

Міністерство освіти і науки України
Державний вищий навчальний заклад
«Національний гірничий університет»

І.П.Гаркуша, В.П.Курінний

Фізика

Навчальний посібник у 7 частинах.

Частина 4. Коливання і хвилі

Дніпро
НГУ
2018

УДК 53 (075.4)
ББК 22.3я72
Г49

Рекомендовано редакційною радою Державного ВНЗ «НГУ» як навчальний посібник для бакалаврів Галузі знань 0503 «Розробка корисних копалин» (протокол № 3 від 26. 02 2018 року)

Гаркуша І.П., Курінний В.П.

Г 49 Фізика. Ч. 4. Коливання і хвилі. [Текст]: Навчальний посібник: - Д. Національний гірничий університет, 2018. - 93 с.

Посібник складено у відповідності до програми нормативної дисципліни «Фізика» і є четвертою з семи частин курсу лекцій тих же авторів, призначених для бакалаврів галузі знань 0503 «Розробка корисних копалин». Виклад супроводжується прикладами розв'язання задач, які полегшують розуміння теоретичного матеріалу.

Може бути корисним студентам денних і заочних відділень інших технічних напрямків підготовки, а також викладачам вищих технічних навчальних закладів.

Зміст

Частина 4.

КОЛИВАННЯ І ХВИЛІ

ГЛАВА 1. ВІЛЬНІ ГАРМОНІЧНІ КОЛИВАННЯ

§ 1. Основні поняття і визначення коливань	4
§ 2. Гармонічні коливання	5
§ 3. Швидкість і прискорення при гармонічних коливаннях	7
§ 4. Диференціальне рівняння гармонічних коливань. Гармонічний осцилятор	8
§ 5. Кінетична і потенціальна енергія гармонічних коливань	10
§ 6. Малі коливання системи поблизу положення рівноваги	13
§ 7. Математичний маятник	14
§ 8. Пружинний маятник	16
§ 9. Фізичний маятник	18
§ 10. Електричний коливальний контур	19
§ 11.1 Векторна діаграма. Додавання однаково спрямованих гармонічних коливань.....	24
§ 11.2. Додавання взаємно перпендикулярних коливань	27

ГЛАВА 2. ЗГАСАЮЧІ І ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ

§ 12. Згасаючі коливання	31
§ 13.1. Вимушені механічні коливання	37
§ 13. 2. Вимушені електричні коливання	42

ГЛАВА 3. ХВИЛІ В ПРУЖНОМУ СЕРЕДОВИЩІ

§ 14. Механізм утворення пружної хвилі	45
§ 15. Рівняння біжучої хвилі. Фазова швидкість	48
§ 16. Хвильове рівняння	50
§ 17. Поздовжні хвилі в твердому тілі. Швидкість пружних хвиль	51
§ 18. Енергія пружної хвилі	54
§ 19. Звукові хвилі. Елементи акустики. Ефект Доплера в акустиці.....	56
§ 20. Пружні хвилі в газах	64
§ 21. Ударні хвилі	66
§ 22. Стоячі хвилі	68
§ 23.Хвильовий пакет. Групова швидкість	70

ГЛАВА 4. ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ ХВИЛІ

§ 24. Аналіз рівнянь Максвелла і висновки з них. Електромагнітні хвилі	74
§ 25. Швидкість поширення електромагнітних хвиль	76
§ 26. Енергія електромагнітної хвилі. Вектор Пойнтінга	81
§ 27. Відкритий коливальний контур	82
§ 28. Випромінювання коливального диполя. Шкала електромагнітних хвиль	84

ГЛАВА 1. ВІЛЬНІ ГАРМОНІЧНІ КОЛИВАННЯ

§ 1. Основні поняття і визначення коливань

Рухи і процеси, що характеризуються властивістю періодичності, в ході яких система багаторазово відхиляється від положення рівноваги і знову повертається до нього, називається коливаннями.

Наприклад, хитання маятника годинників, рух балансира в годинниковому механізмі, хитання тягарця на пружині, коливання струни, рух стовпа повітря в духовому інструменті, зміна напруги між обкладинками конденсатора в електричному коливальному контурі, коливання атомів кристалічної решітки твердого тіла і т.д.

Фізична природа коливної величини може бути різною. Наприклад, коливання маятника і коливання сили струму в електричному коливальному контурі. Однак в коливальних процесах різної природи спостерігаються одні і ті ж закономірності, які описуються одними і тими ж математичними і фізичними моделями. Загальна ознака коливальних процесів - багаторазове повторення одних і тих же станів через певні проміжки часу. При коливальних процесах будь-які фізичні величини приймають багаторазово, через рівні проміжки часу одні й ті ж значення.

Якщо позначити деяку фізичну величину через $x(t)$, то значення $x(t)$ повторюється через найменший проміжок часу T , який називається *періодом коливань*:

$$x(t + T) = x(t).$$

Таким чином, період коливань T - це час одного коливання. Величина, зворотна періоду T , що дорівнює числу коливань в одиницю часу, називається *частотою коливань*

$$\nu = 1 / T. \quad (1.1)$$

Частота ν вимірюється в герцах (Гц). 1 герц - це одне коливання в секунду. Крім цієї одиниці широко вживаються кілогерц (1 кГц = 10^3 Гц) і мегагерц (1 МГц = 10^6 Гц).

Величиною $x(t)$ може бути будь-яка величина, що коливається: кут відхилення маятника годинника, рівень рідини в посудині, величина деформації пружини при коливаннях тягарця, заряд на пластинах конденсатора, температура повітря за вікном, густина повітря під час поширення звукової хвилі і т.д.

На рис. 1.1 наведені приклади коливань різної форми: а) складної форми; б) прямокутні; в) пилкоподібні; г) синусоїдальні (гармонічні); д) затухаючі; е) наростаючі; ж) амплітудно-модульовані (АМ); з) частотно-модульовані (FM).

При вивченні коливального руху цікавляться ознаками, що характеризують повторюваність руху:

- 1) законом, за яким повторюється рух в часі;
- 2) часом, через який система приходиться до того ж самого стану (періодом);
- 3) найбільшим відхиленням величини, що коливається, від нульового значення (амплітудою).

За способом збудження коливання поділяють на:

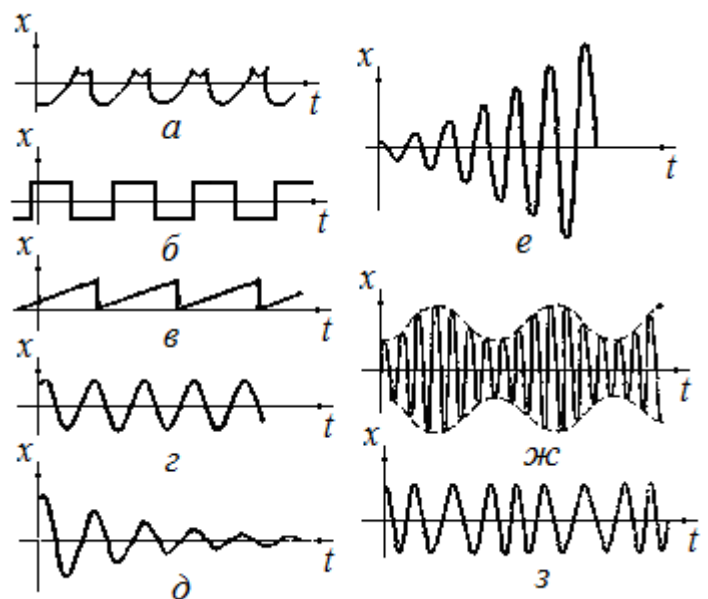


Рис. 1.1

- вільні (власні), які відбуваються в системі, наданій самій собі після того, як їй був наданий поштовх або вона була виведена з положення рівноваги. Наприклад, коливання кульки, підвішеної на нитці (маятник);
- вимушені, що відбуваються при періодичному зовнішньому впливі;
- автоколивання, що відбуваються в системах, здатних регулювати надходження енергії постійного джерела для компенсації втрат;
- параметричні, що відбуваються при періодичній зміні будь-якого параметра коливальної системи (довжини маятника, ємності або індуктивності контура і т.п.).

У механічних коливаннях величиною, що змінюється періодично, є відхилення системи (матеріальної точки, системи матеріальних точок або тіла) від положення рівноваги, яке позначається $x(t)$. У положенні рівноваги $x = 0$

§ 2. Гармонічні коливання

Найбільш важливий різновид періодичних коливань - гармонічні коливання, за яких зміна з часом величини x , що коливається, відбувається за законом синуса (або косинуса), тобто виражається формулою:

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \alpha) \text{ або } x(t) = A \cos(\omega_0 t + \alpha) . \quad (2.1)$$

Для ілюстрації змісту наведених позначень розглянемо такий дослід (рис. 2.1). Кулька, що укріплена на столику, який обертається, освітлюється збоку і відкидає тінь на екран. Коли столик обертається, тінь від кульки здійснює коливання вздовж горизонтальної прямої.

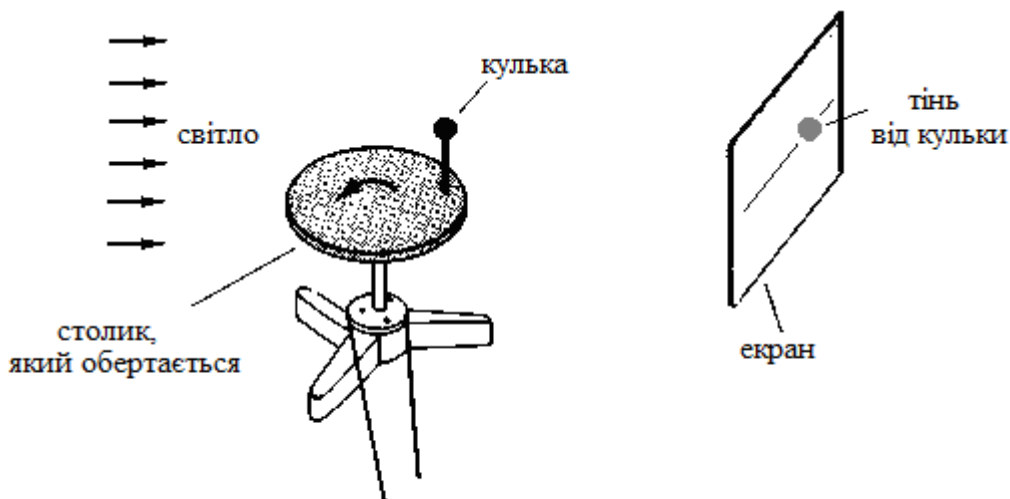


Рис. 2.1.

На рис. 2.2 приведений вид зверху на цю установку. Кулька, що позначена буквою K , знаходиться на краю круглого столика, тобто на кінці радіуса OK . Будемо обертати радіус OK з кутовою швидкістю ω_0 проти годинникової стрілки і прослідкуємо за рухом тїні від кульки K

на екрані. Якщо в початковий момент часу радіус OK був перпендикулярний до екрана, то тїнь від кульки перебувала в центрі екрана в точці O' . Через час t радіус повернеться на кут $\omega_0 t$. Якщо ж початковий кут відмінний від нуля і дорівнює α , то кут повороту буде дорівнювати $\omega_0 t + \alpha$. Позначимо довжину радіуса через A . Тоді проекція радіуса OK на вісь $O'x$ дорівнює

$$x = O'K' = A \sin(\omega_0 t + \alpha).$$

Тут через x ми позначили *відхилення (зміщення)* точки K' (надалі для стислості - тіла) від положення рівноваги O' .

Під час обертання радіуса OK змінюється величина проекції, і точка K' буде здійснювати коливання відносно точки O' - вліво, вправо і т.д. За один оберт точки K по колу її проекція здійснить одне повне коливання і повернеться у вихідну точку.

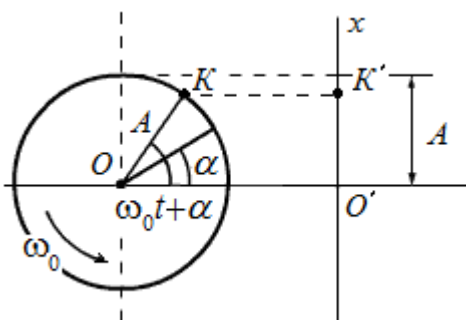


Рис. 2.2.

При цьому максимальне значення x дорівнює A і називається *амплітудою* коливань. Амплітуда - це абсолютне значення найбільшого відхилення величини, що коливається, постійна позитивна величина.

Величина $(\omega_0 t + \alpha)$, що стоїть під знаком тригонометричної функції, називається *фазою* коливання, ω_0 - *кутова або циклічна частота*. Фаза вимірюється в кутових одиницях, тобто в градусах або радіанах. За допомогою фази характеризують відхилення величини, що коливається $x(t)$ від нульового значення, α називається *початковою фазою* коливання, тобто значення фази при $t = 0$. Величина початкової фази α визначає значення коливної величини $x(t)$ в початковий момент часу. Дійсно, з (2.1) випливає, що при $t = 0$ $x_{\text{початк}} = A \sin \alpha$.

Кругова частота ω_0 пов'язана з періодом T і звичайною (або лінійною) частотою ν співвідношеннями:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu. \quad (2.2)$$

З огляду на те, що синус можна виразити через косинус:

$$\sin \alpha = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right), \text{ можна зав-}$$

жди записати вираз

$$x = A \sin(\omega_0 t + \alpha) \text{ у вигляді}$$

$$x = A \cos(\omega_0 t + \alpha'), \text{ де величина}$$

α' пов'язана з α співвідношен-

$$\text{ням } \alpha' = \alpha - \frac{\pi}{2}. \text{ Тому зазвичай}$$

використовують запис гармонічних коливань за допомогою якої-небудь однієї функції, наприклад косинуса

$$x = A \cos(\omega_0 t + \alpha).$$

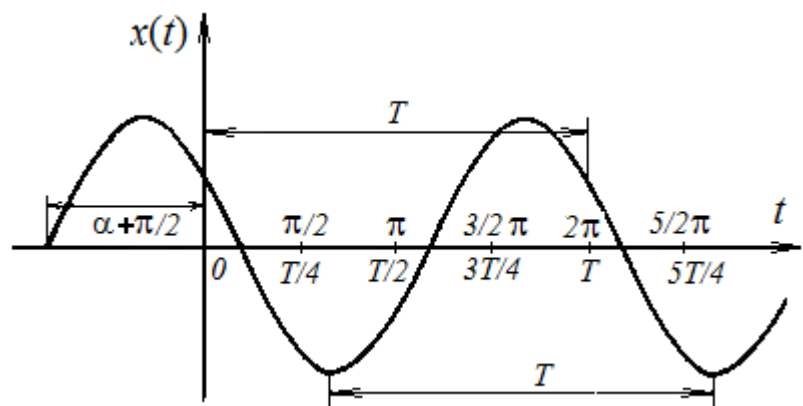


Рис. 2.3.

При зображенні гармонічних коливань на графіку по осі абсцис відкладають час (в секундах або в частках періоду) або фазу (в кутових одиницях). По осі ординат відкладають значення коливної величини $x(t)$.

Виходить крива - косинусоїда, або, що те ж, синусоїда, зрушена по осі абсцис вліво від нуля на величину $\alpha + \pi/2$ (рис. 2.3).

Якщо $\alpha = 0$, то $x = A \cos(\omega_0 t)$ і графік коливання має вигляд, зображений на рис. 2.4.

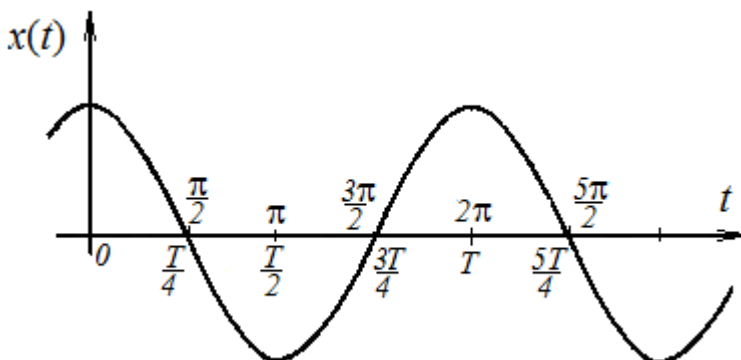


Рис. 2.4.

Оскільки при вивченні коливань нас цікавить, головним чином, не значення коливної величини в даний момент часу, а ознаки, що характеризують повторюваність руху: частота, період, закон зміни величини, що коливається протягом періоду і т.д., то початковий момент часу може бути обраний абсолютно довільно. Тому, при вивченні *однієї величини*, що коли-

вається, *початкова фаза не має ніякого значення*. Її можна вибором початку відліку часу зробити рівною нулю або $\pi/2$ (для простоти формул).

Однак, початкова фаза є суттєвою, якщо ми маємо *дві і більше величин*, що коливаються з однаковою частотою за гармонічним законом, але досягають максимальних відхилень і проходять через нуль не одночасно. В цьому випадку необхідно: знати на яку частку періоду пізніше (або раніше) одна з величин досягає максимального значення (або проходить через нуль), ніж інша. Це може бути охарактеризоване *різницею (зсувом) фаз* цих величин. У будь-який момент часу ця різниця фаз залишається постійною і рівною різниці початкових фаз. Завжди можна вибрати початковий момент часу так, щоб початкова фаза однієї з коливальних величин дорівнювала нулю. Тоді різниці фаз цієї та всіх інших величин дорівнюватимуть їх початковим фазам.

Про коливальні величини, які мають однакову частоту, які одночасно досягають максимальних значень, одночасно проходять нульові значення і змінюються в будь-який момент часу в одному напрямку, кажуть, що вони *коливаються в однакових фазах* (рис. 2.5, а). Якщо ж величини одночасно досягають максимальних за модулем значень, одночасно проходять нульові значення, але змінюються в будь-який момент часу в протилежних напрямках, кажуть, що вони *коливаються в протилежних фазах* (в протифазах) (рис. 2.5, б).

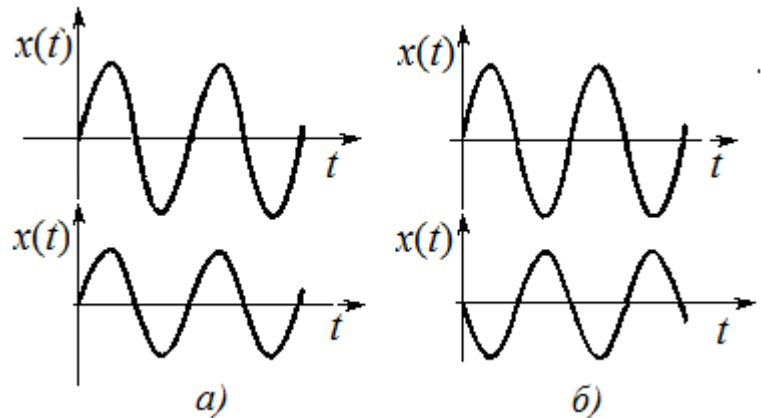


Рис. 2.5.

§ 3. Швидкість і прискорення під час гармонічних коливань

Якщо $x(t)$ - координата тіла, що здійснює гармонічні коливання, то проекція швидкості на вісь x :

$$v_x(t) = \dot{x} = \frac{dx}{dt} = \dot{x},$$

(точкою над буквою позначають похідну за часом), і проекція прискорення на вісь x :

$$a_x(t) = \dot{v}_x = \frac{dv_x}{dt} = \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$$

змінюються з часом теж по гармонічному закону. Використовуючи $x = A \cos(\omega_0 t + \alpha)$, отримаємо

$$v_x(t) = \dot{x} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha) = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \alpha + \pi/2). \quad (3.1)$$

Таким чином, коливання швидкості випереджають коливання координати за фазою на $\pi/2$:

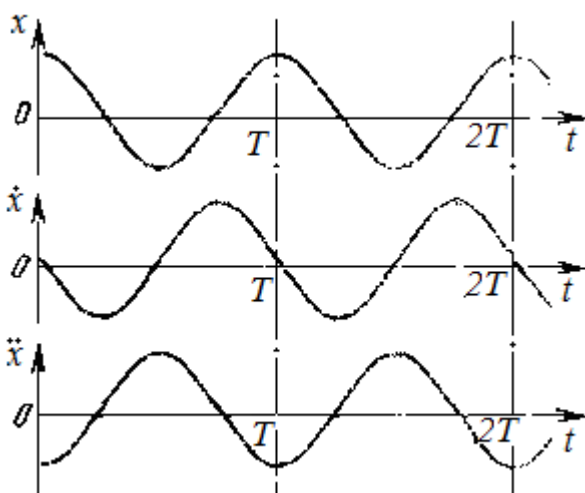


Рис. 3.1.

в той момент часу, коли відхилення за модулем є найбільшим, швидкість дорівнює нулю, а коли проходиться положення рівноваги, то швидкість досягає максимального за модулем значення (ці виводи становляться наочними, якщо представити себе при цьому гойдання маятника).

Прискорення при гармонічному коливанні також змінюється за гармонічним законом, але коливання прискорення відбуваються в протифазі з відхиленням, тобто завжди мають протилежний знак. Прискорення досягає найбільшого за модулем значення в той момент часу, коли відхилення є найбільшим.

$$a_x(t) = \ddot{x} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \alpha) = A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \alpha + \pi) = -\omega_0^2 x. \quad (3.2)$$

Прискорення завжди спрямоване до положення рівноваги: відхиляючись від положення рівноваги, коливна точка рухається сповільнено, наближуючись до нього - прискорено.

На рис. 3.1 зіставлені графіки зміщення і проекцій швидкості та прискорення на вісь x .

§ 4. Диференціальне рівняння гармонічних коливань. Гармонічний осцилятор

Згідно з другим законом Ньютона зв'язок між проекцією сили на вісь Ox і прискоренням дається формулою $F_x = ma_x$. З урахуванням (2.1) і (3.2) отримаємо

$$F_x = -m A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \alpha) = -m \omega_0^2 x = -kx. \quad (4.1)$$

Прикладом сил, які задовольняють співвідношенню $F_x = -kx$, є пружні сили. Ці сили пропорційні зміщенню, а мінус вказує на те, що напрямки сили і зміщення є протилежними. Сили, які мають іншу природу, ніж пружні, але задовольняють умові $F_x = -kx$, називаються **квазіпружними**, а коефіцієнт

$$k = m \omega_0^2 \quad (4.2)$$

- коефіцієнтом квазіпружної сили.

З зіставлення виразів (2.2) і (3.2) виходить:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (4.3)$$

Це співвідношення являє собою **диференціальне рівняння гармонічних коливань**. Загальним розв'язком цього рівняння є функція

$$x = A \cos(\omega_0 t + \alpha). \quad (4.4)$$

У цьому можна переконатися безпосередньою підстановкою. Дійсно, диференціюючи функцію (4.4) двічі, знаходимо

$$\dot{x} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha), \quad (4.5)$$

$$\ddot{x} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \alpha). \quad (4.6)$$

Підставляючи (4.5) і (4.6) в (4.3), переконуємося, що рівняння обертається в тотожність.

Рішення є загальним, оскільки в нього входять дві довільні сталі A і α . Значення довільних сталих - амплітуди A і початкової фази α - для кожного конкретного випадку визначаються з початкових умов, тобто з того, як саме система виводиться з положення рівноваги.

Приклад 1. 1). Маятник відхилили від положення рівноваги на деякий кут φ_0 і відпустили. Визначити закон коливань маятника.

Як буде показано нижче, закон коливань маятника має вигляд:

$$\varphi(t) = A \cos(\omega_0 t + \alpha). \quad (\text{П. 4.1})$$

Врахуємо початкову умову - при $t = 0$ початковий кут відхилення дорівнює φ_0 :

$$\varphi(0) = A \cos \alpha = \varphi_0. \quad (\text{П. 4.2})$$

Другу необхідну умову отримаємо, якщо врахуємо, що маятник відпустили без початкової швидкості, тоб-

то $\dot{\varphi}(0) = 0$.

Диференціюючи загальне рішення по t , отримаємо

$$\dot{\varphi}(t) = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t + \alpha), \quad (\text{П. 4.3})$$

Звідки $\dot{\varphi}(0) = -\omega_0 A \sin \alpha = 0$. Оскільки ані ω_0 , ані A не дорівнюють нулю, то $\sin \alpha = 0$, тобто $\alpha = 0$.

В підсумку з (П. 4.2) отримуємо $A = \varphi_0$, і рівняння руху маятника в даному випадку має вигляд

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos \omega_0 t. \quad (\text{П. 4.4})$$

2). Той самий маятник можна змусити коливатися, не відхиляючи його від положення рівноваги, а штовхнувши його в початковий момент часу, тобто надавши йому початкову швидкість $\dot{\varphi}_0$. Тоді початкові умови мають вигляд $\varphi(0) = 0$ і $\dot{\varphi}(0) = \dot{\varphi}_0$. З першої початкової умови отримаємо $\varphi(0) = A \cos \alpha = 0$. Випадок $A = 0$ не має фізичного змісту, отже $\cos \alpha = 0$ і α повинно бути рівним $\pi/2$. Далі з формули (П. 4.3) отримаємо

$$\dot{\varphi}(0) = -\omega_0 A \sin \frac{\pi}{2} = -\omega_0 A = \dot{\varphi}_0. \quad (\text{П. 4.5})$$

Звідки $A = -\frac{\dot{\varphi}_0}{\omega_0}$ і рівняння руху маятника запишеться так:

$$\varphi(t) = -\frac{\dot{\varphi}_0}{\omega_0} \cos(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}) = \frac{\dot{\varphi}_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t. \quad (\text{П. 4.6})$$

Підводячи підсумки, можна дійти такого висновку.

Якщо деяка величина x задовольняє диференціальному рівнянню $\ddot{x} + bx = 0$, то ця величина здійснює коливання за законом синуса або косинуса, а корінь квадратний із b визначає кругову частоту цих коливань.

Гармонічним осцилятором називають систему, яка при зміщенні з положення рівноваги відчуває дію поворотальної сили F , яка пропорційна зміщенню x (пружної або квазіпружної сили). Така система здійснює гармонічні коливання. Прикладами гармонічних осциляторів можуть служити маятники - математичний, фізичний, пружинний, електричний коливальний контур і т.д.

Приклад 2. В U-подібній трубці міститься рідина. Довжина стовпчика рідини l . Визначити частоту коливань рідини, виведеної зі стану рівноваги.

Нехай рідина в одному коліні трубки піднялася на відстань x від рівноважного рівня. На таку ж відстань опуститься рівень рідини в іншому коліні, так що різниця рівнів складе $2x$.

Сила, що повертає рідину в трубці до положення рівноваги, при якому рівні в обох колінах трубки вирівнюються, як видно з рисунка, дорівнює вазі стовпчика довжиною $2x$.

Проекція цієї сили на вертикаль є від'ємною, оскільки x відраховується уверх, а сила спрямована вниз.

Отже

$$F_x = -(2x) S \rho g, \quad (\text{П. 4.7})$$

де S - площа поперечного перерізу трубки, ρ - густина рідини. Згідно з другим законом Ньютона $F_x = m \ddot{x}$, де m - маса всієї рідини в трубці. В даному випадку

$$-(2x) S \rho g = m \ddot{x}, \quad (\text{П. 4.8})$$

Знайдемо вираз для маси m всієї рідини в трубці (довжина стовпчика рідини дорівнює l)

$$m = \rho S l \quad (\text{П. 4.9})$$

Підставимо масу в рівняння (П.4.8). Після скорочення отримаємо

$$\ddot{x} + \frac{2g}{l} x = 0 \quad (\text{П. 4.10})$$

або

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (\text{П. 4.11})$$

звідки циклічна частота коливань рідини в трубці

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2g}{l}}. \quad (\text{П. 4.12})$$

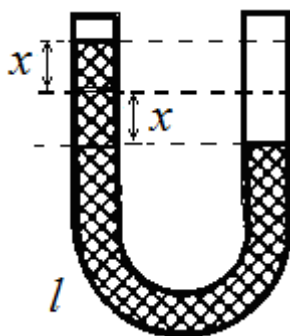


Рис. П.4.1.

§ 5. Кінетична і потенціальна енергії гармонічного осцилятора

Користуючись формулами (2.2) і (3.1) можна записати кінетичну енергію матеріальної точки, що здійснює гармонічні коливання

$$W_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \alpha). \quad (5.1)$$

Потенціальна енергія матеріальної точки, що здійснює гармонічні коливання під дією пружної (а також квазіпружної) сили, дорівнює

$$W_p = \frac{kx^2}{2} = \frac{kA^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \alpha). \quad (5.2)$$

Склавши вирази (5.1) і (5.2), а також з огляду на те, що $k = m\omega_0^2$ (див 4.2), отримаємо повну механічну енергію матеріальної точки, що коливається

$$W = W_k + W_p = \frac{kA^2}{2} (\sin^2(\omega_0 t + \alpha) + \cos^2(\omega_0 t + \alpha)) = \frac{kA^2}{2} = \text{const}. \quad (5.3)$$

Таким чином, повна енергія гармонічного осцилятора виявляється постійною.

В процесі коливань відбувається перетворення кінетичної енергії в потенціальну і навпаки, причому в моменти найбільшого відхилення від положення рівноваги повна енергія складається тільки з потенціальної енергії. При проходженні точки через положення рівноваги повна енергія складається тільки з кінетичної енергії, яка в цей момент часу є максимальною.

Використовуючи формули тригонометрії, виразам (5.1) і (5.2) можна надати інший вид

$$W_k = W \sin^2(\omega_0 t + \alpha) = W \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2(\omega_0 t + \alpha) \right), \quad (5.4)$$

$$W_p = W \cos^2(\omega_0 t + \alpha) = W \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2(\omega_0 t + \alpha) \right). \quad (5.5)$$

де W - повна енергія осцилятора. З цих формул видно, що як кінетична, так і потенціальна енергія коливаються з частотою $2\omega_0$, тобто з частотою, в два рази більшою, ніж гармонічних коливань. Двічі за період енергія буде повністю перетворюватися в потенціальну (в двох крайніх положеннях) і двічі за період в кінетичну (при проходженні через положення рівноваги).

Визначимо тепер середні за період значення кінетичної і потенціальної енергії.

Якщо деяка величина f залежить від часу, то середнє значення цієї величини в проміжку часу між t_1 і t_2 дається формулою

$$\langle f \rangle = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt. \quad (5.6)$$

Обчислення середніх значень енергій (5.1) і (5.2) зводиться до знаходження середнього значення квадрата синуса і квадрата косинуса.

$$\begin{aligned} \langle \cos^2(\omega_0 t + \alpha) \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\omega_0 t + \alpha) dt = \\ \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} (1 + \cos 2(\omega_0 t + \alpha)) dt &= \frac{1}{2T} \left(t + \frac{1}{2\omega_0} \sin 2(\omega_0 t + \alpha) \right) \Big|_0^T = \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Тут T - період коливання, $T = 2\pi/\omega_0$. Аналогічно знаходиться

$$\langle \sin^2(\omega_0 t + \alpha) \rangle = \frac{1}{2}. \quad (5.8)$$

Таким чином, середнє значення квадрата синуса і квадрата косинуса дорівнює $\frac{1}{2}$. Тоді з формул (5.1) і (5.2) отримуємо, що середнє за період коливань значення кінетичної енергії $\langle W_k \rangle$ збігається із середнім значенням потенціальної енергії $\langle W_p \rangle$ і дорівнює половині повної енергії

$$\langle W_k \rangle = \langle W_p \rangle = \frac{W}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{4}. \quad (5.9)$$

На рис. 5.1 зіставлені графіки для x , W_k і W_p . На них видно, що:

- кінетична і потенціальна енергії коливаються в протифазі: коли кінетична енергія досягає максимального значення, потенціальна енергія мінімальна, і навпаки;

- в коливальній системі енергія періодично переходить з однієї форми в іншу, а повна енергія зберігається;

- повна енергія коливань пропорційна квадрату амплітуди і квадрату частоти.

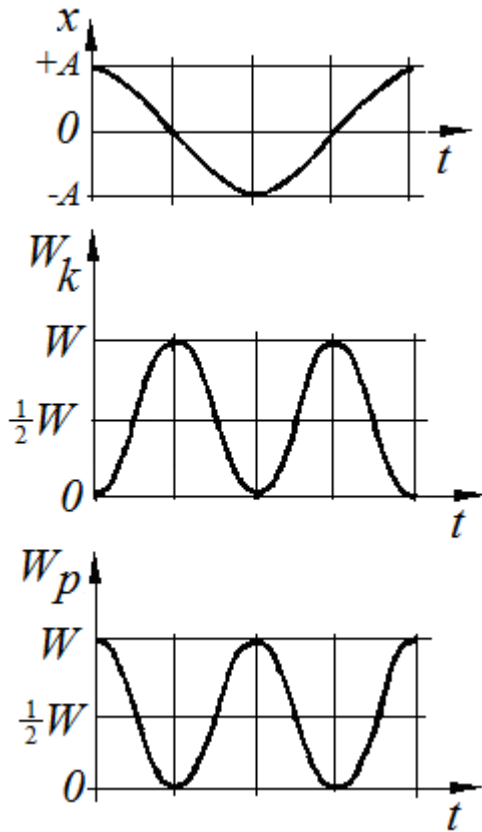


Рис. 5.1.

Приклад.

Матеріальна точка масою $m = 10$ г здійснює гармонічні коливання уздовж осі Ox за законом косинуса з періодом $T = 2$ с і початковою фазою $\alpha = 0$. Повна механічна енергія точки $W = 0,1$ мДж. Визначити: 1) амплітуду коливань; 2) записати закон руху точки; 3) максимальну силу F_{\max} , що діє на точку; 4) швидкість v точки в момент часу, коли зміщення дорівнює половині амплітуди, $x = A/2$.

Розв'язання.

1). Повна енергія коливань пропорційна квадрату ампліту-

ди: $W = \frac{kA^2}{2}$. Тут коефіцієнт квазіпружної сили відповідно до формули (4.2) дорівнює

$$k = m\omega_0^2 = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{4\pi^2 m}{T^2}$$

З цих двох формул слід, що амплітуда коливань

$$A = \sqrt{\frac{2W}{k}} = \frac{T}{\pi} \sqrt{\frac{W}{2m}} = \frac{2}{3,14} \sqrt{\frac{0,1 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-2}}} = 0,045(\text{м})$$

2). Рівняння гармонічного коливання (закон руху точки) в даному випадку має вигляд

$$x = A \cos \omega_0 t = A \cos \frac{2\pi}{T} t = 0,045 \cos \pi t, \text{ м}.$$

3). Силу, що діє на матеріальну точку, визначимо за другим законом Ньютона: $F = ma$, де a - прискорення точки, яке отримаємо, взявши другу похідну за часом від зміщення:

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega_0 \sin \omega_0 t.$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega_0^2 \cos \omega_0 t = -A\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cos \frac{2\pi}{T} t.$$

Сила буде максимальною (за модулем), коли максимальним буде прискорення, тобто коли $\cos \frac{2\pi}{T} t = 1$,

або

$$|F_{\max}| = mA \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{10^{-2} \cdot 0,045 \cdot 4 \cdot 3,14^2}{4} = 4,44 \cdot 10^{-3}(\text{Н}).$$

4). Виразимо швидкість через зміщення, для чого виключимо з формул $x = A \cos(\omega_0 t)$ і

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t) \text{ час } t. \text{ Для цього виразимо з цих формул}$$

$$\cos(\omega_0 t) = \frac{x}{A}, \sin(\omega_0 t) = -\frac{v}{A\omega_0}.$$

З огляду на тригонометричну тотожність $\sin^2(\omega_0 t) + \cos^2(\omega_0 t) = 1$, одержимо

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{A^2\omega_0^2} = 1.$$

Вирішуючи останнє рівняння відносно v , знайдемо

$$v = \pm \omega_0 \sqrt{A^2 - x^2} = \pm \frac{2\pi}{T} \sqrt{A^2 - x^2}.$$

Підставивши $x = 0,5 A$ і виконавши обчислення за цією формулою, одержимо $v = \pm 0,122 \text{ м / с}$.

Знак плюс відповідає випадку, коли напрямок швидкості збігається з додатним напрямком осі Ox , знак мінус - коли напрям швидкості збігається з від'ємним напрямом осі Ox .

§ 6. Малі коливання системи поблизу положення рівноваги

У більшості практично важливих випадків цікавляться поведінкою системи не при будь-яких відхиленнях від положення рівноваги, а лише при малих відхиленнях від положення рівноваги.

