B \cdot S \cdot \omega \cdot \sin \omega t. \quad (\text{П.50.1})$$

Т.о. ЭДС индукции изменяется по синусоидальному закону

$$\varepsilon_i = \varepsilon_{\max} \sin \omega t,$$

где $\varepsilon_{\max} = BS \omega$ – амплитудное значение ЭДС. Чтобы снять ЭДС, концы проводника прикрепляют к контактным кольцам; от колец через скользящие контакты – щетки ЭДС включают в цепь потребителя.

Заметим, что описанную конструкцию используют редко, только в маломощных генераторах. Дело в том, что с помощью скользящих контактов невозможно передать мощный ток высокого напряжения. Поэтому генераторы конструируют так, чтобы переменный ток индуцировался бы в неподвижной обмотке (статор), а вращался двух- или многополюсный электромагнит (ротор) (рис. П.50.2)

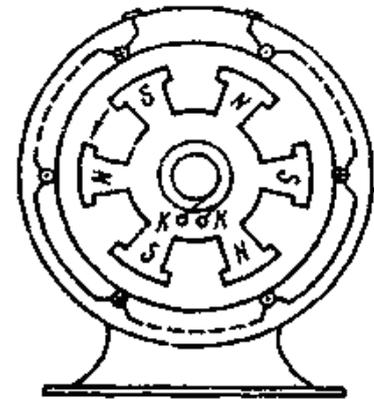


Рис. П.50.2.

Пример 50.2. Индукционные токи могут возникать в сплошных массивных проводниках при изменении пронизывающего их магнитного потока. Их называют **вихревыми токами** или **токами Фуко**. Вихревые токи образуются в проводящем теле либо вследствие изменения со временем магнитного поля, в котором оно находится, либо в результате движения тела в магнитном поле, при котором изменяется магнитный поток через тело.

Вихревые токи сами выбирают замкнутые пути в толще проводника, образуя вихреобразные контуры. Согласно правилу Ленца магнитное поле вихревых токов направлено так, чтобы противодействовать изменению магнитного потока, индуцирующему эти токи. В результате на движущийся в магнитном поле массивный проводник действует тормозящая сила. Это явление используется для гашения колебаний стрелок электроизмерительных приборов.

В соответствии с законом Джоуля-Ленца вихревые токи нагревают проводники, в которых они возникают. Это приводит к потерям энергии, например, в сердечниках трансформаторов. Приходится принимать меры для уменьшения этих токов, сердечники собирают из отдельных пластин, разделенных изолирующими прослойками, или заменяют ферромагнитный материал сердечника магнитодиэлектриками (ферритами).

С другой стороны, тепло, выделяемое токами Фуко, может быть использовано для плавки металлов в так называемых индукционных плавильных печах. В бытовой кухонной

индукционной плите разогрев металлической посуды производится вихревыми токами, создаваемыми высокочастотным магнитным полем частотой 20-100 кГц.

§ 51. Явление самоиндукции. Индуктивность. Явление взаимной индукции

Рассмотрим проволочную соленоидальную катушку, соединенную с источником тока (рис. 51.1).

Магнитное поле длинной катушки можно считать сосредоточенным только внутри нее. Будем называть магнитный поток через поперечное сечение катушки с током *потокосцеплением* или *полным магнитным потоком* Ψ .

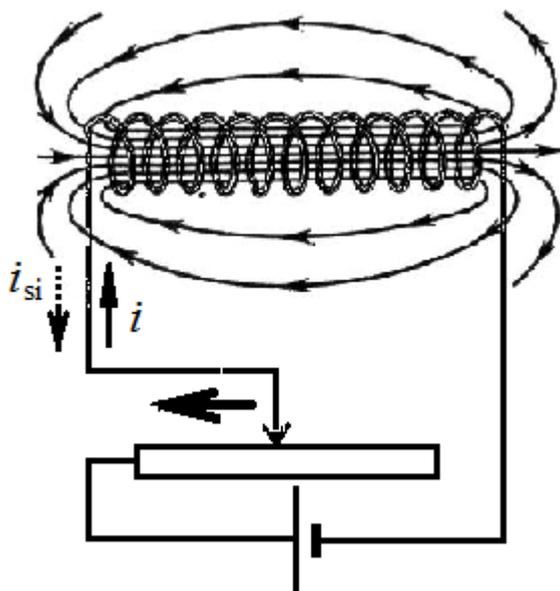


Рис. 51.1.

Пусть с помощью реостата ток через катушку изменяется, например, увеличивается (рис. 51.1). Тогда увеличивается и магнитное поле этого тока. Во всех случаях, когда изменяется магнитный поток сквозь контур, возникает электромагнитная индукция. В данном случае изменяющийся магнитный поток пронизывает витки катушки и по закону электромагнитной индукции наводит в ней ток индукции.

Возникновение ЭДС электромагнитной индукции в контуре вследствие изменения силы тока в этом же самом контуре называется самоиндукцией.

По закону электромагнитной ин-

дукции ЭДС самоиндукции равна

$$\varepsilon_{si} = - \frac{d\Psi}{dt}. \quad (51.1)$$

По правилу Ленца возникающий дополнительный к основному ток i_{SI} в катушке будет противодействовать вызвавшей его причине, т. е. ток самоиндукции препятствует любым изменениям основного тока, текущего по цепи. В данном примере ток самоиндукции i_{SI} будет направлен навстречу возрастающему току i в катушке.

В соответствии с законом Био-Савара-Лапласа магнитная индукция, а, следовательно, и создаваемый током полный магнитный поток пропорциональны силе тока в контуре

$$\Psi = LI. \quad (51.2)$$

Коэффициент пропорциональности L называется *индуктивностью* катушки (контра).

Индуктивностью контура называется величина, численно равная отношению полного магнитного потока через контур, создаваемого протекающим по этому контуру током, к силе тока

$$L = \frac{\Psi}{I}.$$

В системе СИ за единицу индуктивности принимается индуктивность такого контура, в котором протекающий по нему ток силой в 1 А создает магнитный поток в 1 Вб. Эта единица называется **генри** (Гн). 1 Гн = 1 Вб/1 А.

В качестве примера вычислим индуктивность длинного соленоида длиной l и площадью сечения S , обмотка которого содержит n витков на единицу длины. Соленоид можно рассматривать как систему из $N = nl$ последовательно соединенных витков. Полный магнитный поток через все витки соленоида (потокосцепление) равен

$$\Psi = N\Phi_0 = NBS = (nl) \cdot \mu\mu_0 nI \cdot S = \mu\mu_0 n^2 V \cdot I.$$

Здесь учтено, что магнитная индукция поля в соленоиде $B = \mu\mu_0 nI$ и $V = lS$ – объем соленоида. Тогда индуктивность соленоида

$$L = \mu\mu_0 n^2 V. \quad (51.3)$$

Как видим, индуктивность контура зависит от его формы и размеров, а также от магнитной проницаемости среды (среда неферромагнитная). Если сердечник соленоида сделан из ферромагнитного вещества, то μ зависит не только от материала сердечника, но и от силы тока в обмотке.

Выразим ЭДС самоиндукции через индуктивность контура и силу тока

$$\varepsilon_{si} = -\frac{d}{dt}(LI) = -L\frac{dI}{dt}. \quad (51.4)$$

Электродвижущая сила самоиндукции равна взятому с обратным знаком произведению индуктивности контура на скорость изменения силы тока в нем.

Формула (514) справедлива для неферромагнитной среды, заполняющей контур.

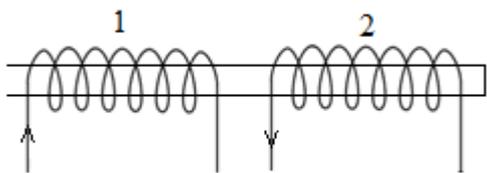


Рис. 51.2.

Рассмотрим теперь процесс *взаимной индукции* между двумя контурами, изображенными на рис. 51.2 в виде двух катушек, намотанных на общий сердечник.

Если в первом контуре течет ток I_1 , то он создает магнитный поток (потокосцепление), через второй контур величина которого пропорциональна I_1 :

$$\Psi_{21} = L_{21} I_1. \quad (51.5)$$

Если сила тока I_1 изменяется, то в соответствии с законом электромагнитной индукции переменное магнитное поле первого контура возбуждает во втором контуре ЭДС

$$\varepsilon_{21} = -L_{21} \frac{dI_1}{dt}. \quad (51.6)$$

Аналогично, если в контуре 2 течет ток I_2 , то созданный им магнитный поток через контур 1

$$\Psi_{12} = L_{12} I_2, \quad (51.7)$$

и при изменении силы тока I_2 в контуре 1 индуцируется ЭДС

$$\varepsilon_{12} = -L_{12} \frac{dI_2}{dt}. \quad (51.8)$$

Контур 1 и 2, взаимодействующие посредством магнитного поля, называются *связанными*.

Явление возникновения электродвижущей силы в одном из связанных контуров при изменении силы тока в другом называется *взаимной индукцией*.

Коэффициенты пропорциональности L_{12} и L_{21} называются *взаимной индуктивностью* контуров 1 и 2.

Расчет показывает, что для произвольных контуров 1 и 2 при отсутствии ферромагнетиков эти коэффициенты равны друг другу

$$L_{12} = L_{21}. \quad (51.9)$$

Взаимная индуктивность зависит от формы, размеров и взаимного расположения контуров, а также от магнитной проницаемости среды. При наличии ферромагнетика взаимная индуктивность зависит от силы токов в контурах.

Взаимная индуктивность двух связанных контуров есть величина, численно равная электродвижущей силе индукции, возникающей в одном из контуров, при скорости изменения силы тока в другом контуре, равной 1 А за 1 с.

Система из двух катушек, соединенных ферромагнитным сердечником, представляет собой *трансформатор* (рис. 51.3).