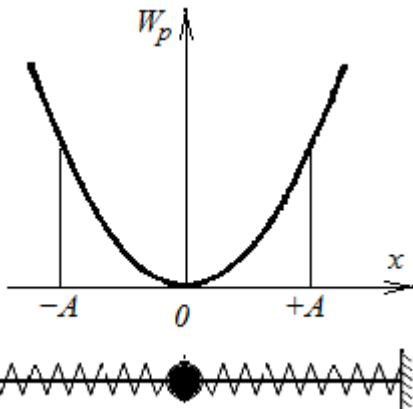


Рис. 6.1.

Розглянемо механічну систему, стан якої може бути задано за допомогою однієї величини, яку ми позначимо через x (рис. 6.1). У таких випадках кажуть, що система має одну ступінь вільності. Потенціальна енергія системи буде функцією однієї змінної x : $W_p = W_p(x)$.

Припустимо, що система має стан стійкої рівноваги. У цьому положенні потенціальна енергія $W_p(x)$ є мінімальною. Кажуть, що система перебуває «в потенціальній ямі».

Будемо координату x і потенціальну енергію відраховувати від положення рівноваги. Тоді $W_p(0) = 0$.

Розкладемо функцію $W_p(x)$ в ряд за степенями x , причому обмежимося розглядом малих коливань, так що

вищими степенями x можна буде знехтувати.

За формулою Маклорена

$$W_p(x) = W_p(0) + W'_p(0)x + \frac{1}{2} W''_p(0)x^2. \quad (6.1)$$

(Через малість x іншими членами нехтуємо).

Оскільки $W_p(x)$ при $x = 0$ має мінімум, $W'_p(0)$ дорівнює нулю, а $W''_p(0)$ є додатною.

Введемо позначення: $W''_p(0) = k$; $k > 0$.

Тоді в розкладанні $W_p(x)$ за степенями x залишається

$$W_p(x) = \frac{1}{2} kx^2. \quad (6.2)$$

Вираз (6.2) визначає потенціальну енергію системи, в якій діє пружна (в загальному випадку квазіпружна) сила.

Сила, що діє на систему, яка відхилилася від положення рівноваги, буде дорівнювати похідній від потенціальної енергії з протилежним знаком. Строго кажучи, компонента потенціальної сили дорівнює частинній похідній від потенціальної енергії за відповідним аргументом. Однак в силу зробленого припущення про наявність у системи тільки одного ступеня вільності, частинну похідну можна замінити повною похідною:

$$F = -dW_p/dx.$$

Тому, якщо енергія виражається формулою $W_p(x) = \frac{1}{2} kx^2$, то вираз для сили має вигляд

$$F = -kx. \quad (6.3)$$

Розуміння знака мінус таке: знайдена сила завжди повертає систему до положення рівноваги, завжди напрямлена в бік, протилежний відхиленню. Силу $F = -kx$ тому і називають **вертальною силою**.

Який же характер буде носити рух, що виникає під дією вертальної сили? На це питання відповідь дає 2-й закон Ньютона, який пов'язує прискорення тіла з діючою силою і його масою і запишеться для руху поблизу положення рівноваги у вигляді

$$m \ddot{x} = -kx.$$

Як було показано вище, це рівняння буде задоволено, якщо система здійснює гармонічні коливання близько положення рівноваги, тобто коливання за законом

$$x = A \cos(\omega_0 t + \alpha).$$

Отже, при малих відхиленнях від положення рівноваги будь-яка механічна система буде здійснювати коливання, близькі до гармонічних.

§ 7. Математичний маятник

Математичний маятник являє собою ідеалізовану систему, що складається з невагомої і нерозтяжної нитки, на якій підвішена матеріальна точка (рис. 7.1). Під дією сили тяжіння маятник здійснює коливання у вертикальній площині.

Хорошим наближенням може служити невелика важка кулька, яка підвішена на довгій тонкій нитці.

Будемо характеризувати відхилення маятника від положення рівноваги кутом φ , який утворює нитка з вертикаллю.

Відповідно до рівняння динаміки обертального руху сумарний момент зовнішніх сил, що діють на тіло, дорівнює добутку моменту інерції тіла на кутове прискорення

$$\Sigma M^{\text{зовн}} = I \varepsilon. \quad (7.1)$$

На маятник діють дві сили - сила тяжіння mg і сила натягу нитки N . При відхиленні маятника від положення рівноваги виникає крутний момент, який створюється тільки силою тяжіння. Момент сили натягу щодо точки O дорівнює нулю, тому що сила проходить через точку підвісу O .

Момент M , що обертає (момент сили тяжіння) дорівнює за модулем добутку сили mg на плече $l \sin \varphi$ (рис. 7.1):

$$M = -mg l \sin \varphi. \quad (7.2)$$

Мінус поставлений в зв'язку з тим, що момент сили і кутове відхилення φ мають протилежні знаки. Кут φ відраховується проти годинникової стрілки, а сила обертає за годинниковою стрілкою.

Підставимо момент інерції матеріальної точки $I = ml^2$

і кутове прискорення як другу похідну від кута за часом $\varepsilon = \ddot{\varphi}$

$$ml^2 \ddot{\varphi} = -mgl \sin \varphi. \quad (7.3)$$

Скористаємося розкладанням синуса в ряд Тейлора

$$\sin \varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \dots \quad (7.4)$$

(точками позначені інші члени ряду).

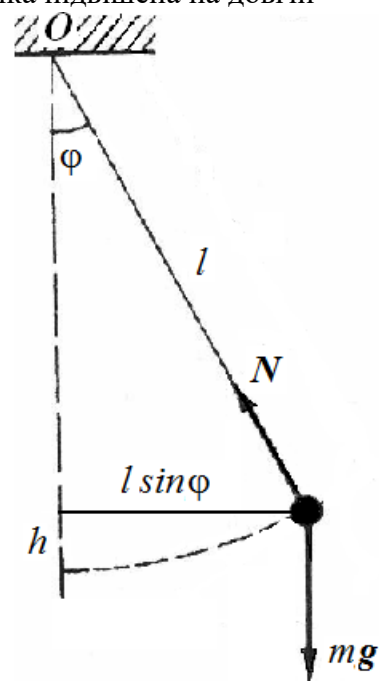


Рис. 7.1.

Звідси випливає, що достатньо малих φ можна знехтувати в (7.4) усіма членами ряду, крім першого.

Тому у випадку малих коливань можна покласти синус φ таким, що дорівнює самому куту φ (в радіанах):

$$\sin \varphi \approx \varphi. \quad (7.5)$$

Приклад 1. Покажемо виконання цієї наближеної рівності для малих кутів.

Наприклад, якщо кут $\varphi = 5^\circ$, $\sin \varphi = 0,0872$ і $\varphi = 0,0873$ рад.

Для $\varphi = 0,10$ рад ($5,73^\circ$) за таблицями знаходимо $\sin \varphi = 0,0998$. Значення кута в радіанах (0.1) та синуса цього кута (0,0998) збігаються добре:

$$0,1 \approx 0,0998.$$

Для $\varphi = 0,20$ рад ($11,46^\circ$) $\sin \varphi = 0,1987$, знов спів падіння є добрим:

$$0,2 \approx 0,1987.$$

Але вже для $\varphi = 1,0$ рад ($57,3^\circ$) $\sin \varphi = 0,841$ і користуватися наближеною формулою (2а) не можна:

$$1,0 \neq 0,841.$$

А для кута $\varphi = 1,5$ радіан ($85,95^\circ$) тим більше: $\sin 85,95^\circ = 0,998 \neq 1,5$.

Які ж кути відповідають «малим» відхиленням? Це залежить від точності вимірювань. Якщо рахувати до двох знаків після коми, то кут φ не повинен перевищувати приблизно 15° .

З урахуванням (7,5) рівняння (7.3) набуває вигляду

$$\ddot{\varphi} + \left(\frac{g}{l}\right)\varphi = 0. \quad (7.6)$$

Оскільки коефіцієнт $\frac{g}{l}$ є додатним, його можна позначити як квадрат деякої величини

$$\omega^2 = \frac{g}{l}. \quad (7.7)$$

В результаті отримуємо рівняння

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0. \quad (7.8)$$

Рівняння руху (7.8) аналогічне диференціальному рівнянню гармонійних коливань (4.3). Розв'язання (7.8) має вигляд

$$\varphi = a \cos(\omega t + \alpha_0). \quad (7.9)$$

Отже, за малих коливань кутове відхилення математичного маятника змінюється з часом за гармонічним законом.

Тоді з урахуванням (7.7) отримаємо формулу періоду коливань математичного маятника

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (7.10)$$

Період малих коливань математичного маятника не залежить ні від маси, ні від амплітуди коливань. За легендою цю особливість встановив Г.Галілей, спостерігаючи в церкві коливання люстр. Період коливань він вимірював за кількістю ударів власного пульсу.

Формула (7.10) використовується для визначення прискорення сили тяжіння g . Наявність під землею покладів руди, нафти або газу впливає на чисельне значення g . Цим користуються для розвідки цих копалин.

Приклад 2. Отримаємо диференціальне рівняння гармонічних коливань маятника інакше. Для цього розглянемо енергетичні зміни, що відбуваються при коливаннях маятника. Якщо тертям в місці підвісу і опором повітря можна знехтувати, то повинен виконуватися закон збереження механічної енергії - сума кінетичної і потенційно енергії маятника залишається незмінною:

$$W_k + W_p = \text{const} \quad (\text{П.7.1})$$

При відхиленні на кут φ матеріальна точка піднімається на висоту

$$h = l(1 - \cos \varphi) = 2l \sin^2(\varphi/2). \quad (\text{П.7.2})$$

Для малих кутів

$$\sin(\varphi/2) \approx (\varphi/2). \quad (\text{П.7.3})$$

тоді

$$h = l \varphi^2/2, \quad (\text{П.7.4})$$

а потенціальна енергія

$$W_p = mgh = \frac{mgl\varphi^2}{2}. \quad (\text{П.7.5})$$

Виразимо кінетичну енергію через кутову швидкість

$$W_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}(\omega l)^2 = \frac{ml^2 \dot{\varphi}^2}{2}. \quad (\text{П.7.6})$$

Тоді закон збереження енергії набуває вигляду:

$$\frac{ml^2 (\dot{\varphi})^2}{2} + \frac{mgl\varphi^2}{2} = \text{const}. \quad (\text{П.7.7})$$

Обчислимо похідну за часом від виразу (П. 7.7)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{ml^2 (\dot{\varphi})^2}{2} + \frac{mgl\varphi^2}{2} \right) = 0.$$

Отримаємо

$$l \ddot{\varphi} \dot{\varphi} + g \varphi \dot{\varphi} = 0 \quad (\text{П.7.8})$$

або

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi = 0, \quad (\text{П.7.9})$$

тобто ми отримали диференціальне рівняння гармонічних коливань, що збігається з отриманим раніше іншим способом рівнянням (7.6).

§ 8. Пружинний маятник

Розглянемо пружинний маятник, який складається з тіла масою m , прикріпленого пружиною до нерухомої стінки. Жорсткість пружини k . Тіло завдяки хорошему мастилу може практично без тертя ковзати по горизонтальній поверхні.

На рис. 8.1, *a* показано положення тіла (наприклад, бруска) в стані спокою; на рис. 8.1, *б* - положення бруска, максимально відведеного від положення рівноваги. Через x позначено відхилення (зміщення) координати центра мас бруска від положення рівноваги.

Надамо бруску зміщення $x = A$ досить мале, щоб деформацію пружини можна було вважати пружною. Тоді, відповідно до закону Гука, на брусок буде діяти з боку пружини вертикальна сила $F_{\text{пруж}} = -kx$.

Під дією пружної сили брусок буде рухатися до стану рівноваги з усе наростаючою швидкістю $v = dx/dt$. При цьому потенціальна енергія розтягнутої пружини буде зменшуватись, але зате у бруска з'явиться все зростаюча кінетична енергія $E_k = 1/2 mv^2$ (масою пружини зневажаємо). Прийшовши в положення рівноваги, брусок продовжує руха-

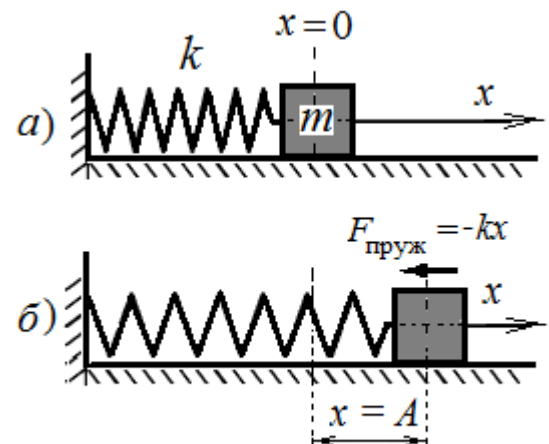


Рис. 8.1.

тися за інерцією. Цей рух буде уповільненим і припиниться тоді, коли кінетична енергія повністю перетвориться в потенціальну, тобто коли зміщення бруска стане рівним $-A$. Потім такий же процес буде протікати під час руху бруска в зворотному напрямку. Якщо тертя в системі відсутнє, енергія системи повинна зберігатися, і брусок буде рухатися в межах від $x = A$ до $x = -A$ необмежено довго.

За другим законом Ньютона отримаємо рівняння руху пружинного маятника

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx \quad (8.1)$$

або

$$x + \omega_0^2 x = 0, \quad (8.2)$$

де

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}. \quad (8.3)$$

Рівняння руху (8.2) – це диференціальне рівняння гармонічного коливання (4.3). Отже, зміщення змінюється за гармонічним законом

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \alpha). \quad (8.4)$$

Оскільки в системі діє тільки одна внутрішня сила пружності, яка являється консервативною силою, то пружинний маятник здійснює власні гармонічні коливання. Частота ω_0 (8.3) таких коливань залежить тільки від фізичних властивостей самої системи - жорсткості і маси - і називається *власною частотою* системи, а *період власних коливань*

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (8.5)$$

Спосіб збудження коливань, тобто **початкові умови** визначають значення амплітуди A і початкової фази α .

Приклад. У загальне рішення (8.4) входять дві довільних постійних A і α . Їх значення повинні визначитися

двома початковими умовами, наприклад, значенням зміщення $x(0)$ і значенням швидкості $\dot{x}(0)$ в початковий момент часу.

Змусити пружинний маятник коливатися можна різними способами.

А) Відведемо брусок на відстань $x_0 > 0$, розтягнувши пружину, і відпустимо брусок без початкової швидкості. Тоді

$$x(0) = A \cos \alpha = x_0, \quad \dot{x}(0) = -A \omega_0^2 \sin \alpha = 0, \quad \cos \alpha = \frac{x_0}{A}, \quad \sin \alpha = 0. \quad (П.8.1)$$

При цьому початкова фаза може мати значення або $\alpha_1 = 0$, або $\alpha_2 = \pi$. Значення $\alpha_2 = \pi$ не підходить, тому що

$\frac{x_0}{A} = 1$ (амплітуда A завжди є позитивною). Залишається $\alpha = 0$ і $A = x_0$.

Остаточно

$$x(t) = x_0 \cos \omega_0 t. \quad (П.8.2)$$

Порівнюючи з (4.4), отримаємо, що x_0 - це амплітуда коливання, а його початкова фаза дорівнює нулю.

Б) Виведемо тепер пружинний маятник з рівноваги іншим способом. Вдаримо по ньому в початковий момент часу, так щоб він придбав початкову швидкість $v_0 = \dot{x}(0)$, для визначеності спрямовану вправо вздовж осі Ox , тобто $v_0 > 0$.

Тоді $x(0) = A \cos \alpha = 0$ звідки випливає, що $\alpha_{1,2} = \pm \frac{\pi}{2}$.

З виразу для швидкості $\dot{x}(0) = -A\omega_0 \sin \alpha = v_0 > 0$ отримуємо умову $\sin \alpha < 0$. Тоді з двох значень α залишається тільки значення початкової фази $\alpha = -\frac{\pi}{2}$. Амплітуду коливання A знаходимо з виразу

$$-A\omega_0(-1) = v_0,$$

тобто $A = \frac{v_0}{\omega_0}$. Остаточно отримаємо

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \cos(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t. \quad (\text{П.8.3})$$

В). Нетрудно убедитися в том, что в общем случае, когда брусок отводится на расстояние $x_0 > 0$ и ему сообщается начальная скорость $v_0 > 0$, выражение для амплитуды и начальной фазы имеют вид

В). Неважно перекопаться в тому, що в загальному випадку, коли брусок відводиться на відстань $x_0 > 0$ і йому надається початкова швидкість $v_0 > 0$, вираз для амплітуди і початкової фази мають вигляд

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}} \text{ и } \text{tg} \alpha = -\frac{v_0}{x_0 \omega_0}. \quad (\text{П.8.4})$$

§ 9. Фізичний маятник

Будь-яке тіло, підвішене в точці, що лежить вище його центра мас, може коливатися і являє собою фізичний маятник (рис. 9.1).

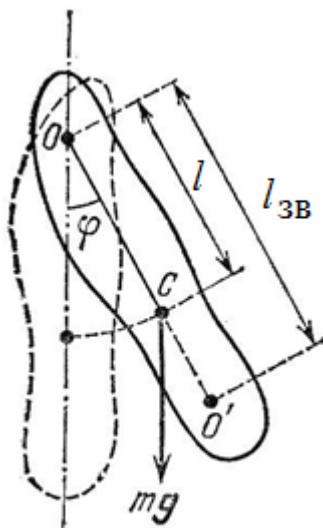


Рис. 9.1.

У положенні рівноваги фізичного маятника його центр мас C знаходиться на одній вертикалі з точкою підвісу O , але нижче неї. При відхиленні маятника від положення рівноваги на кут φ виникає обертовий момент сили тяжіння, який прагне повернути маятник в положення рівноваги.

Цей момент дорівнює

$$M = -mgl \sin \varphi, \quad (9.1)$$

де m – маса тіла, l – відстань від точки підвісу O до центра мас C . Знак мінус має те ж походження, що і в разі математичного маятника (див. § 7).

Згідно з рівнянням динаміки обертального руху твердого тіла обертовий момент можна записати у вигляді

$$M = I \frac{d^2 \varphi}{dt^2}$$

де I – момент інерції маятника щодо осі гойдання, $\frac{d^2 \varphi}{dt^2}$ – кутове

прискорення. У разі малих коливань $\sin \varphi \approx \varphi$ і, прирівнявши обидва вирази для моменту M , можна записати

$$I \ddot{\varphi} + mgl \varphi = 0 \quad (9.2)$$

або

$$\ddot{\varphi} + \frac{mgl}{I} \varphi = 0.$$

Позначивши

$$\frac{mgl}{I} = \omega_0^2, \quad (9.3)$$

отримаємо диференціальне рівняння гармонічних коливань

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0. \quad (9.4)$$

Період коливань фізичного маятника відповідно до (9.3) визначається виразом

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgl}} = 2\pi \sqrt{\frac{l_{3\theta}}{g}}, \quad (9.5)$$

де $l_{3\theta} = \frac{I}{ml}$ – зведена довжина фізичного маятника. *Зведена довжина* фізичного маятника – це довжина такого математичного маятника, період коливань якого збігається з періодом даного фізичного маятника.

Точка O' на продовженні прямої OC , яка розміщена від осі підвісу на відстані зведеної довжини $l_{3\theta}$, називається *центром коливань* фізичного маятника. Точка підвісу O і центр коливань O' є так званими *спряженими* точками: якщо вісь коливань проходить через центр коливань, то точка O попередньої осі підвісу стане новим центром коливань і період коливань фізичного маятника не зміниться.

За теоремою Штейнера маємо $I = I_C + ml^2$, де I_C – момент інерції маятника відносно осі, що проходить через центр мас. Тому

$$l_{np} = \frac{I}{ml} = \frac{I_C}{ml} + l. \quad (9.6)$$

Тобто зведена довжина завжди більше l , так що центр коливань і точка підвісу лежать по різні боки від центра мас.

Приклад. Фізичний маятник являє собою тонкий однорідний стрижень. Визначити довжину стрижня l , якщо частота коливань маятника максимальна у випадку, коли точка підвісу O віддалена від центра мас C на відстані $a = 20,2$ см.

Розв'язання. Циклічна частота коливань фізичного маятника

$$\omega = \sqrt{mga/I}, \quad (П.9.1)$$

де m – маса маятника, I – момент його інерції відносно осі коливань, a – відстань від центра мас до точки підвісу.

Згідно з теоремою Штейнера момент інерції стрижня відносно точки підвісу дорівнює сумі момента інерції відносно осі, що проходить через центр мас, і добутку маси стрижня на квадрат відстані a .

$$I = \frac{ml^2}{12} + ma^2. \quad (П.9.2)$$

Підставивши (п.9.2) в (п.9.1), отримаємо

$$\omega = \sqrt{\frac{12ga}{l^2 + 12a^2}}. \quad (П.9.3)$$

Як бачимо, частота коливань є функцією відстані a . Умовою максимуму функції $\omega(a)$, як відомо, є рівність нулю першої похідної $\omega(a)$ за a :

$$\frac{d\omega}{da} = \frac{6g(l^2 - 12a^2)}{(12ga)^{1/2}(l^2 + 12a^2)^{3/2}} = 0.$$

Звідки

$$l^2 - 12a^2 = 0,$$

отже, довжина стрижня

$$l = 2\sqrt{3}a.$$

Обчислюючи, отримаємо $l = 70$ см.

§ 10. Електричний коливальний контур

Коливальним контуром називається електричне коло, що містить послідовно увімкнені котушку індуктивності L , конденсатор C і опір R . У колі, що складається з цих елементів (рис. 10.1), можливі вільні коливання.

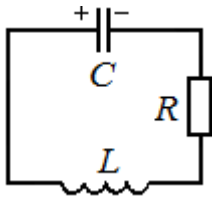


Рис. 10.1.

Розглянемо послідовні стадії коливального процесу в ідеалізованому контурі, активний опір якого малий ($R = 0$).

Для збудження коливань в контурі конденсатор попередньо заряджають, надаючи його обкладинкам заряди $\pm q$. Тоді в початковий момент часу $t = 0$ між обкладинками конденсатора виникає електричне поле, енергія якого

$$W_e = \frac{q^2}{2C}.$$

Замкнемо тепер конденсатор на котушку індуктивності. При цьому в контурі виникне електричний струм розряду конденсатора, від чого в котушці індуктивності з'явиться магнітне поле (рис.10.2).

Струм розряду з часом зростає, отже, магнітне поле котушки теж зростає. Це викличе появу в котушці ЕРС самоіндукції $E_{si} = -L \frac{dI}{dt}$, яка буде напрямлена в бік, протилежний струмові розряду.

Оскільки швидкість зміни струму розряду конденсатора dI/dt зменшується, то зменшується і ЕРС самоіндукції, і струм розряду буде зростати. В результаті енергія електричного поля буде зменшуватися, а магнітного поля котушки - зростати. Оскільки активний опір контура $R = 0$, то повна енергія, що складається з енергій електричного і магнітного полів, не витрачається на нагрівання проводів і за законом збереження енергії залишається постійною

$$W = \frac{q^2}{2C} + \frac{LI^2}{2} = const. \quad (10.1)$$

Тому в момент $t = \frac{1}{4} T$, коли конденсатор розрядиться (рис. 10. 2), енергія електричного поля перетворюється в нуль, а енергія магнітного поля і струм досягають максимального значення.

Отже, енергія електричного поля перетвориться в енергію магнітного поля.

У подальші моменти часу магнітне поле буде зникати, оскільки немає струмів, що підтримають його. Це зникаюче поле викличе струм самоіндукції, який в відповідно до закону Ленца буде прагнути підтримати струм розряду конденсатора і отже буде спрямований в той же бік. Тому конденсатор буде перезаряджатися і між його пластинами з'явиться електричне поле протилежного напрямку.

Далі ті ж процеси почнуть протікати в зворотному напрямку, і система прийде у вихідний стан. Після цього почнеться повторення циклу розрядки і зарядки конденсатора (рис. 10. 2). В результаті в колі виникають коливання. Якби втрат енергії не було, то в контурі здійснювалися б незгасаючі коливання.

В ході перезарядки конденсатора періодично змінюється (тобто коливається) ряд величин - заряд на обкладинках q , напруга на конденсаторі U_C , сила струму I .

Коливання в коливальному контурі, які супроводжуються взаємними перетвореннями енергії електричного і магнітного полів, називаються **електромагнітними**.

На рис. 10. 2 коливанням в контурі зіставлені коливання математичного маятника. У початковий момент часу конденсатор заряджений, сила електричного струму дорівнює нулю, вся енергія зосереджена в енергії електричного поля конденсатора, що *аналогічно* максимальному відхиленню маятника від положення рівноваги. При цьому виникає потенціальна енергія, що дорівнює $W_p = mgh$.

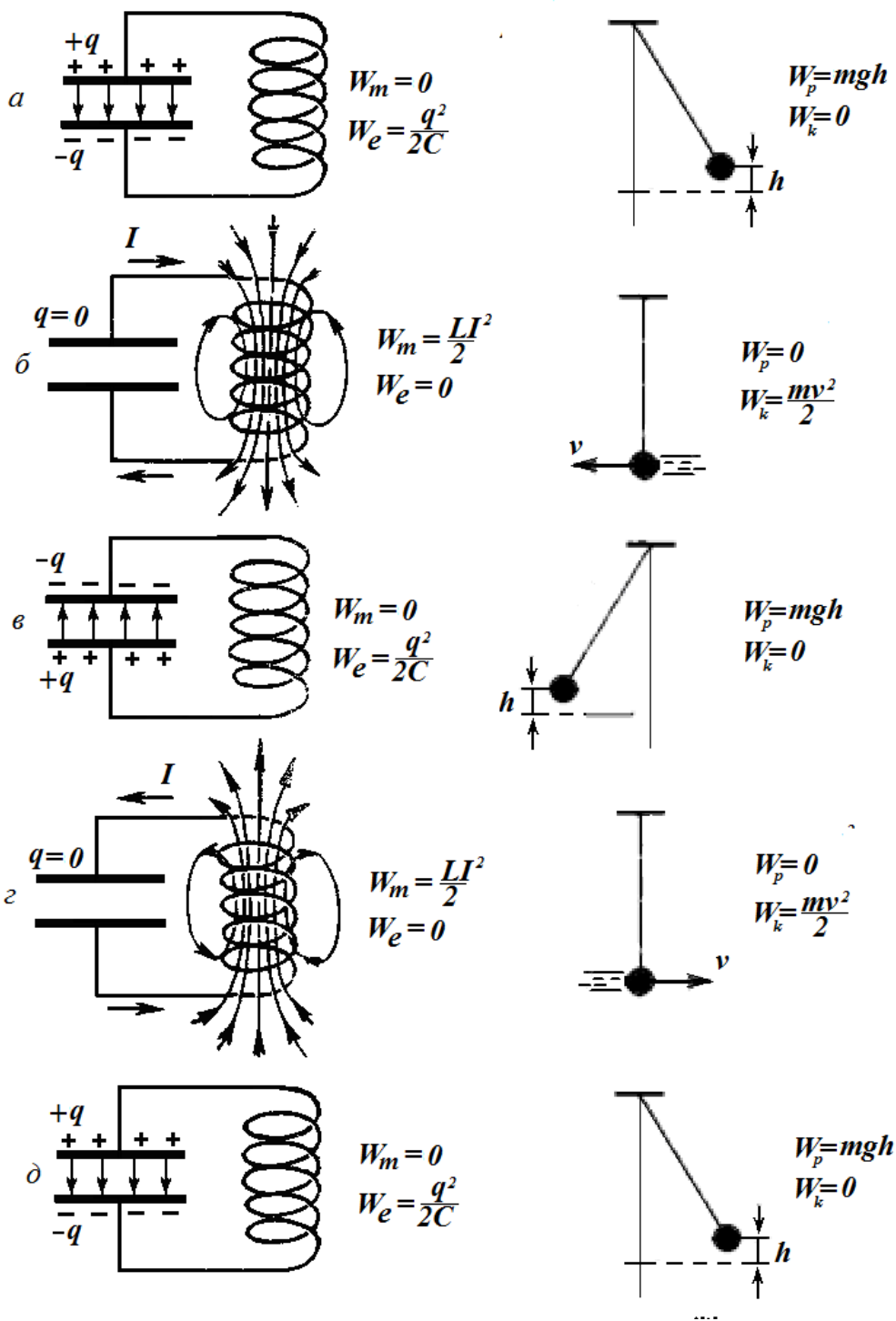


Рис. 10. 2.

Після цього конденсатор починає розряджатися, енергія конденсатора зменшується, переходячи в енергію магнітного поля котушки. *Аналогія* - маятник рухається до нижньої точки зі зростанням швидкості руху. Коли заряд на конденсаторі стає рівним нулю, сила струму досягає максимального значення, при цьому вся енергія перетворюється в енергію магнітного поля.

Аналогія - маятник досяг нижньої точки, швидкість його є максимальною, потенціальна енергія маятника повністю переходить в кінетичну $W_k = \frac{mv^2}{2}$.

Потім магнітне поле починає спадати, при цьому ЕРС самоіндукції підтримує струм в колишньому напрямі, при цьому конденсатор починає заряджатися, причому знаки зарядів на обкладинках конденсатора протилежні початковому розподілу. *Аналогія* - маятник рухається до максимального відхилення, що є протилежним початковому.

Нарешті струм в колі припиняється, при цьому заряд конденсатора стає знову максимальним, але протилежним за знаком (*аналогія* - маятник досяг максимального відхилення), після чого процес повторюється в протилежному напрямку.

Електричний струм, точніше, електричне поле, поширюється вздовж провідників з деякою кінцевою швидкістю. Тому рух зарядів, який почався у обкладинок конденсатора в якій-небудь момент часу, дійде до котушки, через деякий час, залежний від швидкості поширення струму і довжини провідників. Це означає, що сила струму в різних місцях кола повинна бути різною.

Електромагнітне збурення поширюється по колу з величезною швидкістю - швидкістю світла $c \approx 300\,000$ км/с. Тому, якщо розміри контура (довжина сполучних проводів і довжина обмотки котушки) не надто великі, то *можна припустити*, що в кожен момент часу *сила струму в будь-якому місці контуру є однаковою*. Тому *миттєві* значення сили *змінного* струму мають відповідати всім законам, встановленим для колів *постійного* струму. Такі змінні струми називаються **квазістаціонарними**.

За цих умов можна використовувати друге правило Кірхгофа для замкнутого контура: алгебраїчна сума всіх падінь напруги дорівнює сумі всіх ЕРС в цьому контурі.

Падіння напруги на конденсаторі $U_C = \frac{q}{C}$ в кожен момент часу дорівнює ЕРС самоіндукції

$$E_{si} = -L \frac{dI}{dt}$$

$$\frac{q}{C} = -L \frac{dI}{dt} . \quad (10.2)$$

Виражаючи силу струму через заряд, маємо $I = \frac{dq}{dt}$ і $\frac{dI}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2}$. Тоді прийдемо до диференціального рівняння

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0 . \quad (10.3)$$

Якщо ввести позначення $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$, а похідну за часом позначати крапкою, то отримаємо

мо

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0, \quad (10.4)$$

що збігається з рівнянням гармонічних коливань (4.3). Це означає, що заряд на обкладинках конденсатора змінюється за законом

$$q = q_m \cos(\omega_0 t + \alpha) \quad (10.5)$$

з круговою частотою (власною частотою контура)

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} . \quad (10.6)$$

Звідси період коливань (**формула Томсона**)

$$T = 2\pi\sqrt{LC} . \quad (10.7)$$

Для напруги на конденсаторі отримаємо

$$U = \frac{q_m}{C} \cos(\omega_0 t + \alpha) = U_m \cos(\omega_0 t + \alpha), \quad (10.8)$$

а для сили струму

$$I = \frac{dq}{dt} = -\omega_0 q_m \sin(\omega_0 t + \alpha) = \omega_0 q_m \cos(\omega_0 t + \alpha + \frac{\pi}{2}) = I_m \cos(\omega_0 t + \alpha + \frac{\pi}{2}) \quad (10.9)$$

Таким чином, сила струму в контурі також зазнає гармонічних коливань з тієї ж частотою, що і заряд на обкладинках конденсатора, але випереджає на $\pi/2$ за фазою коливання заряду і напруги на конденсаторі.

Наведемо окремо співвідношення між амплітудами заряду, напруги і струму:

$$U_m = \frac{q_m}{C}, \quad I_m = \omega_0 q_m, \quad U_m = \sqrt{\frac{L}{C}} I_m. \quad (10.10)$$

Приклад 1. Отримаємо диференціальне рівняння гармонічних коливань в коливальному контурі інакше. Для цього розглянемо енергетичні зміни, що відбуваються в контурі. Якщо контур ідеальний, тобто втрат енергії на нагрівання провідників немає ($R = 0$), то виконується закон збереження повної енергії: сума енергії магнітного поля в котушці і енергії електричного поля в конденсаторі залишається незмінною:

$$\frac{LI^2}{2} + \frac{q^2}{2C} = const . \quad (П. 10.1)$$

Виразимо силу струму як похідну від заряду

$$I = \frac{dq}{dt} = \dot{q} . \quad (П. 10.2)$$

Тоді похідна за часом від виразу (П.10.1) запишеться так

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{L(\dot{q})^2}{2} + \frac{q^2}{2C} \right) = 0, \quad (П.10.3)$$

або

$$L\ddot{q}\dot{q} + \frac{q\dot{q}}{C} = 0 . \quad (П.10.4)$$

Після поділу обох доданків на $L\dot{q}$, маємо

$$\ddot{q} + \frac{1}{LC}q = 0, \quad (П.10.5)$$

що збігається з раніше отриманим рівнянням (10.3).

Приклад 2. Різниця потенціалів на обкладинках конденсатора в коливальному контурі змінюється з часом за законом $U = 100 \sin 1000\pi t$ (t - в секундах, U - у вольтах). Електроємність конденсатора $C = 0,5$ мкФ. Визначити період власних коливань, індуктивність, енергію контура і максимальну силу струму, що проходить по котушці індуктивності. Активним опором котушки знехтувати.

Напруга на конденсаторі змінюється за гармонічним законом

$$U = U_0 \sin \omega_0 t,$$

де U_0 - амплітудне (максимальне) значення напруги на обкладинках конденсатора; ω_0 - власна циклічна частота коливань. Порівнюючи цей вираз із законом, наведеними в умові, визначаємо, що $U_0 = 100$ В, $\omega_0 = 1000 \pi$ с⁻¹.

Тоді період коливань

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{1000\pi} = 0,002 \text{ с} . \quad (П.10.6)$$

Період власних коливань в контурі визначається формулою Томсона $T = 2\pi\sqrt{LC}$, звідки

$$L = \frac{T^2}{4\pi^2 C} = \frac{4 \cdot 10^{-6}}{4 \cdot 3,14^2 \cdot 0,5 \cdot 10^{-6}} = 0,16 \text{ Гн}. \quad (\text{П.10.7})$$

Повна енергія контура в будь-який момент часу дорівнює сумі енергій електричного поля в конденсаторі і магнітного поля в котушці індуктивності

$$W = \frac{CU^2}{2} + \frac{LI^2}{2}$$

Під час вільних електромагнітних коливань в контурі відбувається періодичний перехід енергії електричного поля конденсатора в енергію магнітного поля електричного струму.

У моменти часу $0, T/2, T$ і т.д. енергія електричного поля є максимальною і дорівнює $W_{e\max} = \frac{CU_0^2}{2}$, а енергія магнітного поля дорівнює нулю. У моменти часу $T/4, 3/4T$, коли напруга на конденсаторі перетворюється в нуль, енергія магнітного поля досягає максимального значення $W_{m\max} = \frac{LI_0^2}{2}$. Оскільки активний опір контура дорівнює нулю, повна енергія не витрачається на нагрівання проводів і залишається постійною. З умови

$$\frac{CU_0^2}{2} = \frac{LI_0^2}{2}$$

можна визначити максимальну силу струму

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{\frac{L}{C}}} = \frac{100}{\sqrt{\frac{0,16}{0,5 \cdot 10^{-6}}}} = 0,18 \text{ А}. \quad (\text{П.10.8})$$

Повна енергія контура

$$W = \frac{CU_0^2}{2} = \frac{0,5 \cdot 10^{-6} \cdot 10^4}{2} = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ (Дж)}. \quad (\text{П.10.9})$$

§ 11.1. Векторна діаграма. Додавання однаконо напрямлених гармонічних коливань

Гармонічні коливання можна зобразити графічно методом *обертвого вектора амплітуди*. Для цього з довільної точки O , обраної на осі Ox під кутом α , рівним початковій фазі коливання, відкладається вектор A , модуль якого дорівнює амплітуді A розглянутого коливання (рис. 11.1).