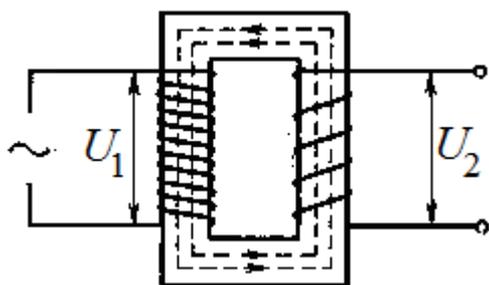


Рис. 51.3.

При помощи трансформатора можно повышать или понижать напряжение переменного тока.

При холостом ходе трансформатора, когда ток во вторичной обмотке отсутствует, отношение абсолютных значений напряжений на концах вторичной и первичной обмоток равно отношению соответствующих чисел витков.

$$\frac{|U_2|}{|U_1|} = \frac{N_2}{N_1}. \quad (51.10)$$

Для повышающего (понижающего) трансформатора $N_2 > N_1$ ($N_2 < N_1$).

Пример 51.1. Сколько витков проволоки диаметром $d = 0,4$ мм нужно намотать на картонный цилиндр диаметром $D = 4$ см, для того, чтобы получить катушку с индуктивностью $L = 1$ мГн? Обмотка соленоида однослойная, витки плотно прилегают друг к другу. Число витков n на единицу длины найдем, разделив эту единицу длины на диаметр провода

$$n = \frac{1}{d}.$$

В соответствии с формулой (51.3) для соленоида без сердечника ($\mu = 1$)

$$L = \mu_0 n^2 l S = \mu_0 \left(\frac{1}{d} \right)^2 l \frac{\pi D^2}{4}.$$

Отсюда длина соленоида $l = \frac{4d^2 L}{\pi \mu_0 D^2}$ и полное число витков провода

$$N = nl = \frac{4dL}{\pi \mu_0 D^2} \approx 254 \text{ витка}.$$

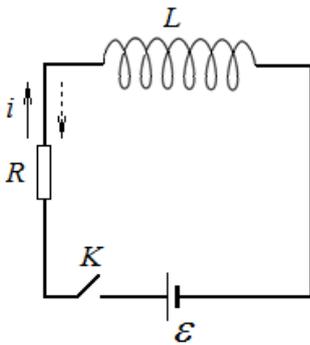


Рис. 52.1.

§ 52. Ток при замыкании и размыкании цепи

Характерным примером самоиндукции может быть возникновение токов замыкания и размыкания.

При замыкании или размыкании цепи в ней вследствие явления самоиндукции возникают дополнительные токи, которые по правилу Ленца всегда препятствуют изменению основного тока в цепи. Следовательно, при замыкании цепи ЭДС самоиндукции будет замедлять скорость нарастания тока, а при размыкании,

наоборот, замедлять скорость уменьшения тока.

Рассмотрим цепь (рис. 52.1), состоящую из последовательно включенных сопротивления R , индуктивности L и источника тока ε (в сопротивление R включены внутреннее сопротивление источника и омическое сопротивление катушки).

После замыкания ключа K в цепи кроме ЭДС источника ε будет действовать ЭДС самоиндукции ε_{si} и соответствующий ей ток самоиндукции, который называется *экстраток* замыкания. Согласно правилу Ленца направление экстратока замыкания противоположно направлению основного тока, ток самоиндукции препятствует быстрому нарастанию основного тока.

Обозначим через $i(t)$ мгновенное значение силы тока в цепи. Согласно закону Ома

$$\varepsilon + \varepsilon_{si} = iR. \quad (52.1)$$

Подставляя выражение для ЭДС самоиндукции, получим

$$\varepsilon - L \frac{di}{dt} = iR. \quad (52.2)$$

Разделив переменные, получим уравнение

$$L \frac{di}{\varepsilon - iR} = dt. \quad (52.3)$$

Это соотношение представляет собой дифференциальное уравнение для силы тока. Возьмем интеграл от правой и левой частей уравнения

$$L \int \frac{di}{\varepsilon - iR} = \int dt.$$

Оба интеграла табличные. После интегрирования получим

$$-\frac{L}{R} \ln(\varepsilon - iR) = t + const. \quad (52.4)$$

Произвольная постоянная интегрирования определяется из начальных условий: в момент времени $t = 0$ тока в цепи еще не было, $i(0) = 0$.

Тогда

$$const = -\frac{L}{R} \ln \varepsilon. \quad (52.5)$$

Подставляя (52.5) в (52.4), после несложных преобразований получим

$$\ln \frac{\varepsilon - iR}{\varepsilon} = -\frac{R}{L} t.$$

Или окончательно

$$i(t) = \frac{\varepsilon}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L} t}). \quad (52.6)$$

Величина $\frac{L}{R}$ имеет размерность времени, ее обозначают τ и называют *постоянной времени цепи (или временем релаксации, временем установления тока)*

$$\tau = \frac{L}{R}. \quad (52.7)$$

Тогда формула (52.6) примет вид

$$i(t) = \frac{\varepsilon}{R} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = i_0 (1 - e^{-t/\tau}) \quad (52.8)$$

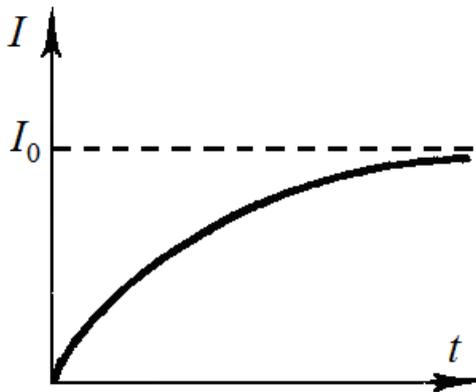


Рис. 52.2.

Из формулы (52.8) следует, что при включении источника ток в цепи не сразу, а постепенно достигает значения $i_0 = \frac{\varepsilon}{R}$, соответствующего силе установившегося тока (рис. 52.2). Нарастание силы тока происходит тем быстрее, чем больше отношение R/L , т. е. чем меньше индуктивность цепи и больше ее сопротивление.

Пример 52.1. К источнику с внутренним сопротивлением $r_i = 2$ Ом подключили катушку с сопротивлением $R_k = 8$ Ом и индуктивностью. $L = 10$ мГн. Найти время t , в течение которого ток в катушке, нарастая, достигнет значения, равного половине максимального. Полное сопротивление цепи равно $R = r_i + R_k$

Ток в момент времени t равен
$$i(t) = i_0 (1 - e^{-\frac{R}{L} t}).$$

По условию $\frac{1}{2} = 1 - e^{-\frac{R}{L} t}$ или $e^{-\frac{R}{L} t} = \frac{1}{2}$, откуда $\frac{R}{L} t = \ln 2$. Окончательно

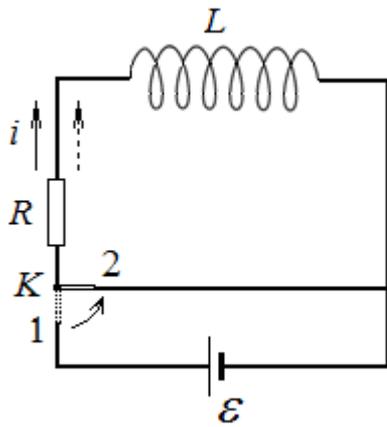


Рис. 52.3.

$$t = \frac{L}{R} \ln 2 = \frac{10 \cdot 10^{-3}}{10} 0,693 \approx 0,7(\text{мс}).$$

Рассмотрим теперь процесс размыкания тока.

В цепи, изображенной на рис. 52.3, вначале ключ K находился в положении 1 и шел ток $i_0 = \varepsilon/R$ (как и в первом случае, в сопротивление R включены внутреннее сопротивление источника и омическое сопротивление катушки).

При повороте ключа в положение 2 источник тока отключается от цепи, и ток в ней начнет уменьшаться. Но он не сразу достигает нуля, т.к. через индуктивность и сопротивление потечет ток самоиндукции, который будет поддерживать спадающий ток.

Такой ток называется *экстраток размыкания*. Направление тока до размыкания показано сплошной стрелкой, после размыкания – штриховой. По закону Ома

$$iR = -L \frac{di}{dt}. \quad (52.9)$$

После разделения переменных получаем уравнение

$$\frac{di}{i} = -\frac{R}{L} dt,$$

интегрирование которого дает $\ln i = -Rt/L + \text{const}$, или

$$i(t) = \text{const} \cdot e^{-\frac{R}{L}t}.$$

При $t = 0$ $i(0) = i_0 = \text{const} = \varepsilon/R$, так что окончательно имеем для тока размыкания

$$i(t) = \frac{\varepsilon}{R} e^{-\frac{R}{L}t} = i_0 e^{-t/\tau}. \quad (52.10)$$

По закону Ленца экстраток размыкания по направлению совпадает с током источника, поэтому ток в цепи спадает постепенно (рис. 52.4) по экспоненциальному закону.

Скорость убывания тока от начального значения I_0 до нуля характеризуется постоянной времени $\tau = L/R$. Чем больше значение τ (чем больше индуктивность цепи и чем меньше сопротивление), тем медленнее спадает ток.

Согласно формуле (52.10) постоянная времени цепи τ равна времени, в течение которого сила тока уменьшается в e раз.

В цепях, содержащих большие индуктивности, при выключении тока экстратоки размыкания могут достигать большой величины и являются причиной искры на рубильнике. Это может привести к пробое диэлектриков и выхо-

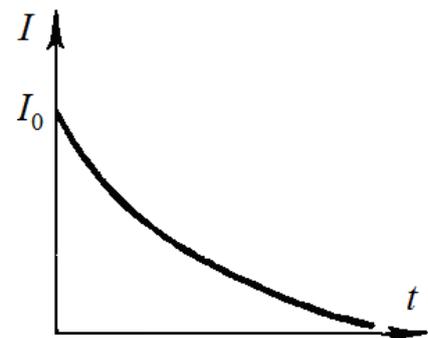


Рис. 52.4.

ду из строя электрооборудования. Чтобы предотвратить действие экстратоков размыкания, ток перед размыканием постепенно уменьшают.

В заключение установим аналогию между индуктивностью L контура в электродинамике и массой тела m в механике. Индуктивность является мерой «инертности» по отношению к изменению тока в контуре и в этом смысле является аналогом массы – меры инертности тела при его поступательном движении.

§ 53. Энергия магнитного поля

В том, что магнитное поле обладает энергией можно убедиться, рассматривая процесс спадания тока в схеме рис.52.3. До размыкания цепи ток протекал в катушке и создал в ней магнитное поле. После размыкания ключа остается последовательно соединенная катушка и резистор. Благодаря явлению самоиндукции ток в цепи спадает постепенно, и на сопротивлении выделяется джоулева теплота. Согласно закону Джоуля-Ленца элементарная работа, которую выполняет ЭДС самоиндукции,

$$dA = I\varepsilon_{si} dt = -IL \frac{dI}{dt} dt = -LI dI . \quad (53.1)$$

За время убывания силы тока от начального значения I до нуля им будет совершена работа

$$A = -L \int_I^0 IdI = \frac{LI^2}{2} . \quad (53.2)$$

Эта работа идет на нагревание проводов. За счет каких запасов энергии выделяется теплота? Очевидно, что в данном случае источником работы может быть только магнитное поле тока.

Магнитное поле является носителем энергии, за счет которой совершается работа.

Энергия магнитного поля тока I , протекающего по проводнику с индукцией L ,

$$W = \frac{LI^2}{2} . \quad (53.3)$$

Определим энергию, приходящуюся на единицу объема, занимаемого полем – *объемную плотность энергии магнитного поля*.

В качестве примера удобно рассмотреть магнитное поле соленоида, поскольку поле длинного соленоида однородно, а вне соленоида может быть принято равным нулю.

Индуктивность соленоида

$$L = \mu\mu_0 n^2 V.$$

Магнитная индукция внутри соленоида

$$B = \mu\mu_0 n I.$$

Откуда

$$I = \frac{B}{\mu\mu_0 n} . \quad (53.4)$$

Таким образом, энергия магнитного поля соленоида

$$W = \frac{1}{2} \frac{B^2 V}{\mu\mu_0} .$$

С учетом выражения $B = \mu\mu_0 n I$ для плотности энергии магнитного поля можно написать три выражения

$$w = \frac{W}{V} = \frac{B^2}{2\mu\mu_0} = \frac{H \cdot B}{2} = \frac{\mu\mu_0 n^2 I^2}{2} . \quad (53.5)$$

Пример 53.1. К обкладкам заряженного до напряжения $U_{\max} = 200$ В конденсатора, емкостью $C = 0,04$ мкФ присоединяют катушку индуктивности. Индуктивность катушки $L = 1,6$ мГн. Конденсатор начинает разряжаться, и в цепи появляется электрический ток. Какова максимальная сила тока в контуре?

Электрическая энергия конденсатора превращается в энергию магнитного поля катушки с током

$$\frac{CU_{\max}^2}{2} = \frac{LI_{\max}^2}{2} .$$

Отсюда

$$I_{\max} = \sqrt{\frac{CU_{\max}^2}{L}} = \sqrt{\frac{0,04 \cdot 10^{-6} \cdot (200)^2}{1,6 \cdot 10^{-3}}} = 1 \text{ А} .$$

§ 54. Релятивистское истолкование магнитного взаимодействия движущегося заряда и прямолинейного проводника с током. Относительный характер электрического и магнитного полей

Рассмотрим в качестве примера длинный прямолинейный проводник с током. Параллельно проводнику с некоторой скоростью v ($v \ll c$, $c \approx 3 \cdot 10^8$ м/с) в направлении, противоположном току, движется заряженная частица (например, отрицательно заряженная зарядом $-q$).

Как показывает опыт, частица притягивается к проводнику.

Как будет выглядеть взаимодействие частицы и проводника с током в различных инерциальных системах отсчета (ИСО)?

В ИСО, где проводник покоится, а частица движется (назовем ее K -системой), существует магнитное поле прямого тока. Со стороны этого магнитного поля на движущуюся в нем заряженную частицу будет действовать сила Лоренца. Отметим, что эта сила направлена перпендикулярно проводнику, «к нему».

Будем считать, что все электроны движутся упорядоченно с одинаковой скоростью v (для простоты задачи) и этим образуют ток в проводе. Перейдем теперь в ИСО, которая движется параллельно проводу в ту же сторону, что электроны, образующие ток, и с той же скоростью. Назовем ее K' -системой.

В этой ИСО заряженная частица покоится. Магнитное поле провода на покоящийся заряд не действует, и сила Лоренца, зависящая от скорости заряда, равна нулю.

Но взаимодействие заряда и провода с током должно наблюдаться в любой ИСО, оно исчезнуть не может!

Попытаемся объяснить взаимодействие заряда и тока в K' – системе без привлечения понятия магнитного поля. Для начала заметим, что в исходной K – системе проводник не заряжен. Металлический проводник можно рассматривать как остов положительных ионов, заполненный отрицательными электронами. Плотность положительных ионов и отрицательных электронов одинакова, проводник нейтральный.

А в K' – системе проводник оказывается положительно заряженным! Действительно, согласно одному из следствий специальной теории относительности, длина движущихся тел сокращается в направлении движения (лоренцево сокращение).

В K' – системе электроны покоятся, а ионы движутся в противоположную сторону с такой же по модулю скоростью. За счет «лоренцева сокращения» длина остова положительных ионов становится меньше, расстояние между положительными ионами уменьшается, а их концентрация возрастает.

С другой стороны, переходя в K' – систему, мы обнаруживаем, что расстояние между электронами увеличивается в силу того же следствия СТО (наибольшей длина будет в той ИСО, в которой тело покоится). Т.о., в этой ИСО концентрация электронов становится меньше.

В итоге нейтральный в K – системе отрезок провода с током в K' – системе заряжается положительно.

Положительно заряженный проводник действует на расположенную рядом с ним отрицательно заряженную частицу и притягивает ее.

Объяснение найдено.

Возникает вопрос. Если можно обойтись без привлечения понятия магнитного поля, если магнитные силы являются релятивистским эффектом, то зачем было вводить это понятие?

Ответ на этот вопрос можно дать такой – объяснение с помощью теории относительности является трудным и сложным! Гораздо проще оставить понятие магнитного поля, которое исторически возникло еще до появления специальной теории относительности. Что и было сделано физиками в разделе «Электромагнетизм».

Рассмотрим теперь этот пример более подробно и количественно

1. В ИСО K ток I , текущий по проводнику, создает магнитное поле \mathbf{B} , которое действует на заряженную частицу с силой Лоренца, направленной к проводнику с током (рис. 54.1)

$$\mathbf{F}_л = (-q) [\mathbf{v}, \mathbf{B}].$$

Поскольку проводник в целом электронейтрален, то электрического поля, которое действовало бы на заряженную частицу, вокруг себя он не создает, $\mathbf{E} = 0$.

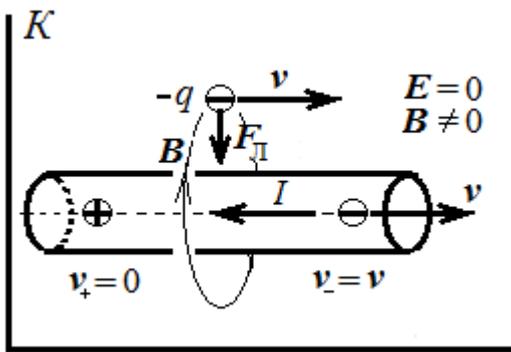


Рис. 54.1.

Упорядоченное движение электронов (в сторону, противоположную направлению тока) образует ток I . Полагаем, что скорость упорядоченного движения электронов проводимости v_- равна скорости движущейся рядом с проводником частицы: $v_- = v$. При этом скорость положительных ионов $v_+ = 0$, поскольку в K -системе проводник покоится.

2. Перейдем теперь в ИСО K' , которая движется равномерно и прямолинейно со скоростью v относительно K (рис. 54.2). В этой

системе отсчета заряд $-q$ будет неподвижным, а проводник будет двигаться относительно K' -системы со скоростью $-v$, т.е. в обратную по отношению к скорости частицы в первом случае сторону. Скорость положительных ионов $v_+ = -v$, скорость электронов проводимости $v_- = 0$ (рис. 54.3).

Движущиеся положительные ионы создадут вокруг проводника магнитное поле B' , которое однако на неподвижную частицу не действует. Тем не менее, она притягивается к проводнику.

Согласно фундаментальному физическому закону – принципу относительности – любой процесс протекает одинаково в системе, находящейся в покое, и в такой же системе, находящейся в состоянии равномерного прямолинейного движения (оба состояния определяются по отношению к произвольно выбранной ИСО).

В рассматриваемом примере таким физическим процессом является взаимодействие движущегося заряда и проводника с током. Процесс одинаков в обеих системах, но причины взаимодействия объясняются неподвижным и движущимся наблюдателями по-разному.

В K' -системе сдвинуть с места неподвижную заряженную частицу может только электрическое поле E' , которое и возникает в этой системе отсчета (рис. 54.3). Происхождение этого электрического поля E' связано с различным лоренцевым сокращением которое испытывают цепочки положительных и отрицательных зарядов. Покажем это.

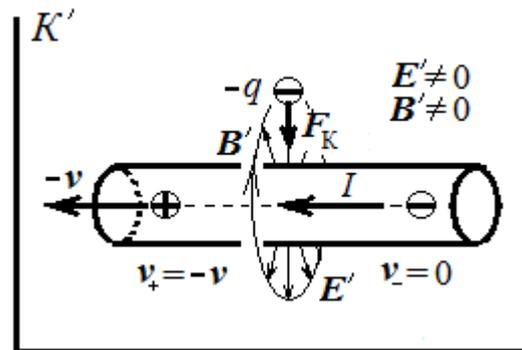


Рис. 54.3.