Проекція цього вектора на вісь Ox дорівнює зміщенню x_0 в початковий момент часу ($t = 0$):

$$x_0 = A \cos \alpha.$$

Якщо цей вектор привести в обертання проти годинникової стрілки з кутовою швидкістю ω_0 , що дорівнює циклічній частоті коливань, то за час t вектор A зробить поворот на кут $\omega_0 t$, кут між A і віссю Ox вийде рівним $\omega_0 t + \alpha$, і проекція вектора A на вісь Ox буде дорівнювати

$$x = A \cos (\omega_0 t + \alpha).$$

Під час обертання вектора проекція його кінця буде переміщатися вздовж осі Ox і набувати значень від $-A$ до $+A$, здійснюючи гармонічні коливання.

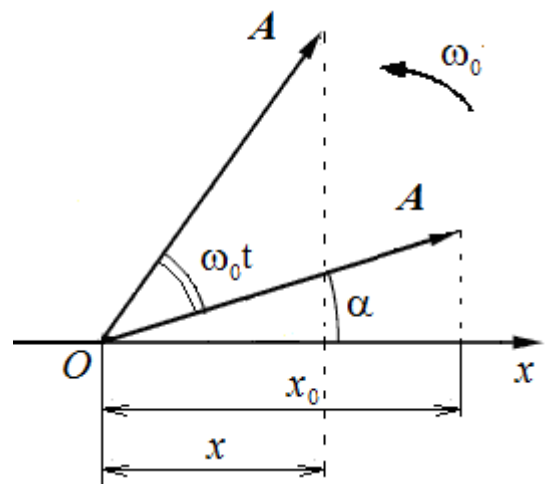


Рис. 11.1.

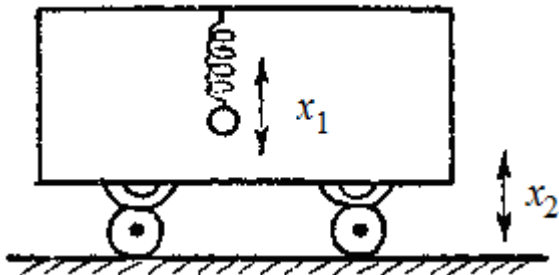


Рис. 11.2.

Можливі випадки, коли тіло бере участь одночасно в декількох коливаннях, що відбуваються вздовж одного і того ж напрямку. Якщо, наприклад, підвісити кульку на пружині до стелі вагона, що хитається на ресорах (рис. 11.2), то рух кульки відносно поверхні Землі буде складатися з коливань вагону відносно Землі і коливань кульки відносно вагона.

Розглянемо спочатку додавання двох однаково напрямлених коливань однакової частоти.

Рівняння коливань задані в наступному вигляді:

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1 \cos(\omega_0 t + \alpha_1), \\ x_2 &= A_2 \cos(\omega_0 t + \alpha_2). \end{aligned} \quad (11.1)$$

Необхідно знайти коливання $x(t)$, що є сумою коливань $x_1(t)$ і $x_2(t)$:

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t). \quad (11.2)$$

Зобразимо коливання $x_1(t)$ і $x_2(t)$ у вигляді векторів A_1 і A_2 (рис. 11.3). За правилами додавання векторів побудуємо результуючий вектор A . Вектори A , A_1 і A_2 утворюють трикутник, причому зовнішній кут трикутника дорівнює різниці початкових фаз коливань $\alpha_2 - \alpha_1$.

Рис. 11.3 підтверджує відоме правило, за яким проекція сумарного вектора A на вісь Ox дорівнює сумі проєкцій векторів, що додаються, на цю вісь

$$x = x_1 + x_2.$$

Отже, вектор A являє собою результуюче коливання. Цей вектор обертається з тією ж кутовою швидкістю ω_0 , як і вектори A_1 і A_2 , так що сума x_1 і x_2 є гармонічним коливанням з частотою ω_0 .

Визначимо амплітуду A результуючого коливання. З побудови і з теореми косинусів випливає, що

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2 \cos(\pi - (\alpha_2 - \alpha_1)) = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1). \quad (11.3)$$

Початкова фаза α визначається зі співвідношення

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2}{A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2}. \quad (11.4)$$

З (11.3) випливає, що амплітуда A результуючого коливання залежить від різниці початкових фаз коливань, що додаються.

Якщо різниця фаз обох коливань $(\alpha_2 - \alpha_1)$ дорівнює нулю (такі коливання називаються *синфазними*), амплітуда результуючого коливання дорівнює $A_1 + A_2$.

Якщо різниця фаз $(\alpha_2 - \alpha_1)$ дорівнює $+\pi$ або $-\pi$, (такі коливання називаються *протифазними*), то амплітуда результуючого коливання дорівнює $|A_1 - A_2|$. Різниця береться за модулем, тому що за визначенням амплітуда – «розмах» коливань – величина позитивна.

При рівних амплітудах ($A_1 = A_2$) $A = 0$, тобто коливання «гасять» одне одного.

Якщо частоти коливань x_1 і x_2 є неоднаковими, вектори A_1 і A_2 будуть обертатися з різною швидкістю. В цьому випадку результуючий вектор A пульсує за величиною і обертається з

непостійною швидкістю. Отже, результуючим рухом буде в цьому випадку не гармонічні коливання, а деякий складний коливальний процес.

Нехай амплітуди коливань є однаковими і рівними A , а частоти

$$\omega_1 = \omega_0 + \Omega, \omega_2 = \omega_0 - \Omega. \quad (11.5)$$

Частоту Ω називають також *частотою модуляції*. Виберемо початок відліку так, щоб початкові фази обох коливань були рівними нулю. Тоді рівняння обох коливань матимуть вигляд:

$$\begin{aligned} x_1 &= A \cos((\omega_0 + \Omega)t), \\ x_2 &= A \cos((\omega_0 - \Omega)t). \end{aligned} \quad (11.6)$$

Скористаємося тригонометричною тотожністю для суми косинусів

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Ми маємо

$$x = x_1 + x_2 = A \cos((\omega_0 + \Omega)t) + A \cos((\omega_0 - \Omega)t) = 2A \cos \Omega t \cos \omega_0 t. \quad (11.7)$$

Можна розглядати коливання (11.7) як коливання, що відбувається з частотою ω_0 і амплітудою, яка залежить від часу

$$A_{\text{мод}}(t) = 2A \cos \Omega t. \quad (11.8)$$

Цю амплітуду називають *амплітудою модуляції*.

Для практики особливий інтерес представляє випадок, коли два коливання, що додаються, мають однаковий напрямок і *мало відрізняються за частотою*.

В цьому випадку частота модуляції Ω є малою в порівнянні з середньою частотою ω_0 :

$$\omega_1 \approx \omega_2, \Omega \ll \omega_0.$$

В результаті амплітуда модуляції $A_{\text{мод}}(t)$ буде лише незначно змінюватися протягом часу, за який відбудеться кілька «швидких» коливань $\cos \omega_0 t$. Вираз (11.7) можна розглядати як *майже гармонічне коливання* з частотою ω_0 і амплітудою, яка змінюється дуже повільно.

Періодичні зміни амплітуди коливання, що виникають під час додавання двох гармонічних коливань з близькими частотами, називаються **биттям**.

Графік функції (11.7) зображений на рис. 11.4 для

$$\frac{\omega_0}{\Omega} = 20.$$

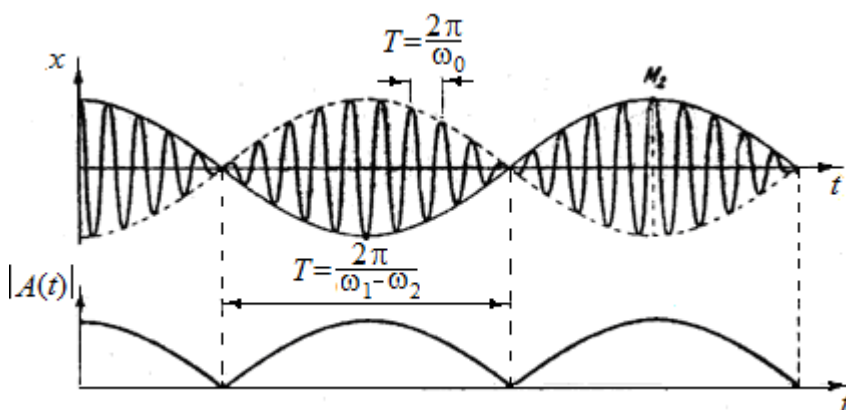


Рис. 11.4.

Оскільки амплітуда - величина додатна, то амплітудою слід назвати величину (11.8), взяту за модулем:

$$A_{\text{мод}}(t) = 2A |\cos \Omega t|. \quad (11.9)$$

Але період функції модуля косинуса $2A |\cos \Omega t|$ є вдвічі меншим за період функції косинуса $2A \cos \Omega t$. Тому *період биття* (інтервал часу, через який повторюється максимальне значення амплітуди коливань $|A_{\text{мод}}(t)|$) дорівнює

$$T = \frac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2}. \quad (11.10)$$

На рис. 11.4 вгорі суцільні жирні лінії дають графік результуючого коливання, а внизу - графік амплітуди, яка повільно змінюється за рівнянням (11.9).

Приклад 1. Два камертони, що випромінюють гармонічні звукові коливання з близькими частотами $\nu_1 = 256$ Гц і $\nu_2 = 255$ Гц, розміщені поруч. В результаті суперпозиції звукових коливань виникають періодичні зміни гучності звуку з частотою биття

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2\pi} = \frac{2\pi(\nu_1 - \nu_2)}{2\pi} = \nu_1 - \nu_2 = 256 - 255 = 1(\text{Гц}).$$

Визначення частоти биття між еталонним і вимірюваним коливаннями - найбільш широко застосований на практиці метод порівняння вимірюваної величини з еталонною. Метод биття використовується для настройки музичних інструментів, аналізу слуху і т.д.

Приклад 2. На явищі биття заснований принцип гетеродина, який використовується в радіо і телебаченні. Радіо і телесигнал передається електромагнітними хвилями з високою частотою. Цей сигнал вловлюється антеною приймача, але частота сигналу є занадто високою для електронів в напівпровідникових елементах приймача.

Тому в радіо або телеприймач додають допоміжний пристрій - *гетеродин*. Це генератор, який створює коливання *близької* до вхідного сигналу частоти. Вони змішуються з коливаннями високої частоти, які надходять ззовні. В результаті змішування двох частот - вхідної і гетеродина - утворюється різницева частота, прийнятна для руху електронів, на якій відбувається основне посилення сигналу.

Будь-які складні періодичні коливання (рис. 1.1) $x = f(t)$ можна представити у вигляді суперпозиції гармонічних коливань, що відбуваються одночасно з різними амплітудами, початковими фазами, а також частотами, кратними циклічній частоті ω_0 :

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1) + A_2 \cos(2\omega_0 t + \varphi_2) + \dots + A_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n).$$

Представлення періодичної функції в такому вигляді пов'язують з поняттям *гармонічного аналізу складного періодичного коливання, або розкладання Фур'є* (тобто представлення складних модульованих коливань у вигляді ряду (суми) простих гармонічних коливань). Доданки ряду Фур'є, що визначають гармонічні коливання з частотами $\omega_0, 2\omega_0, 3\omega_0, \dots$, називаються *першою (або основною), другою, третьою і т.д. гармоніками* складного періодичного коливання.

§ 11.2. Додавання взаємно перпендикулярних коливань

Нехай матеріальна точка одночасно бере участь у двох гармонічних коливаннях, що відбуваються з однаковою частотою ω_0 в двох взаємно перпендикулярних напрямках, наприклад, уздовж осей Ox і Oy (рис. 11.5). Позначимо зміщення точки вздовж осей Ox і Oy через x і y . Віберемо початок відліку часу так, щоб початкова фаза першого коливання дорівнювала нулю. Тоді рівняння коливань приймуть такий вигляд (пружини мають однакові жорсткості)

$$x = a \cos \omega_0 t,$$

$$y = b \cos (\omega_0 t + \alpha), \quad (11.11)$$

де α - різниця фаз обох коливань.

Матеріальна точка буде рухатися вздовж деякої криволінійної траєкторії. Вираз (11.11) - це є параметрична форма рівняння цієї траєкторії. Щоб отримати рівняння траєкторії у звичайному вигляді, необхідно з цих рівнянь виключити параметр t . З першого рівняння (11.11) одержуємо

$$\cos \omega_0 t = \frac{x}{a} \quad \text{і} \quad \sin \omega_0 t = \pm \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \quad (11.12)$$

У другому рівнянні (11.1) розкриємо косинус суми за відомою тригонометричною формулою $\cos (\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$.

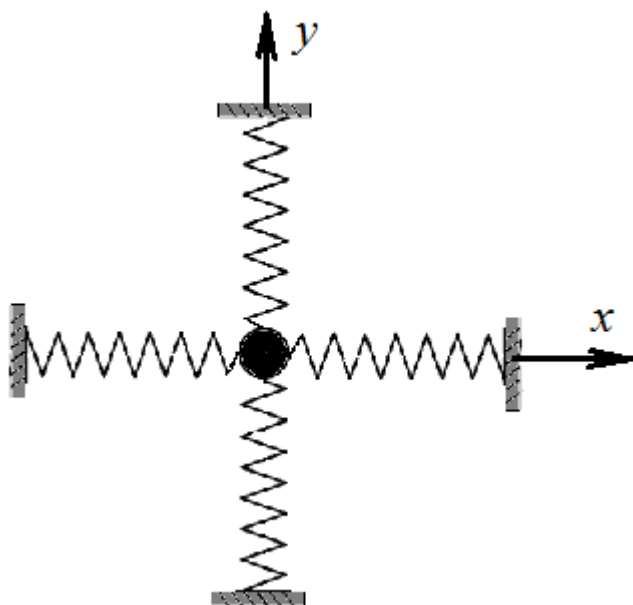


Рис. 11.5.

Тоді

$$\cos(\omega_0 t + \alpha) = \cos \omega_0 t \cos \alpha - \sin \omega_0 t \sin \alpha. \quad (11.13)$$

Підставляючи замість $\cos \omega_0 t$ і $\sin \omega_0 t$ їх значення, отримаємо

$$\frac{y}{b} = \frac{x}{a} \cos \alpha \pm \sin \alpha \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

Позбудемося квадратного кореня. Після нескладних перетворень отримаємо

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2 \frac{xy}{ab} \cos \alpha = \sin^2 \alpha \quad (11.14)$$

Це є рівняння еліпса, осі якого повернуті відносно координатних осей Ox і Oy (рис. 11.6). Орієнтація еліпса і величини його піввісей залежать від амплітуд a і b і різниці фаз α .

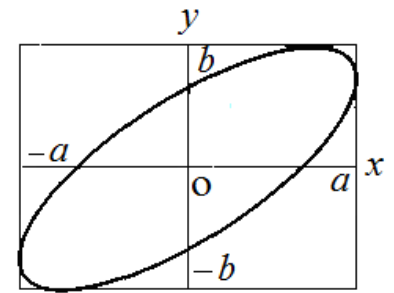


Рис.11.6.

Розглянемо окремі випадки. Нехай різниця фаз дорівнює нулю: $\alpha = 0$. Тоді

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)^2 = 0$$

і

$$y = \frac{b}{a}x, \quad (11.15)$$

тобто траєкторія точки є відрізком прямої в 1-му і 3-му квадрантах (рис. 11.7). Аналогічна траєкторія, але розміщена в 2-му і 4-му квадрантах (рис. 11.8) вийде при коливаннях з різницею фаз $\alpha = \pi$:

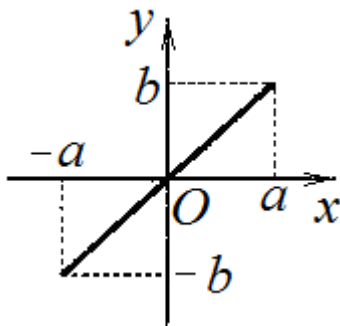


Рис. 11.7

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 = 0$$

$$y = -\frac{b}{a}x$$

$$(11.16)$$

При різниці фаз $\alpha = \frac{\pi}{2}$ з рівняння

(11.14) випливає рівняння еліпса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (11.17)$$

осі якого збігаються з осями координат, а його півосі дорівнюють відповідним амплітудам (рис. 11.9), причому точка, що описує траєкторію, рухається за годинниковою стрілкою.

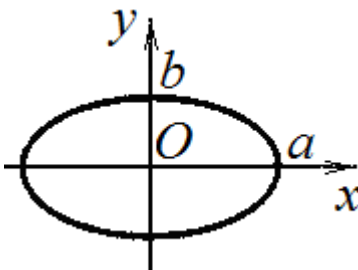


Рис. 11.9.

Щоб переконатися в цьому, повернемося до вихідних рівнянь (11.11). Вони запишуться так:

$$x = a \cos \omega_0 t, \quad y = b \cos(\omega_0 t + 90^\circ).$$

При зростанні часу від $t = 0$ точка з координатами $x = a$, $y = 0$ починає рухатися в бік від'ємних y , тобто за годинниковою стрілкою.

При різниці фаз $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ виходить така ж еліптична траєкторія, але обертання в цьому випадку відбувається проти годинникової стрілки. Якщо ампліту-

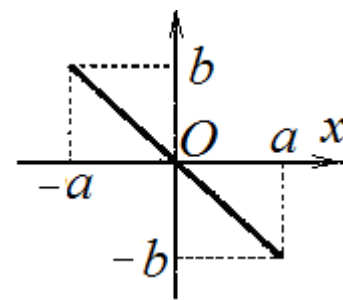


Рис. 11.8.

ди коливань по x і по y є рівними, $a = b$, то з (11.17) виходить рівняння кола, траєкторія є круговою.

Якщо частоти взаємно перпендикулярних коливань не є однаковими, то траєкторія результуючого руху має вигляд складних кривих, які називаються *фігурами Ліссажу*. Форма фігур Ліссажу залежить від співвідношення частот коливань і від різниці фаз між ними. Приклад фігур Ліссажу при відношенні частот 3: 4 і 1: 2 показаний на рис. 11.10.

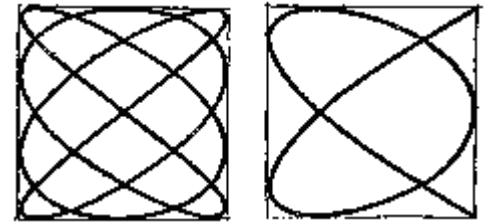


Рис. 11.10.

Приклад. Матеріальна точка бере участь одночасно в двох взаємно перпендикулярних гармонійних коливаннях, рівняння яких, $x = A_1 \sin \omega t$, $y = A_2 \cos \omega t$, де $A_1 = 2$ см, $A_2 = 4$ см. Визначити рівняння траєкторії точки. Побудувати траєкторію з дотриманням масштабу і вказати напрямок руху точки.

Розв'язання. Наведені в умові рівняння руху являють собою рівняння траєкторії, задані в параметричній формі. Якщо виключити час t з заданих рівнянь, можна отримати рівняння траєкторії в звичайному вигляді. З першого рівняння слід, що $\sin \omega t = x/2$, тому

$$\cos \omega t = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \omega t} = \pm \sqrt{1 - (x^2 / 4)}.$$

Підставимо в друге рівняння замість $\cos \omega t$ його значення

$$y = \pm 4 \sqrt{1 - (x^2 / 4)}.$$

Зводячи в квадрат, отримаємо

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1. \quad (\text{П.11.1})$$

Це є рівняння еліпса, півосі якого дорівнюють відповідним амплітудам коливань (2 і 4 см). Для побудови траєкторії визначимо з рівняння (П.11.1) значення y , що відповідають певним значенням x , і складемо таблицю:

x , см	-2	-1	0	+1	+2
y , см	0	$\pm 3,46$	± 4	$\pm 3,46$	0

Накресливши координатні осі і вибравши масштаб, нанесемо на площину xOy знайдені точки (рис. П.11.1). З'єднаємо їх плавною кривою, одержимо траєкторію точки, що здійснює коливання відповідно до рівнянь руху.

Визначимо напрямок обертання. У початковий момент часу $t = 0$ координати точки дорівнюють $x(0) = 0$ і $y(0) = 4$ см, точка знаходиться в положенні M .

В наступний момент часу координата x збільшується, а координата y зменшується. Отже, рух точки вздовж траєкторії відбувається за годинниковою стрілкою.

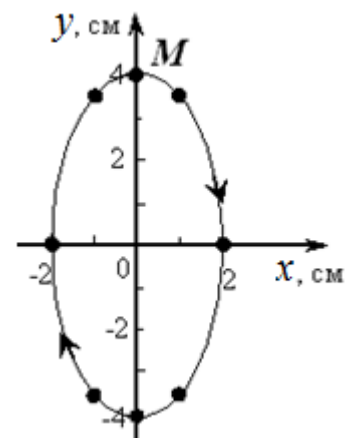


Рис. П.11.1.

Контрольні питання

1. Якими фізичними умовами визначаються частота ω_0 , амплітуда A коливань і початкова фаза α власних коливань гармонічного осцилятора?
2. Які основні характеристики гармонічного коливального руху?
3. Яку відстань проходить частинка, що здійснює гармонічне коливання з амплітудою A , за один період? За k періодів ($k > 0$)?
4. Вантаж здійснює коливання на пружині. Чи можуть збігатися у напрямку в певний момент часу вектори: а) переміщення і швидкості; б) переміщення і прискорення?
5. Яка різниця фаз між коливаннями зміщення і прискорення в гармонічному осциляторі?
6. Як пов'язані між собою амплітуди швидкості та зміщення в гармонічному коливанні?
7. Що відбувається з частотою власних коливань при збільшенні маси коливної точки?
8. Які енергетичні перетворення відбуваються під час вільних гармонічних коливань? Яке фазове співвідношення між коливаннями кінетичної і потенціальної енергії гармонічних коливань?
9. Власна частота гармонічних коливань системи дорівнює ω_0 . З якою частотою здійснюють коливання потенціальна і кінетична енергії?
10. Повна енергія системи, що здійснює гармонічні коливання, дорівнює W , коефіцієнт квазіпружної сили дорівнює k . З якою амплітудою здійснюють коливання кінетична і потенціальна енергії?
11. Чому дорівнює відношення потенціальної енергії точки, що здійснює гармонічні коливання, до її кінетичної енергії для моменту, коли зміщення точки від положення рівноваги $x = A / 4$?
12. У яких положеннях коливної точки кінетична енергія є максимальною, а коли вона дорівнює нулю? Які значення в цих положеннях має потенціальна енергія?
13. Чому дорівнює відношення кінетичної енергії точки, що здійснює гармонічне коливання, до її потенціальної енергії для моментів часу $t = T / 8$ і $t = T / 6$?
14. Як зміниться повна механічна енергія коливання, якщо подвоїти його амплітуду? Частоту?
15. Якими є коливання системи при малому відхиленні від положення рівноваги?
16. Математичний маятник здійснює вільні коливання. Чи змінюється при цьому сила натягу нитки?
17. Як зміниться період коливань маятника, якщо перенести його на Місяць?
18. Як зміниться період коливань математичного маятника в ліфті, який:
А) піднімається з прискоренням g ;
Б) вільно падає?
19. У яких точках траєкторії математичного маятника величина прискорення, з яким він рухається, є максимальною?
20. Яку роль відіграє котушка індуктивності в коливальному контурі? Конденсатор?
21. Як можна збудити електромагнітні коливання в коливальному контурі?
22. У чому полягає аналогія між механічними коливаннями математичного маятника і електромагнітними коливаннями в коливальному контурі?
23. Чим визначається власна частота коливань в електричному коливальному контурі?
24. Які енергетичні перетворення відбуваються в коливальному контурі?
25. У яких межах може змінюватися амплітуда при складанні двох гармонічних коливань одного напрямку й однакової частоти?
26. Якою є траєкторія руху матеріальної точки, що бере участь в двох взаємно перпендикулярних гармонічних коливаннях однакової частоти, якщо різниця їх початкових фаз дорівнює: а) нулю; б) $\pi / 2$?

ГЛАВА 2. ЗГАСАЮЧІ І ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ

§ 12. Згасаючі коливання

Гармонічні коливання, які відбуваються з постійною амплітудою і продовжуються нескінченно довго, є фізичної абстракцією.

У реальних фізичних системах, які здійснюють коливальний рух, завжди діють сили тертя (або електричного опору). Наприклад, при коливанні пружинного маятника у в'язкому середовищі (рис. 12.1). Тому реальні коливальні рухи відбуваються з поступовими втратами енергії коливань на роботу проти сил опору. Відбувається дисипація (розсіювання, перетворення в теплоту) механічної (або електромагнітної) енергії. Зменшення енергії проявляється в тому, що з часом зменшується амплітуда коливань, оскільки $W \sim A^2$. Через деякий час початковий запас енергії повністю витрачається, і амплітуда коливань зменшується до нуля, тобто коливання припиняються. Коливання, які відбуваються з поступовою втратою початкової енергії, називаються *згасаючими*.

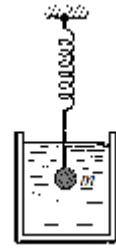


Рис. 12.1

При невеликій швидкості руху сила опору пропорційна швидкості:

$$F_{\text{опор}} = -rv, \quad (12.1)$$

де r - коефіцієнт опору; знак «мінус» вказує на те, що вектори $F_{\text{опор}}$ і v мають протилежний напрямок.

Запишемо другий закон Ньютона для згасаючих коливань пружинного маятника уздовж осі Ox (рис. 12.2)

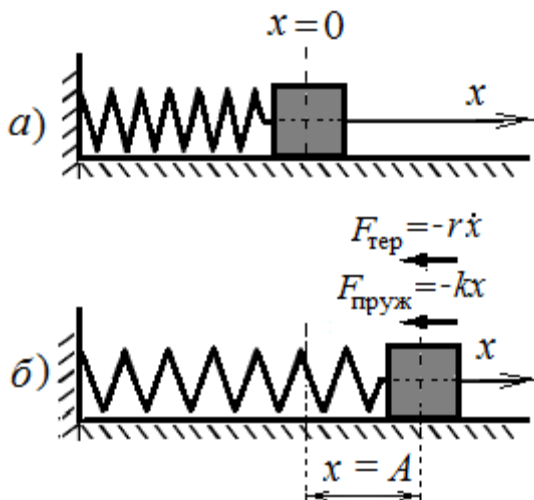


Рис. 12.2

$$ma = F + F_{\text{тер}} = -kx - rv,$$

або

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + r \frac{dx}{dt} + kx = 0, \quad (12.2)$$

де m - маса тіла, $a = \frac{d^2 x}{dt^2}$ - його прискорення, $F = -kx$ - пружна (або квазіпружна) сила, $F_{\text{тер}} = -rv$ - сила тертя (опору).

Перепишемо це рівняння в наступному вигляді

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{r}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0.$$

Введемо позначення

$$\frac{r}{m} = 2\beta; \quad \frac{k}{m} = \omega_0^2, \quad (12.3)$$

де ω_0 - частота, з якою відбувалися б вільні коливання системи під час відсутності опору середовища, тобто при $r = 0$. Цю частоту називають *власною частотою* коливання системи; β - *коефіцієнт загасання*. Тоді

$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (12.4)$$

Інший приклад - *електричний коливальний контур*. У реальному коливальному контурі, крім ємності C і індуктивності L , завжди є активний опір R (рис. 12.3).

Частина енергії розрядного струму витрачається на нагрівання провідників, тому електричні коливання загасають.

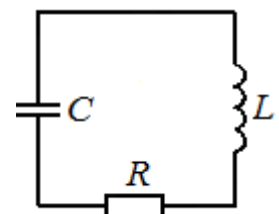


Рис. 12.3.

Згідно з другим правилом Кірхгофа сума напруги на конденсаторі $U_C = \frac{q}{C}$ і падіння напруги на опорі IR дорівнює ЕРС самоіндукції:

$$q/C + IR = -L \, dI/dt. \quad (12.5)$$

Крім того, струм в колі

$$I = dq/dt, \quad \text{та} \quad dI/dt = d^2q/dt^2.$$

Підставляючи похідну від струму в рівняння (12.5), отримаємо рівняння для зміни заряду на конденсаторі

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} + R \frac{dq}{dt} = 0, \quad (12.6)$$

або

$$\ddot{q} + 2\beta \dot{q} + \omega_0^2 q = 0, \quad (12.7)$$

де

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad \beta = \frac{R}{2L}. \quad (12.8)$$

В обох розглянутих випадках - пружинного маятника і коливального контура - диференціальне рівняння вільних згасаючих коливань має вигляд (12.4), де x - змінна (зміщення або заряд, струм і т.д.), що описує коливання, β - коефіцієнт згасання коливань, ω_0 - циклічна частота вільних незгасаючих коливань.

Рішення цього рівняння руху, тобто знаходження функції $x(t)$, що задовольняє (12.4) в будь-який момент часу, є складним.

Процес має різний характер в двох випадках: 1) $\beta < \omega_0$ (випадок малого загасання); 2) $\beta > \omega_0$ (випадок великого загасання).

1. Якщо загасання є малим, коливання можна розглядати як гармонічні з поступово спадаючою з часом амплітудою. Швидкість, з якою убуває з часом амплітуда коливань, визначається коефіцієнтом загасання β . Процес має вигляд, зображений на рис. 12.4. Рішенням рівняння (12.4) в цьому випадку є функція

$$x(t) = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha), \quad (12.9)$$

де

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \quad (12.10)$$

Тут e - основа натуральних логарифмів ($e = 2,718 \dots$). Вираз (12.10) називають частотою згасаючих коливань, а вираз

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t}. \quad (12.11)$$

амплітудою згасаючих коливань.

Переконаємося, що вираз (12.9) дійсно є рішенням рівняння (12.4). Для цього обчислимо першу і другу похідні функції (12.9).

$$\dot{x} = -A\beta e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha) - A\omega e^{-\beta t} \sin(\omega t + \alpha),$$

$$\ddot{x} = A\beta^2 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha) + 2A\omega\beta e^{-\beta t} \sin(\omega t + \alpha) - A\omega^2 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha)$$

Підставляючи ці вирази в (12.4), знаходимо, що рівняння звертається в тотожність.

Приклад. Покажемо один із способів знаходження рішення рівняння (12.4). Замість змінної x означимо нову змінну X , пов'язану з x співвідношенням

$$x(t) = e^{-\beta t} X(t). \quad (\text{П.12.1})$$

Здиференціюємо два рази функцію $x(t)$ за часом t :

$$\dot{x} = X \frac{d}{dt} e^{-\beta t} + \dot{X} e^{-\beta t} = e^{-\beta t} (\dot{X} - \beta X). \quad (\text{П.12.2})$$

$$\ddot{x} = X \frac{d^2}{dt^2} e^{-\beta t} + 2\dot{X} \frac{d}{dt} e^{-\beta t} + \ddot{X} e^{-\beta t} = e^{-\beta t} (\ddot{X} - 2\beta \dot{X} + \beta^2 X). \quad (\text{П.12.3})$$

Підставивши значення першої і другої похідних в рівняння (12.4), отримаємо

$$e^{-\beta t} [\ddot{X} - 2\beta \dot{X} + \beta^2 X + 2\beta(\dot{X} - \beta X) + \omega_0^2 X] = 0. \quad (\text{П.12.4})$$

Вираз у квадратних дужках має дорівнювати нулю. В результаті отримуємо рівняння для функції $X(t)$:

$$\ddot{X} + (\omega_0^2 - \beta^2)X = 0. \quad (\text{П.12.5})$$

Тут можливі два випадки. Нехай спочатку $\beta < \omega_0$. Тоді можна ввести параметр

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2 \quad (\text{П.12.6})$$

так що рівняння (П.12.5) набуде вигляду

$$\ddot{X} + \omega^2 X = 0.$$

Але це - стандартне рівняння гармонічних коливань, загальне рішення якого відомо

$$X(t) = A_0 \cos(\omega t + \alpha).$$

Отже, загальний розв'язок рівняння згасаючих коливань

$$x(t) = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha),$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}.$$

Графік функції (12.9) показаний на рис. 12.4. Пунктирними лініями показаний закон (12.11) зменшення амплітуди з часом.

Згасаючі коливання не є гармонічними, тому що в них ніколи не повторюються, наприклад, максимальні значення зміщення, швидкості і прискорення. В цьому випадку під амплітудою розуміють найбіль-

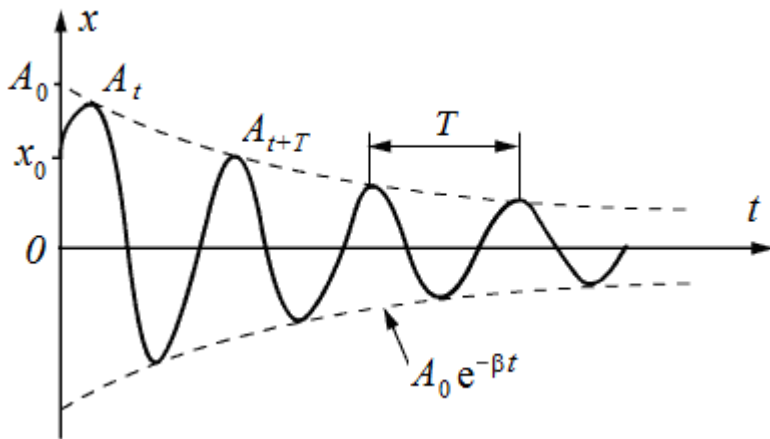


Рис. 12.4.

ше значення, якого досягає зміщення (або швидкість, прискорення) протягом одного періоду коливань.

Величину $T = \frac{2\pi}{\omega}$ зазвичай називають *періодом згасаючих коливань*, правильніше ска-

зати - умовним періодом згасаючих коливань, а величину $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ називають *циклічною частотою згасаючих коливань*.

Кількісна характеристика швидкості згасання коливань - *логарифмічний декремент згасання* λ . Він дорівнює натуральному логарифму відношення амплітуд зміщень, які ідуть слідом одна за одною через проміжок часу, що дорівнює періоду T :

$$\lambda = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \ln \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = \ln(e^{\beta T}) = \beta T. \quad (12.12)$$

Позначимо через τ проміжок часу, за який амплітуда коливань зменшується в e разів.

Тоді

$$\frac{A(t)}{A(t+\tau)} = e^{\beta \tau} = e, \quad (12.13)$$

звідки

$$\beta = \frac{1}{\tau} \quad (12.14)$$

Отже, коефіцієнт згасання β є фізична величина, зворотна проміжку часу τ , протягом якого амплітуда зменшується в e разів. Величина τ називається *часом релаксації*.

Нехай N_e - число коливань, після яких амплітуда зменшується в e разів: $N_e = \tau/T$. Іншими словами, N_e - кількість коливань, яке система здійснює за час релаксації.

Тоді

$$\lambda = \beta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N_e}. \quad (12.15)$$

Отже, логарифмічний декремент згасання λ є фізична величина, яка обернена числу коливань N_e , по закінченню яких амплітуда убуває в e разів. Наприклад, якщо $\lambda = 0,01$, то амплітуда зменшиться в e разів після 100 коливань.

Середні значення декременту згасання: коливального контура $\lambda = 0,02 - 0,05$, камертона $\lambda = 0,001$, кварцової пластинки $\lambda = 10^{-4} - 10^{-5}$, оптичного резонатора (лазера) $\lambda = 10^{-6} - 10^{-7}$.

Для характеристики коливальної системи вживається також величина

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \pi N_e, \quad (12.16)$$

яку називають *добротністю* коливальної системи. Вона пропорційна числу коливань N_e , що здійснюються системою за той час, за який амплітуда убуває в e разів. Великим значенням Q відповідає слабе затухання коливань.

Як приклад наведено середні значення добротності деяких осциляторів

Осцилятор	Добротність
Сейсмічні коливання	25 - 1400
Радіоконтур	$10^1 - 10^2$
Камертон	$10^2 - 10^3$
Скрипкова струна	10^3
П'езокварцева пластинка	$2 \cdot 10^4$
СВЧ-резонатор	$10^3 - 10^4$
Оптичний резонатор	$10^6 - 10^7$
Коливання електронів в атомах	10^7
Коливання в збудженому атомному ядрі Fe^{57}	$3 \cdot 10^{12}$

Приклад 2. Амплітуда коливань математичного маятника довжиною $l = 1$ м за час $t = 30$ с зменшилася в два рази. Чому дорівнюють логарифмічний декремент згасання маятника λ і його добротність Q ?

За умовою задачі за час $t = 30$ с:

$$\frac{A_0}{A_0 e^{-\beta t}} = e^{\beta t} = 2, \quad (\text{П. 12.7})$$

і, отже,

$$\beta = \frac{\ln 2}{t} = 0,02 \text{ c}^{-1}. \quad (\text{П. 12.8})$$

Власна частота коливань $\omega_0 = 2\pi \sqrt{\frac{g}{l}} = 6,28 \sqrt{9,81} = 19,67 (\text{c}^{-1})$. Таким чином, згасання є малим,

$\beta \ll \omega_0$ і згідно з (12.10) $\omega \approx \omega_0$, тобто період коливань маятника $T \approx 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$, так що

$$\lambda = \beta T = \frac{\ln 2}{t} \cdot 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = 0,046. \quad (\text{П. 12.9})$$

Добротність $Q = \pi / \lambda = 68,3$.