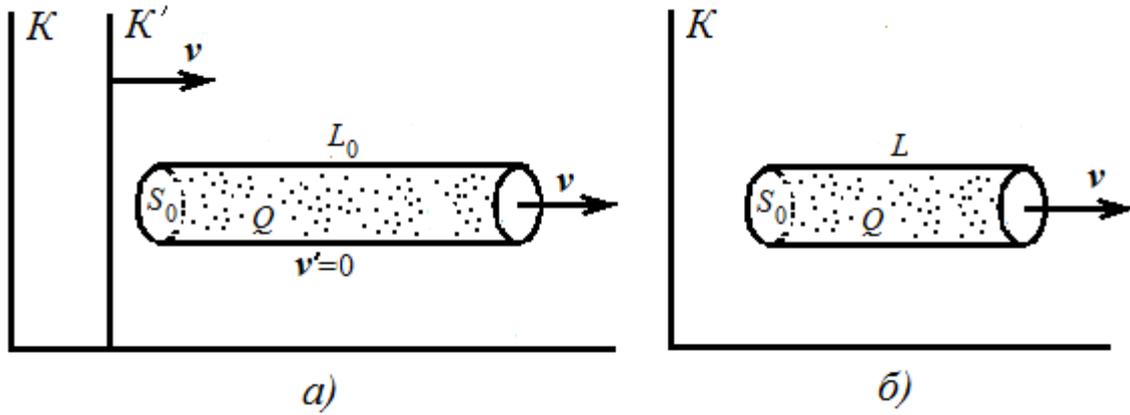


Рис. 54.4.

Пусть некоторая совокупность зарядов Q находится в цилиндрическом сосуде с размерами S_0, L_0 , неподвижном в системе K' (рис. 54.4, а). Плотность неподвижных зарядов

$$\rho_0 = \frac{Q}{S_0 L_0}. \quad (54.1)$$

Относительно системы K цилиндр с зарядами движется вдоль своей оси со скоростью v (рис. 54.4, б). Поскольку линейные размеры тел сокращаются в направлении движения, длина L движущегося цилиндра будет меньше той, которую он имел в состоянии покоя:

$$L = L_0 \sqrt{1 - v^2 / c^2}. \quad (54.2)$$

Из-за релятивистского сокращения длины объем цилиндра $S_0 L$ становится меньше: (поперечные размеры S_0 не изменяются). Тогда плотность зарядов движущейся совокупности зарядов станет равной

$$\rho = \frac{Q}{S_0 L}. \quad (54.3)$$

Если учесть, что заряд Q при движении не изменяется (инвариантность заряда), то

$$\rho_0 S_0 L_0 = \rho S_0 L, \quad (54.4)$$

откуда

$$\rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} \text{ или } \rho_{\text{движ}} = \frac{\rho_{\text{неподвиж}}}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}. \quad (54.5)$$

Применим соотношение (54.5) к движущемуся вдоль своей оси цилиндрическому проводнику.

В K -системе проводник неподвижен, образующие остов проводника *положительные* заряды покоятся (рис. 54.1), в K' -системе они движутся со скоростью $-v$ (рис. 54.3). Тогда из (54.5) следует соотношение между плотностями *положительных* зарядов в разных системах

$$\rho'_+ = \frac{\rho_+}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}. \quad (54.6)$$

Для отрицательных зарядов (рис. 54.3 и 54.1) наоборот: в K' - системе они неподвижны, в K -системе они движутся вправо со скоростью v . Уравнение (54.5) дает соотношение между плотностями отрицательных зарядов в разных системах

$$\rho_- = \frac{\rho'_-}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (54.7)$$

Результирующая плотность зарядов в K' -системе с учетом (54.6) и (54.7) равна

$$\rho' = \rho'_+ + \rho'_- = \frac{\rho_+}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \rho_- \sqrt{1 - v^2/c^2}. \quad (54.8)$$

Поскольку неподвижный в K -системе проводник электрически нейтрален, т.е. сумма плотностей положительных ионов и отрицательных свободных электронов равна нулю, то

$$\rho_+ + \rho_- = 0, \quad \text{или} \quad \rho_+ = -\rho_-. \quad (54.9)$$

Тогда (54.8) запишется

$$\rho' = \rho_+ \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - \sqrt{1 - v^2/c^2} \right) = \rho_+ \frac{v^2/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (54.10)$$

Формула (54.10) означает, что движущийся проводник с током уже не является электрически нейтральным. Он заряжается положительно и создает в точке, где находится покоящийся заряд электрическое поле E' . Это поле и обеспечивает притяжение заряда к проводу с током в ИСО K' .

Можно считать, что пространство, окружающее проводник с током, находится в некотором особом состоянии. В системе отсчета K это состояние пространства называется магнитным полем. В системе K' , движущейся вместе с зарядом ($-q$), - электрическим полем. Принцип относительности утверждает, что воздействие проводника с током на заряд в любой ИСО будет одним и тем же. *Одно и то же воздействие, вызываемое одним и тем же состоянием пространства, в разных системах отсчета называется по-разному.* В действительности нет «чисто электрического» и «чисто магнитного» взаимодействия - есть единое взаимодействие, по-разному называемое в разных системах отсчета.

Рассмотренный пример позволяет сделать вывод о том, что электрическое и магнитное поля не имеют абсолютного характера. Отдельно эти поля не существуют. ***В природе существует материальное электромагнитное поле, а отдельные его проявления в виде электрического или магнитного поля зависят от выбора ИСО, в которой рассматривается явление.***

Если в некоторой ИСО имеется только магнитное поле, то в другой появляется также и электрическое поле, и наоборот. Подходящим выбором ИСО можно устранить одно из полей. Однако электромагнитное поле нельзя уничтожить переходом в любую систему отсчета.

Приведем еще некоторые примеры.

Пример 54.1. Пусть электрический заряд движется с постоянной скоростью v относительно некоторой ИСО K , которую мы условно считаем неподвижной. Движущийся заряд

создает как электрическое, так и магнитное поле. Однако, если перейти в ИСО K' , движущуюся относительно K со скоростью заряда v , то в ней заряд покоится и никакого магнитного поля в этой системе не обнаруживается, мы будем наблюдать только электрическое поле.

Пример 54.2. Пусть теперь два электрических заряда движутся навстречу друг другу с одинаковой скоростью v относительно некоторой ИСО K . В этой ИСО мы будем наблюдать как электрическое, так и магнитное поля. Однако найти такую систему отсчета, в которой наблюдалось бы только одно из полей, в данном случае невозможно.

Из приведенных примеров следует, что экспериментальное определение электрического или магнитного поля зарядов зависит от системы отсчета, в которой ведется наблюдение.

Заметим, что электрическое и магнитное поля нельзя рассматривать как составные части электромагнитного поля. Эти поля являются его частными случаями.

Электромагнитное поле — одно из первичных фундаментальных понятий, а поэтому его нельзя разделить на какие-то более мелкие понятия — составные части.

§ 55. Преобразования Лоренца для электромагнитного поля

Пусть имеются две ИСО: K -система и движущаяся относительно нее со скоростью v система K' . В некоторой пространственно-временной точке K -системы известны значения полей \mathbf{E} и \mathbf{B} . Какими будут значения полей в той же самой пространственно-временной точке в K' -системе?

Специальная теория относительности показывает, что законы преобразования полей (преобразования Лоренца для электромагнитного поля) выражаются следующими формулами (величины со штрихом относятся к системе отсчета K' , движущейся относительно системы K вдоль оси x со скоростью v):

для компонент вектора напряженности электрического поля:

$$E'_{x'} = E_x, E'_{y'} = \frac{E_y - vB_z}{\sqrt{1 - \beta^2}}, E'_{z'} = \frac{E_z + vB_y}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (55.1)$$

для компонент вектора индукции магнитного поля

$$B'_{x'} = B_x, B'_{y'} = \frac{B_y + \frac{vE_z}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, B'_{z'} = \frac{B_z - \frac{vE_y}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (55.2)$$

Из уравнений (55.1) и (55.2) видно, что каждый из векторов \mathbf{E}' и \mathbf{B}' выражается как через \mathbf{E} , так и через \mathbf{B} . Это свидетельствует о единой природе электрического и магнитного полей. Электрическое и магнитное поля являются компонентами единого физического объекта — *электромагнитного поля*. Каждое из полей в отдельности не имеет абсолютного смысла: об электрических и магнитных полях можно говорить лишь с обязательным указанием ИСО, в которых эти поля рассматриваются.

Если, например, в системе K поле \mathbf{E} равно нулю, то в системе K' оно отличается от нуля. Если в системе K поле \mathbf{B} равно нулю, то в системе K' оно отличается от нуля.

Пример 55.1. Рассмотрим заряженную частицу, неподвижную в системе K . Поскольку заряд покоится, в этой системе мы будем наблюдать только электрическое поле

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{r}. \quad (\text{П. 55.1})$$

Здесь \mathbf{r} – радиус вектор, проведенный от частицы в данную точку поля. Неподвижные заряды магнитного поля не создают, поэтому в этой системе отсчета магнитного нет, $\mathbf{B} = 0$.

Что будет видеть наблюдатель движущейся системы отсчета K' ?

Воспользуемся формулами преобразования полей и для простоты рассмотрим случай, когда скорость системы отсчета K' много меньше скорости света, $v \ll c$. В этом случае квадратные корни $\sqrt{1-v^2/c^2} \approx 1$ и формулы преобразования Лоренца принимают вид

$$E'_{x'} = E_x, \quad E'_{y'} = E_y - vB_z, \quad E'_{z'} = E_z + vB_y. \quad (\text{П. 55.2})$$

$$B'_{x'} = B_x, \quad B'_{y'} = B_y + vE_z/c^2, \quad B'_{z'} = B_z - vE_y/c^2. \quad (\text{П. 55.3})$$

Эти уравнения можно записать в векторном виде

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + [\mathbf{v}, \mathbf{B}]. \quad (\text{П. 55.4})$$

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B} - [\mathbf{v}, \mathbf{E}]/c^2. \quad (\text{П. 55.5})$$

Поскольку мы рассматриваем нерелятивистский случай $v \ll c$, пространственные координаты и время связаны преобразованиями Галилея, поэтому радиус-вектор одинаков в обеих системах отсчета $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$.

Подставляя выражения для \mathbf{E} (П. 55.1) и $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ в преобразования (П. 55.4) и (П. 55.5), получим, что в K' -системе наблюдаются как электрическое, так и магнитное поля данного заряда:

$$\mathbf{E}' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{r}. \quad (\text{П. 55.6})$$

$$\mathbf{B}' = -\frac{1}{c^2} [-\mathbf{v}, \mathbf{E}] = \frac{\mu_0 q}{4\pi r^3} [\mathbf{v}, \mathbf{r}]. \quad (\text{П. 55.7})$$

Выражение (П. 55.6) – это кулоновское поле заряда, а выражение (П. 55.7) – магнитное поле движущегося заряда.

Таким образом, при переходе от одной системы отсчета к другой электрическое поле в одной системе выражается и через электрическое поле, и через магнитное поле в другой системе, и наоборот.

Ясно, что имеет смысл рассматривать эти поля совместно, как единое **электромагнитное поле**.

Теория относительности накладывает ограничения на взаимное превращение электрических и магнитных полей в движущихся системах отсчета. Оказывается, что при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой существуют инвариантные, т. е. не меняющие своего значения, комбинации из векторов \mathbf{E} и \mathbf{B} . Это скалярное произведение этих векторов и их разность квадратов:

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{E}' \cdot \mathbf{B}', \quad (55.3)$$

$$E^2 - c^2 B^2 = E'^2 - c^2 B'^2. \quad (55.4)$$

Формулы (55.3), (55.4) позволяют сделать ряд выводов о свойствах электромагнитного поля.

Если в какой-либо инерциальной системе отсчета электрическое и магнитное поля взаимно перпендикулярны (их скалярное произведение равно нулю, $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$), то, как видно из (55.3), они будут взаимно перпендикулярны и во всякой другой системе.

Если левая часть соотношения (55.4) равна нулю в некоторой ИСО, что характерно для плоской электромагнитной волны в вакууме, то это свойство будет иметь место во всех ИСО, т.е. плоская электромагнитная волна будет оставаться плоской в любой другой ИСО.

Пример 55.2. Самолет летит вдоль земного меридиана к северу со скоростью $v = 250$ м/с. Магнитное поле Земли на этой широте составляет $B_3 = 60$ мкТл и направлено вертикально вниз. Какие поля наблюдает пилот самолета?

Направим ось Ox вдоль меридиана на север. Используя единичные векторы координатных осей $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, можно записать скорость самолета, направленную вдоль оси Ox ,

$$\mathbf{v} = v \cdot \mathbf{i}, \quad (\text{П.55.8})$$

и магнитное поле Земли, направленное вертикально вниз

$$\mathbf{B} = -B_3 \cdot \mathbf{j}. \quad (\text{П.55.9})$$

Лабораторную систему отсчета K свяжем с Землей, а систему отсчета K' – с самолетом. Теперь задача выглядит таким образом: задано магнитное поле в K -системе. Пользуясь законами преобразования полей, определить электрическое и магнитное поля в K' -системе. Поскольку скорость самолета гораздо меньше скорости света, воспользуемся формулами преобразования полей для этого случая (П.55.4, П.55.5)

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' &= \mathbf{E} + [\mathbf{v}, \mathbf{B}], \\ \mathbf{B}' &= \mathbf{B} - [\mathbf{v}, \mathbf{E}]/c^2. \end{aligned}$$

В лабораторной системе отсчета электрического поля нет, $\mathbf{E} = 0$. Тогда из этих формул вытекает, что магнитное поле в K' -системе будет таким же, как и в лабораторной K -системе:

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B}. \quad (\text{П.55.10})$$

Что же касается электрического поля, то оно появляется в K' -системе:

$$\mathbf{E}' = [\mathbf{v}, \mathbf{B}] = -v B_3 [\mathbf{i}, \mathbf{j}]. \quad (\text{П.55.11})$$

Согласно известному из векторной алгебры соотношению

$$[\mathbf{i}, \mathbf{j}] = \mathbf{k},$$

поэтому

$$\mathbf{E}' = -v B_3 \mathbf{k}. \quad (\text{П.55.12})$$

Подставив числа, найдем модуль напряженности электрического поля

$$E' = 250 \cdot 60 \cdot 10^{-6} = 0,015 \text{ (В/м)}.$$

Таким образом, пилот самолета, кроме магнитного поля, регистрирует электрическое поле, направленное вдоль крыльев с востока на запад. В результате действия этого поля, на конце левого крыла самолета будут накапливаться положительные заряды, а на конце правого крыла – отрицательные заряды. При размахе крыльев $l = 60$ м разность потенциалов между концами крыльев составит

$$\Delta\varphi = E' \cdot l = 0,015 \cdot 60 = 0,9 \text{ В}.$$

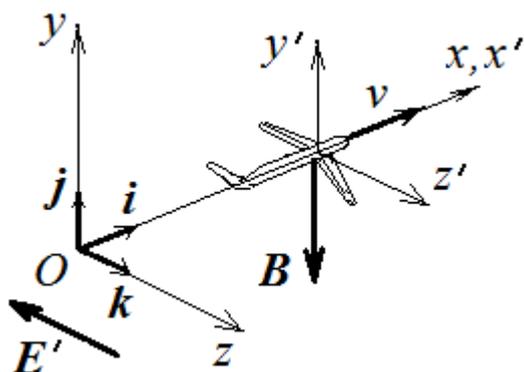


Рис. П.55.1.

Контрольные вопросы.

1. Внутри металлической трубки падает намагниченный металлический шарик с диаметром, меньшим внутреннего диаметра трубки. Почему падение шарика замедляется по сравнению с падением в этой же трубке немагнитного шарика? В каком случае будут слышны удары шарика о стенки трубки?
2. Почему сердечники трансформаторов изготавливаются из отдельных листов, а не из сплошного куска железа?
3. Почему в мощных электрических генераторах вращают магнитное поле, а не рамку?
4. Последовательно с катушкой индуктивности включена лампа накаливания. При включении напряжения яркость лампы нарастает постепенно. Как объяснить это явление? Как зависит скорость нарастания яркости от индуктивности катушки?
5. В чем заключается относительность разделения электромагнитного поля на электрическое и магнитное поля?
6. Существуют ли ИСО, в которых электрический заряд является источником только одного магнитного поля?
7. Электрический заряд неподвижен в K -системе. Какие поля наблюдаются в K' -системе, движущейся относительно K -системы равномерно и прямолинейно?
8. Существует ли такая конфигурация электромагнитного поля, при которой в любой ИСО существуют одновременно и электрическое и магнитное поля?
9. Два одинаковых заряда движутся в K -системе отсчета навстречу друг другу с одинаковой скоростью V . Какие поля наблюдаются в этой системе? Можно ли найти такую ИСО, где наблюдалось бы только одно из полей?
10. В K -системе отсчета существует постоянное неоднородное магнитное поле (например, поле неподвижного постоянного магнита). Какие поля наблюдаются в ИСО K' , движущейся относительно K -системы?
11. В K -системе отсчета существует электрическое поле, но нет магнитного. В каком случае в K' -системе также будет наблюдаться только электрическое поле?
12. Как пользуясь законами преобразования полей показать, что при скорости света, равной бесконечности, магнитное взаимодействие между двумя движущимися параллельно с одинаковыми скоростями зарядами исчезает? Какие выводы можно сделать из этого?

Глава 9. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

Между электрическими и магнитными полями существует глубокая связь. Всякое изменение магнитного поля всегда сопровождается появлением электрического поля, и, наоборот, всякое изменение электрического поля приводит к появлению магнитного поля. Это взаимное превращение электрических и магнитных полей было открыто в 60-х годах 19 в. выдающимся английским физиком Дж.К.Максвеллом.

Уравнения Максвелла – это основные уравнения классической электродинамики, которые описывают электромагнитные явления в любой среде. Уравнения были сформулированы Максвеллом на основе обобщения экспериментальных законов электрических и магнитных явлений и развития идеи английского ученого М.Фарадея о том, что взаимодействия между электрически заряженными телами осуществляется посредством электромагнитного поля.

Уравнения Максвелла связывают величины, характеризующие электромагнитное поле, с его источниками, т.е. с распределением в пространстве элект-

трических зарядов и токов и позволяют решить *основную задачу электродинамики*: по заданному распределению зарядов и токов определить характеристики создаваемых ими электрических и магнитных полей.

Система уравнений Максвелла, описывающих электромагнитное поле, состоит из семи уравнений (порядок и нумерация их произвольны).

§ 56. Вихревое электрическое поле. Первое уравнение Максвелла

Это уравнение дает углубленное истолкование явления электромагнитной индукции и является его математической формулировкой. В соответствии с законом Фарадея, при изменении магнитного потока Φ_B через замкнутый проводящий контур, возбуждается электродвижущая сила индукции

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi_B}{dt}.$$

Максвелл, однако, подошел к рассмотрению явления электромагнитной индукции с несколько иной точки зрения, чем Фарадей. Согласно Фарадею, электромагнитная индукция состоит в возбуждении электрического тока и, следовательно, для ее проявления необходимо наличие замкнутого проводника. С точки зрения Максвелла, основным в явлении электромагнитной индукции является возбуждение электрического поля, а не тока, так что это явление существует и в том случае, когда в пространстве вообще нет никаких проводников (рис. 56.1), т.е. в диэлектрике или в вакууме. Проводящий контур в опытах Фарадея играет роль индикатора для обнаружения вихревого электрического поля.

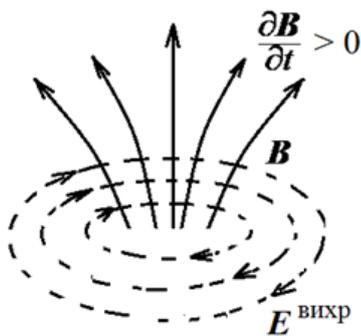


Рис. 56.1.