Приклад 3. Добротність камертона $Q = 3000$, власна частота $\nu_0 = 640$ Гц. За який час амплітуда коливань зменшиться в 10 разів?

За умовою

$$\frac{A_0}{A_0 e^{-\beta t}} = e^{\beta t} = 10, \quad (\text{П. 12.10})$$

Звідки

$$t = \frac{\ln 10}{\beta}. \quad (\text{П.12.11})$$

Необхідно далі виразити коефіцієнт згасання β через задану в умові добротність Q .

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{2\beta} = \frac{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}{2\beta}. \quad (\text{П.12.12})$$

Розв'язуємо рівняння відносно β :

$$\beta^2 = \frac{\omega_0^2}{4Q^2 + 1} \approx \frac{\omega_0^2}{4Q^2},$$

нехтуючи одиницею в знаменнику, отримаємо

$$\beta = \frac{\omega_0}{2Q} = \frac{\pi \nu_0}{Q}. \quad (\text{П.12.13})$$

Тоді

$$t = \frac{Q \ln 10}{\pi \nu_0} = \frac{3000 \cdot 2,3}{3,14 \cdot 640} = 3,4 \text{ с}. \quad (\text{П.12.14})$$

Насправді камертон буде звучати набагато довше, оскільки вухо людини здатне сприймати коливання, які відрізняються за амплітудою не в десятки, а в тисячі разів.

Енергія коливальної системи пропорційна квадрату амплітуди, тому вона при згасаючих коливаннях убуває за законом

$$W = W_0 e^{-2\beta t}. \quad (\text{12.17})$$

Тут W_0 - значення енергії в початковий момент часу, $t = 0$.

Застосуємо отримані результати для електромагнітного контура. При $\beta \ll \omega_0$ ($R/2L \ll 1/\sqrt{LC}$) можна записати:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}} \approx 2\pi \sqrt{LC}. \quad (\text{12.18})$$

$$\tau = \frac{1}{\beta} = \frac{2L}{R}. \quad (\text{12.19})$$

$$\lambda = \beta T = \pi R \sqrt{\frac{C}{L}}. \quad (\text{12.20})$$

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (\text{12.21})$$

2. Розглянемо тепер випадок *великого згасання*. При збільшенні тертя частота коливань $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ прямує до нуля, а період коливань зростає. Коли коефіцієнт згасання стає рівним критичному, тобто $\beta = \omega_0$, то, як видно з формули (12.18), період коливань перетворюється в нескінченність. Отже, система, виведена з положення рівноваги, повертається в положення рівноваги *аперіодично* (відсутність коливань, рис. 12.6).

Наприклад, аперіодично буде підходити до стану рівноваги вантаж малої маси, підвішений на м'якій пружині (рис. 12.1), якщо його помістити в дуже в'язке середовище (наприклад, в гліцерин).

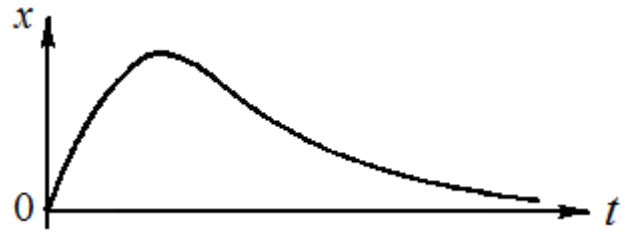


Рис. 12.6.

Приклад 4. Коливальний контур складається з котушки індуктивністю $L = 25$ мГн, конденсатора ємністю $C = 10$ мкФ і резистора. Визначити опір резистора, якщо відомо, що амплітуда сили струму в контурі зменшилася в e разів за $N_e = 16$ повних коливань.

Розв'язання. Позначимо час, за який амплітуда зменшиться в e разів (так званий *час релаксації*), через τ . За час τ в контурі здійсниться

$$N_e = \tau/T \tag{П.12.15}$$

коливань. Тут $T = 2\pi / \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ - умовний період згасаючих коливань ($\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ - власна частота контура, $\beta = R/(2L)$ - коефіцієнт загасання).

Підставимо до закону убуття амплітуди $A = A_0 e^{-\beta t}$ час релаксації τ . Тоді за визначенням амплітуда зменшується в e разів.

$$A_0 e^{-\beta \tau} = \frac{A_0}{e},$$

або

$$\beta \tau = 1, \tau = \frac{1}{\beta}.$$

Підставляючи вирази для T і τ в формулу (П.12.15), отримаємо

$$N_e = \left(\frac{1}{\beta T} \right) = \left(\frac{2L}{R} \right) \frac{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{4L}{R^2 C} - 1}.$$

Звідси шуканий опір:

$$R = 2 \sqrt{\frac{L}{C(1 + 4\pi^2 N_e^2)}}. \tag{П.12.16}$$

Після обчислень отримаємо $R \approx 1$ Ом.

§ 13. 1. Вимушені механічні коливання

Якщо реальну коливальну систему вивести з положення рівноваги і надати самій собі, то вона буде здійснювати вільні згасаючі коливання, поступово втрачаючи первісний запас механічної енергії на роботу проти сил опору середовища.

Для підтримки незгасаючих коливань реальної системи необхідно періодично поповнювати втрати механічної енергії системи на роботу проти сил опору. Таке поповнення енергії можна здійснити за рахунок роботи *зовнішньої сили, яка змінюється з часом за гармонічним законом*:

$$F = F_0 \cos \omega t, \tag{13.1}$$

де F_0 - амплітуда зовнішньої сили, ω - її циклічна частота. Такі коливання здійснює, наприклад, пружинний маятник, який підштовхується через рівні проміжки часу за допомогою механізму, що приводиться в рух електромотором (рис. 13.1).

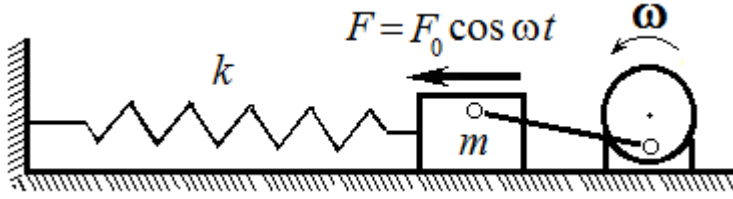


Рис. 13.1

Зовнішня сила буде здійснювати роботу, знак якої залежить від різниці фаз між силою і швидкістю руху тіла. Якщо напрямок зовнішньої

сили протилежний напрямку швидкості тіла, що коливається, то вона здійснює від'ємну роботу і тому гальмує рух тіла; якщо ж напрямок сили збігається з напрямком швидкості тіла, то вона здійснює додатну роботу і, отже, прискорює рух тіла. Згодом це призведе до того, що тіло буде змушене коливатися з тією ж частотою ω , з якою змінюється зовнішня сила, а не з власної частотою ω_0 .

Незгасаючі коливання системи, які відбуваються внаслідок дії зовнішньої сили, яка змінюється за законом (13.1), називають *вимушеними коливаннями*, а силу F - *змушуючою* силою.

Якщо змушуюча сила змінюється за гармонічним законом, то рівняння другого закону Ньютона для пружинного маятника має вигляд

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - r \frac{dx}{dt} + F_0 \cos \omega t \quad (13.2)$$

Розділимо це рівняння на масу m коливальної системи та введемо такі позначення

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2, \quad \frac{r}{m} = 2\beta, \quad \frac{F_0}{m} = f_0.$$

Тоді рівняння (10.73) набуває вигляду

$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t, \quad (13.3)$$

де ω_0 - циклічна частота власних коливань системи, β - коефіцієнт згасання коливань, f_0 - амплітуда змушуючої сили, яка віднесена до одиниці маси.

Диференціальне рівняння (13.3) описує вимушені коливання і є неоднорідним диференціальним рівнянням другого порядку. З теорії лінійних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами відомо, що загальне рішення неоднорідного рівняння дорівнює сумі загального рішення відповідного однорідного і частинного рішення неоднорідного рівняння.

Рішення відповідного однорідного диференціального рівняння було знайдено раніше (12.9). Воно характеризує згасаючі коливання. З плином часу через експоненціальний множник $e^{-\beta t}$ роль цього доданка в загальному рішенні зменшується і після певного проміжку часу їм можна знехтувати.

Тому в рішенні зберігається тільки частинне рішення неоднорідного рівняння (13.3). Будемо шукати частинне рішення рівняння (13.3). При цьому будемо вважати, що під дією сили (13.1) коливання встановлюються і система здійснює вимушені коливання з частотою змушуючої сили.

Позначимо різницю фаз між зовнішньою силою і зміщенням тіла, що коливається, через φ . Оскільки тіло змушене здійснювати коливання з частотою ω зовнішньої сили, то рішення будемо шукати у вигляді

$$x = A \cos(\omega t + \varphi), \quad (13.4)$$

де A - амплітуда усталених коливань. Величини A і φ необхідно визначити. Для цього знайдемо з (13.4) першу і другу похідні

$$\frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \varphi), \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi).$$

Підставимо $x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}$ в рівняння (13.3):

$$-A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi) - 2\beta A\omega \sin(\omega t + \varphi) + A\omega_0^2 \cos(\omega t + \varphi) = f_0 \cos \omega t. \quad (13.5)$$

Розгорнемо $\sin(\omega t + \varphi)$ і $\cos(\omega t + \varphi)$ за формулами для синуса і косинуса суми:

$$-A\omega^2 (\cos \omega t \cdot \cos \varphi - \sin \omega t \cdot \sin \varphi) - 2\beta A\omega (\sin \omega t \cos \varphi + \sin \varphi \cos \omega t) + A\omega_0^2 (\cos \omega t \cos \varphi - \sin \omega t \sin \varphi) = f_0 \cos \omega t$$

Згрупувавши члени рівняння, отримаємо

$$A((\omega_0^2 - \omega^2) \cos \varphi - 2\beta\omega \sin \varphi) \cos \omega t - A((\omega_0^2 - \omega^2) \sin \varphi + 2\beta\omega \cos \varphi) \sin \omega t = f_0 \cos \omega t \quad (13.6)$$

Для того, щоб рівняння (13.6) задовольнялося при будь-яких значеннях t , коефіцієнти при $\sin \omega t$ і $\cos \omega t$ в лівій і правій частинах рівняння повинні бути однаковими.

Звідси отримуємо

$$\begin{aligned} A(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \varphi - 2\beta\omega A \sin \varphi &= f_0, \\ A(\omega_0^2 - \omega^2) \sin \varphi + 2\beta A \omega \cos \varphi &= 0. \end{aligned} \quad (13.7)$$

Щоб визначити A , зведемо в квадрат обидві рівності (13.7) і складемо їх одну з одною. Тоді отримаємо

$$A^2((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2) = f_0^2,$$

звідки знаходимо амплітуду вимушеного коливання

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}, \quad (13.8)$$

а з другого рівняння системи (13.7) – вираз для зсуву фаз між коливаннями зміщення системи від положення рівноваги та змушуючою силою.

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{2\beta\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}. \quad (13.9)$$

Описані вимушені коливання з амплітудою (13.8) встановлюються в системі не відразу після початку дії зовнішньої сили. Коли на систему починає діяти сила, що періодично змінюється, то амплітуда коливань поступово зростає до того значення, яке вона повинна мати згідно з формулою (13.8) для даного співвідношення частот ω і ω_0 . Відбувається це тому, що одночасно з вимушеними коливаннями при включенні змушуючої сили виникають власні коливання, які складаються з вимушеними.

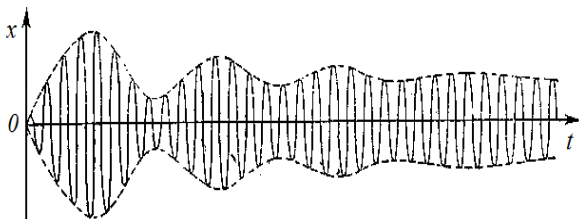


Рис. 13.2.

Власні коливання поступово загасають, і амплітуда вимушених коливань установлюється у відповідності з (13.8). Якщо декремент згасання малий, то встановлення амплітуди відбувається довго. Часто в результаті складання власних і вимушених коливань (поблизу резонансу), коли власна частота близька до частоти змушуючої сили, виникають биття (рис. 13.2).

Розглянемо, як реагує коливальна система на зміну частоти зовнішнього впливу, тобто проаналізуємо залежність A від ω .

Коли частота змушуючої сили наближається до нуля $\omega \rightarrow 0$ (статичний випадок, $\omega = 0$, або дуже повільні коливання, $\omega \ll \omega_0$), амплітуда вимушених коливань прямує до величини

$A(0) = \frac{f_0}{\omega_0^2}$ і не залежить від загасання. Останнє пояснюється тим, що згасання (сили опору)

проявляється тільки під час руху системи, а не в статичному випадку. У випадку коливань пружинного маятника

$$A(0) = \frac{F_0}{m\omega_0^2} = \frac{F_0}{k} = x_0, \quad (13.10)$$

що дорівнює подовженню пружини під дією постійної сили F_0 .

При збільшенні ω амплітуда A спочатку збільшується, оскільки зменшується знаменник у формулі (13.8) (зменшується величина різниці $(\omega_0^2 - \omega^2)$) до тих пір, поки ω не стане рівною ω_0 .

При $\omega = \omega_0$ амплітуда A досягає максимального значення.

При подальшому збільшенні ω знаменник у формулі (13.8) почне збільшуватися, а амплітуда A зменшуватися.

При $\omega \rightarrow \infty$ амплітуда $A \rightarrow 0$: $A \sim f_0/\omega^2$, $\omega \gg \omega_0$.

Фізично це пояснюється тим, що система має деяку інерційність і не встигає слідувати за швидкими змінами зовнішнього впливу.

На графіку залежність амплітуди вимушених коливань від частоти змушуючої сили зобразиться кривою, що має максимум поблизу $\omega = \omega_0$ (рис. 13.3).

Явище, що полягає в збільшенні амплітуди вимушених коливань, коли частота змушуючої сили наближається до власної частоти системи, називається *резонансом*, а графік залежності амплітуди від частоти змушуючої сили - *амплітудною резонансною кривою*.

Частота змушуючої сили $\omega_{рез}$, за якої амплітуда коливань досягає найбільшого значення $A_{рез}$, називається *резонансною частотою*.

Очевидно, що максимальне значення амплітуди досягається при мінімальному значенні підкореневого виразу у формулі (13.8). Умовою мінімуму є рівність нулю похідної за частотою від підкореневого виразу, тобто

$$-4(\omega_0^2 - \omega_{рез}^2)\omega_{рез} + 8\beta^2\omega_{рез} = 0$$

Звідси знаходимо резонансну частоту

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}. \quad (13.11)$$

Підставивши значення $\omega_{рез}$ в формулу (13.8), отримаємо резонансне значення амплітуди

$$A_{рез} = \frac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \quad (13.12)$$

Знайдемо відношення резонансної амплітуди до статичної:

$$\frac{A_{рез}}{A(0)} = \frac{\omega_0^2}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \approx \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{\pi}{\beta T} = Q. \quad (13.13)$$

Іншими словами, добротність Q показує, у скільки разів амплітуда під час резонансу перевищує статичне зміщення $A(0)$ системи під дією сталої сили, модуль якої дорівнює амплітуді змушуючої сили.

Проаналізуємо залежність зсуву фаз φ від частоти ω .

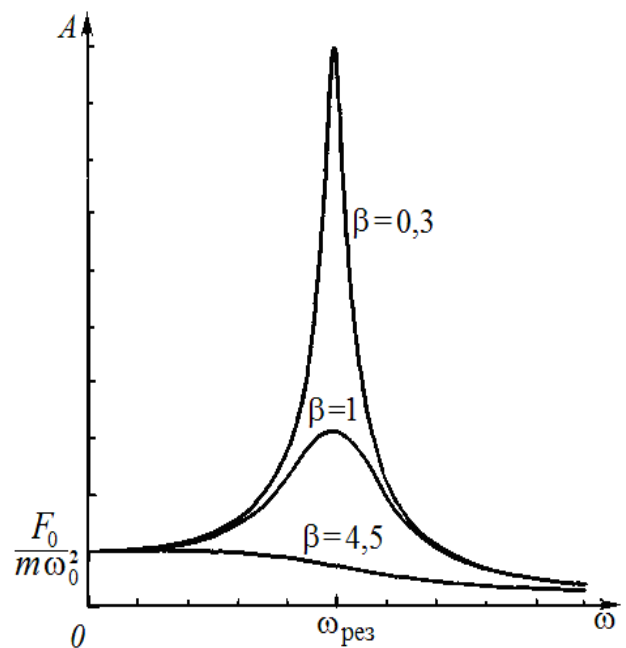


Рис.. 13.3.

З виразу $\operatorname{tg} \varphi = -\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$ видно, що в разі $\beta = 0$ зсув фаз $\varphi = 0$, тобто зміщення колива-

льної системи і змушуюча сила мають однакові фази. У всіх інших випадках $\varphi \neq 0$. Залежність φ від ω за різних значень β наведена на рис. 13.4. Такі криві називаються *фазовими резонансними кривими*.

Якщо $\omega \ll \omega_0$, то з формули (13.9) випливає, що

$$\operatorname{tg} \varphi = -2\beta\omega/\omega_0^2,$$

тобто φ близько до нуля, фаза вимушених коливань приблизно збігається з фазою зовнішньої сили.

Зі збільшенням частоти ω , коли вона приймає значення, близькі до ω_0 ,

$$\operatorname{tg} \varphi \rightarrow -\infty$$

та $\varphi = -\pi/2$, тобто зміщення коливань системи відстає від змушуючої по фазі на $\pi/2$.

При подальшому збільшенні частоти ($\omega \gg \omega_0$) зсув фаз досягає майже $-\pi$, тобто фаза вимушених коливань майже протилежна фазі зовнішньої дії.

Зсув фаз на $\pi/2$ під час резонансу має істотне значення для вимушених коливань. Закон руху в резонансі має вигляд

$$x(t) = A_{\text{рез}} \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}), \quad (13.14)$$

а для швидкості

$$v = \dot{x} = -A_{\text{рез}} \omega \sin(\omega t - \frac{\pi}{2}) = A_{\text{рез}} \omega \cos \omega t. \quad (13.15)$$

Порівнюючи цей вираз з виразом для змушуючої сили, бачимо, що в резонансі швидкість і сила коливаються в одній фазі, тобто сила весь час збігається за напрямком зі швидкістю. Тому робота зовнішньої сили досягає максимального значення. Під час резонансу умови для передачі енергії від джерела зовнішньої сили до осцилятора є найбільш сприятливими.

Тіло отримує поштовхи в належні моменти часу і в належних положеннях. Наприклад, коли тіло проходить положення рівноваги, то швидкість максимальна і в цей момент в напрямку руху діє максимальна змушуюча сила.

З явищем резонансу в механіці стикаються при роботі різних механізмів і споруд. У деяких випадках це явище призводить до серйозних негативних наслідків, наприклад розгойдування мостів періодичним навантаженням, що збігається за частотою з власною частотою моста, вібрації неврівноважених валів і маховиків, коли частота обертів збігається з власною частотою пружних коливань вала або маховика, вібрація корпусу корабля або крил літака і т.д.

В інших випадках явище резонансу має і корисне застосування, наприклад, коли необхідно отримати якомога більші коливання (в музичних інструментах, динаміках і ін.). Людське вухо сприймає звуки внаслідок резонансу коливань у вушній раковині. Особливо широко явище резонансу використовується в радіотехніці для підсилення коливань. Резонанс дає можливість відокремити сигнали даної радіостанції від сигналів інших одночасно працюючих радіостанцій.

На відміну від вимушених коливань, де частота і амплітуда визначаються періодичною зовнішньою дією, у випадку *автоколивань* частота і амплітуда визначаються властивостями самої системи.

Автоколивання - це незгасаючі коливання системи, яка отримує енергію зовні і сама регулює амплітуду і період таких коливань. Найпоширеніший приклад - коливання маятника настінного годинника з грузиком: поповнення енергії для таких коливань відбувається за рахунок потенціальної енергії грузика, а коливання задається самим годинником - довжиною маятника.

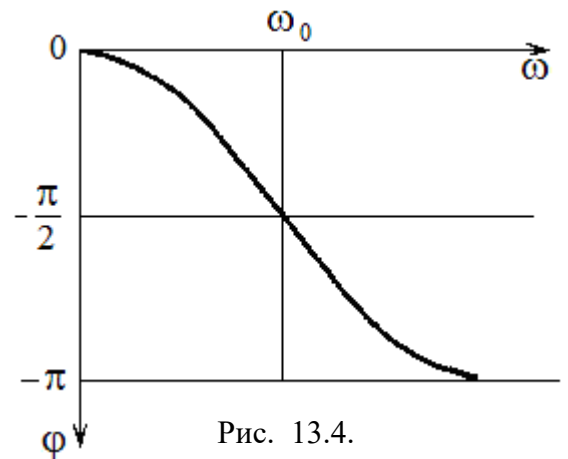


Рис. 13.4.

Елементами автоколивальної системи є: резонатор, джерело енергії і ланка зворотного зв'язку між резонатором і джерелом енергії.

Резонатор - це система, в якій можуть відбуватися власні затухаючі коливання (наприклад, маятник настінного годинника або балансир наручних годинників, струна в смичковому інструменті, коливальний контур в генераторі і т.д.).

Зворотній зв'язок - пристрій, за допомогою якого система сама управляє зовнішньою дією і регулює надходження енергії від джерела (анкерний механізм годинника, котушки зворотного зв'язку в генераторі, смичок в руках музиканта).

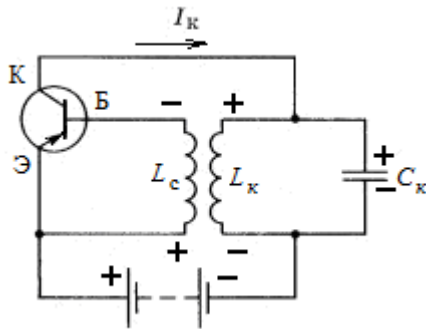


Рис. П.13.1

До автоколивань відносяться коливання крил літака в потоці зустрічного повітря, коливання струни смичкового інструменту, електричні коливання в генераторі і т.д. Баланс енергетичних витрат і енергетичних поповнень в автоколивальній системі визначає стаціонарну амплітуду коливань.

Приклад. Прикладом автоколивальної системи є генератор на транзисторі, спрощена схема якого показана на рис. П.13.1. Він складається з коливального контура з конденсатором ємністю C_k і котушкою індуктивністю L_k , джерела енергії і транзистора.

При включенні джерела живлення в колекторному колі транзистора виникає струм колектора, який заряджає конденсатор коливального контура. Після зарядження конденсатор розряджається через котушку L_k . У котушці L_c , що індуктивно зв'язана з котушкою коливального контуру L_k , виникає різниця потенціалів. Кінець котушки L_c з більш низьким потенціалом подамо на базу транзистора. При такому включенні (плюс на емітері, мінус на базі) транзистор працює як підсилювач потужності. Струм колектора заряджає конденсатор контура.

Через половину періоду струм в коливальному контурі змінить напрям на протилежний. Зміниться і напрям індукованого струму в котушці зворотного зв'язку. Тепер на базу транзистора подається плюс і «клапан» є закритим.

В результаті в контурі $L_k C_k$ виникнуть вільні коливання з частотою $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_k C_k}}$, які індукують в ко-

тушці зв'язку L_c змінну напругу тієї ж частоти, з якою відбуваються коливання в контурі. Ця напруга викликає пульсацію струму колектора. В результаті посилена транзистором змінна напруга компенсує втрати енергії в контурі.

Амплітуда коливань в контурі зростає до тих пір, поки втрати енергії в контурі не стануть точно компенсуватися надходженням енергії від джерела.

Генератори на транзисторах широко застосовуються в радіотехнічних пристроях: радіоприймачах, передавальних радіостанціях, підсилювачах і т. д.

§13. 2. Вимушені електричні коливання.

Розглянемо електромагнітний коливальний контур, в якому крім ємності, індуктивності, опору є ще і генератор змінної ЕРС $E(t) = E_0 \cos \omega t$, тобто джерело електричної енергії (рис. 13.5). Очевидно, що в такому контурі з часом встановляться вимушені коливання струму з частотою генератора ω і з постійною амплітудою; підведення енергії від генератора буде в точності компенсувати втрати енергії на опорі.

Згідно з другим правилом Кірхгофа

$$\frac{q}{C} + IR = -L \frac{dI}{dt} + E_m \cos \omega t. \quad (13.16)$$

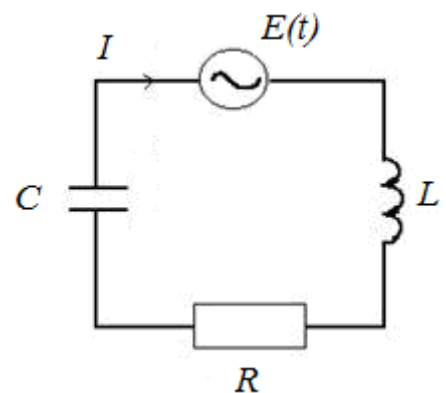


Рис. 13.5.

Ввівши позначення $2\beta = R/L$, $\omega_0^2 = 1/LC$ і замінивши I через \dot{q} , а dI/dt через \ddot{q} , прийдемо до рівняння

$$\ddot{q} + 2\beta \dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{E_m}{L} \cos \omega t . \quad (13.17)$$

З математичної точки зору рівняння (13.17) повністю збігається з рівнянням вимушених механічних коливань (13.3).

Тому відразу можна написати частинний розв'язок цього рівняння:

$$q = q_m \cos(\omega t + \varphi_0) . \quad (13.18)$$

$$q_m = \frac{E_m}{L \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} = \frac{E_m}{\omega \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} . \quad (13.19)$$

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = -\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{R}{\omega L - \frac{1}{\omega C}} . \quad (13.20)$$

Резонансна частота коливань заряду на обкладинках конденсатора (а також напруги на конденсаторі) запишеться також за аналогією з резонансною частотою механічних коливань маятника:

$$\omega_{q \text{ рез}} = \omega_{U \text{ рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} = \sqrt{1/LC - R^2/2L^2} .$$

Звичайно цікавляться не коливаннями заряду на конденсаторі, а коливаннями струму в колі контура. Силу струму знайдемо, продиференціювавши заряд за часом:

$$I = \frac{dq}{dt} = -q_m \omega \sin(\omega t + \varphi_0) = I_m \cos(\omega t - \varphi) . \quad (13.21)$$

У цьому рівнянні зроблена підстановка

$$-\varphi = \varphi_0 + \frac{\pi}{2} , \quad (13.22)$$

щоб фаза струму дорівнювала $(\omega t - \varphi)$, φ є зсувом фази між ЕРС генератора і струмом в колі. В такому записі знак мінус показує, що напруга первинна, а струм відстає за фазою.

Формули для амплітуди струму й зсуву фаз виглядають так:

$$I_m = q_m \omega = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} . \quad (13.23)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} . \quad (13.24)$$

З формули (13.23) випливає, що амплітуда сили струму I_m досягає максимуму при $\omega L = 1/\omega C$. Істотна відмінність коливань струму від коливань заряду полягає в тому, що резонансна частота для струму не залежить від опору R ; вона просто дорівнює власній частоті вільних коливань в контурі:

$$\omega_{I_{рез}} = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Коливання струму в контурі мають аналогом не коливання механічного маятника, а коливання його швидкості.

Подивимося ще раз на формулу (13.23) для амплітуди коливань струму. У чисельнику стоїть амплітудна напруга на генераторі (ми нехтуємо внутрішнім опором генератора, тому його е.р.с. дорівнює напрузі на його клеммах); в знаменнику - величина, що має розмірність опору. Вона включає в себе не тільки активний опір R , але і складову, залежну від ємності і індуктивності контура і від частоти генератора. Ця величина зветься **повним опором контура**, або **імпедансом** контура Z :

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}. \quad (13.25)$$

Величина $X = \omega L - \frac{1}{\omega C}$ називається **реактивним опором**, а її складові: $X_L = \omega L$ - **індуктивним опором**, $X_C = \frac{1}{\omega C}$ - **ємнісним опором**.

Подивимося, як відбуваються коливання струму і напруги на різних ділянках контура.

Струм у колі встановлюється зі швидкістю поширення електричного поля, тобто зі швидкістю світла c . Час встановлення струму в колі $\sim l/c$, де l - довжина контура. Цей час в реальних контурах є набагато меншим, ніж період коливань. Тому можна вважати, що в кожен момент часу значення струму на всіх ділянках контура є однаковим; коливання струму на опорі, індуктивності та ємності відбуваються синхронно.

Інакше обстоїть справа з коливаннями напруги. Обчислимо напругу на кожному елементі контура і подивимося, як вони відрізняються за амплітудою і фазою.

$$U_C = \Delta\varphi = \frac{q}{C} = U_{0C} \cos(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}).$$

$$U_R = IR = U_{0R} \cos(\omega t - \varphi).$$

$$U_L = L \frac{dI}{dt} = U_{0L} \cos(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}). \quad (13.26)$$

$$U_{0C} = X_C I_0.$$

$$U_{0R} = R I_0.$$

$$U_{0L} = X_L I_0. \quad (13.27)$$

Видно, що напруга на конденсаторі відстає на чверть періоду від напруги на опорі, а напруга на індуктивності настільки ж за фазою випереджає її. Напруга на ємності й індуктивності завжди відрізняються за фазою на півперіоду.

Контрольні питання

1. Чи є згасаючі коливання періодичними і гармонічними?
2. Що розуміють під періодом згасаючих коливань, хоча вони є неперіодичними?
3. За яким законом відбувається спадання енергії коливань?
4. Як впливає коефіцієнт згасання на умовний період згасаючих коливань системи?
5. Яким є зв'язок між добротністю коливальної системи і її логарифмічним декрементом згасання?
6. Чим обумовлений експоненціальний характер згасання коливань?
7. За якої умови рух перестає бути коливальним?
8. З якою частотою відбуваються усталені вимушені коливання системи?
9. Чим визначаються частота, амплітуда і фаза усталених вимушених гармонічних коливань?
10. Якими характеристиками осцилятора визначається гострота резонансних кривих?
11. У чому полягає особливість енергетичних перетворень при резонансі?
12. Як зміниться резонансна крива електричного коливального контура, якщо збільшити його омичний опір R , залишивши інші параметри незмінними?
13. У чому полягає явище резонансу в коливальному контурі? Накресліть резонансні криві для контурів, що відрізняються тільки величинами їх активного опору.
14. Від яких параметрів електричного коливального контура залежить резонансна частота?
15. Якими - вимушеними чи автоколиваннями - є такі коливання: а) верхівок дерев, що розгойдуються вітром; б) маятника годинника; в) крил літака під дією зустрічного потоку повітря; г) моста від проїжджаючих по ньому автомобілів; д) мембрани динаміка; е) двигуна автомобіля; є) молоточка електричного дзвінка; ж) повітря в духових інструментах; з) повітря, що проходить через голосові зв'язки людей, тварин і птахів?
16. У чому полягає відмінність між вимушеними коливаннями і автоколиваннями з точки зору їх частоти і амплітуди?
17. Якою є роль транзистора в генерації автоколивань? Як здійснюється зворотний зв'язок в генераторі на транзисторі

ГЛАВА 3. ХВИЛІ В ПРУЖНОМУ СЕРЕДОВИЩІ

§ 14. Механізм утворення пружної хвилі

До сих пір розглядалися ізольовані коливальні системи (вантаж на пружині, маятник і т.п.). При коливаннях ізольованої системи, наприклад, маятника, під час коливань відбувається лише перехід енергії з потенціальної в кінетичну і назад (якщо знехтувати згасанням). Енергія залишається весь час всередині системи.

Розглянемо тепер коливання нескінченного ланцюжка кульок, пов'язаних одна з одною за допомогою пружинок (рис. 14.1).

У початковий момент часу ($t = 0$) всі кульки, що позначені номерами 1, 2, 3 і т.д., розміщені на прямій і жодна з них не виходить з положення рівноваги.

Штовхнемо першу кульку, тобто надамо їй деяку швидкість в напрямку, перпендикулярному до ланцюжку. Вона вийде з положення рівноваги (рис. 14.1). При цьому пружинки I і II розтягнуться і створять силу, що гальмує першу кульку і повертає її в положення рівноваги.

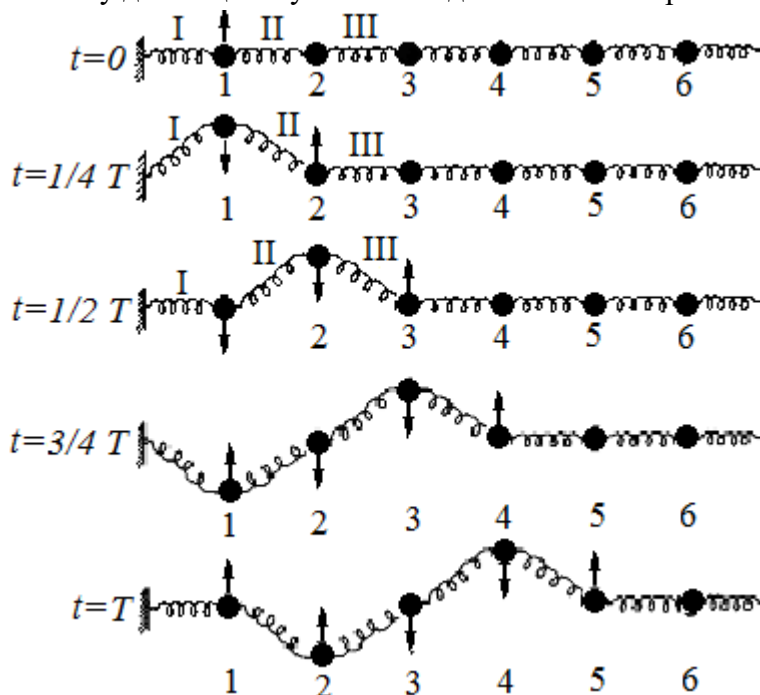


Рис. 14.1.

Через чверть періоду $t = 1/4 T$ кулька 1 відхилиться від лінії рівноваги на максимальне зміщення. Розтягнута пружина діє на другу кульку і надає їй прискорення. Друга кулька придбає швидкість і після закінчення часу $t = 1/4 T$ почне підніматися вгору.

Енергія почне відбиратися від першої кульки і передаватися другій. Коли друга кулька досягає крайнього відхиленого положення, перша повернеться в стан рівноваги. Але пружини II і III виявляться розтягнутими і почнуть повертати другу кульку в положення рівноваги. Одночасно розтягнута пружина III буде діяти на третю кульку і приведе її в рух. Енергія почне переходити від другої кульки до третьої.

При $t = 3/4 T$ кулька 1 досягне максимального від'ємного зміщення, кулька 2 повернеться в стан рівноваги і коливання досягнуть кульки 4. Нарешті, за час, що дорівнює періоду $t = T$, кулька 1 повернеться в стан рівноваги, зробивши повністю одне коливання. Коливання поширилися до кульки 5, всі кульки, що коливаються, утворюють хвилю. При подальших коливаннях кульок хвильовий процес пошириться вправо від кульки 5.

У розглянутому випадку утворення поперечної хвилі кожна кулька рухається тільки вгору і вниз. У спостерігача ж створюється враження, що «хвиля біжить», хоча в дійсності відбувається тільки передача руху від однієї кульки до іншої. Істотно, що при цьому всі кульки здійснюють однакові рухи, але з деяким запізненням за часом.

Кулька на пружинці є прикладом механічного осцилятора. Таким чином, якщо у нас є ланцюжок зв'язаних осциляторів, то імпульс, що наданий одному осцилятору, буде передаватися з плином часу пов'язаним з ним осциляторам. Імпульс побіжить по ланцюжку зв'язаних осциляторів. Швидкість поширення імпульсу буде тим більшою, чим жорсткішими є пружини, що зв'язують осцилятори, і меншими є їх маси. Якщо ж осцилятору 1 надати не поодинокий імпульс, а підтримувати в ньому вимушені коливання, то завдяки існуванню пружних сил зв'яз-

ку між осциляторами цей коливальний рух передаватиметься сусіднім осциляторам. Всі вони будуть повторювати рух першого осцилятора, але зі зсувом у часі. Вздовж ланцюжка зв'язаних осциляторів побіжить хвиля.

Процес поширення коливань у пружному середовищі називається пружною хвилею (звуком). Разом з коливаннями хвилею переноситься і енергія коливань, але самі носії цієї енергії (частинки середовища, що коливаються) хвилею не переносяться.