Учитывая определение ЭДС как циркуляции вектора напряженности E поля сторонних сил, можно записать

$$\varepsilon_i = \oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt},$$

где L – замкнутый контур интегрирования, $d\mathbf{l}$ – вектор элемента контура, проведенный в направлении обхода. Магнитный поток через произвольную поверхность S , натянутую на этот контур, определяется интегралом

$$\Phi_B = \int_S B_n dS = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}.$$

Здесь $d\mathbf{S} = dS \cdot \mathbf{n}$, \mathbf{n} – единичный вектор положительной нормали к элементу dS поверхности S , натянутой на замкнутый контур L (из конца вектора \mathbf{n} обход контура виден происходящим против часовой стрелки).

Тогда

$$\varepsilon_i = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}.$$

Учитывая, что порядок дифференцирования по времени и интегрирования по поверхности можно поменять местами, поскольку поверхность, по которой производится интегрирование, остается неизменной, получаем:

$$\frac{d}{dt} \left(\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \right) = \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} .$$

Вектор \mathbf{B} зависит от координат и времени, а интеграл $\int \mathbf{B} d\mathbf{S}$ является функцией только времени. Поэтому под знаком интеграла применен символ частной производной по времени, в предположении, что контур неподвижен.

Таким образом, мы окончательно имеем I уравнение Максвелла в интегральной форме

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} . \quad (56.1)$$

Циркуляция вектора \mathbf{E} напряженности электрического поля по произвольному замкнутому контуру равна взятой с обратным знаком скорости изменения потока магнитной индукции через поверхность, границей которой является данный контур.

Физический смысл I уравнения Максвелла можно кратко сформулировать следующим образом: *переменное магнитное поле порождает вихревое электрическое поле.*

Пример 56.1. В обмотке длинного прямого соленоида, длина которого гораздо больше его диаметра, изменяется ток по закону $I = I_0 \cos \omega t$. Число витков, приходящихся на единицу длины соленоида, равно n , сердечник изготовлен из неферромагнитного материала с магнитной проницаемостью μ . Определить закон изменения электрического поля как функцию расстояния r от оси соленоида.

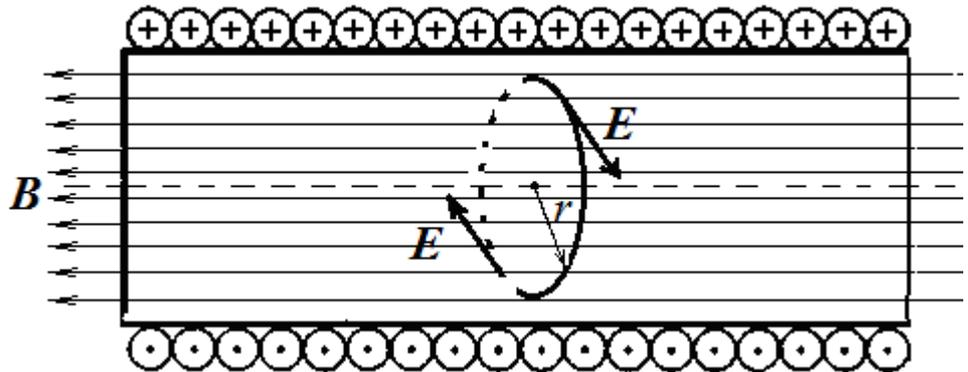


Рис. П. 56.1.

Переменное магнитное поле внутри соленоида

порождает вихревое электрическое поле. Математически это записывается в виде уравнения Максвелла так:

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = - \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S} . \quad (\text{П. } 56.1)$$

Для вычисления стоящей слева в уравнении Максвелла циркуляции вектора \mathbf{E} в качестве контура интегрирования L выберем одну из силовых линий вихревого электрического поля. Это окружность с центром на оси соленоида (рис. П.56.1). Тогда

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = E \oint_L d\mathbf{l} = E \cdot 2\pi r . \quad (\text{П. } 56.2)$$

Раскроем теперь содержание правой части уравнения Максвелла. Считая поле внутри соленоида однородным, т.е. одинаковым по сечению $S = \pi r^2$, вынесем магнитную индукцию B за знак интеграла и, пренебрегая краевыми эффектами, заменим выражением $B = \mu_0 n I$:

$$\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = \frac{d}{dt} (B \int_S dS) = \frac{d}{dt} (\mu\mu_0 n I \pi r^2) = \mu\mu_0 n \pi r^2 \frac{dI}{dt}. \quad (\text{П. 56.3})$$

Находим производную от силы тока по времени

$$\frac{dI}{dt} = \frac{d}{dt} (I_0 \cos \omega t) = -I_0 \sin \omega t. \quad (\text{П. 56.4})$$

Приравнявая левую и правую части уравнения Максвелла (П. 56.1), получим для напряженности вихревого электрического поля

$$E(r, t) = \frac{\mu\mu_0}{2} \omega n r I_0 \sin \omega t. \quad (\text{П. 56.5})$$

§ 57. Ток смещения. Второе уравнение Максвелла

Из явления электромагнитной индукции следует, что всякое переменное магнитное поле вызывает вихревое электрическое поле.

Основная идея Максвелла заключалась в том, что возможно и обратное явление, т.е. изменяющееся со временем электрическое поле должно приводить к появлению вихревого магнитного поля. Эта плодотворная идея впоследствии была подтверждена на опыте.

Чтобы проиллюстрировать открытие Максвелла, рассмотрим цепь переменного тока, содержащую конденсатор.

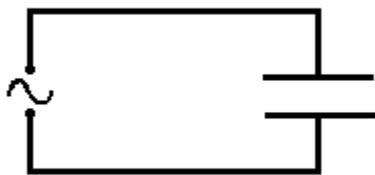


Рис. 57.1.

В рассматриваемой схеме упорядоченное движение зарядов (электронов) существует только в проводнике, соединяющем обкладки. На обкладках конденсатора упорядоченное движение зарядов обрывается.

Однако, это не мешает существованию переменного тока в рассматриваемом контуре. Заряды в нем движутся от зажимов источника к обкладкам конденсатора и обратно, заряжая, разряжая и перезаряжая конденсатор. Заряды скапливаются на обкладках, не проникая внутрь конденсатора. Между обкладками конденсатора существует переменное электрическое поле.

Величину, пропорциональную скорости изменения со временем электрического поля, Максвелл назвал **током смещения**. Термин «ток» здесь употребляется не в прямом смысле – никакого упорядоченного движения зарядов между обкладками конденсатора нет. Сущность тока смещения можно выразить следующим образом: **это изменяющееся во времени электрическое поле**.

Ток смещения создает в окружающем пространстве магнитное поле такое же, как и поле равного ему тока проводимости. Впоследствии было доказано экспериментально, что изменяющееся электрическое поле создает вокруг себя магнитное поле.

Однако, ток смещения, в отличие от тока проводимости, не выделяет джоулевой теплоты.

Если согласно Максвеллу ток смещения $i_{\text{см}}$ в конденсаторе равен по величине току проводимости $i_{\text{пр}}$ в остальной части цепи:

$$i_{см} = i_{пр}, \quad (57.1)$$

то это условие позволяет выразить ток смещения через характеристики электрического поля конденсатора. Действительно, ток проводимости связан с изменением заряда каждой обкладки конденсатора общим соотношением:

$$i_{пр} = \frac{dq}{dt},$$

т. к. именно ток, т. е. движение зарядов в цепи, изменяет заряд конденсатора (заряды натекают на обкладки и стекают с них).

Далее, используем соотношения, известные из электростатики:

$$q = CU, \quad U = Ed, \quad C = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{d}, \quad (57.2)$$

где U – напряжение на конденсаторе, C – его емкость, S, d – соответственно площадь каждой обкладки и расстояние между ними (для простоты рассматривается плоский конденсатор), $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м – электрическая постоянная, ϵ – относительная диэлектрическая проницаемость диэлектрика конденсатора, E – напряженность электрического поля между обкладками конденсатора.

После этого для тока смещения получим, используя (57.1):

$$i_{см} = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}(CU) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\epsilon_0 \epsilon S}{d} Ed\right) = \frac{d}{dt}(\epsilon_0 \epsilon E \cdot S) = \frac{d}{dt}(DS) = \frac{d\Phi_D}{dt}. \quad (57.3)$$

Т.е.

$$i_{см} = \frac{d\Phi_D}{dt}. \quad (57.4)$$

Здесь $\Phi_D = DS$ есть поток вектора электрического смещения ($D = \epsilon_0 \epsilon E$) через площадь обкладок конденсатора.

Таким образом, согласно Максвеллу, ток смещения равен скорости изменения потока вектора электрического смещения.

Этот ток смещения в данном случае нужно представлять себе «текущим» через площадь, равную площади обкладки конденсатора S . Поэтому можно ввести понятие о **плотности тока смещения** $j_{см}$, определив его (аналогично плотности тока проводимости) как ток через единичную площадку, перпендикулярную току. Тогда, очевидно, получим:

$$j_{см} = \frac{i_{см}}{S} = \frac{\partial D}{\partial t},$$

или в векторной форме, как особо доказал Максвелл

$$\mathbf{j}_{см} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (57.5)$$

плотность тока смещения по величине и направлению равна скорости изменения вектора электрического смещения.

Здесь учтено, что электрическое поле может быть неоднородным, т.е. зависеть не только от времени, но и от координат. Поэтому в выра-

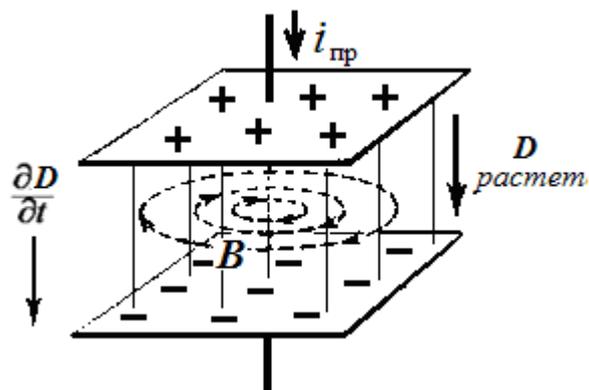


Рис. 57.2.

жении (57.5) использован знак частной производной.

Подчеркнем, что ток смещения определяется не самим вектором электрического смещения D , а производной от него. Так, например, на рис. 57.2 ток проводимости натекает на верхнюю обкладку конденсатора, электрическое поле (вектор D) направлено от положительной пластины к отрицательной сверху вниз и растет по величине. Приращение вектора D и производная $\partial D/\partial t$ (т.е. плотность тока смещения) имеют то же направление, что и ток проводимости $i_{пр}$.

На рис. 57.3 изображена ситуация через пол периода переменного тока. Верхняя обкладка конденсатора по-прежнему заряжена положительно, но теперь заряды стекают с верхней обкладки, ток проводимости $i_{пр}$ и ток смещения направлены снизу вверх.

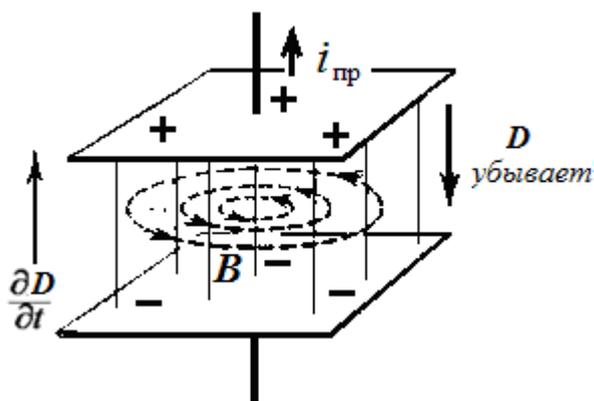


Рис. 57.3.

В диэлектрике вектор смещения D состоит из двух слагаемых :

$$D = \epsilon_0 E + P,$$

где P — поляризованность среды. Тогда формулу (57.5) можно записать в развернутом виде, раскрывающем «источники» тока смещения:

$$j_{см} = \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial t}. \quad (57.6)$$

Это значит, что ток смещения, в общем случае, состоит из двух частей: одна часть $\frac{\partial P}{\partial t}$ обусловлена изменением поля-

ризованности среды в переменном электрическом поле, например, поворотом (смещением) молекулярных диполей при изменении направления поля.

Вторая часть $\epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$ — плотность тока смещения в вакууме — не связана с движением зарядов, а обусловлена только изменением во времени электрического поля. В вакууме часть плотности тока смещения $\frac{\partial P}{\partial t}$ отсутствует, но другое слагаемое отлично от нуля, поэтому ток смещения может существовать и в вакууме.

В общем случае токи проводимости и смещения в пространстве не разделяются, они существуют в одном и том же объеме. Например, внутри проводника, по которому течет переменный ток, имеется изменяющееся электрическое поле, а, следовательно, ток смещения. Однако внутри проводов ток смещения пренебрежимо мал.

С помощью гипотезы о токе смещения Максвелл обобщил закон полного тока (39.6) введя в правую часть так называемый полный ток, т. е. сумму тока проводимости и тока смещения:

$$\oint H_l dl = \sum i_{пр} + i_{см}.$$

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} . \quad (57.7)$$

Это соотношение представляет собой **второе основное уравнение системы Максвелла** в интегральной форме.

Циркуляция вектора \mathbf{H} напряженности магнитного поля по произвольному замкнутому контуру равна алгебраической сумме токов проводимости и скорости изменения потока электрического смещения через произвольную поверхность, натянутую на этот контур.

Подводя итоги, отметим **физический смысл II уравнения Максвелла**. Он состоит в том, что как ток проводимости, так и ток смещения (переменное электрическое поле) создают магнитное поле (рис. 57.4).

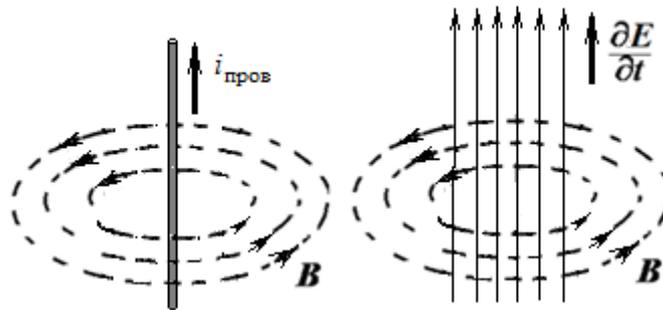


Рис. 57.4.

Пример 57.1. Плоский конденсатор состоит из двух круглых пластин радиуса R . Конденсатор заряжают постоянным током I , направление которого показано на рис. П.57.1.

Как зависит от расстояния r от оси конденсатора напряженность H магнитного поля:

- внутри конденсатора;
- вне конденсатора.

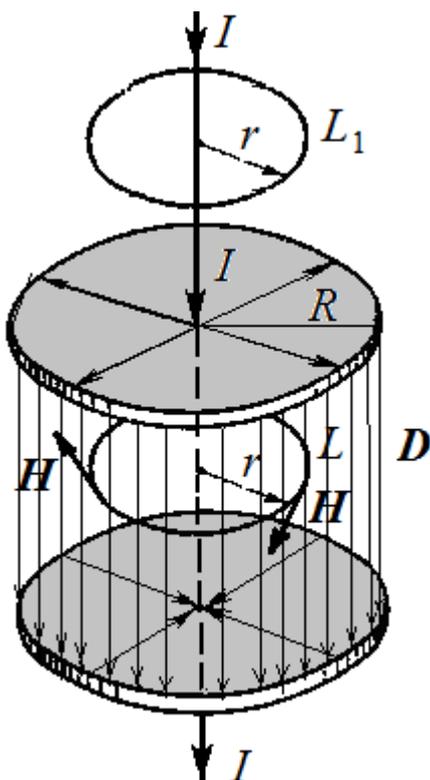


Рис. П.57.1.

Чем можно объяснить скачок напряженности поля при переходе через поверхность пластины конденсатора?

Нарастающее при зарядке конденсатора электрическое поле (вектор электрического смещения которого \mathbf{D}) создает магнитное поле напряженностью \mathbf{H} , силовые линии которого – это концентрические окружности с центрами на оси конденсатора.

Воспользуемся этой цилиндрической симметрией при выборе контура обхода для теоремы о циркуляции.

В силу симметрии модуль H напряженности магнитного поля на окружности L , ось которой совпадает с током, одинаков во всех точках, поэтому циркуляция вектора \mathbf{H} вдоль одной из этих окружностей радиуса r равна

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = H \oint_L d\mathbf{l} = H \cdot 2\pi r . \quad (\text{П. 57.1})$$

Как следует из уравнения Максвелла (57.7), для контура, лежащего *внутри* конденсатора, циркуляцию

вектора \mathbf{H} следует приравнять току смещения, пронизывающему контур L :

$$I_{см} = \int_S \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) d\mathbf{S} = \frac{\partial D}{\partial t} \int_S dS = \frac{\partial D}{\partial t} \pi r^2 = \\ = \pi r^2 \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{r^2}{R^2} \frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{r^2}{R^2} I . \quad (\text{П. 57.2})$$

Приравняв (П.57.1) и (П.57.2), определяем напряженность магнитного поля

$$H = \frac{r}{2\pi R^2} I . \quad (\text{П. 57.3})$$

Для определения поля *вне* конденсатора применим теорему о циркуляции к контуру L_1 (рис. П.57.1). Циркуляцию вектора \mathbf{H} по этому контуру следует приравнять току проводимости I , заряжающему конденсатор, откуда

$$H_1 = \frac{I}{2\pi r} . \quad (\text{П. 57.4})$$

Как видим, поля внутри конденсатора и вне его различаются. Скачок напряженности поля при переходе через пластину конденсатора обусловлен наличием радиальных токов, текущих по поверхности пластин в процессе зарядки конденсатора (рис. П.57.1).

§ 58. Третье и четвертое уравнения Максвелла. Материальные уравнения

Из электростатики (см. § 13) известна теорема Гаусса для потока вектора \mathbf{D} : *поток вектора электрического смещения через произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме заключенных внутри этой поверхности свободных зарядов.*

$$\Phi_D = \oint_S \mathbf{D}_n dS = \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \sum_i q_i .$$

Максвелл обобщил эту теорему, предположив, что она остается справедливой также и в случае *переменного* электрического поля. Выразив величину заряда $\sum q_i$ через плотность заряда ρ

$$\sum q_i = \int_V \rho dV , \quad (58.1)$$

где интеграл берется по объему V , охватываемому поверхностью S , мы получаем третье уравнение Максвелла в интегральной форме:

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho dV . \quad (58.2)$$

Физический смысл III уравнения Максвелла : электрические заряды способны служить источниками электрического поля.

Четвертое уравнение является обобщением теоремы Гаусса для статического магнитного поля на случай переменных магнитных полей:

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 . \quad (58.3)$$

Поток вектора магнитной индукции через произвольную замкнутую поверхность равен нулю.

Физический смысл IV уравнения Максвелла можно подытожить в виде утверждения: *в природе не существует магнитных зарядов.*

При решении задачи об определении электромагнитного поля в какой-либо среде к четырем уравнениям Максвелла необходимо добавить еще три соотношения, характеризующие электрические и магнитные свойства среды, в которой рассматривается электромагнитное поле. Эти дополнительные уравнения (материальные уравнения) имеют вид:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \mathbf{E}; \quad \mathbf{B} = \mu \mu_0 \mathbf{H}; \quad \mathbf{j} = \gamma \mathbf{E}, \quad (58.4)$$

где ε и μ – диэлектрическая и магнитная проницаемости, γ — удельная электропроводность среды.

§ 59. Полная система уравнений Максвелла для электромагнитного поля

Система уравнений Максвелла в интегральной форме имеет вид:

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S},$$

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} + \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}, \quad (59.1)$$

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho dV,$$

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

Иногда эти уравнения (в вакууме) записывают без привлечения вспомогательных величин \mathbf{D} и \mathbf{H} :

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S},$$

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} + \varepsilon_0 \mu_0 \int_S \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}, \quad (59.2)$$

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV,$$

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

Чтобы получить уравнения Максвелла в какой-либо среде, в уравнениях (59.2) делают замену $\varepsilon_0 \rightarrow \varepsilon_0 \varepsilon$ и $\mu_0 \rightarrow \mu_0 \mu$.