Характерною особливістю пружних хвиль є те, що вони поширюються в матеріальних середовищах (твердих, рідких або газоподібних). Звук може поширюватися тільки в речовині. Електромагнітні ж хвилі здатні поширюватися і в порожнечі.

Тому можна дати більш загальне визначення хвилі.

Поширення в просторі різних видів збурення речовини і поля, що виявляється в перенесенні енергії збурення, називається біжучою хвилею.

Найбільш важливі хвилі - пружні хвилі, хвилі на поверхні рідини або твердого тіла і електромагнітні хвилі.

Якщо в якомусь місці твердого, рідкого або газоподібного середовища збуджено коливання частинок, то внаслідок взаємодії атомів і молекул середовища коливання починають передаватися від однієї точки до іншої з кінцевою швидкістю.

Сукупність кульок і пружинок можна уявити як одновимірну модель твердого тіла. За допомогою такої простої моделі можна описати поширення **поздовжніх і поперечних** хвиль у твердому тілі.

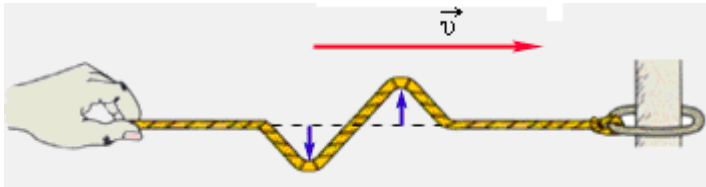


Рис. 14.2.

Якщо в одновимірній моделі твердого тіла кульку змістити в напрямку, перпендикулярному ланцюжку, як було розглянуто вище, то виникне деформація зсуву. В результаті уздовж ланцюжка побіжить **поперечна** хвиля, в якій частинки середовища зазнають зміщення в напрямку,

перпендикулярному напрямку поширення.

Прикладом поперечних хвиль можуть служити хвилі, що біжать вздовж натягнутої гумової трубки або вздовж струни (рис. 14.2), хвилі на поверхні рідини, в твердих тілах. До поперечних відносяться також електромагнітні хвилі, оскільки вектори напруженості електричного і магнітного полів перпендикулярні вектору швидкості хвилі.

У рідинах і газах пружна деформація зсуву не виникає. Якщо один шар рідини або газу змістити на деяку відстань щодо сусіднього шару, то дотичні сили на кордоні між шарами не виникають. Отже, поперечні хвилі не можуть існувати в рідкому або газоподібному середовищах.

У **поздовжній** хвилі частинки середовища коливаються вздовж напрямку поширення хвилі. Поздовжню хвилю можна отримати в ланцюжку кульок, якщо змістити одну з кульок уздовж ланцюжка (рис. 14.3). Пружинки будуть розтягуватися або стискатися, а кульки будуть зазнавати зміщення вздовж ланцюжка. Вздовж ланцюжка зліва направо буде поширюватися хвиля згущення і розрядження.

У рідинах або газах така деформація супроводжується ущільненням або розрідженням. Поздовжні пружні хвилі можуть поширюватися в будь-яких середовищах – твердих, рідких і газоподібних. Хвилі в пружному стержні, по якому вдарили з торця, або звукові хвилі в повітрі є прикладами таких хвиль.

Повернемося до рис. 14.1. У момент часу, що дорівнює періоду ($t = T$), кульки 1 і 5, що знаходяться в положенні рівноваги, мають однакове зміщення і однаковий напрямок руху (вгору). Тому кажуть, що кульки 1 і 5 мають **однакові фази**. На відміну від цього кульки 1 і 3, хоча зміщення у них однакові, рухаються в протилежні боки, тому говорять, що кульки 1 і 3 перебувають в **протилежних фазах**. Відстань між кульками 1 і 5 визначає **довжину хвилі** λ тобто довжиною хвилі λ називається відстань між найближчими точками хвилі, що коливаються в однакових фазах. Періодом хвилі T називають час одного повного коливання її точок.

Довжину хвилі можна визначити також як відстань λ , на яку поширюється хвиля за час, що дорівнює періоду коливань частинок середовища. Очевидно, що

$$\lambda = vT, \quad (14.1)$$

де v - швидкість хвилі, T - період коливань.

Величина, обернена періоду, називається частотою хвилі. Оскільки $T = 1/\nu$, то

$$v = \lambda\nu. \quad (14.2)$$

Від моделі з кульками перейдемо

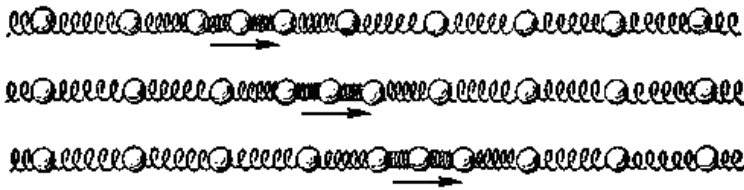


Рис. 14.3.

до реальності. Біжучі хвилі можна створити, наприклад, в довгій натягнутій струні або гумовій трубці. Якщо «трясти» трубку за один з її кінців, поєднаний з початком координат $x = 0$, то вздовж трубки будуть бігти хвилі. Вони мають вигляд або одиночного імпульсу, або синусоїдальної хвилі в залежності від характеру руху джерела хвилі (змушуючої сили в точці $x = 0$).

На рис. 14.4 зображена синусоїда, яка дає зміщення ξ з положення рівноваги точок з різними координатами x в деякий момент часу – «світлина» хвилі.

Якщо «сфотографувати» хвилю в близький момент часу $t + \Delta t$, то на знімку вся синусоїда зсується як жорстке ціле на відстань $\Delta x = v \Delta t$ в тому напрямку, куди передається енергія.

На рис. 14.5 а й 14.5 б зображені «моментальні світлини» поперечної біжучої хвилі в два моменти часу: t і $t + \Delta t$. За час Δt хвиля перемістилася уздовж осі Ox на відстань $v\Delta t$. Стрілками вказані зміщення різних точок за час між моментами t і $t + \Delta t$.

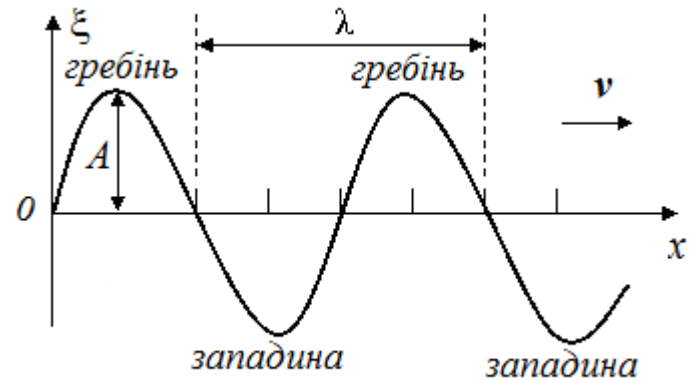


Рис. 14.4.

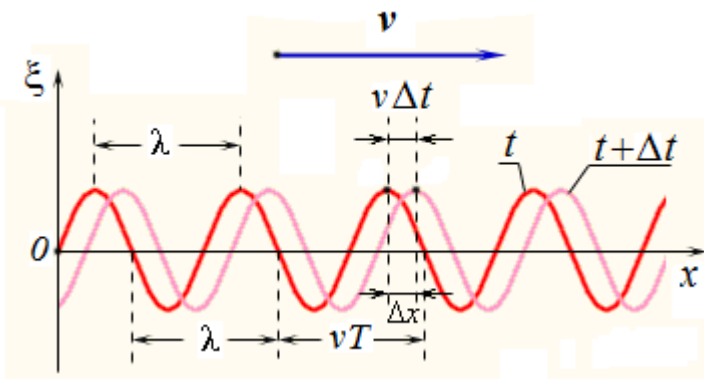


Рис. 14.5, а

Ми розглянули картину утворення і поширення біжучих хвиль тільки по одному напрямку. Взагалі ж в пружному суцільному середовищі, наприклад, у воді або в повітрі, хвилі можуть поширюватися в усіх напрямках. Картина поширення біжучих хвиль в середовищі в загальних рисах буде такою ж, як і для ланцюжка кульок, але для характеристики хвиль в середовищі, крім відомих уже понять вводяться нові: хвильова поверхня і фронт хвилі.

Залежно від того, як коливається і що являє собою джерело хвиль, розрізняють в середовищі хвилі плоскі і сферичні.

1). Якщо джерело хвиль являє собою безмежну пластину, що коливається в пружному середовищі в напрямку нормалі до площини пластини, то від такого джерела в напрямку нормалі до площини буде поширюватися поздовжня пружна хвиля. Всі точки середовища, що лежать на будь-якій площині, паралельній пластині, яка коливається, будуть здійснювати коливання з однією і тією ж амплітудою і в одній і тій же фазі.

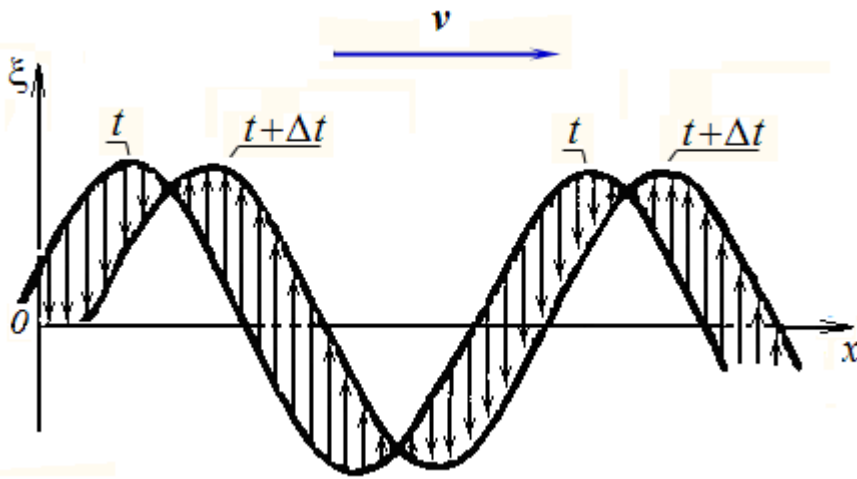


Рис.14.5, б.

Поверхня, яка проведена через точки, що коливаються в одній і тій же фазі, називається *хвильовою поверхнею*. Поверхня, до якої поширилися коливання за цей час, називається *фронтом хвилі*. В даному випадку фронт хвилі і хвильові поверхні будуть являти собою площини, які є паралельним пластині, що коливається, тому хвилю, що поширюється від такої пластини, називають *плоскою* (рис. 14.6). Якщо знехтувати загасанням (тертям), то всі точки в плоскій хвилі коливаються з однаковою амплітудою.

Рівняння плоскої хвилі має такий же вигляд, як і для хвиль на пружній гумовій трубці.

2). Але можна по-іншому збудити в середовищі пружні хвилі. Можна помістити в середовище точкове джерело (наприклад, пульсуючу кулю). Тоді від такого джерела у всіх напрямках будуть поширюватися коливання. Поверхня, до якої поширяться хвиля за даний час, буде мати вигляд сфери. Отже, фронт хвилі в цьому випадку має вигляд сфери.

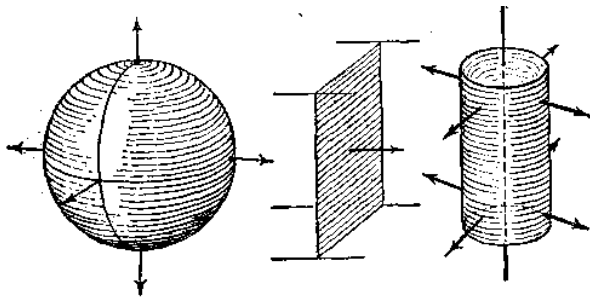


Рис. 14.6.

Хвильовими поверхнями буде сім'я концентричних сфер, а випромінююче хвилю джерело розміщене в їх загальному центрі.

Всі точки, розміщені на поверхні цих сфер, коливаються в фазі. Хвиля, у якій фронт хвилі має вигляд сфери, називається *сферичною* (рис. 14.6). Отже, точкове джерело, поміщене в пружне середовище, утворює сферичні хвилі.

Джерела циліндричних хвиль мають форму дуже довгих циліндрів або відрізків

прямої, довжина яких набагато більша, ніж відстань від цієї прямої до розглянутої точки. В цьому випадку хвильовими поверхнями є бічні поверхні циліндрів, співвісних з циліндром - джерелом випромінювання.

§15. Рівняння біжучої хвилі. Фазова швидкість

Хвильовий процес буде визначено, якщо в будь-який момент часу відомі зміщення частинок, які коливаються, розміщених на різних відстанях від джерела хвиль. Вираз, який визначає зміщення $\xi(x, t)$ частинки, яка коливається, як функцію її координат і часу, називається *рівнянням хвилі*.

Розглянемо для простоти поперечну хвилю на довгій натягнутій мотузці (рис. 15.1).

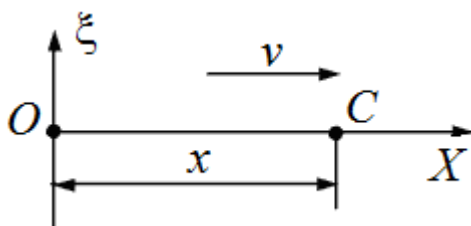


Рис. 15.1.

Нехай один з кінців мотузки міститься у початку координат в точці O і здійснює гармонічне коливання за законом

$$\xi = A \cos(\omega t + \alpha).$$

Кажуть, що на початку координат міститься джерело хвилі. Функція $\xi(x, t)$ описує вертикальне переміщення точки O . Щоб визначити зміщення інших частинок, розміщених на довільній відстані x від дже-

рела хвилі, необхідно врахувати, що ці точки почнуть коливатися пізніше на час

$$\tau = \frac{x}{v}, \quad (15.1)$$

за який хвиля пошириться від точки O до заданої. Тому час коливань точки C буде менше, ніж t і становитиме $(t - \tau)$. Тоді рівняння коливань точки C запишеться:

$$\begin{aligned} \xi &= A \cos(\omega(t - \tau) + \alpha) = A \cos\left(\omega t - \frac{\omega x}{v} + \alpha\right) = \\ &= A \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{T v} x + \alpha\right) = A \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x + \alpha\right). \end{aligned} \quad (15.2)$$

Введемо величину, яку називають *хвильовим числом*:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v}. \quad (15.3)$$

Тоді рівняння плоскої хвилі, біжучої уздовж осі Ox , набуває такого вигляду

$$\xi(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \alpha). \quad (15.4)$$

Якщо розглядати плоску хвилю, яка поширюється в напрямку осі Ox , то хвильові поверхні будуть перпендикулярні до осі Ox , і оскільки всі точки хвильової поверхні коливаються однаково, зміщення точок будуть залежати тільки від x і t , тобто формула (15.4) являє собою також рівняння плоскої хвилі, що поширюється в напрямку осі Ox .

Коли у виразі (15.4) фаза перетворюється в нуль, $\xi(x, t)$ досягне максимуму, тобто таке зміщення відповідає гребеню хвилі (рис. 14.4). Умова того, щоб хвиля мала в даній точці гребінь, запишеться у вигляді

$$\omega t - kx + \alpha = 0. \quad (15.5)$$

Повний диференціал від фази (15.5) має вигляд

$$\omega dt - k dx = 0. \quad (15.6)$$

Ця рівність виконується, якщо

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = v, \quad (15.7)$$

(тут враховано, що згідно (15.3) $\frac{\omega}{k} = v$). Швидкість гребеня v і є швидкістю поширення хвилі.

Замість гребеня можна було розглянути будь-яку фазу коливань. Тому v є швидкість, з якою переміщається дане значення фази або *фазова швидкість*.

Приклад. Плоска хвиля поширюється в напрямку осі Ox зі швидкістю $v = 20$ м/с. Дві точки, розміщені на відстанях $x_1 = 12$ м та $x_2 = 15$ м від джерела хвиль, коливаються з різницею фаз $\Delta\varphi = 0,75\pi$. 1) Визначити довжину хвилі λ ; 2) написати рівняння хвилі; 3) визначити зміщення зазначених точок в момент часу $t = 1,2$ с, якщо амплітуда коливань $A = 0,1$ м.

Розв'язання. Відомо, що довжиною хвилі λ називається найменша відстань між точками середовища, які коливаються з різницею фаз 2π . Нехай точки, що знаходяться одна від одної на будь-якій відстані Δx , коливаються з різницею фаз $\Delta\varphi$. Тоді з пропорції

$$\frac{\lambda - 2\pi}{\Delta x - \Delta\varphi}$$

випливає

$$\lambda = \frac{2\pi\Delta x}{\Delta\varphi} = \frac{2\pi(x_2 - x_1)}{\Delta\varphi}. \quad (П.15.1)$$

Після обчислення маємо

$$\lambda = \frac{2\pi(15 - 12)}{0,75\pi} = 8(\text{м}).$$

Рівняння плоскої хвилі, що біжить в напрямку осі Ox має вигляд

$$\xi = A \cos \omega \left(t - \frac{x}{v} \right). \quad (\text{П.15.2})$$

Це рівняння визначає зміщення ξ точок середовища, які здійснюють коливання, як функцію їх координат і часу.

Визначимо циклічну частоту ω . Оскільки $\omega = \frac{2\pi}{T}$ та $\lambda = vT$, то

$$\omega = \frac{2\pi v}{\lambda} = \frac{2\pi \cdot 20}{8} = 5\pi \text{ (с}^{-1}\text{)}. \quad (\text{П.15.3})$$

Рівняння плоскої хвилі в даному випадку набуває вигляду:

$$\xi = 0,1 \cos 5\pi \left(t - \frac{x}{20} \right), \text{ м.} \quad (\text{П.15.4})$$

Щоб визначити зміщення ξ згаданих в умові точок, достатньо в рівняння (П.15.4) підставити відповідні значення t і x :

$$\xi_1 = 0,1 \cos 5\pi \left(1,2 - \frac{12}{20} \right) = 0,1 \cos 3\pi = -0,1 \text{ (м)};$$

$$\xi_2 = 0,1 \cos 5\pi \left(1,2 - \frac{15}{20} \right) = 0,1 \cos 2,25\pi = 0,071 \text{ (м)}.$$

16. Хвильове рівняння

Отримане нами раніше рівняння (15.4) біжучої хвилі (одновимірної або плоскої) є рішенням диференціального *хвильового рівняння*, вигляд якого можна отримати таким чином.

Знайдемо другі похідні від зміщення ξ (15.4) за координатою x і часом t .

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = -k^2 A \cos(\omega t - kx + \alpha) = -k^2 \xi, \quad (\text{16.1})$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t - kx + \alpha) = -\omega^2 \xi. \quad (\text{16.2})$$

Легко бачити, що з (16.1) і (16.2) випливає

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{k^2}{\omega^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}. \quad (\text{16.3})$$

Згідно (15.3)

$$\frac{\omega}{k} = v.$$

Тоді хвильове рівняння можна представити в більш зручному вигляді

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}. \quad (\text{16.4})$$

Рівняння (16.4) є *одновимірним хвильовим рівнянням*. Це диференціальне рівняння описує поширення коливань у просторі, в тому числі в різних пружних середовищах.

У тривимірному випадку хвильове рівняння має вигляд

$$\Delta \xi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}, \quad (\text{16.5})$$

де Δ – оператор Лапласа – сума других частинних похідних функції $\xi(x, y, z, t)$ за координатами.

Зустрівшись в будь-якій практичній задачі з рівнянням виду (16.5), можна стверджувати, що функція, яка задовольняє це рівняння, описує деяку хвилю, а корінь квадратний з величини, оберненої коефіцієнту при другій похідній за часом, дає *фазову швидкість* цієї хвилі.

§ 17. Поздовжні хвилі в твердому тілі. Швидкість пружних хвиль

Розглянемо поширення поздовжніх хвиль в пружному тонкому однорідному стержні. Якщо вдарити молотком з торця стержня (рис. 17.1), то на цьому кінці стержня виникає деформація стиску, яка почне поширюватися уздовж стержня з великою швидкістю.

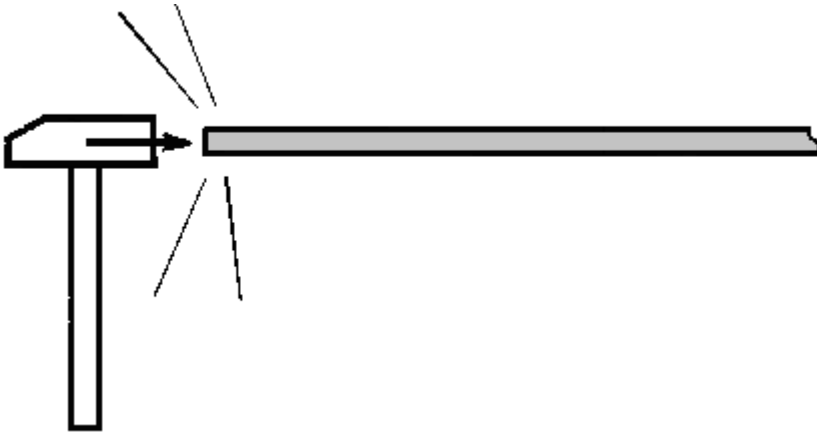


Рис. 17.1.

Припустимо, що в результаті серії періодичних ударів з торця стержня уздовж його осі поширюється синусоїдальна хвиля.

Сумістимо вісь x з геометричною віссю стержня. Частинки, що лежать в поперечному перерізі стержня з координатою x , будуть зазнавати зсув, що описується функцією

$$\xi = A \cos(\omega t - kx + \alpha).$$

У момент часу t' ці частинки змістилися (рис. 17.2), опинившись в площині

$$x' = x + \xi(x). \quad (17.1)$$

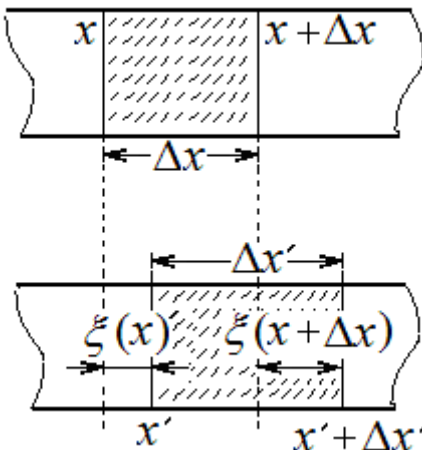


Рис. 17.2.

Розглянемо ділянку стержня між двома перерізами x і $x + \Delta x$ (довжина цієї ділянки дорівнює Δx). Аналогічно переріз $x + \Delta x$ зміститься в нове положення

$$x' + \Delta x' = x + \Delta x + \xi(x + \Delta x). \quad (17.2)$$

Приріст довжини даної ділянки можна знайти з формул (17.1) і (17.2):

$$\Delta x' - \Delta x = x + \xi(x + \Delta x) - x' = \xi(x + \Delta x) - \xi(x).$$

Границя відношення приросту довжини до її початкової величини називається *відносною поздовжньою деформацією* ε в даній точці

$$\varepsilon = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\xi(x + \Delta x) - \xi(x)}{\Delta x} = \frac{\partial \xi}{\partial x}. \quad (17.3)$$

(знак час-

тинної похідної поставлений тому,

що ξ залежить не тільки від x , але й від t).

Якщо в даному перерізі $\varepsilon > 0$, (як на рис. 17.2), то відбулося подовження даної ділянки; якщо $\varepsilon < 0$, то його стиснення.

Застосуємо другий закон Ньютона до ділянки стержня, що міститься між двома перерізами x і $x + \Delta x$ (рис 17.3)

Маса розглянутої ділянки $\rho S \Delta x$ (S - площа перерізу, ρ - густина). Нехай ξ - зміщення

центра мас ділянки стержня, $\frac{d^2 \xi}{dt^2}$ - його прискорення. Згідно з другим законом Ньютона

$$\rho S \Delta x \frac{d^2 \xi}{dt^2} = S \sigma(x + \Delta x) - S \sigma(x), \quad (17.4)$$

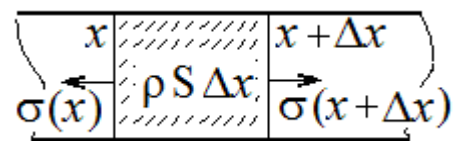


Рис. 17.3.

де в правій частині рівності стоїть сума зовнішніх сил, що діють на ділянку стержня Δx з боку прилеглих до нього частин справа і зліва. Тут $\sigma = \frac{F}{S}$ - нормальне *напруження* у відповідному перерізі, що дорівнює відношенню сили, яка діє на одну частину деформованого стержня з боку іншої його частини, до площі перерізу стержня, а E - модуль Юнга матеріалу стержня.

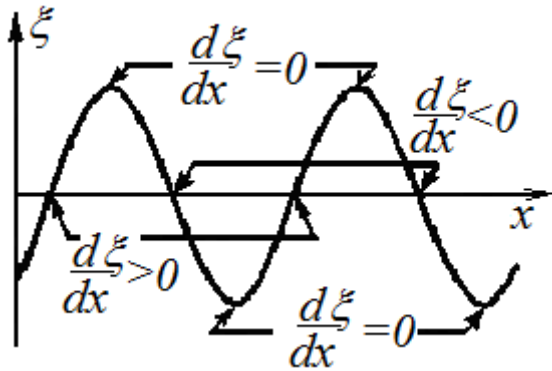


Рис. 17.4.

При малих деформаціях справедливий закон Гука: напруження прямо пропорційне величині деформації

$$\sigma = \varepsilon E. \quad (17.5)$$

Графік зміщення $\xi(x)$ поданий на рис. 17.4. Згідно з визначенням (17.3) деформація $\varepsilon(x)$ є похідною від зміщення $\xi(x)$, тобто на графіку функції $\xi(x)$ тангенс кута нахилу дотичної в кожній точці дає величину $\varepsilon(x)$.

З графіка випливає, що похідна $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ в різних перерізах стержня є різною.

Там, де зміщення перерізів від положення рівноваги є максимальними, відносна подовження $\frac{\partial \xi}{\partial x} = \varepsilon$, а отже, і напруження σ , дорівнюють нулю. У місцях, де перерізи проходять через положення рівноваги, деформація і напруження досягають найбільшого значення, причому додатна і від'ємна деформації (тобто розтягування і стиснення) чергуються одна з одною.

Перепишемо рівняння (17.4) у вигляді

$$\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\sigma(x + \Delta x) - \sigma(x)}{\Delta x}, \quad (17.6)$$

і переходячи до границі при $\Delta x \rightarrow 0$, отримуємо

$$\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} = E \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}. \quad (17.7)$$

Підставляючи сюди вираз (17.3) для відносної деформації, маємо

$$\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = E \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right),$$

або

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}. \quad (17.8)$$

Якщо позначити

$$\frac{\rho}{E} = \frac{1}{v^2}, \quad (17.9)$$

отримуємо хвильове рівняння

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}. \quad (17.10)$$

Отже, в розглянутому стержні буде поширюватися синусоїдальна *подовжня хвиля*, швидкість якої

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (17.11)$$

Характерні значення швидкостей звукових хвиль в деяких середовищах: повітря $v = 331$ м / с, кисень $v = 316$ м / с, водень $v = 1\,265$ м / с, вода $v = 1\,480$ м / с, ртуть $v = 1\,460$ м / с, мідь $v = 3\,680$ м / с, дерево $v = 4\,200$ м / с, сталь $v = 4\,980$ м / с, скло $v = 5\,900$ м / с.

У твердому середовищі можливе виникнення як поперечних, так і поздовжніх хвиль. Аналогічний розрахунок для поперечних хвиль дає формулу швидкості поперечних хвиль в тонкому стрижні

$$v = \sqrt{\frac{G}{\rho}}, \quad (17.12)$$

де G - модуль зсуву.

Швидкість поперечних хвиль в натягнутій струні або гумовому джгуті залежить від маси одиниці довжини μ і сили натягу T :

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}. \quad (17.13)$$

Швидкість поширення поздовжніх хвиль в *безмежному* середовищі визначається густиною середовища ρ і модулем всебічного стиснення K , який дорівнює коефіцієнту пропорційності між зміною тиску Δp і відносною зміною об'єму $\Delta V / V$, взятому з протилежним знаком:

$$\Delta p = -K \frac{\Delta V}{V}. \quad (17.14)$$

Вираз для швидкості поширення поздовжніх хвиль в *безмежних середовищах* має вигляд

$$v = \sqrt{\frac{K}{\rho}}. \quad (17.15)$$

Зазвичай в таблицях дається стисливість речовини β . Величину стисливості визначають як зменшення одиничного об'єму тіла при збільшенні тиску на одиницю:

$$\beta = -\frac{1}{V} \frac{\Delta V}{\Delta p}$$

де ΔV – зміна об'єму V при зміні тиску на Δp .

Модуль всебічного стискання визначається як величина, яка є зворотною стисливості

$$K = \frac{1}{\beta}.$$

Тоді швидкість поширення поздовжніх пружних хвиль виразиться формулою

$$v = \frac{1}{\sqrt{\rho\beta}}. \quad (17.16)$$

Цією формулою зазвичай користуються для рідин.

Приклад. При температурі 13°C стисливість води $\beta = 4,75 \cdot 10^{-10}$ м²/Н. Визначити швидкість звуку у воді за цих умов.

$$v = \frac{1}{\sqrt{10^3 \cdot 4,75 \cdot 10^{-10}}} \approx 1450 \text{ м/с}$$

Це значення є досить близьким до знайденого на досліді (1440 м/с).

Для стали відміна модуля Юнга E від модуля всебічного стиснення K є невеликою, але для інших матеріалів вона може становити 20-30% і навіть більше.

§ 18. Енергія пружної хвилі

Закріпимо стержень одним кінцем, а до іншого кінця прикладемо розтягувальну силу $F(x)$ і будемо повільно збільшувати її. Подовження (абсолютна деформація) стержня при цьому буде змінюватися від 0 до x . Згідно із законом Гука

$$\sigma = \varepsilon E, \quad \text{де } \sigma = F/S, \varepsilon = x/l_0.$$

На підставі цих формул маємо

$$F(x) = \frac{ES}{l_0} x. \quad (18.1)$$

Робота цієї сили при зміні величини x від 0 до Δl буде

$$A = \int_0^{\Delta l} F(x) dx = \int_0^{\Delta l} \frac{ES}{l_0} x dx = \frac{ES}{2l_0} (\Delta l)^2. \quad (18.2)$$

Перепишемо цей вираз

$$A = \frac{1}{2} E S l_0 \left(\frac{\Delta l}{l_0} \right)^2 = \frac{1}{2} E \varepsilon^2 V, \quad (18.3)$$

де $V = S l_0$ – об'єм стержня. Повертаючись у недеформований стан, стержень може виконати над зовнішніми тілами таку ж роботу, яка була здійснена під час його розтягування. Тому потенціальна енергія пружної деформації розтягування дорівнює

$$W = \frac{1}{2} E \varepsilon^2 V. \quad (18.4)$$

Об'ємна густина енергії пружної деформації (енергія, що припадає на одиницю об'єму розтягнутого або стиснутого стержня)

$$w = \frac{W}{V} = \frac{1}{2} E \varepsilon^2. \quad (18.5)$$

Виберемо в середовищі, в якому поширюється пружна хвиля, елементарний об'єм ΔV . Об'єм ΔV беремо таких розмірів, в межах якого швидкість зміщення частинок і деформацію можна вважати постійними. При проходженні поздовжньої хвилі в стержні кожен елементарний об'єм його ΔV має як потенціальну енергію пружної деформації, так і кінетичну енергію. Якщо рівняння плоскої поздовжньої хвилі задано у вигляді

$$\xi(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \alpha), \quad (18.6)$$

то швидкість v кожної точки середовища дорівнює

$$v = \frac{\partial \xi}{\partial t} = -A \omega \sin(\omega t - kx + \alpha), \quad (18.7)$$

а відносна деформація ε в кожній точці дорівнює

$$\varepsilon = \frac{\partial \xi}{\partial x} = A k \sin(\omega t - kx + \alpha). \quad (18.8)$$

Кінетична енергія руху частинок виділеного об'єму дорівнює

$$\Delta W_k = \frac{1}{2} \rho \Delta V \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 = \frac{1}{2} \rho \Delta V A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx + \alpha), \quad (18.9)$$

а потенціальна енергія об'єму ΔV набуде вигляду

$$\Delta W_p = \frac{1}{2} E \varepsilon^2 \Delta V = \frac{1}{2} E \Delta V k^2 A^2 \sin^2(\omega t - kx + \alpha). \quad (18.10)$$

Враховуючи, що модуль Юнга $E = \rho v^2$, а хвильове число $k = \omega/v$, отримаємо для потенціальної енергії вираз

$$\Delta W_p = \frac{1}{2} \rho \Delta V A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx + \alpha) . \quad (18.11)$$

Порівнюючи вирази (18.9) і (18.11), можна зробити висновок, що в виділеному об'ємі середовища ΔV кінетична і потенціальна енергії *однакові* і, на відміну від коливальних рухів, змінюються в однакових фазах. Повна енергія ΔW об'єму ΔV дорівнює

$$\Delta W = \Delta W_k + \Delta W_p = \rho \Delta V A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx + \alpha) .$$

Об'ємна густина енергії

$$w = \frac{\Delta W}{\Delta V} = \rho A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx + \alpha) . \quad (18.12)$$

З (18.12) випливає, що густина енергії в кожен момент часу в різних точках простору є різною. Вона пропорційна густині середовища, квадрату амплітуди коливань частинок середовища і квадрату частоти коливань. Оскільки середнє за період значення квадрата синуса дорівнює $\frac{1}{2}$, то середнє за часом значення густини енергії в даній точці середовища дорівнює

$$\langle w \rangle = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 . \quad (18.13)$$

Перенесення енергії хвилею характеризують *поток* і *густиною потоку енергії*.

Кількість енергії, яка переноситься хвилею через деяку поверхню в одиницю часу, називається *поток* енергії через цю поверхню.

$$\Phi = \frac{dW}{dt} . \quad (18.14)$$

Розмірність потоку збігається з розмірністю потужності, тобто потік вимірюється в ватах.

Якщо швидкість поширення хвилі v , то потік енергії $d\Phi$ через площадку dS запишеться в загальному вигляді так:

$$d\Phi = w \mathbf{v} dS . \quad (18.15)$$

Тут dS – вектор елементарної площадки, орієнтований у напрямку нормалі до її поверхні. Ця формула враховує орієнтацію площадки. Зокрема, якщо площадка розміщена паралельно вектору швидкості, то, очевидно, потік енергії через неї дорівнює нулю, що випливає також з формули (18.15).

Для характеристики перенесення енергії в різних точках простору вводять поняття *густини потоку енергії*, під яким розуміють потік енергії через одиничну площадку, тобто

$$\mathbf{j} = w \mathbf{v} . \quad (18.16)$$

Оскільки швидкість хвилі \mathbf{v} є векторною величиною, то і густина потоку енергії \mathbf{j} – величина векторна. Напрямок вектора густини потоку енергії збігається з напрямком переносу енергії. Вектор \mathbf{j} називається *вектором Умова*. Чисельно густина потоку енергії дорівнює потоку енергії через одиничну площадку, розміщену перпендикулярно до напрямку, в якому переноситься енергія.

Середнє за часом значення модуля вектора густини потоку енергії (вектора Умова) називається *інтенсивністю хвилі*:

$$I = \langle j \rangle = \langle w \rangle v = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 v . \quad (18.17)$$

Як випливає з (18.17), інтенсивність пружної (тобто механічної, звукової) хвилі залежить як від амплітуди, так і від частоти.

Приклад 1. Звукова хвиля частотою $\nu = 2$ кГц поширюється в повітрі. Інтенсивність хвилі $I = 0,2$ Вт/м². Чому дорівнюють довжина звукової хвилі і амплітуда коливань частинок повітря? Прийняти швидкість звуку в повітрі 330 м/с, а густину повітря $\rho = 1,2$ кг/м³.

З виразу (18.17) для інтенсивності

$$I = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 v$$

отримаємо

$$A = \frac{1}{\pi v} \sqrt{\frac{I}{2\rho v}} = 2,5 \cdot 10^{-6} \text{ м} = 2,5 \text{ мкм} .$$

Довжина хвилі

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{330}{2000} \text{ м} = 16,5 \text{ см}$$

Приклад 2. Виходячи з енергетичних міркувань, покажемо, що амплітуда сферичної пружної хвилі не є постійною і зменшується з відстанню. Для сферичної хвилі хвильові поверхні являють собою концентричні сферичні поверхні. Густина потоку енергії для всіх точок хвильової поверхні радіуса r однакова і має середнє значення

$$\langle j \rangle = \frac{1}{2} \rho A_r^2 \omega^2 v$$

де A_r - амплітуда коливань частинок на сферичній поверхні радіуса r . Якщо енергія хвилі не поглинається середовищем, то середній потік енергії через сферичні поверхні (площа сфери дорівнює $4\pi r^2$), центри яких співпадають з точковим джерелом сферичних хвиль, повинен бути однаковим, тобто

$$\frac{1}{2} \rho A_r^2 \omega^2 v \cdot 4\pi r^2 = \text{const}$$

Звідси випливає, що амплітуда сферичної хвилі буде спадати як $\frac{1}{r}$.