С помощью теорем векторного анализа из (59.1) можно получить уравнения Максвелла в дифференциальной форме (в вакууме):

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (59.3)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (59.4)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}. \quad (59.5)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (59.6)$$

Физический смысл их остается прежним, однако уравнения в дифференциальной форме связывают значения полей \mathbf{E} и \mathbf{B} и их производных по времени со значением плотностей заряда и тока в *одной и той же точке*.

В эти уравнения входят *дивергенция и ротор* электрического и магнитного полей. Это особые операции дифференцирования векторных полей. Не имея возможности останавливаться на этих операциях векторного анализа, отметим только, что дивергенция (по латыни «это извержение наружу, расхождение») описывает конфигурацию силовых линий, расходящихся из точек, где имеются электрические заряды. Если дивергенция больше нуля, то точка является источником, если меньше – стоком.

Под *дивергенцией* вектора \mathbf{E} в данной точке понимают предел отношения потока вектора \mathbf{E} через поверхность S , окружающую точку, к объему V , заключенному внутри поверхности, когда поверхность стягивается в точку:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}}{V}.$$

Операция ротора описывает вихревые поля (кольцеобразные силовые линии) вокруг их источников – токов или изменяющихся со временем полей. Ротор характеризует степень завихрения векторного поля.

Ротором вектора \mathbf{E} называется вектор, нормальная к площадке в данной точке проекция которого есть предел отношения циркуляции вектора \mathbf{E} по контуру площадки к ее величине, когда контур стягивается в точку

$$\operatorname{rot}_n \mathbf{E} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}}{S}.$$

Теория Максвелла является величайшим достижением классической физики. Максвеллу удалось достичь в электромагнетизме того же, что сделал Ньютон в механике. Все явления электромагнетизма можно полностью описать уравнениями Максвелла.

Из уравнений Максвелла следуют такие *выводы*:

1. Электрическое поле \mathbf{E} , как следует из уравнений (59.3) и (59.5)), порождается как электрическими зарядами (как свободными, так и связанными), так и переменным во времени магнитным полем \mathbf{B} (закон электромагнитной индукции Фарадея).

2. Магнитное поле \mathbf{B} порождается, как видно из (59.4), либо электрическими токами проводимости \mathbf{j} , либо переменными во времени электрическими полями \mathbf{E} (токами смещения), либо теми и другими одновременно.

3. Поскольку всякое электрическое поле в самом исходном случае порождается все-таки зарядами, то в конечном счете источниками всякого электрического и магнитного поля являются электрические заряды. Экспериментальный

факт состоит в том, что *в природе отсутствуют магнитные заряды*, т.е. источники магнитного поля, подобные источникам электрического поля (зарядам).

4. Поскольку в каждое из уравнений (59.3) и (59.4), описывающих поведение полей \mathbf{E} и \mathbf{B} в пространстве и времени, входят и \mathbf{E} и \mathbf{B} , то это означает, что \mathbf{E} и \mathbf{B} друг без друга в общем случае существовать не могут и надо говорить не о \mathbf{E} и \mathbf{B} отдельно, а о едином электромагнитном поле \mathbf{E}, \mathbf{B} .

5. В случае постоянных во времени \mathbf{E} и \mathbf{B} имеет место $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0$ и $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$ и уравнения (59.3) и (59.4) принимают вид

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}.$$

В каждое из этих уравнений входит или \mathbf{E} , или \mathbf{B} , а это означает, что в данном случае можно говорить о \mathbf{E} и \mathbf{B} , разделенных между собой, существующих независимо друг от друга.

6. Из уравнений (59.3) и (59.4) следует, что чем быстрее меняется в какой-либо точке магнитное поле \mathbf{B} (чем больше $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$), тем больше циркуляция возникающего электрического поля \mathbf{E} вокруг этой точки (тем больше $\operatorname{rot} \mathbf{E}$), т.е. тем оно сильнее меняется от точки к точке. Аналогично обстоит дело и с магнитным полем \mathbf{B} , возникающим при изменении во времени поля \mathbf{E} .

Таким образом, ни переменное электрическое, ни переменное магнитное поле не могут существовать одно без другого. Изменяющееся магнитное поле порождает вокруг себя вихревое электрическое поле, и наоборот, изменяющееся электрическое поле порождает вихревое магнитное поле. Оба поля являются составными частями единого электромагнитного поля.

Возникнув в одном месте пространства, переменное электрическое (или магнитное) поле не остается сосредоточенным в нем, а распространяется в окружающее пространство в виде электромагнитной волны.

Максвелл теоретически предсказал существование электромагнитных волн, т.е. переменного электромагнитного поля, распространяющегося в пространстве с конечной скоростью $c \approx 300\,000$ км/с, которые были получены экспериментально Г.Герцем только спустя 20 лет.

Контрольные вопросы.

1. Чем отличаются фарадеевская и максвелловская трактовки явления электромагнитной индукции?
2. Ток через обмотку соленоида изменяется. Какое поле обнаруживается внутри соленоида?
3. Плоский конденсатор заряжается током. Какое поле обнаруживается между обкладками конденсатора?
4. Какие наблюдаемые физические явления позволяют обнаружить ток смещения?
5. В чем сходство и в чем различие токов проводимости и токов смещения?
6. По замкнутой цепи течет постоянный электрический ток. Чему равен в этом случае ток смещения в проводнике?

Рекомендованная литература

1. Савельев И.В. Курс физики. В 3-х т. Т 2. Электричество. Колебания и волны. Волновая оптика. – М.: «Наука», 1989, – 464с.,
2. Кучерук І. М., Горбачук І.Т, Луцик П.П. Загальний курс фізики. У 3 т. Т.2: Електрика і магнетизм. – К.; «Техніка», 2006, – 452 с
3. Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс физики. – М. «Высш. шк.», 1989, – 609 с.
4. Иродов И.Е. Электромагнетизм. Основные законы. – М. «Лаборатория базовых знаний». 2002.– 320 с.
5. Сивухин Д.В. Общий курс физики. – М.: «Наука», 1977.– Т. 3. Электричество. 688 с.
6. Калашников С.Г. Электричество. М.: «Наука», 1964 – 666 с.
7. Калашников Н.П., Смондырев М.А. Основы физики. В 2 т. Т. 1. М.:Дрофа, 2003, 400 с.
8. Кингсеп А.С., Локшин Г.Р., Ольхов О.А. Основы физики. Курс общей физики. В 2 т. Т.1. Механика. Электричество и магнетизм. Колебания и волны, волновая оптика. М.: Физматлит, 2001. – 560 с.
9. Бутиков Е.И., Кондратьев А.С..Физика. Учеб. пособие. В 3 кн.Кн.2. Электродинамика. Оптика. – М.: Физматлит, 2004.-336 с.
- 10.Бушок Г.Ф., Левандовський В.В., Півень Г.Ф.. Курс фізики. У 2 кн.: Кн.1. Фізичні основи механіки. Електрика і магнетизм. – К.:«Либідь», 2001. – 448с.
11. Трофимова Т.И. Курс физики. – М., «Академия», 2005, – 560 с.
- 12.. Чертов А.Г. Воробьев А.А. Задачник по физике. – М.: «Физмат лит», 2005 – 640 с.
- 13.. Гаркуша І.П., Горбачук І.Т., Курінний В.П. та ін. Загальний курс фізики: Збірник задач – К.: «Техніка», 2004,– 560 с.

Предметный указатель

Ампер 17

Ампера закон 16

Антиферромагнетизм 56

Био-Савара-Лапласа закон

Вектор намагниченности 39

Взаимная индукция 69

Взаимная индуктивность 69

Взаимодействие параллельных токов 17

Вихревое магнитное поле 30

Вихревое электрическое поле 65, 82

Вихревые токи 66

Время релаксации 71

Генератор переменного тока 66

Гиромангнитное отношение 48

Гистерезис 55

Граничные условия для магнитного поля 45

Диамагнетики 50

Домены 52

Индуктивность 67

Индуктивность соленоида 68

Индукционный ток 58

Контур с током в магнитном поле 36

Ленца правило 61

Линии вектора \mathbf{B} 4

Магнетики 40

Магнитная восприимчивость 42

– индукция 5

– проницаемость 42,44

– поле 8

– – в центре кругового тока 12

– – движущегося заряда 15

– – на оси кругового тока 12

– – прямого длинного проводника 10

– – соленоида 32

– – тороида 32

Магнитно-мягкие и магнитно-жесткие материалы 55

Магнитный момент тока 5

Магнитный поток 32

Молекулярные токи 47

Напряженность магнитного поля 42,44

Намагниченность 40

Объемная плотность энергии магнитного поля 73
Орбитальный магнитный момент электрона 13,47
Основной закон электромагнитной индукции 60
Относительный характер электрического и магнитного полей 75

Парамагнетики 51
Петля гистерезиса 55
Плотность тока смещения 86
Поток вектора \mathbf{B} 32
Правило винта 4, 10
Преобразования Лоренца для электромагнитного поля 78
Принцип суперпозиции 9,11,14

Работа перемещения проводника с током в магнитном поле 34

Самоиндукция 67
Сила Лоренца 18
Спин 48

Теорема Гаусса для магнитного поля 33
– о циркуляции вектора \mathbf{B} 30
– о циркуляции вектора \mathbf{H} 42
Точка Кюри 56
Точка Нееля
Трансформатор 69

Уравнения Максвелла 89
– в дифференциальной форме 90

Ферримагнетики, ферриты 57
Ферромагнетики 52
Фарадея закон электромагнитной индукции 60

Холла эффект 25

Циклотрон 23
Циркуляция вектора \mathbf{B} в вакууме 29
Циркуляция вектора \mathbf{H} 42

Экстратоки замыкания 70
– размыкания 72
Электромагнитная индукция 59
– в движущихся проводниках 63
Электромагнитное поле 78, 80
Элемент тока 8
Энергия магнитного поля 73