Тоді рівняння сферичної хвилі набуває вигляду:

$$\xi = \frac{A}{r} \cos(\omega t - kr),$$

де A - амплітуда коливань на відстані 1 м від джерела хвиль.

§ 19. Звукові хвилі. Елементи акустики

Людське вухо сприймає у вигляді звукових відчуттів коливання, частота яких лежить в межах від 16 до 20 000 герц. Будь-яке тіло, що здійснює механічні коливання в зазначеному інтервалі частот є джерелом звуку (струни, мембрани, пластинки, що коливаються). Джерелом звуку може бути і не тверде тіло, а газоподібне або рідке (струмінь пари, струмінь повітря в органній трубі, струмінь повітря в голосовому апараті людини, сирена, де звук створюється завдяки ритмічному перериванню струменя повітря або пари диском з отворами, що обертається, і т. д.). Ці механічні коливання джерел звуку досягають вуха у вигляді пружних хвиль, що поширюються в повітрі.

У фізиці під звуковими хвилями розуміють пружні хвилі не тільки в повітрі, але і в інших газах, рідинах і твердих тілах, якщо частоти коливань в них знаходяться в згаданому вище інтервалі.

Звук, що не сприймається на слух, з частотою нижче 16 Гц називається *інфразвуком*, вище 20 кГц - *ультразвуком*.

Звукові хвилі можуть поширюватися в будь-якому пружному середовищі. У рідинах і газах вони поширюються як поздовжні хвилі і викликають згущення і розрідження середовища. У

твердих тілах звук поширюється поздовжніми і поперечними хвилями. Звук передається тільки через пружне середовище. Широко відомий дослід - якщо електричний дзвінок помістити під ковпак насоса і відкачувати звідти повітря, то звук слабшає і з часом зникає.

Швидкість звуку в повітрі при 0°C дорівнює 334 м/сек. Швидкість звуку в повітрі при кімнатній температурі дорівнює 340 м/с.

Звук як фізичне явище характеризується певною частотою, інтенсивністю і звуковим тиском, набором частот. Це - *об'єктивні* характеристики звуку.

Людські органи слуху сприймають звук по гучності, висоті (висота тону) і тембру. Ці характеристики носять *суб'єктивний* характер.

Обмежена область газу (пляшка, куля, труба) є акустичним резонатором: в ній можуть посилюватися коливання певної частоти. Порожнина рота людини при проголошенні голосних звуків також є типовим резонатором, налаштованим для кожної голосної на певний характерний тон.

За допомогою таких резонаторів можна проводити аналіз складних звуків. За допомогою мікрофона, приєднаного до осцилографа, можна також встановити графік залежності зміщення, швидкості коливання, звукового тиску і т.п. від часу - *акустичний спектр* звуку, тобто встановити, які в ньому присутні частоти і з якими амплітудами вони входять в спектр.

Аналіз складних звуків дозволяє виділити декілька характерних типів звуків:

- 1) музичний тон (рис. 19.1, *a*), що представляє собою синусоїдальне коливання;
- 2) співзвуччя або музичний звук (рис. 19.1, *б*), що представляє собою результат накладення декількох музичних тонів, що звучать одночасно;

3) шум (рис. 19.1, *в*), що є нерегулярним коливанням, яке виникає в результаті додавання великого числа коливань з близькими амплітудами, але різними частотами (шум вулиці, водоспаду, шум вітру в лісі і т. д.);

4) звукові удари або імпульси - короткочасний і сильний звуковий вплив на органи слуху людини (вибухи, електричні розряди, удари твердих тіл і т. д.) (Рис. 19.1, *г*).

Висота звуку визначається частотою коливань. Чим більшою є частота, тим вище звук.

Однак джерела звуку випускають не одну, а цілий спектр частот, причому енергія хвилі якось розподіляється між різними частотами. Висота звуку визначається по одній – основній частоті, якщо на частку цієї частоти припадає значно більша кількість енергії, ніж на частку інших частот. Якщо спектр складається з окремих частот, то він називається лінійчатим, якщо ж з

безперервного набору частот – суцільним.

Акустичний спектр звуку, в залежності від свого характеру (лінійчатий, суцільний або змішаний) та від розподілу енергії між частотами визначає своєрідне звукове відчуття, зване **тембром звуку**.

Тембр або забарвлення звуку залежить від форми даного звукового коливання. Дуже рідко звук являє собою чисто гармонічне коливання однієї частоти. Як правило, звук – це складне коливання, при якому закон руху може бути складною періодичною функцією часу.

Як показує математика (розділ "Ряди Фур'є"), будь-яку періодичну функцію завжди можна представити у вигляді суми окремих гармонічних функцій різних частот, причому найменша частота дорівнює частоті складного коливання.

Тому будь-який як завгодно складний звук можна розкласти на гармонічні складові, звані **обертнами**. Обертон найнижчої частоти, що дорівнює частоті складного звуку, називається

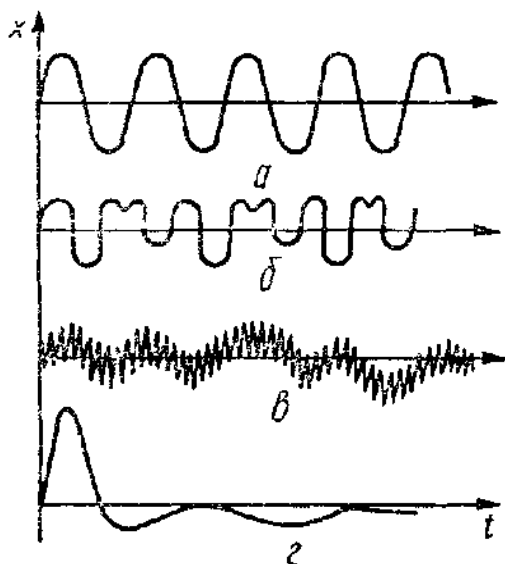


Рис. 19.1.

основним тоном. Наявність в звуці тих чи інших обертонів при даному основному тоні і визначає тембр звуку. Два звуки, що мають однаковий основний тон, можуть мати різний набір обертонів (різних частот і амплітуд), і про обидва ці звуки скажуть, що вони мають різний тембр. Різні музичні інструменти (рояль, флейта, скрипка), що випускають звук одного і того ж тону, мають різний акустичний спектр, тобто відрізняються тембром звуку. Таким чином, для об'єктивної характеристики тембру звуку складне звукове коливання треба розкласти на його гармонічні складові – обертони .

Під час проходження звукової хвилі речовина набуває додаткову енергію, обумовлену впорядкованим коливанням середовища. Поширюючись і залучаючи при цьому в коливання все нові частинки речовини, звукова хвиля здійснює перенесення енергії. Цей процес характеризується *силою або інтенсивністю звуку*. Сила звуку визначає середнє за часом значення густини потоку енергії, яку несе з собою звукова хвиля.

Густина потоку звукової енергії чисельно дорівнює енергії, яка в одиницю часу переноситься хвилею через одиничну площинку, перпендикулярну напрямку поширення. Сила звуку

$$I = \frac{1}{2} \rho a^2 \omega^2 v.$$

Поширюючись в середовищі, звукова хвиля утворює згущення і розрідження, які створюють додаткові зміни тиску по відношенню до його середнього значення в середовищі.

Надмірний тиск Δp називають *звуковим тиском* (іноді позначають через p_a). Покажемо, що інтенсивність звуку і звуковий тиск в газах пов'язані між собою.

Виразимо об'ємну густину звукової енергії через параметри коливань: густину середовища ρ і максимальну швидкість коливання частинок повітря v_m :

$$w = \frac{1}{2} \rho v_m^2. \quad (19.1)$$

Згідно з другим законом Ньютона сила, що діє при проходженні хвилі на елемент середовища масою m , дорівнює

$$F_a = m \frac{v_m}{\Delta t}. \quad (19.2)$$

Розділивши обидві частини рівності на площу S поперечного перерізу елемента, помноживши і розділивши дріб на швидкість хвилі v , отримаємо

$$p_a = \frac{F_a}{S} = \frac{m}{S \Delta t v} \cdot v_m v = \rho v_m v. \quad (19.3)$$

Тут p_a - надмірний коливальний (*акустичний*) тиск в хвилі. Тоді інтенсивність I звукової хвилі, що дорівнює добутку об'ємної густини енергії w на швидкість хвилі v , виразиться так

$$I = w \cdot v = \frac{1}{2} \rho v_m^2 \cdot v = \frac{p_a^2}{2 \rho v}. \quad (19.4)$$

Приклад. Три звукових хвилі однакової інтенсивності $I = 50$ мВт/м² поширюються в повітрі, воді та сталевому стержні. Якими будуть амплітуди звукового тиску в цих середовищах? Порівняти їх з нормальним атмосферним тиском. Вважати швидкість звуку в повітрі $v_{пов} = 330$ м/с, у воді $v_{вод} = 1500$ м/с, в сталі $v_{ст} = 5100$ м/с.

З формули (4) знаходимо $p_a = \sqrt{2I\rho v}$. . $(p_a)_{пов} = 6,53$ Па; $(p_a)_{вод} = 387$ Па; $(p_a)_{ст} = 2$ кПа.

Амплітуда акустичного тиску може досягати великих значень. Наприклад, у воді при силі звуку 10 Вт/м² маємо $(p_a)_{вод} = 5,5$ кПа.

Інтенсивність звуку змінюється в дуже широких межах: від порогового значення $I_0 = 10^{-12}$ Вт/м² (порог чутності) до $I = 10^2$ Вт/м² (відчуття болю), тобто інтенсивності відрізняються один від одного в $\frac{I}{I_0} = 10^{14}$ разів.

Значення звукового тиску змінюється при цьому від $3 \cdot 10^{-5}$ Па для дуже слабких звуків,

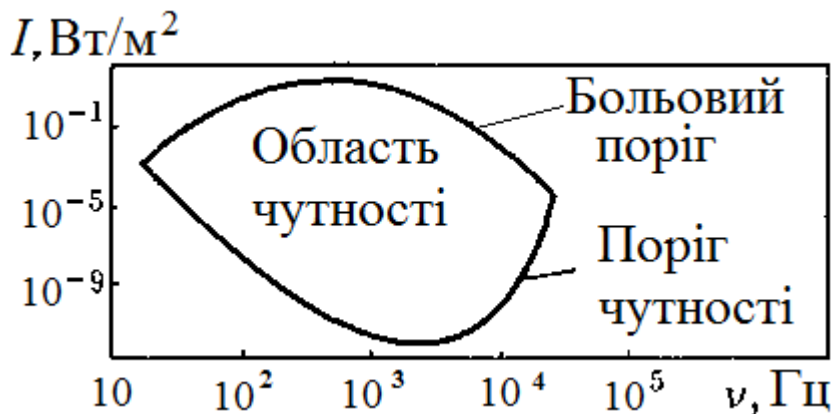


Рис. 19.2.

але таких, що все ж сприймаються людиною поблизу порого чутності, до 10^3 Па для найсильніших звуків, що викликають больові відчуття. Такий великий діапазон інтенсивностей робить обґрунтованим введення логарифмічною шкали.

Якщо на осі абсцис відкласти частоту, а на осі ординат – інтенсивність звуку, по дослідним даним можна побудувати графіки порога чутності і больового порогу (рис. 19.2), між ними буде область чутнос-

ті звуків. Вуху людини найбільш чутливо в області частот 1 000 – 3 000 Гц, тому для цих частот поріг чутності є низьким.

Фізичному поняттю інтенсивності звуку відповідає фізіологічне відчуття гучності звуку. Встановлено, що гучність зростає значно повільніше, ніж інтенсивність звуку. Оцінку гучності звуку можна зробити за допомогою наближеного фізіологічного закону Вебера - Фехнера. Згідно з цим законом з наростанням інтенсивності звуку його гучність змінюється приблизно за логарифмічним законом.

Рівень гучності L визначається як логарифм відношення інтенсивності I даного звуку до інтенсивності I_0 , що відповідає порогу чутності.

Кажуть, що рівень гучності даного звуку дорівнює L децибелів, якщо

$$L = 10 \lg \frac{I}{I_0} \text{ дБ.} \quad (19.5)$$

Наведемо такі приклади рівнів гучності:

Звук	Рівень гучності, (дБ)
Порог чутності	0
Шелест листя	10
Шепіт, цокання наручного годинника	20
Звук настінного годинника	30
Приглушений розмова	40
Тиха вулиця	50
Звичайна розмова	60
Гучна вулиця	70
Крик	80
Пневматичний молоток	90
Ковальський цех	100
Гучна музика (рок-група)	110
Больовий поріг	120

Сирена	130
Реактивний літак на відстані 50 м	150
Смертельний рівень	180
Шумова зброя	200

Акустичні хвилі так само, як і інші хвилі, на межі двох середовищ можуть зазнавати **відбивання і заломлення**.

Відбивання звукових хвиль наочно асоціюється з широко відомим явищем "відлуння".

Заломлення звуку призводить до ряду характерних особливостей, також відомих з повсякденного життя.

Як буде показано далі, швидкість звуку в повітрі зростає зі збільшенням температури. Дослідний закон заломлення звукових хвиль стверджує, що відношення синуса кута падіння до синуса кута заломлення дорівнює відношенню швидкостей хвиль в першому і другому середовищі. Це виражається в тому, що кут, який утворює звуковий промінь з перпендикуляром до поверхні

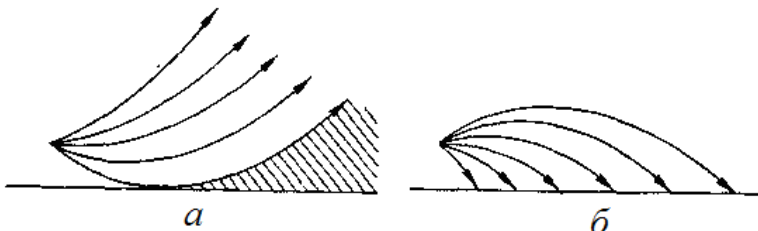


Рис. 19.3.

розділу двох середовищ, буде меншим в тому середовищі, в якому швидкість звуку є меншою. Отже, під час переходу звуку з шару в шар повітря, звукові промені загинаються завжди в сторону шару повітря з меншою швидкістю звуку, тобто більш холодного.

У жаркий день приземний шар повітря нагрітий сильніше, а з висотою температура знижується, і швидкість звуку зменшується. Тому звукові промені від джерела звуку, що знаходиться поблизу земної поверхні, загинаються догори і звук, починаючи з деякої відстані, перестає бути чутий (на рис. 19.3, а штрихуванням показана зона мовчання).

Оскільки в атмосфері немає різкої різниці між властивостями окремих шарів, то заломлення звуку в ній відбувається поступово. В результаті звукова хвиля не зазнає різкого зламу, а поступово викривляється. Таке заломлення називається *рефракцією звуку*.

У вечірні години при ясном небі приземний шар повітря інтенсивно охолоджується, і його температура виявляється нижчою, ніж температура верхніх шарів. Тепер температура повітря з висотою збільшується, і звукові промені загинають донизу. Звук поширюється на великі відстані, ввечері звук чути значно далі, ніж в спекотний сонячний день.

Аналогічне явище рефракції звукових хвиль можна спостерігати в вітряний день. Відомо, що з підвітряного боку звук чути значно далі, ніж з навітряної. Швидкість вітру в приземному шарі завжди менше (внаслідок ефекту прилипання до твердої стінки поверхні землі), ніж в верхніх шарах. Швидкість звуку геометрично складається зі швидкістю повітряного потоку (швидкістю вітру). Тому звукові хвилі, що поширюються проти вітру, поступово загинаються вгору, а хвилі, що поширюються по вітрі, пригинаються до землі.

Ультразвуки і їх застосування. *Ультразвуком* називають звукові коливання з частотами $\nu = 2 \cdot 10^4 - 10^{13}$ Гц. Верхня межа частот ультразвуку в даному середовищі визначається міжмолекулярною відстанню або довжиною вільного пробігу молекул (в газі). У кристалах і рідинах він дорівнює $10^{12} - 10^{13}$ Гц, а в газах 10^9 Гц.

Ультразвуки отримуються зазвичай за допомогою явища зворотного п'єзоефекту. Зворотним п'єзоефектом називається здатність кристалів (зокрема, кварцу, сегнетової солі, турмаліну, титанату барію і ін.) деформуватися під дією електричного поля. Джерелом ультразвуку може служити пластинка кварцу, що здійснює механічні коливання високої частоти під дією змінного електричного струму, що подається на цю пластинку від генератора електромагнітних коливань тієї ж частоти. Коливання поверхні пластинки збуджують в середовищі ультразвукові хвилі.

Через велику частоту (малу довжину хвилі) ультразвук має особливі властивості. Так, подібно до світла ультразвукові хвилі можуть утворювати строго спрямовані пучки. Відбиття і заломлення цих пучків на межі двох середовищ підлягає законам геометричної оптики. За допомогою увігнутих дзеркал ультразвукові хвилі можна направляти від джерела в строго визначеному напрямку.

З визначення інтенсивності звуку I (19.4) випливає, що високим частотам ν ультразвуку відповідають великі інтенсивності (до значень $2 \cdot 10^5$ Вт/м²). Це призводить до нагрівання тіл, що піддаються дії ультразвукових хвиль, до утворення в рідинах пустот (явище *кавітації*) у вигляді дрібних бульбашок з короткочасним зростанням тиску до сотень і тисяч атмосфер.

Під час зляскування кавітаційних порожнин розвиваються дуже великі тиски, здатні привести до руйнування занурених в рідину тіл, наприклад, лопатей швидко обертових гребних гвинтів або турбін.

Подрібнювальну дію ультразвуку застосовують в промисловості. Емульсії (краплі рідини, розподілені в іншій рідині) диспергують під дією ультразвуку, в аерозолях і суспензіях (газах і рідинах зі змученими в них твердими частинками) відбувається осадження частинок.

Окремо доводиться, що лінійний коефіцієнт поглинання τ звуку залежить від властивостей середовища в'язкості η , пружності E , густини ρ , і частоти ν :

$$\tau = k\nu^2 \left(\frac{E}{\rho} \right)^{-\frac{2}{3}} \frac{\eta}{\rho}. \quad (19.6)$$

Відношення $\frac{\eta}{\rho}$ називається *кінематичною в'язкістю*.

Поглинання ультразвукових хвиль у воді значно менше, ніж в повітрі, через більшу швидкість їх поширення і малого значення кінематичної в'язкості $\frac{\eta}{\rho}$ води, яка приблизно в 1000 разів менше, ніж у повітря.

Тому звук у воді поширюється на більшу відстань, ніж в повітрі. У зв'язку з тим, що радіохвилі і світлові промені досить швидко згасають у воді, єдиним засобом для здійснення сигналізації під водою є звукові і ультразвукові хвилі. Тому основне практичне застосування ультразвуку знайшли в *гідроакустиці*.

Широко відомо застосування ультразвуку в ехолотах і гідролокаторах. У морях це акустична локація косяків риб, підводних човнів, визначення глибини.

У природі ультразвук зустрічається як компонент багатьох природних шумів (в шумі вітру, водоспаду, дощу, в шумі гальки, що перекочується морським прибоєм, в звуках, які супроводжують грозові розряди, і т. д.), так і серед звуків тваринного світу.

Деякі тварини користуються ультразвуковими хвилями для виявлення перешкод, орієнтування в просторі і спілкування (кити, дельфіни, кажани, гризуни). Дельфіни випускають і сприймають ультразвукові коливання на частоті до 50 кГц, бджоли - до 22 кГц, собаки і миші чують ультразвуки до 100 кГц.

Кажани, що використовують при орієнтуванні ехолокацію, випускають ультразвуки короткими імпульсами; тривалість кожного імпульсу становить тисячні частки секунди, частота коливань від 30 до 120 кГц. Ці сигнали мають дуже високу інтенсивність. На відстані 1 - 5 см від голови тварини тиск ультразвуку відповідає в чутній нами частотній області тиску звуку, створюваного відбійним молотком. Відлуння своїх сигналів кажани здатні сприймати при тиску в 10 000 разів меншому, ніж у сигналів, які випускаються. При цьому кажани можуть обходити перешкоди під час польоту.

А ось у нічних метеликів з сімейства ведмедиць, які є їжею для кажанів, розвинувся генератор ультразвукових перешкод з частотами від 10 до 200 кГц, що збиває зі сліду кажанів, які переслідують цих комах.

Завдяки хорошому поширенню ультразвуку в м'яких тканинах людини, його відносно нешкідливості в порівнянні з рентгенівськими променями, ультразвук широко застосовується в медицині для візуалізації стану внутрішніх органів людини (УЗД – *ультразвукове дослідження*).

Ефект Доплера в акустиці. До сих пір ми вважали, що всі джерела і приймачі звуку є нерухомими. При цьому частота звукових коливань, прийнятих приймачем, дорівнює частоті коливань, що випускаються джерелом звуку.

Однак, якщо джерело звуку, або приймач, або обидва разом рухаються щодо середовища, в якому вони перебувають, то частота коливань, які сприймаються приймачем, буде відрізнятися від частоти коливань, що випускаються джерелом звуку. *Зміна частоти звуку, прийнятого приймачем, викликана рухом джерела або приймача звуку, називається ефектом Доплера.*

Цим ефектом пояснюється, наприклад, зміна висоти тону гудка електрички при швидкому русі електрички до спостерігача (збільшення висоти звуку) або від спостерігача (зменшення висоти звуку).

Розглянемо тут два випадки:

1). Нехай *приймач звуку рухається* відносно середовища зі швидкістю V_{np} і наближається до джерела, а *джерело звуку нерухоме*.

В цьому випадку повз приймача за одиницю часу пройде більша кількість хвиль, ніж в тому випадку, коли приймач покоїться відносно середовища. Дійсно, оскільки приймач рухається назустріч хвилям, то це еквівалентно проходженню хвиль повз приймача зі швидкістю, яка дорівнює сумі швидкостей хвилі v і приймача V_{np} . Використовуючи співвідношення (14.2) між довжиною хвилі, швидкістю і частотою хвилі, запишемо, що кількість хвиль, що пройшли в одиницю часу повз приймача, тобто сприйнята частота ν' буде дорівнювати

$$\nu' = \frac{v + V_{np}}{\lambda_0} = \left(1 + \frac{V_{np}}{v}\right) \nu_0 \quad (19.7)$$

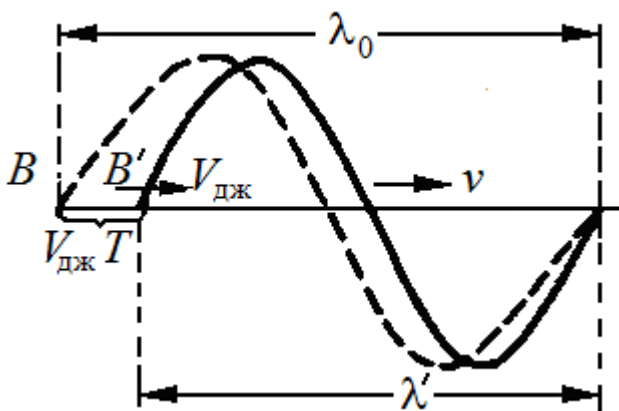


Рис. 19.4.

Тут ν_0 - частота звуку, випущеного джерелом, λ_0 - довжина хвилі в середовищі при нерухомому джерелі. Таким чином, кількість прийнятих приймачем коливань більше кількості, випущених в $\left(1 + \frac{V_{np}}{v}\right)$ разів.

Якщо приймач *віддаляється* від джерела, то це еквівалентно випадку проходження хвиль повз приймача зі швидкістю $v - V_{np}$ і, отже, частота сприйнятого звуку буде дорівнювати:

$$\nu' = \frac{v - V}{\lambda_0} = \left(1 - \frac{V_{np}}{v}\right) \nu_0, \quad (19.8)$$

тобто менше частоти звуку, випущеного джерелом в $\left(1 - \frac{V_{np}}{v}\right)$ разів.

2). Нехай тепер *джерело звуку рухається до нерухомого приймача* зі швидкістю $V_{дж}$ (рис. 19.4). Оскільки швидкість поширення звукової хвилі в середовищі (вона про-значена через v) не залежить від швидкості руху джерела, то за один період коливання джерела звуку пошириться вперед на довжину хвилі λ_0 . Але за цей час джерело пройде в напрямку хвилі шлях $V_{дж}T$, в результаті чого довжина хвилі зменшиться і дорівнюватиме:

$$\lambda' = \lambda_0 - V_{дж}T = vT - V_{дж}T = (v - V_{дж})T.$$

Кількість коливань, сприйнятих приймачем в одиницю часу збільшиться внаслідок укорочення довжини хвилі і дорівнюватиме

$$\nu' = \frac{v}{\lambda'} = \frac{v}{(v - V_{дж})T} = \frac{v}{v - V_{дж}} \nu_0. \quad (19.9)$$

Кількість коливань, сприйнятих приймачем, збільшиться в $\frac{v}{v - V_{дж}}$ разів.

Якби джерело віддалялося від приладу, то відбувалося б збільшення довжини хвилі на величину $V_{дж}T$, і приймач сприйняв би зменшену кількість коливань.

У загальному випадку, коли і приймач і джерело звуку рухаються відносно середовища

$$\nu' = \frac{v \pm V_{np}}{v \mp V_{дж}} \nu_0. \quad (19.10)$$

Знак плюс в чисельнику відповідає випадку, коли приймач і джерело зближуються, знак мінус – коли віддаляються один від одного. У знаменнику стоять знаки навпаки, тобто знак мінус відповідає зближенню джерела і приймача звуку, а знак плюс – віддаленню.

З наведених міркувань випливає, що при зближенні джерела і приймача звуку частота прийнятого приймачем звуку збільшується, а при віддаленні – зменшується.

Ефект Доплера спостерігається і для світлових хвиль. Однак для світлових хвиль не існує реального середовища, коливання якого являли б собою світло, а швидкості джерела і приймача щодо середовища втрачають сенс. Тому формула для зміни частоти буде іншою.

Приклад. Спостерігач, що стоїть на платформі залізниці, чує гудок електровоза, який проходить. Коли електровоз наближається, частота звукових коливань гудка дорівнює $\nu_1 = 1100$ Гц, а коли віддаляється - $\nu_2 = 900$ Гц. Вважаючи, що швидкість звуку дорівнює $v = 340$ м/с, визначити: 1) швидкість $V_{дж}$ електровоза; 2) власну частоту ν_0 коливань гудка.

Розв'язання. Сприйнята частота дорівнює

$$\nu' = \frac{v \pm V_{np}}{v \mp V_{дж}} \nu_0. \quad (П.19.1)$$

Підставимо $V_{np} = 0$ і врахуємо правило знаків, описане в коментарі до формули (19.10).

Тоді при наближенні електровоза

$$\nu'_1 = \frac{v}{v - V_{дж}} \nu_0, \quad (П. 19.2)$$

а при віддаленні

$$\nu'_2 = \frac{v}{v + V_{дж}} \nu_0. \quad (П. 19.3)$$

Вирішуючи сумісно (П.19. 1) і (П. 19.2), знаходимо швидкість електровоза

$$V_{дж} = \frac{\nu'_1 - \nu'_2}{\nu'_1 + \nu'_2} v = \frac{1100 - 900}{1100 + 900} 340 = 34 \text{ м/с} = 122,4 \text{ км/ч}.$$

Для визначення власної частоти гудка підставимо вираз для $V_{дж}$ в формулу (П. 19.2)

$$\nu'_1 = \frac{v \nu_0}{v - \frac{\nu'_1 - \nu'_2}{\nu'_1 + \nu'_2} v} = \frac{\nu_0 (\nu'_1 + \nu'_2)}{2\nu'_2}.$$

Звідки

$$\nu_0 = \frac{2\nu'_1\nu'_2}{\nu'_1 + \nu'_2} = \frac{2 \cdot 1100 \cdot 900}{1100 + 900} = 990 \text{ Гц}.$$

§ 20. Пружні хвилі в газах

Рідини і гази мають об'ємну пружність. Це означає, що при стискуванні в них виникають сили, які прагнуть повернути систему в початковий стан. Тому в рідинах і газах можуть виникати *пружні поздовжні хвилі (звук)*.

Під час поширення поздовжніх хвиль в газах виникають стиснення і розрідження окремих шарів. Виділимо циліндричний стовп газу (рис. 20.1) і розглянемо коливання частинок, що відбуваються уздовж осі Ox при проходженні звукової хвилі.

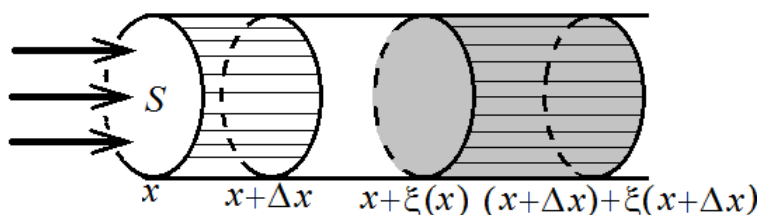


Рис. 20.1.

Задача є аналогічною розглянутій раніше для поширення поздовжніх хвиль в пружному стержні (§ 17). Можна повторити всі міркування, які призводять для стержня до формули

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (20.1)$$

Закон Гука для стержня $\sigma = E\varepsilon = E \frac{d\xi}{dx}$ у випадку газів запишеться інакше. Замість

відносного подовження $\frac{d\xi}{dx}$ для стержня у випадку газового стовпа слід розглядати відносну

зміну об'єму $\frac{dV}{V}$. Дійсно, якщо помножити чисельник і знаменник відносного подовження

$\frac{d\xi}{dx}$ виділеного об'єму газу на площу S поперечного перерізу, отримуємо

$$\frac{d\xi}{dx} \frac{S}{S} = \frac{dV}{V}.$$

Роль напруження σ у випадку стержня в газовому стовпі відіграє надлишковий тиск dp , який виникає при проходженні хвилі. Тоді закон Гука набуде вигляду

$$dp = -K \frac{dV}{V}, \quad (20.2)$$

де K - модуль об'ємної пружності, аналог модуля Юнга. Знак мінус пов'язаний з тим, що приріст тиску dp і об'єму dV мають різні знаки. З формули (20.2) випливає, що

$$K = -V \frac{dp}{dV}. \quad (20.3)$$

Підставивши це значення K замість модуля Юнга E в формулу (20.1), отримаємо вираз для швидкості звуку в газах

$$v = \sqrt{-\frac{V}{\rho} \frac{dp}{dV}}. \quad (20.4)$$

Внаслідок малої теплопровідності рідин і газів, а також внаслідок того, що коливальні процеси в газах проходять швидко, можна вважати, що елементарний об'єм не встигає обмінятися теплотою з сусідніми об'ємами. Тому процес зміни об'єму можна вважати адіабатним, для якого зв'язок між тиском і об'ємом дається рівнянням

$$pV^\gamma = const, \quad (20.5)$$

де γ - показник адіабати, що залежить від виду газу. Логарифмуємо вираз (20.5):

$$\ln p + \gamma \ln V = \ln const, \quad (20.6)$$

після чого знаходимо повний диференціал виразу (20.6):

$$\frac{dp}{p} + \gamma \frac{dV}{V} = 0.$$

Звідси

$$\frac{dp}{dV} = -\gamma \frac{p}{V},$$

і модуль об'ємної пружності згідно з формулою (20.3) набуває вигляду

$$K = \gamma p, \quad (20.7)$$

а швидкість звуку в газі

$$v = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}}. \quad (20.8)$$

Ця формула добре узгоджується з дослідними даними. За допомогою рівняння стану ідеального газу $pV = \frac{m}{M}RT$ можна отримати ще одну формулу для швидкості звуку в газах

$$v = \sqrt{\gamma \frac{RT}{M}}, \quad (20.9)$$

де $R = 8,31$ Дж/(моль К) - газова стала, M - молярна маса газу.

Приклад. Визначимо швидкість звуку в повітрі при температурі $T = 290$ К (кімнатна температура). Для повітря $29 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, $\gamma = 1,4$. Підставимо ці дані в формулу (20.9)

$$v = \sqrt{\frac{1,4 \cdot 8,31 \cdot 290}{29 \cdot 10^{-3}}} = 340 \text{ м/с}$$

Це значення добре узгоджується з дослідом.

§ 21. Ударні хвилі

Нехай джерело звуку починає рухатися з точки O вздовж прямої з постійною швидкістю u , безперервно збуджуючи коливання (рис. 21.1).

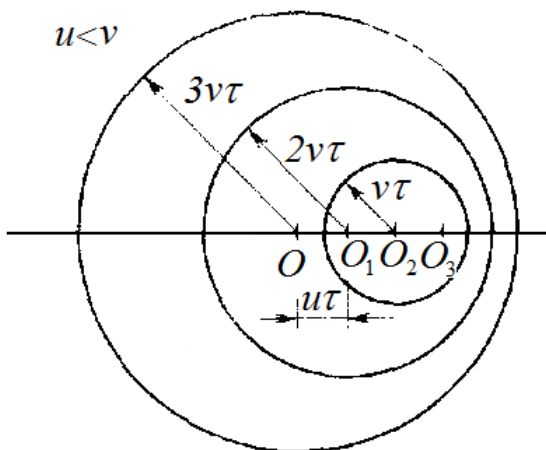


Рис. 21.1.

Якщо джерело звуку рухається в повітрі зі швидкістю u , яка менше швидкості звуку v , ($u < v$), то з кожної точки траєкторії руху джерела збуджені хвилі поширюються зі швидкістю, що перевищує швидкість руху тіла.

В цьому випадку фронт хвилі буде сферичним, а центр його співпадає з положенням джерела в початковий момент часу, оскільки слід від всіх наступних збурень виявиться всередині цієї сфери (рис. 21.1).

Дійсно, будемо розглядати створювані рухомим джерелом збурення через рівні проміжки часу τ . Точки O_1 , O_2 і O_3 дають положення джерела в моменти часу τ , 2τ і 3τ . Кожна з цих точок може розглядатися як центр сферичної хвилі, випущеної джерелом в той момент, коли він перебував в цій точці. На рис. 21.1 зображені положення фронтів цих хвиль в момент часу

Зт, коли джерело досягне точки O_3 . Оскільки $u < v$, то фронт кожної наступної хвилі цілком лежить всередині фронту попередньої.

Зовсім іншим є характер поширення збудженої хвилі в повітрі джерелом, що рухається з надзвуковою швидкістю.

Якщо швидкість джерела більше швидкості поширення хвиль в середовищі, $u > v$, то джерело випереджає створювані їм хвилі. Положення фронтів хвиль, випущених в точках O , O_1 і O_2 , для того моменту часу, коли джерело знаходиться в точці O_3 показано на рис. 21.2.

У момент часу, коли джерело звуку досягне точки O_3 , з точок O , O_1 , O_2 звукові хвилі поширяться на різні відстані. Хвилі, випущені з точок O_1 і O_2 , встигнуть пройти меншу відстань. Кожна з цих хвиль знаходиться за джерелом звуку. У своїй сукупності вони утворюють в просторі конічну поверхню, дотичну до фронтів всіх випущених сферичних хвиль, в вершині якої буде рухоме джерело звуку. Конічна поверхня в будь-який момент відокремлює області простору, куди дійшов звук від джерела, від тих областей, куди звук не встиг ще дійти.

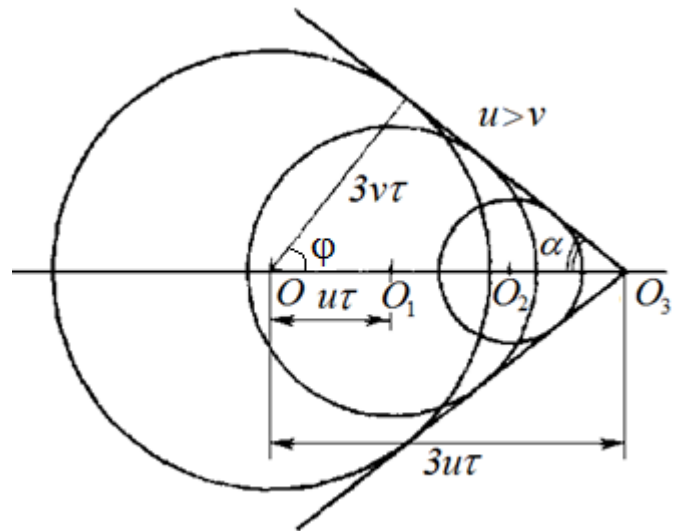


Рис. 21.2.

Таку поверхню можна сприймати як фронт ударної хвилі. **Ударна хвиля**, що розповсюджується з надзвуковою швидкістю, являє собою *тонку перехідну область, в якій відбувається різке збільшення густини, тиску, температури і швидкості частинок середовища*.

Кут α , який утворює фронт ударної хвилі з напрямком руху джерела звуку, можна визначити з рис. 21.2. Синус кута розчину конуса

$$\sin \alpha = \frac{3vt}{3ut} = \frac{v}{u} = \frac{1}{M}, \quad (21.1)$$

де $M = u/v$ називається *числом Маха*.

Простір, обмежений конусом, кут якого визначається співвідношенням (21.1), називають *конусом Маха*.

Напрямок поширення хвилі визначається нормаллю до фронту. Отже, ударна хвиля поширюється під кутом $\varphi = \pi/2 - \alpha$ до напрямку руху джерела.

Ударні хвилі виникають при вибухах, при рухах тіл з надзвуковою швидкістю, при витіканні з великими швидкостями через сопла, при потужних електричних розрядах і т. п.

Наприклад, під час вибуху вибухових речовин утворюються сильно нагріті продукти вибуху, що мають велику густину і перебувають під високим тиском. У початковий момент вони оточені нерухомим повітрям за нормальних густини і атмосферного тиску. Продукти вибуху, що розширюються під дією тиску, стискають навколишнє повітря, приводячи в рух і стискаючи спочатку найближчі, а потім все більш далекі шари повітря. З плином часу об'єм стисненого повітря зростає. Поверхня, яка відділяє стиснуте повітря від незбуреного, і є ударною хвилею (або, як кажуть, фронтом ударної хвилі).

Ударні хвилі не характеризуються періодичністю в просторі, як це властиве звичайним звуковим хвилям. Це рухливі області значного стиснення, які поширюються в просторі зі швидкістю звуку. Швидкість переміщення вершини конуса дорівнює швидкості руху джерела звуку.

Приклад. Літак летить горизонтально на висоті h з постійною швидкістю $u = 660$ м/с. Спостерігач помітив його у себе над головою і засік час. Звук від літака з'явився через $t = 10$ с після того, як літак пролетів над ним. На якій висоті h летить літак? Швидкість звуку прийняти рівною $v = 330$ м/с.

Розв'язання. За час t літак віддалився від спостерігача на відстань ut .

На рис. П.21.1. положення конуса Маха в момент прольоту літака над головою спостерігача показано штриховою лінією, а в момент, коли звук дійшов до спостерігача - суцільною лінією. З рисунка маємо співвідношення

$$h = (ut) \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

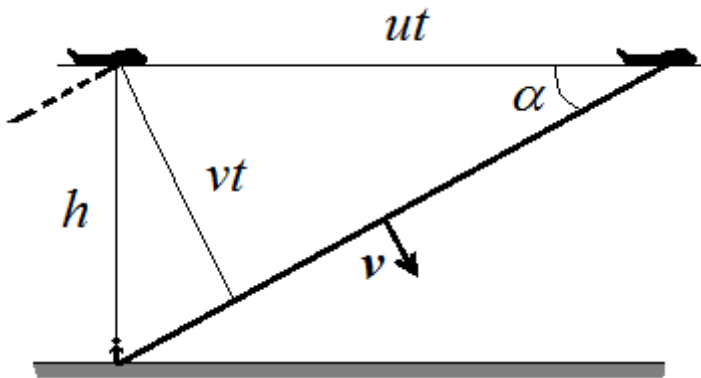


Рис. П.21.1.

Згідно (21.1)

$$\sin \alpha = \frac{v}{u} = \frac{1}{M},$$

відповідно

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{M^2}}.$$

Число Маха дорівнює

$$M = \frac{u}{v} = \frac{660}{330} = 2.$$

Остаточно

$$h = \frac{ut}{\sqrt{M^2 - 1}} = \frac{660 \cdot 10}{\sqrt{(2)^2 - 1}} = 3,810 \text{ км}$$

Коли кінцевий фронт ударної хвилі дійде до спостерігача, він почує і відчує різкий, потужний звук, схожий на вибух, - *звуковий удар*. Це не вибух, а результат накладання акустичних хвиль: за дуже малу частку секунди спостерігач чує весь сумарний шум, висланий літаком за досить тривалий проміжок часу.

Існуючий вираз «літак подолав звуковий бар'єр» є невірним, тому що він не пов'язаний з моментом, коли літак набув надзвукової швидкості.

§ 22. Стоячі хвилі

Стоячі хвилі утворюються в результаті накладання двох зустрічних біжучих хвиль однакової амплітуди і частоти.

Розглянемо гнучку однорідну струну, натягнуту між двома точками. Припустимо, що в стані рівноваги струна розтягнута вздовж осі Ox . Будемо змушувати струну здійснювати вимушені коливання. Тоді по ній в обидва боки – вправо і вліво – побіжать пружні поперечні хвилі.

Коли біжуча хвиля досягне закріпленого кінця струни, то на цьому кінці відбудеться відбивання хвилі. Відбита хвиля буде поширюватися назустріч падаючій.

Напишемо рівняння двох хвиль, що поширюються вздовж осі Ox , вправо (в бік зростання x)

$$\xi_1 = A \cos(\omega t - kx). \quad (22.1)$$

і вліво (у бік зменшення x)

$$\xi_2 = A \cos(\omega t + kx), \quad (22.2)$$

тут ξ - поперечне зміщення точки струни з координатою x в момент часу t , ω - кругова частота, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ - хвильове число, λ - довжина біжучої хвилі. Для спрощення початок відліку x і t вибрано так, щоб початкова фаза хвиль дорівнювала нулю.

Рух кожної точки струни, що коливається, можна розглядати як результат додавання падаючої і відбитої хвиль. Падаюча на перешкоду хвиля і біжуча їй назустріч відбита хвиля, накладаючись одна на одну, дають в кожній точці струни зміщення

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = A \cos(\omega t - kx) + A \cos(\omega t + kx). \quad (22.3)$$

Перетворимо цю суму за формулою для суми косинусів

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}. \quad (22.4)$$

Тоді рівняння набуде вигляду

$$\xi = (2A \cos 2\pi \frac{x}{\lambda}) \cos \omega t. \quad (22.5)$$

З формули (22.5) випливає, що всі точки струни здійснюють гармонічні коливання з однаковою частотою ω , такою самою, що й у біжучих хвиль. Але оскільки як змінна x входить у вираз для амплітуди, амплітуда коливань різна для різних точок простору – змінюється від точки до точки по закону косинуса.

$$\text{амплітуда} = \left| 2A \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \right|. \quad (22.6)$$

У точках, координати яких задовольняють умові

$$2\pi \frac{x}{\lambda} = \pm n\pi \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (22.7)$$

амплітуда коливань є максимальною. Ці точки називаються **пучностями** стоячої хвилі.

Координати пучностей

$$x_{\text{пучн}} = \pm n \frac{\lambda}{2} \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (22.8)$$

Колівання здійснюють не всі точки струни. У точках, координати яких задовольняють умові

$$2\pi \frac{x}{\lambda} = \pm(n + \frac{1}{2})\pi \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (22.9)$$

амплітуда коливань дорівнює нулю. Ці точки називаються **вузлами** стоячої хвилі.

Координати вузлів

$$x_{\text{вузл}} = \pm(n + \frac{1}{2}) \frac{\lambda}{2} \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (22.10)$$

З формул (22.8) і (22.10) випливає, що відстань між сусідніми пучностями або сусідніми вузлами дорівнює $\frac{\lambda}{2}$.

Таким чином, коливаються не всі точки струни. Частина з них залишаються нерухомими і називаються **вузлами** стоячої хвилі. На кі-

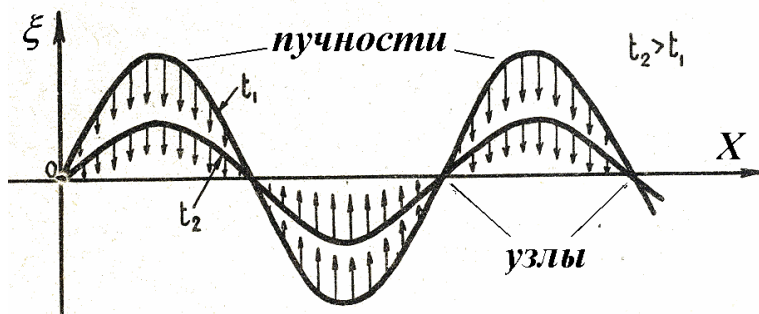
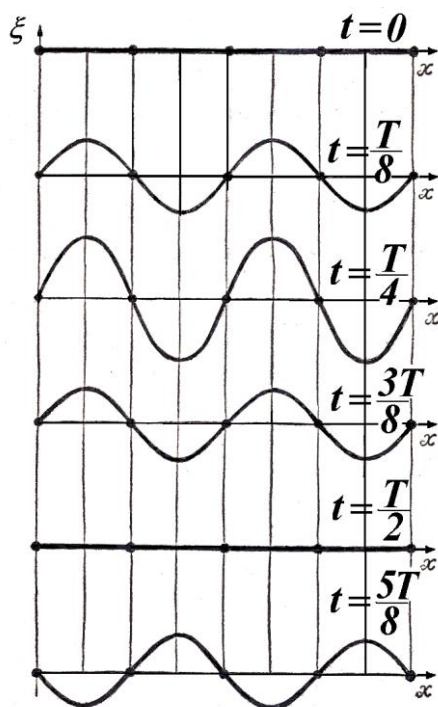


Рис. 22.1.



и т.д.

Рис. 22.2.

нцях струни в точках закріплення обов'язково будуть вузли, а між ними одна або кілька пучностей - областей, які коливаються з максимальною амплітудою.

Між двома сусідніми вузлами всі точки струни коливаються одночасно (в однаковій фазі, синфазно), але з різними амплітудами.

Такий тип синфазних коливань з характерним просторовим розподілом амплітуди - чергуванням вузлів (нулів) і пучностей (максимумів) отримав назву **стоячої хвилі**. Відстань між двома сусідніми вузлами дорівнює половині довжини хвилі.

Всі точки, що містяться між сусідніми вузлами, одночасно досягають максимального відхилення і одночасно проходять через положення рівноваги. На рис. 22.1 наведені

«моментальні фото» відхилень точок від положення рівноваги в два близьких моменти часу t_1 і t_2 . Стрілками вказані напрямки руху точок струни.

На рис. 22.2 показані положення струни через кожен восьму частину періоду $\frac{T}{8}$. Спочатку всі точки струни лежать на прямій лінії (див. рис. 22.2). Потім між нерухомими вузлами відбувається спучування струни, яке досягає максимуму через чверть періоду. Після цього спучування спадає, і струна знову стає прямою через півперіоду. Далі спучування відбувається в інший бік.

У кожному мить видно хвилю, при цьому хвиля стоїть на місці – звідси назва цього типу коливань – **стояча хвиля**.

Інші приклади стоячих хвиль – стояча звукова хвиля всередині повітряних труб (орган, духові музичні інструменти), стоячі електромагнітні хвилі в лініях передач або хвильоводах.

На відміну від біжучої хвилі, яка може рухатися вправо або вліво, у стоячій хвилі немає напрямку поширення. Ця відмінність видна на двох знімках, що відносяться до близьких моментів часу (рис. 22.3).

Для біжучої хвилі максимуми і мінімуми хвилі в кожен наступний мить переходять на нове місце, а в стоячій хвилі залишаються на одному і тому ж місці.

У стоячій хвилі на відміну від біжучої не відбувається переносу енергії. Це пояснюється тим, що падаюча і відбита хвилі мають однакову амплітуду і тому переносять однакову енергію в протилежних напрямках. Оскільки вузлові точки є нерухомими, через них енергія не переноситься.

Енергія стоячої хвилі є величиною постійною. В той момент часу, коли всі частинки струни проходять через положення рівноваги, вся енергія коливальних частинок є кінетичною. Навпаки, в положенні максимального відхилення від положення рівноваги, енергія всіх частинок є потенціальною. Відбувається перетворення кінетичної енергії в потенціальну і навпаки.

На довжині струни l буде укладатися завжди ціле число стоячих хвиль. Звідси випливає умова

$$l = n \frac{\lambda}{2} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (22.11)$$

Або

$$\lambda_n = \frac{2l}{n}. \quad (22.12)$$

Оскільки довжина хвилі λ пов'язана зі швидкістю поширення хвилі v і частотою коливань ν співвідношенням $\lambda = \frac{v}{\nu}$, то цим довжинам хвиль відповідають частоти

$$\nu_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{\nu}{2l} n \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (22.13)$$

Отже струна може коливатися не з однією частотою, а з цілим спектром частот. Частоти ν_n називаються **власними частотами** струни. Вони є кратними частоті

$$\nu_1 = \frac{v}{2l}, \quad (22.14)$$

яка називається **основною частотою**.

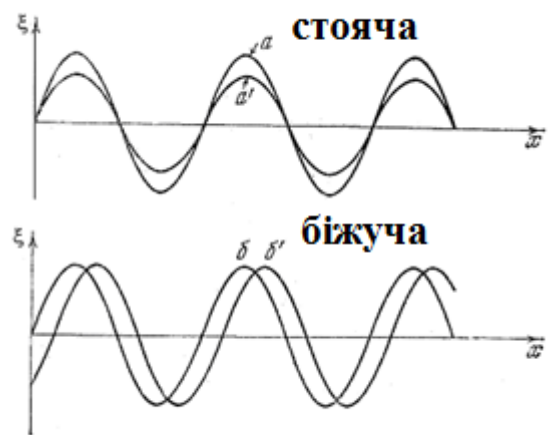


Рис. 22.3.

§ 23. Хвильовий пакет. Групова швидкість

Чисто синусоїдальна монохроматична хвиля, яка не обмежена ні в просторі, ні у часі, є ідеалізацією. В реальності доводиться мати справу з сигналами, що є своєрідними хвильовими «сплесками» в деякій області простору (рис. 23.1).

Хвиля, що має форму короткого імпульсу, може бути представлена як накладення гармонічних хвиль, частоти яких містяться в деякому інтервалі.

Такий *хвильовий пакет* (або група хвиль) є суперпозицією (накладенням) хвиль з близькими частотами.

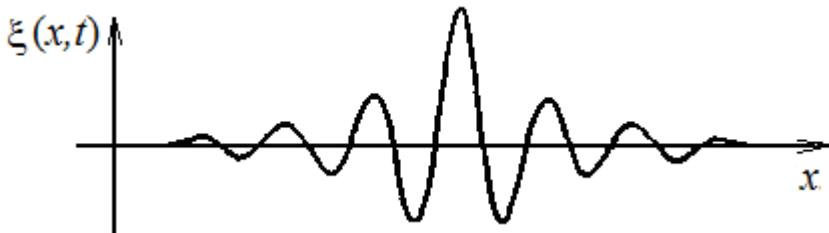


Рис. 23.1.

Розглянемо самий простий випадок хвильового пакета, утвореного накладенням всього двох плоских синусоїдальних хвиль, що поширюються в напрямку осі Ox .

Для простоти припустимо, що обидві хвилі мають од-

накову амплітуду і початкову фазу, яка дорівнює нулю:

$$\begin{aligned}\xi_1(x,t) &= A \cos(\omega_1 t - k_1 x), \\ \xi_2(x,t) &= A \cos(\omega_2 t - k_2 x).\end{aligned}\tag{23.1}$$

Введемо два поняття: «середня» частота ω_{cp} і частота «модуляції» ω_{mod} (аналогічно хвильове число):

$$\omega_{mod} = \frac{|\omega_1 - \omega_2|}{2}, k_{mod} = \frac{|k_1 - k_2|}{2},\tag{23.2}$$

$$\omega_{cp} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, k_{cp} = \frac{k_1 + k_2}{2}.\tag{23.3}$$

Використовуючи відоме тригонометричне співвідношення

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2},$$

отримаємо для повного зміщення частинок в хвильовому пакеті вираз

$$\xi(x,t) = \xi_1(x,t) + \xi_2(x,t) = 2A \cos(\omega_{mod} t - k_{mod} x) \cdot \cos(\omega_{cp} t - k_{cp} x).\tag{23.4}$$

Ми можемо розглядати отриманий вираз (23.4) як рівняння біжучої гармонічної хвилі з амплітудою

$$A_{mod}(x,t) = |2A \cos(\omega_{mod} t - k_{mod} x)|.\tag{23.5}$$

Такий запис рівняння (23.4) є зручним, якщо частоти ω_1 і ω_2 близькі за величиною. В цьому випадку частота модуляції є малою в порівнянні з середньою частотою

$$\omega_1 \approx \omega_2, \omega_{mod} \ll \omega_{cp},$$

і амплітуда хвилі $A_{mod}(x,t)$ у виразі (23.4) змінюється набагато повільніше, ніж другий множник: за той час, за який $\cos(\omega_{cp} t)$ здійснює декілька «швидких» коливань, амплітуда лише незначно зміниться. Тому хвилю (23.4) можна назвати *майже синусоїдальною амплітудно-модульованою біжучою хвилею*.

Якщо хвильовий пакет не спотворюється (не «деформується») в процесі руху, то *групову швидкість* або швидкість руху хвильового пакета, можна визначити як швидкість руху будь-якої точки хвильового пакета, наприклад, максимуму амплітуди x_m .

Максимальне значення амплітуди вийде за умови, що аргумент косинуса в виразі (23.5) дорівнює нулю

$$\omega_{\text{мод}}t - k_{\text{мод}}x_m = 0. \quad (23.6)$$

Розділивши x_m на t , отримаємо швидкість переміщення максимуму хвильового пакета

$$u = \frac{x_m}{t} = \frac{\omega_{\text{мод}}}{k_{\text{мод}}}.$$

У загальному випадку хвильовий пакет може бути представлений як накладення гармонічних хвиль з безперервним набором частот. Тоді групова швидкість буде визначатися як

$$u = \frac{d\omega}{dk} \quad (23.7)$$

Оскільки групова швидкість - це швидкість поширення амплітуди хвильового пакета, то, отже, це є *швидкість перенесення енергії*, оскільки енергія хвилі пропорційна квадрату її амплітуди.

Поняття групової швидкості відіграє важливу роль у фізиці, оскільки всі методи вимірювання швидкостей поширення хвиль пов'язані з визначенням саме групової швидкості. Групова швидкість використовується при вимірюванні дальності в гідро- і радіолокації, під час зондування іоносфери і т.д.

У загальному випадку групова швидкість u не збігається з фазовою швидкістю v .

$$v = \frac{\omega}{k}.$$

Дійсно

$$\frac{dv}{dk} = -\frac{\omega}{k^2} + \frac{1}{k} \frac{d\omega}{dk} = -\frac{\omega}{k^2} + \frac{u}{k},$$

і, отже,

$$u = \frac{\omega}{k} + k \frac{dv}{dk} = v + k \frac{dv}{dk} = v + k \frac{dv}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dk}.$$

Якщо врахувати, що довжина хвилі λ пов'язана з хвильовим числом k

$$\lambda = \frac{2\pi}{k},$$

то отримаємо

$$\frac{d\lambda}{dk} = -\frac{2\pi}{k^2} = -\frac{\lambda}{k},$$

звідки формула, що зв'язує фазову і групову швидкість (формула Релея):

$$u = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}. \quad (23.8)$$

Як видно з формули (23.8), групова швидкість збігається з фазовою швидкістю лише в тому випадку, коли $\frac{dv}{d\lambda} = 0$, тобто фазова швидкість v не залежить від довжини хвилі λ .

Така залежність фазової швидкості хвилі від довжини хвилі називається *дисперсією*.

За відсутності дисперсії всі хвилі, що утворюють хвильовий пакет, поширюються з однаковою фазовою швидкістю. Тому форма хвильового пакета не змінюється, а групова швидкість - швидкість хвильового пакета - збігається з фазовою швидкістю.

У середовищі, що має дисперсію, ширина хвильового пакета з часом збільшується, і він розпливається.

Відповідно до сучасних уявлень швидкість світла c визначає граничну швидкість поширення будь-яких сигналів. Зокрема, групова швидкість будь-якого пакета, якою не була б його форма, в якому середовищі він не поширювався б, якою не була б фізична природа хвилі, не може перевищувати швидкість світла у вакуумі.

Що стосується фазової швидкості, то вона може бути будь-якою, як більшою, так і меншою швидкості світла у вакуумі, оскільки швидкість переміщення хвильового фронту ідеальної нескінченно тривалої синусоїдальної хвилі не пов'язана з перенесенням будь-якої енергії або передаванням інформації.

Існують коливальні системи, властивості яких залежать від процесів, що відбуваються в них. Наприклад, модуль пружності тіла може залежати від їх деформації. У таких системах порушується закон Гука і інші закони механіки. Такі системи називаються *нелінійними*. У нелінійних середовищах розповсюдження хвильового пакета, що обумовлене дисперсією, може бути скомпенсоване ефектом нелінійності, який призводить до залежності швидкості і форми хвилі від її амплітуди.

В результаті в такому нелінійному диспергуючому середовищі можливе виникнення і поширення *структурно стійких відокремлених хвиль певної форми*, які називаються *солітонами*. Солітони поводяться подібно частинкам і при взаємодії між собою не руйнуються. Солітони можливі в самих різних середовищах - на воді, в кристалах, магнітних матеріалах, надпровідниках і ін.

Контрольні питання

1. Від чого залежить фазова швидкість хвиль в пружному середовищі?
2. Як пов'язані між собою довжина хвилі і частота монохроматичної хвилі?
3. Що розуміють під рівнянням хвилі і хвильовим рівнянням?
4. Який вигляд має загальне рівняння хвильового рівняння для плоскої хвилі?
5. Хвиля перейшла з першого середовища в друге. При цьому швидкість поширення хвилі збільшилась. Як зміниться при такому переході довжина хвилі?
6. Чому під час землетрусів сейсмографи спочатку реєструють поздовжні хвилі в земній корі, а тільки потім - поперечні?
7. Звукові хвилі в деякому середовищі загасають. Що відбувається при цьому з їх енергією?
8. Як залежить від відстані амплітуда сферичної хвилі?
9. Чи порушується принцип відносності Галілея в виразі для частоти звуку, що реєструє приймач, під час руху джерела і спостерігача?
10. У якому випадку буде більшим зсув частот в акустичному ефекті Доплера - при русі джерела або при русі спостерігача з тією ж швидкістю?
11. Чому в рідинах і газах неможливе існування поперечних пружних хвиль?
12. Як пояснити, що літнім вечором звук чується краще, ніж в жарку сонячну погоду?
13. Що називається стоячою хвилею? Запишіть формулу стоячої хвилі.
14. Що називається вузлом (пучністю) стоячої хвилі?
15. Чи відбувається в стоячій хвилі переміщення коливаних в просторі?

16. Чи настає такий стан стоячій хвилі на струні, коли всі точки струни лежать на одній прямій? Чи будуть при цьому всі точки струни нерухомими?
17. Чи відбувається перенесення енергії в стоячій хвилі на струні уздовж струни?
18. У яких фазах коливаються точки струни між двома вузлами?
19. У яких фазах коливаються точки струни, що лежать по обидва боки одного і того ж вузла?
20. Як змінюється амплітуда коливань між двома вузлами?
21. Чим відрізняється стояча хвиля від біжучої?
22. Які коливання струни називаються власними?
23. Утворення стоячих хвиль зазвичай відбувається при накладенні біжучої і відбитої хвилі. Коли і чому на межі відбивання виходить вузол або пучність?
24. Яким умовам повинні задовольняти дві хвилі, що поширюються вздовж однієї прямої, щоб повністю погасити одна одну?
25. Чому дорівнює виражена в довжинах хвиль відстань між двома сусідніми вузлами стоячої хвилі?
26. Які існують фазові співвідношення між коливаннями кінетичної і потенціальної енергій в біжучій і стоячій хвилі?
27. Які явища виникають під час руху джерела звуку з надзвуковою швидкістю?

ГЛАВА 4. ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ ХВИЛІ

§ 24. Аналіз рівнянь Максвелла і висновки з них. Електромагнітні хвилі

З перших двох рівнянь Максвелла (див., наприклад, [4], § 10.2) випливають два висновки.

1). Ні змінне електричне, ні змінне магнітне поле не можуть існувати окремо, незалежно одне від іншого; *одне поле незмінно породжує інше*. Іншими словами, *змінні електричне і магнітне поля завжди існують разом у вигляді єдиного електромагнітного поля*. Електричне і магнітне поля є лише окремими компонентами цього єдиного електромагнітного поля. Електромагнітне поле в кожній своїй точці характеризується одночасно двома векторами: напруженостями електричного і магнітного полів (E і H). Електромагнітне поле здатне існувати самостійно - без електричних зарядів і струмів.

2). Електромагнітне поле, виникнувши в одному місці простору, не залишається локалізованим (зосередженим) в цьому місці, а *поширюється* від цього місця зі скінченною швидкістю *у вигляді електромагнітної хвилі*. Іншими словами, електромагнітне поле існує тільки у вигляді електромагнітної хвилі, або: *електромагнітна хвиля - це форма існування електромагнітного поля*.

Пояснимо цей висновок такими міркуваннями. Показаний на рис. 24.1 коливальний контур розірваний, і на контакти, що утворилися, подано змінну напругу. У контурі збуджуються вимушені електричні коливання.

При цьому між обкладками конденсатора буде існувати змінне електричне поле, спрямо-

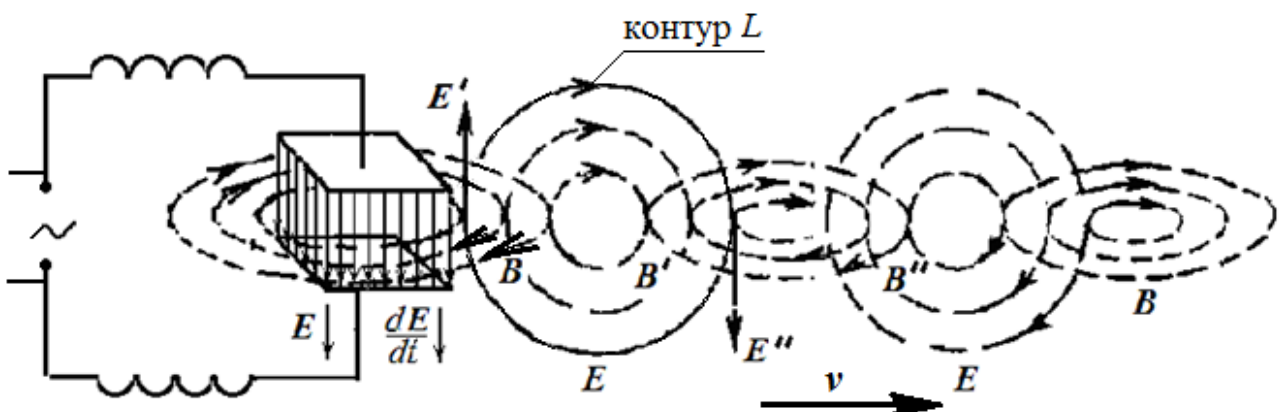


Рис. 24.1.

ване перпендикулярно до пластин в той чи інший бік. Відповідно до другого рівняння Максвелла між пластинками конденсатора буде існувати прямолінійний струм зміщення, який створює навколо себе магнітне поле, і його напрямок визначиться за правилом правого гвинта. Так, якщо електричне поле в даний відрізок часу направлено зверху вниз (рис. 24.1) і зростає за модулем, то так само буде спрямований і струм зміщення, а лінії індукції його магнітного поля будуть лежати в площині, яка є перпендикулярною до площини креслення.

Нагадаємо, що відповідно до рівнянь Максвелла силові лінії вихрового електричного поля, індукованого зміною поля \mathbf{B} , утворюють з вектором $\partial\mathbf{B}/\partial t$ лівогвинтову систему, в той час як лінії магнітного поля, індукованого зміною \mathbf{E} , утворюють з вектором $\partial\mathbf{E}/\partial t$ правогвинтову систему (рис. 24.2).

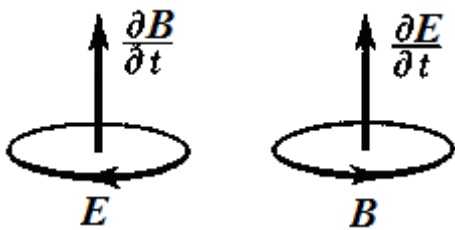


Рис. 24.2.

Виділимо, далі, довільний контур L в площині рисунка правіше конденсатора (рис. 24.1). Він пронизується змінним магнітним полем, спрямованим від рисунка до нас. Тоді в цьому контурі виникає вихрове електричне поле, лінії напруженості якого замкнуті, і взятий контур може бути однією з них.

Індуковане вихрове електричне поле буде направлено за годинниковою стрілкою (як зазначено на рисунку). Але це електричне поле \mathbf{E}' біля конденсатора направлено проти вихідного поля \mathbf{E} і знищить його тут ($\mathbf{E}' = -\mathbf{E}$), а на деякій відстані від конденсатора (\mathbf{E}'') воно буде направлено так само, як і вихідне поле \mathbf{E} . Таким чином, змінне електричне поле, виникнувши в одному місці (між обкладками конденсатора), через деякий час в цьому місці зникає, але зате з'являється в інших місцях, тобто поширюється від місця свого виникнення.

Аналогічно відбувається і з магнітним полем: індуковане поле \mathbf{B}' зліва знищує вихідне поле \mathbf{B} , а справа (\mathbf{B}'') має той самий напрямок, що і вихідне поле.

Таким чином пов'язані \mathbf{E} і \mathbf{B} з області близько конденсатора поширилися від нього на деяку відстань (рис. 24.1).

Можна зобразити електромагнітне поле у вигляді ланцюжка кілець - замкнутих магнітних і електричних силових ліній, що чергуються (рис. 24.3). Ланцюжок існує тільки в тому випадку, якщо поле змінне. Наростаючий кільцевий магнітний потік створює навколо себе електричний кільцевий потік. Зміна електричного поля призводить до створення кільцевого магнітного потоку і т.д.

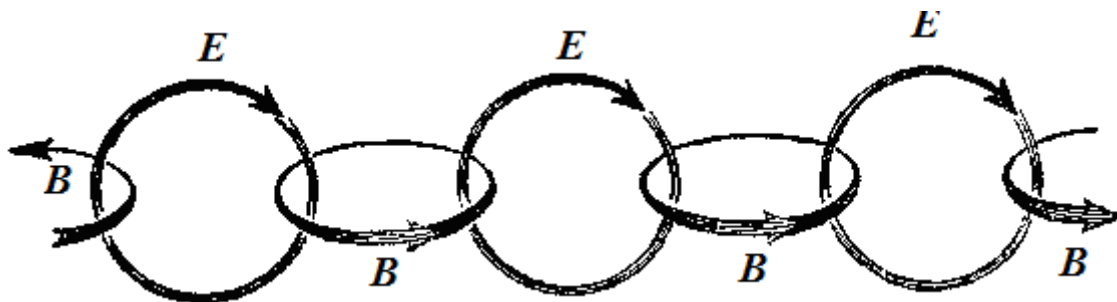


Рис. 24.3.

Якщо ж в даній області простору існують заряди і струми, то поряд з вихровими полями зі зчепленими лініями з'явиться вихрове магнітне поле, лінії якого замкнуті навколо струмів, і потенціальне електричне поле, лінії якого починаються на позитивних і закінчуються на негативних зарядах.

Однією з особливостей відкритих Максвеллом електромагнітних хвиль є те, що вони *не потребують ніякого середовища для свого поширення і можуть поширюватися в пустоті*, на відміну, наприклад, від звукових хвиль. Однак, електромагнітні хвилі можуть існувати не тільки в вакуумі, а й у речовині.

Як видно з рис. 24.1 і рис. 24.3, вектори \mathbf{E} і \mathbf{B} електромагнітної хвилі є взаємно перпендикулярними. Крім того, вектор швидкості поширення електромагнітної хвилі \mathbf{v} перпендикуляр-

ний E і B , причому так, що три вектори: E , B , v утворюють *праву трійку векторів*: при обертанні від E до B по найкоротшому напрямку поступальний рух визначить напрямок вектора v (рис. 24.4).

§25*. Швидкість поширення електромагнітних хвиль

Покажемо, як з рівнянь Максвелла випливає існування електромагнітних хвиль.

Розглянемо однорідне ізотропне середовище, властивості якого характеризуються діелектричною ϵ і магнітною μ проникностями.

Запишемо рівняння Максвелла без залучання допоміжних величин D і H . Для цього використовуємо так звані матеріальні рівняння, що входять в систему рівнянь Максвелла:

$$D = \epsilon_0 \epsilon E, \quad B = \mu_0 \mu H \quad (25.1)$$

Тоді рівняння Максвелла набувають вигляду:

$$\oint_L E \cdot dl = - \int_S \frac{\partial B}{\partial t} \cdot dS,$$

$$\oint_L B \cdot dl = \mu_0 \int_S j \cdot dS + \epsilon_0 \epsilon \mu_0 \mu \int_S \frac{\partial E}{\partial t} \cdot dS, \quad (25.2)$$

$$\oint_S E \cdot dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV,$$

$$\oint_S B \cdot dS = 0.$$

Нехай в розглядуваному середовищі відсутні вільні електричні заряди і середовище є непровідним. В такому випадку в правій частині другого рівняння (25.2) пропадає доданок, що містить густину струму провідності j , а в правій частині третього рівняння пропадає густина сторонніх зарядів ρ .

Для такого нейтрального та непровідного середовища рівняння Максвелла набувають виду:

$$\oint_L E \cdot dl = - \int_S \frac{\partial B}{\partial t} \cdot dS, \quad (25.3)$$

$$\oint_L B \cdot dl = \epsilon_0 \epsilon \mu_0 \mu \int_S \frac{\partial E}{\partial t} \cdot dS, \quad (25.4)$$

$$\oint_S E \cdot dS = 0,$$

$$\oint_S B \cdot dS = 0.$$

Будемо вважати, що поля E і B залежать лише від однієї координати, наприклад, координати z і, звичайно, від часу:

$$E = E(z, t), \quad B = B(z, t).$$

Це означає, що в будь-якій площині $z = \text{const}$ величина поля E (а також B) є однією і тією ж в будь-який момент часу в усіх точках цієї площини.

Згідно з першим рівнянням Максвелла (25.3) *циркуляція вектора E напруженості електричного поля по довільному за-*

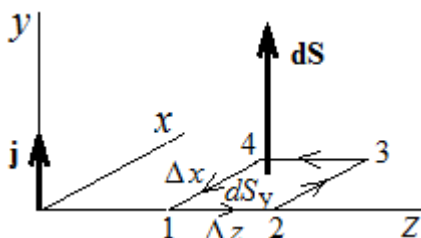


Рис. 25.1.

мкненому контуру дорівнює взятій зі знаком мінус швидкості зміни потоку магнітної індукції через поверхню, що спирається на контур інтегрування.

Обчислимо цю циркуляцію для контура 12341, зображеного на рис. 25.1.

Напрямок обходу контура вибираємо довільно, наприклад, проти годинникової стрілки, але вектор площинки $d\mathbf{S}$ при цьому повинен бути пов'язаний з напрямком обходу правилом гвинта. Контур лежить в площині xz , тому вектор площинки можна записати як

$$d\mathbf{S} = \mathbf{j} \cdot dS_y, \quad (25.5)$$

де \mathbf{j} – орт осі Oy .

За визначенням скалярного добутку

$$\mathbf{E}d\mathbf{l} = E_x dl_x + E_y dl_y + E_z dl_z$$

Циркуляцію можна представити як суму криволінійних інтегралів по окремим ділянкам контура:

$$\oint_{12341} \mathbf{E}d\mathbf{l} = \int_{1 \rightarrow 2} \mathbf{E}d\mathbf{l} + \int_{2 \rightarrow 3} \mathbf{E}d\mathbf{l} + \int_{3 \rightarrow 4} \mathbf{E}d\mathbf{l} + \int_{4 \rightarrow 1} \mathbf{E}d\mathbf{l}. \quad (25.6)$$

Перший і третій доданки в правій частині (25.6) відповідно дорівнюють:

$$\int_{1 \rightarrow 2} \mathbf{E}d\mathbf{l} = \int_{1 \rightarrow 2} E_z dl_z \quad \text{і} \quad \int_{3 \rightarrow 4} \mathbf{E}d\mathbf{l} = \int_{3 \rightarrow 4} E_z dl_z,$$

тому на цих ділянках $dl_x = dl_y = 0$.

Аналогічно друге і четверте складові рівні:

$$\int_{2 \rightarrow 3} \mathbf{E}d\mathbf{l} = \int_{2 \rightarrow 3} E_x dl_x \quad \text{і} \quad \int_{4 \rightarrow 1} \mathbf{E}d\mathbf{l} = \int_{4 \rightarrow 1} E_x dl_x,$$

оскільки $dl_y = dl_z = 0$.

Тоді для циркуляції вектора \mathbf{E} отримаємо

$$\oint_{12341} \mathbf{E}d\mathbf{l} = \int_{1 \rightarrow 2} E_z dl_z + \int_{2 \rightarrow 3} E_x dl_x + \int_{3 \rightarrow 4} E_z dl_z + \int_{4 \rightarrow 1} E_x dl_x \quad (25.7)$$

Скористаємося теоремою про середнє значення функції:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = \langle f \rangle_{1,2} \Delta x_{1,2} \quad (25.8)$$

Криволінійні інтеграли в (25.7) виразимо через середні значення функцій на відповідних інтервалах і ширину інтервалів:

$$\oint_{12341} \mathbf{E}d\mathbf{l} = \langle E_z \rangle_{1,2} \Delta z_{1,2} + \langle E_x \rangle_{2,3} \Delta x_{2,3} + \langle E_z \rangle_{3,4} \Delta z_{3,4} + \langle E_x \rangle_{4,1} \Delta x_{4,1}. \quad (25.9)$$

Але, як випливає з рис. 25.1, $\Delta z_{1,2} = \Delta z$, $\Delta z_{3,4} = -\Delta z$, $\Delta x_{2,3} = \Delta x$, $\Delta x_{4,1} = -\Delta x$.

Тоді отримаємо

$$\oint_{12341} \mathbf{E}d\mathbf{l} = (\langle E_z \rangle_{1,2} - \langle E_z \rangle_{3,4}) \Delta z + (\langle E_x \rangle_{2,3} - \langle E_x \rangle_{4,1}) \Delta x. \quad (25.10)$$

Оскільки $\langle E_z \rangle_{1,2}$ відрізняється від $\langle E_z \rangle_{3,4}$ тільки за рахунок зміни координати x , то за визначенням частинної похідної

$$\langle E_z \rangle_{1,2} - \langle E_z \rangle_{3,4} = \frac{\partial E_z}{\partial x} \Delta x = 0. \quad (25.11)$$

Рівність нулю випливає з того, що за умовою $\mathbf{E} = \mathbf{E}(z, t)$ і компонента E_z не залежить від координат x і y .

Аналогічно

$$\langle E_x \rangle_{2,3} - \langle E_x \rangle_{4,1} = \frac{\partial E_x}{\partial z} \Delta z. \quad (25.12)$$

Остаточно циркуляція вектора \mathbf{E} набуває вигляду

$$\oint_{12341} \mathbf{E} d\mathbf{l} = \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} \right) \Delta x \Delta z. \quad (25.13)$$

Права частина рівняння (25.3) - потік вектора $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ через площинку $d\mathbf{S}$ - дорівнює

$$\int_S \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) d\mathbf{S} = \int_S \left(\frac{\partial B_x}{\partial t} dS_x + \frac{\partial B_y}{\partial t} dS_y + \frac{\partial B_z}{\partial t} dS_z \right) = \int_S \frac{\partial B_y}{\partial t} dS_y = \frac{\partial B_y}{\partial t} \Delta x \Delta z, \quad (25.14)$$

оскільки проєкції площинки $d\mathbf{S}$ на осі x і z дорівнюють нулю, $dS_x = dS_z = 0$.

Підставивши (25.13) і (25.14) в (25.3), отримуємо

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} \Delta x \Delta z = - \frac{\partial B_y}{\partial t} \Delta x \Delta z,$$

або

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = - \frac{\partial B_y}{\partial t}. \quad (25.15)$$

Звернемося тепер до другого рівняння Максвелла (25.4), згідно з яким *циркуляція вектора \mathbf{B} магнітної індукції по довільному замкнутому контуру дорівнює швидкості зміни потоку вектора \mathbf{E} через довільну поверхню, натягнуту на цей контур.*

$$\oint_{12341} \mathbf{B} d\mathbf{l} = \varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu \int_S \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) d\mathbf{S}.$$

Повторюючи ті ж самі міркування, які привели нас до співвідношення (25.15), в даному випадку ми отримаємо

$$\frac{\partial B_x}{\partial z} = \varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu \frac{\partial E_y}{\partial t}. \quad (25.16)$$

Застосуємо тепер рівняння Максвелла (25.3) і (25.4) до контура 12341, який лежить в площині (x, z) (рис. 25.2).

У цьому випадку вектор площинки може бути записаний так:

$$d\mathbf{S} = -\mathbf{i} dS_x = -\mathbf{i} \Delta y \Delta z, \quad (25.17)$$

де \mathbf{i} - орт осі Ox .

Здійснивши ті ж розрахунки, що і для попереднього контура, отримаємо співвідношення (25.18) і (25.19), що зв'язують інші компоненти електричного і магнітного полів.

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{\partial B_x}{\partial t}. \quad (25.18)$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial z} = -\varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu \frac{\partial E_x}{\partial t}. \quad (25.19)$$

Зміна знака в співвідношеннях (25.18) і (25.19) в порівнянні з (25.15) і (25.16) очевидно пов'язана з іншою орієнтацією площинки $d\mathbf{S}$ в цьому випадку.

Випишемо окремо пару рівнянь (25.15) і (25.19), що містять тільки компоненти полів E_x і B_y . Введемо позначення

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 4 \cdot 3,14 \cdot 10^{-7}}} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ (м/с)}.$$

Ця константа має і розмірність, і числове значення швидкості світла у вакуумі. Тоді

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = - \frac{\partial B_y}{\partial t}, \quad \frac{\partial B_y}{\partial z} = - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t}. \quad (25.20)$$

Інша пара рівнянь пов'язує компоненти E_y і B_x :

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{\partial B_x}{\partial t}, \quad \frac{\partial B_x}{\partial z} = \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial E_y}{\partial t}. \quad (25.21)$$

Припустимо, що спочатку було створено змінне електричне поле E_x , спрямоване вздовж осі x . Відповідно до другого з рівнянь (25.20) це поле створить магнітне поле B_y , спрямоване вздовж осі y . Відповідно до першого рівнянням (25.20) поле B_y створить електричне поле E_x і т.д. Ні поле E_y , ні поле B_x при цьому не виникають. Ми бачимо, що пара полів (E_x, B_y) ніяк не пов'язана з іншою парою (E_y, B_x) , тобто змінні в часі і просторі поля E_x і B_y можуть існувати цілком незалежно від іншої пари E_y і B_x .

Аналогічно, якщо спочатку було створено поле E_y , то відповідно до рівнянь (25.21) з'явиться поле B_x , яке збудить поле E_y і т.д. В цьому випадку не виникають поля E_x і B_y .

Таким чином, для опису плоскої електромагнітної хвилі досить взяти одну з систем рівнянь (25.20) або (25.21).

Продиференціюємо перше з рівнянь (25.20) по z , а друге - по t . Ми отримаємо

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = -\frac{\partial^2 B_y}{\partial t \partial z}, \quad \frac{\partial^2 B_y}{\partial z \partial t} = -\frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}.$$

Виключаючи змішану похідну $\partial^2 B_y / \partial t \partial z = \partial^2 B_y / \partial z \partial t$ з цієї пари рівнянь, отримуємо

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}. \quad (25.22)$$

Диференціюючи перше з рівнянь (25.20) по t , а друге - по z , отримуємо (виключивши з системи змішану похідну $\partial^2 E_x / \partial z \partial t = \partial^2 E_x / \partial t \partial z$) рівняння для магнітного поля B_y :

$$\frac{\partial^2 B_y}{\partial z^2} = \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2}. \quad (25.23)$$

Рівняння (25.22) і (25.23) представляють собою типові хвильові рівняння. Будь-яка функція, яка задовольнить таке рівняння, описує деяку хвилю, причому корінь квадратний з величини, зворотної коефіцієнту при похідній за часом, дає фазову швидкість цієї хвилі. Отже, рівняння (25.22) і (25.23) вказують на те, що електромагнітні поля можуть існувати у вигляді електромагнітних хвиль, **фазова швидкість** яких дорівнює

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}. \quad (25.24)$$

Для вакууму ($\epsilon = \mu = 1$) швидкість електромагнітних хвиль дорівнює $c \approx 3 \cdot 10^8$ м/с і співпадає зі швидкістю світла. Ця обставина дозволила Максвеллові зробити висновок про те, що світло являє собою електромагнітні хвилі.

Пара хвиль (E_x, B_y) являє собою біжучу вздовж осі z *плоску електромагнітну хвилю*, в якій поле \mathbf{E} має тільки x -компоненту, поле \mathbf{B} має тільки y -компоненту, тобто коливання полів \mathbf{E} і \mathbf{B} відбуваються в площині, перпендикулярній напрямку поширення - осі z . Отже, **плоска електромагнітна хвиля є поперечною** (і в цій хвилі коливання полів \mathbf{E} і \mathbf{B} - взаємно перпендикулярні).

Розглянувши таким же чином пару рівнянь (25.21), ми прийшли б до аналогічного висновку: хвилі E_y і B_x утворюють плоску електромагнітну хвилю, що біжить уздовж осі z , в якій нерозривно пов'язані між собою (взаємно індують один одного) поля E_y і B_x , ця електромагнітна хвиля також є поперечною.

Рішенням отриманих хвильових рівнянь (25.22) і (25.23) є функції

$$E_x = E_m \cos(\omega t - kz + \alpha_1). \quad (25.25)$$

$$B_y = B_m \cos(\omega t - kz + \alpha_2). \quad (25.26)$$

де ω - циклічна частота хвилі, k - хвильове число, яке дорівнює ω/v , α_1 і α_2 - початкові фази коливань в точках з координатою $z = 0$. Підставимо ці рішення в рівняння (25.20) і отримаємо співвідношення

$$kE_m \sin(\omega t - kz + \alpha_1) = \omega B_m \sin(\omega t - kz + \alpha_2)$$

$$kB_m \sin(\omega t - kz + \alpha_2) = (\epsilon\mu/c^2)\omega E_m \sin(\omega t - kz + \alpha_1)$$

Для того, щоб ці рівняння задовольнялися, необхідно, щоб були рівними початкові фази α_1 та α_2 і щоб виконувалися співвідношення

$$kE_m = \omega B_m, \quad (\epsilon\mu/c^2)\omega E_m = kB_m.$$

Перемножимо обидві частини цих рівностей, в результаті отримаємо

$$(\epsilon\mu/c^2) E_m^2 = B_m^2. \quad (25.27)$$

Таким чином, коливання електричного і магнітного векторів в електромагнітній хвилі відбуваються з однаковою фазою - вони одночасно досягають максимальних значень і одночасно перетворюються в нуль, а амплітуди цих векторів пов'язані співвідношенням

$$E_m = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \epsilon \mu_0 \mu}} B_m. \quad (25.28)$$

Оскільки вектори E і B коливаються в однаковій фазі, співвідношення (25.28) між амплітудами напруженості електричного поля і магнітної індукції є справедливим і для їх миттєвих значень

$$\sqrt{\epsilon_0 \epsilon} E = \frac{B}{\sqrt{\mu_0 \mu}} = \sqrt{\mu_0 \mu} H. \quad (25.29)$$

Якщо в (25.25) покласти $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, то рівняння плоскої електромагнітної хвилі в векторному вигляді матимуть вигляд

$$E = E_m \cos(\omega t - kz)$$

$$B = B_m \cos(\omega t - kz). \quad (25.30)$$

У біжучій плоскій електромагнітній хвилі поля E і B у кожний момент часу в кожній точці простору є пропорційними одне одному. На рис. 25.3 показано «миттєве фото» - розподіл полів E і B як функції координати z в певний момент часу t для хвилі, що біжить зліва направо. На рис. 25.3 показано, що E_x є максимальним в даний момент часу в тій самій точці, що і B_y . Нульовому значенню E_x відповідає нульове значення B_y .

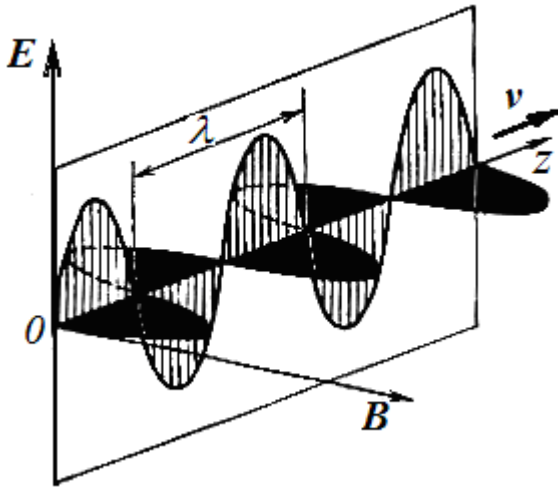


Рис. 25.3.

правовинтову систему (рис. 25.4).

3) В електромагнітній хвилі вектори E і B завжди коливаються в однакових фазах, причому між миттєвими значеннями E і B у будь-якій точці існує певний зв'язок, а саме:

$$E = vB,$$

або

$$\sqrt{\epsilon\epsilon_0} E = \sqrt{\mu\mu_0} H.$$

Це означає, що E і H (або B) одночасно досягають максимуму, одночасно обертаються в нуль і т. д.

Підсумовуючи викладене, можна зробити **висновки**.

1) Змінне електромагнітне поле поширюється в просторі у вигляді хвиль, фазова швидкість яких

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}, \quad \text{де } c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

2) Вектори E , B і v (швидкість хвилі) є взаємно перпендикулярними і утворюють

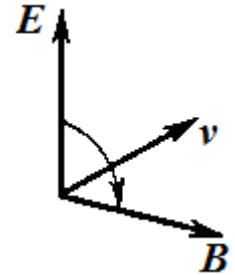


Рис. 25.4.

§ 26. Енергія електромагнітної хвилі. Вектор Пойнтінга

Оскільки перенесення енергії - загальна властивість будь-якої біжучої хвилі, електромагнітні хвилі також переносять енергію.

Як і в випадку хвилі в пружному середовищі, наприклад, звукової, величина, яка чисельно дорівнює енергії, що проходить в одиницю часу через одиничну площинку, перпендикулярну до напрямку поширення хвилі, називається *густиною потоку енергії*.

Густина потоку енергії \mathbf{j} , яку переносить хвиля, дорівнює добутку густини енергії w на швидкість поширення хвилі \mathbf{v} :

$$\mathbf{j} = w \cdot \mathbf{v}.$$

Об'ємна густина енергії w електромагнітної хвилі складається з об'ємних густин $w_{\text{ел}}$ електричного і $w_{\text{м}}$ магнітного полів:

$$w = w_{\text{ел}} + w_{\text{м}} = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2} + \frac{\mu_0 \mu H^2}{2}. \quad (26.1)$$

З огляду на зв'язок векторів \mathbf{E} і \mathbf{H} , отримаємо, що густина енергії електричного і магнітного полів в кожен момент часу однакові, тобто $w_{\text{ел}} = w_{\text{м}}$. Тоді

$$\frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2} = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} = \frac{B^2}{2\mu_0 \mu}. \quad (26.2)$$

Отже, w можна представити у вигляді

$$w = 2w_{\text{ел}} = \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \sqrt{\epsilon \mu} E H. \quad (26.3)$$

Якщо помножити густина енергії w на швидкість електромагнітної хвилі в середовищі, то отримаємо модуль густини потоку енергії:

$$S = w v = E H. \quad (26.4)$$

Через те, що вектори \mathbf{E} і \mathbf{H} взаємно перпендикулярні і утворюють з напрямком поширення хвилі правогвинтову систему, то напрям вектора $[E, H]$ збігається з напрямком поширення хвилі, тобто з напрямком переносу енергії, а модуль цього вектора дорівнює $E H$. Отже, вектор густини потоку електромагнітної енергії, званий *вектором Пойнтінга*, має вигляд

$$\mathbf{S} = w \cdot \mathbf{v} = [E, H] \quad (26.5)$$

Як і для пружних хвиль, інтенсивність електромагнітної хвилі - це середнє за часом значення густини потоку енергії

$$I = \langle S \rangle = \langle E H \rangle = E_m H_m \langle \cos^2(\omega t - kx + \alpha) \rangle = \frac{1}{2} E_m H_m.$$

З урахуванням зв'язку між E_m і H_m (25.29) одержуємо

$$I = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}} \frac{\epsilon_0 \epsilon E_m^2}{2} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}} \frac{\mu_0 \mu H_m^2}{2}. \quad (26.6)$$

Як і в пружній звуковій хвилі, *інтенсивність пропорційна квадрату амплітуди коливань*.

У синусоїдальній (гармонічній) хвилі в вакуумі середнє значення густини потоку електромагнітної енергії дорівнює

$$I = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_m^2, \quad (26.7)$$

де E_m - амплітуда коливань напруженості електричного поля.

Густина потоку енергії в СІ вимірюється в *ватах на квадратний метр* (Вт/м²).

Приклад 1.

У вакуумі вздовж осі Ox поширюється плоска електромагнітна хвиля. Амплітуда напруженості електричного поля хвилі $E_m = 5$ мВ/м. Визначити середнє за часом значення енергії, що переноситься хвилею через площинку $S = 1$ м², розташовану перпендикулярно до напрямку поширення хвилі, за час $t = 1$ с. Якою є амплітуда напруженості H_m магнітного поля хвилі?

Розв'язання. Середнє за часом значення енергії, що переноситься плоскою електромагнітною хвилею через одиничну площинку, розташовану перпендикулярно до напрямку поширення хвилі, в одиницю часу (інтенсивність хвилі) в вакуумі

$$I = \frac{1}{2} c \varepsilon_0 E_m^2 = \frac{1}{2} 3 \cdot 10^8 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} (5 \cdot 10^{-3})^2 = 3 \cdot 10^{-8} \text{ (Вт/м}^2\text{)}.$$

Між амплітудами напруженості електричного і магнітного полів біжучої електромагнітної хвилі існує співвідношення (25.29).

$$E_m \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon} = H_m \sqrt{\mu_0 \mu}.$$

Так що в вакуумі напруженість магнітного поля

$$H_m = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_m = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ А/м.}$$

Приклад 2.

Чому дорівнюють амплітуди напруженостей електричного E_0 і магнітного H_0 полів плоскої електромагнітної хвилі в повітрі у випадках: а) сфокусованого випромінювання потужного лазера ($I = 10^{14}$ Вт/см²); б) в потоці сонячного випромінювання, що падає на Землю ($I = 10^4$ Вт/см²); (сонячна стала)?

Відповідно до рівняння (26.7) маємо:

а) у разі потужного лазера:

$$E_m = \sqrt{\frac{2I}{c\varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{18}}{3 \cdot 10^8 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}}} = 2,75 \cdot 10^{10} \text{ В/м} = 27,5 \text{ ГВ/м},$$

$$H_m = \sqrt{\frac{2I}{c\mu_0}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{18}}{3 \cdot 10^8 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}} = 7,3 \cdot 10^7 \text{ А/м} = 73 \text{ МА/м};$$

б) в потоці сонячної енергії:

$$E_m = \sqrt{\frac{2I}{c\varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,4 \cdot 10^{-3}}{3 \cdot 10^8 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}}} = 1,027 \text{ В/м},$$

$$H_m = \sqrt{\frac{2I}{c\mu_0}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,4 \cdot 10^{-3}}{3 \cdot 10^8 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}} = 2,73 \text{ мА/м}.$$

§ 27. Відкритий коливальний контур

Будь-який електричний струм (і взагалі, будь-який рухомий електричний заряд) створює магнітне поле. Якщо величина або напрям швидкості заряду змінюється, магнітне поле теж буде змінюватися і, отже, в навколишньому просторі виникне електромагнітна хвиля. Таким чином, *будь-який рухомий з прискоренням електричний заряд випромінює електромагнітну хвилю.*

Тому будь-яке коло змінного струму, всякий контур, в якому є змінний струм, випромінює електромагнітні хвилі. Однак, це випромінювання, його енергія, є дуже малим в порівнянні з енергією, що циркулює в контурі, тому контур; зображений на рис. 27.1, а, називається **закритим**

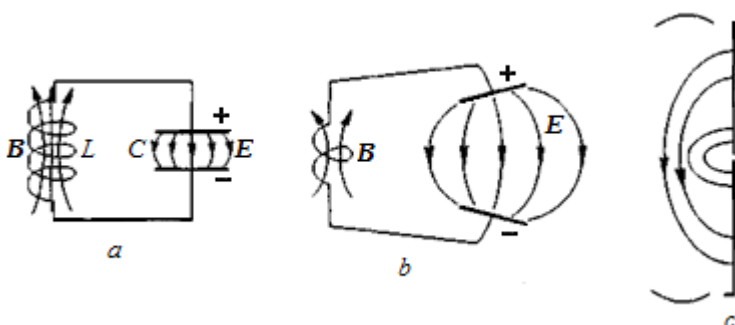


Рис. 27.1.

коливальним контуром (закритим саме для випромінювання електромагнітних хвиль). Для того, щоб контур ефективно випромінював, його, як кажуть, потрібно зробити **відкритим**. Перетворення закритого контура у відкритий можна здійснити, розсовуючи обкладинки конденсатора, як це послідовно показано на рис. 27.1.

У положенні 27.1, *a* поля локалізовані, в основному, в реактивних елементах (індуктивності L і ємності C) і не залишають практично цього контура. В стадії 27.1, *b*, коли пластини конденсатора трохи розсунуті, його електричне поле займає більшу область простору, і випромінювання контура посилиться. Контур стає більш відкритим. Очевидно, граничний випадок відкритого контура отримуємо, якщо максимально розсунемо обкладинки конденсатора, як представлено на рис. 27.1, *c*.

Ємність C конденсатора, як відомо, зменшується зі збільшенням відстані між його обкладинками, і за великої відстані, як у випадку 27.1, *b*, є дуже малою. Відповідно до формули Томсона

на $\nu = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ зростає і частота ν власних коливань.

Тому, чим більшу частоту ми хочемо змусити контур випромінювати, тим меншу ємність і індуктивність слід брати. Вилучення конденсатора цьому сприяє. Але для цієї ж мети можна видалити ще і котушку індуктивності, замінивши її відрізком проводу. Тоді отримуємо граничний випадок відкритого коливального контура, призначеного для випромінювання електромагнітних хвиль високої частоти у вигляді простого пристрою, зображеного на рис. 27.2. Це так званий **відкритий вібратор, або вібратор Герца, або диполь Герца**.

Тепер не тільки електричне, але й магнітне поле, яке раніше було зосереджене всередині котушки, займе більшу область простору, що охоплює цей провід. Збільшення частоти коливань в контурі, як і збільшення його лінійних розмірів, призводить до того, що *період власних коливань стає порівняним з часом поширення електромагнітного поля вздовж всього контура*. Це означає, що процеси власних електромагнітних коливань в такому відкритому контурі вже не можна вважати квазістаціонарними. Нагадаємо, що в звичайних колах змінного струму сила струму у всіх перерізах в даний момент часу є однаковою.

У відкритому ж коливальному контурі *сила струму* в різних його місцях в один і той же момент часу *є різною*: на кінцях контура вона завжди дорівнює нулю, а в середині (там, де раніше була котушка) вона коливається з максимальною амплітудою.

У граничному випадку, коли коливальний контур перетворився просто у відрізок прямого проводу, розподіл сили струму уздовж контура в певний момент часу показано на рис. 27.2, *a*.

У той момент, коли сила струму в такому вібраторі є максимальною, охоплююче його магнітне поле також досягає максимуму, а електричне поле поблизу вібратора відсутнє. Через чверть періоду перетворюється в нуль сила струму, а разом з нею і магнітне поле поблизу вібратора; електричні заряди зосереджуються поблизу кінців вібратора, а їх розподіл має вигляд, показаний на рис. 27.2, *б*. Електричне поле поблизу вібратора в цей момент є максимальним.

Відбуваються коливання заряду і струму, тобто електромагнітні коливання у відкритому вібраторі.

Неквазістаціонарний характер коливань у відкритому вібраторі призводить до того, що створювані окремими його ділянками поля на деякій відстані від вібратора вже не компенсують один одного, як це має місце для «закритого» коливального контура з зосередженими параметрами, де коливання є квазістаціонарними, електричне поле цілком зосереджене всередині конденсатора, а магнітне - усередині котушки. Через такий просторовий розподіл електричного і

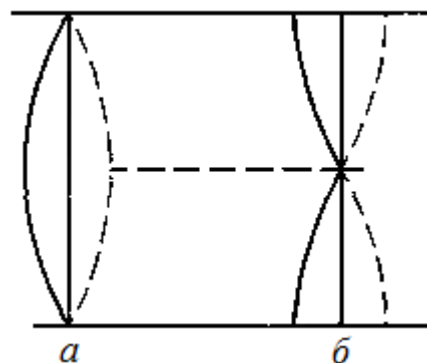


Рис. 27.2.

магнітного полів вони безпосередньо *не пов'язані одне з одним*: їх взаємне перетворення обумовлене тільки струмом - перенесенням заряду по контуру.

У *відкритого вібратора*, де електричне та магнітне поля перекриваються в просторі, відбувається їх взаємний вплив: магнітне поле, яке змінюється, породжує вихрове електричне поле, а електричне поле, яке змінюється, породжує магнітне поле. В результаті виявляється можливим існування і поширення таких полів у вільному просторі на великій відстані від вібратора. Це і є *електромагнітні хвилі*, що випромінюються вібратором.

У відкритому коливальному контурі індуктивністю і ємністю, що визначають власну частоту коливань вібратора, не є котушка і конденсатор (так звані *зосереджені параметри*), а власні індуктивність і ємність проводів вібратора, так звані *розподілені параметри*. Кожен елемент вібратора одночасно має і індуктивність, і ємність.

Вібратор буде випромінювати електромагнітні хвилі з частотою живлячої напруги. Але ефективність випромінювання буде максимальною тоді, коли вібратор настроєний на випромінювальну хвилю. Це буде за умови, коли загальна довжина вібратора l буде дорівнювати половині довжини випромінювальної їм хвилі λ :

$$l = \frac{\lambda}{2}, \quad (27.1)$$

тобто ефективно випромінювати буде, як кажуть, *напівхвильовий вібратор*.

§ 28. Випромінювання коливального диполя. Шкала електромагнітних хвиль

Електромагнітне випромінювання виникає в усіх випадках, коли в просторі створюється змінне електромагнітне поле. У свою чергу електромагнітне поле буде змінюватися з часом, коли змінюється розподіл електричних зарядів в системі або є змінним електричний струм. Таким чином, джерелом електромагнітного випромінювання є різні змінні струми і пульсуючі заряди.

Найпростішою системою, що створює електромагнітне поле, є електричний диполь зі змінним моментом: два пов'язаних коливальних різнойменних зарядів рівної величини.

Таким електричним диполем є, наприклад, система, що складається з нерухомого позитивного заряду і негативного заряду, що здійснює біля нього коливання. Якщо це коливання відбувається за гармонічним законом, то дипольний момент буде також змінюватися за цим законом, тобто представиться формулою

$$p = p_0 \cos \omega t \quad (28.1)$$

Диполь, довжина якого l є малою в порівнянні з довжиною λ випромінюваної хвилі ($l \ll \lambda$), називають *елементарним*.

Будь-яку реальну випромінюючу систему - антену, вздовж якої проходить змінний струм, - можна у думці розкласти на елементи струму, кожен з яких випромінює як диполь. Використовуючи принцип суперпозиції для вектора напруженості електричного поля і вектора індукції магнітного поля, можна отримати електромагнітне поле всієї випромінюючої системи.

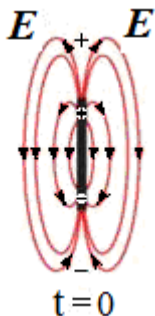


Рис.28.1.

Однак найважливішим прикладом елементарних диполів є електрони всередині атомів. Електрон, що обертається навколо ядра атома, є системою зі змінним дипольним моментом.

Розглянемо, який характер мають електромагнітні хвилі, що випромінює елементарний диполь. При цьому математичний висновок наводити не будемо в силу його великої складності, а обмежимося лише якісними результатами.

Уявімо, що випромінювач складається з двох зарядів $+q$ і $-q$, які гармонічно коливаються з певною частотою уздовж вертикальної прямої в протилежні боки. Зобразимо послідовне положення зарядів системи і лінії електричного поля E .

Нехай в момент $t = 0$ обидва заряди містяться на протилежних кінцях диполя (рис. 28.1). Між кінцями диполя виникає електричне поле, і система являє собою електричний диполь, лінії якого виходять з заряду $+q$ і входять в заряд $-q$. Однак на більш далеких відстанях від диполя електричне поле ще відсутнє.

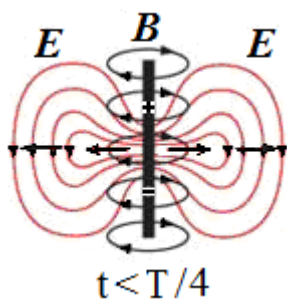


Рис. 28.2.

Далі заряди зближуються. Такий наростаючий струм породжує магнітне поле (рис. 28.2).

У момент часу чверть періоду $t = \frac{1}{4} T$ (рис. 28.3) обидва заряди проходять через положення рівноваги і компенсують один одного.

Електричне поле зникає, а магнітне поле досягає максимальної величини.

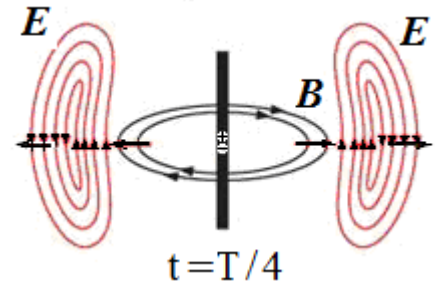


Рис. 28.3.

Однак електричне поле, створене в навколишньому просторі за попередній час не зникає, і лінії цього поля, відриваючись від зарядів, замикаються самі на себе. В перпендикулярній площині виникають «зчеплені» з ними кільцеві магнітні лінії. Разом вони утворюють торoidalну (в силу осової симетрії) комірку хвилі, яка розходитьс'я сферично і встигає поширитися на деяку відстань від диполя.

В наступний момент часу $t > \frac{1}{4} T$ заряди знову розходяться і починають створювати поле об'ратного напрямку і тієї ж конфігурації. Сформовані замкнуті лінії вектора E йдуть від вібратора зі швидкістю c .

Після закінчення першого періоду коливань ($t = T$) від зарядів віддаляється нова група

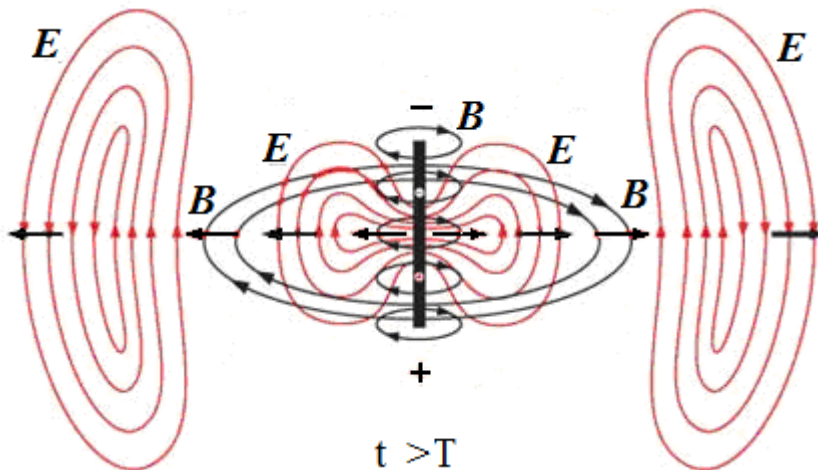


Рис. 28.4.

ліній електричного поля. Нагадаємо, що лінії напруженості E є не фізичною реальністю, а тільки графічним способом опису структури поля.

Далі процес повторюється спочатку: заряди в диполі безперервно прискорюються, силові лінії поля відокремлюються від нього і як самостійні утворення віддаляються в простір (рис. 28.4).

У безпосередній близькості від диполя картина електромагнітного поля дуже складна. Вона зазнає суттєвого спрощення в так званій *хвильовій зоні* диполя, яка починається на відстані r , що значно перевищує як розміри диполя, так і довжину випромінюваної їм хвилі ($r \gg \lambda$) (рис. 28.5).

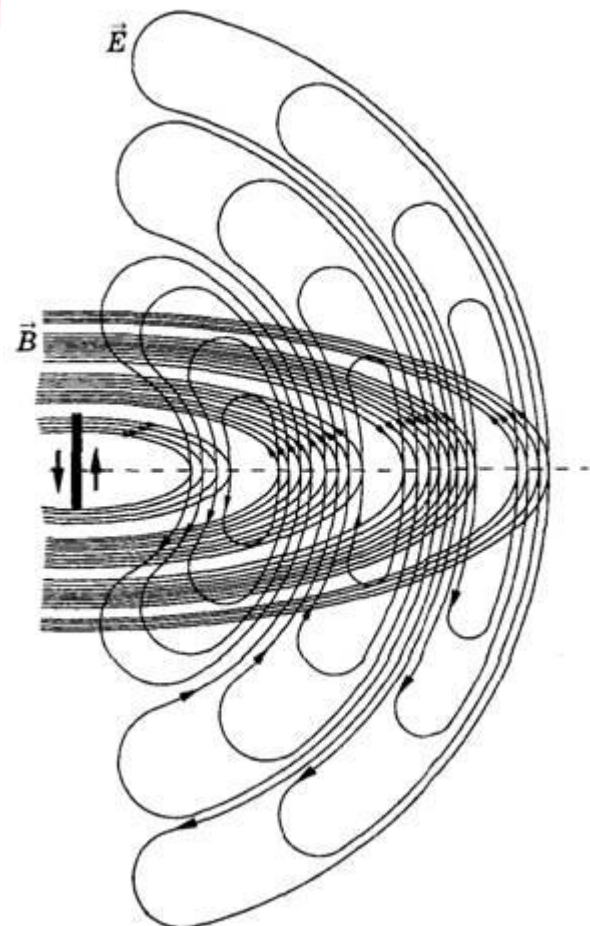


Рис. 28.5.

Якщо хвиля поширюється у вакуумі або в однорідному ізотропному середовищі, то хвильовий фронт в хвильовій зоні буде *сферичним*.

Проведемо через точку спостереження сферу з центром на початку координат, біля якого вздовж осі z відбуваються коливання зарядів (рис. 28.7). Проведемо на сфері паралелі і меридіани.

В електромагнітній хвилі вектори E і B перпендикулярні один одному, причому вектор E лежить в площині, що проходить через диполь, а вектор B перпендикулярний цій площині.

Кажуть, що вектор E в кожній точці хвильової зони спрямований по дотичній до меридіану, а вектор B - по дотичній до паралелі. Обидва поля E і B спрямовані перпендикулярно до напрямку поширення (радіус-вектор r) і пов'язані з ним правилом гвинта (рис. 28.6)

Розрахунок показує, що інтенсивність випромінювання (середнє значення густини потоку енергії, яку переносить хвиля) диполя в хвильовій зоні

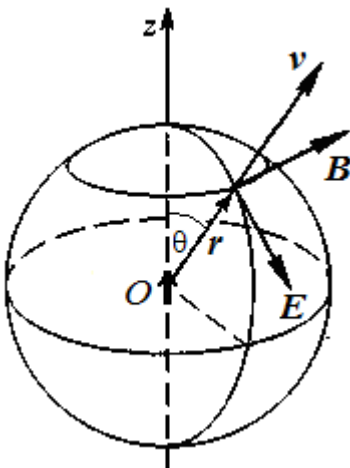


Рис. 28.6.

$$I = \langle S \rangle \sim \frac{1}{r^2} \sin^2 \theta \quad (28.2),$$

тобто інтенсивність хвилі обернено пропорційна квадрату відстані від випромінювача.

Енергія, що випускається коливальним диполем, в різних напрямках, неоднакова. Уздовж осі коливань випромінювання відсутнє, в перпендикулярному до осі напрямі - максимальне. Для проміжних напрямків воно пропорційно $\sin^2 \theta$, де θ - кут, відлічуваний від осі коливань (рис. 28.6).

Середня потужність випромінювання диполя пропорційна квадрату амплітуди електричного моменту диполя і четвертому ступеню частоти коливань.

$$\langle P \rangle \sim p_0^2 \omega^4 \quad (28.3)$$

Тому за малої частоти випромінювання буває незначним (наприклад, ліній передачі змінного струму частоти 50 Гц).

Діаграма, що показує залежність інтенсивності випромінювання від кута, називається *діаграмою спрямованості випромінювача*. На рис 28.7 показана діаграма спрямованості випромінювання диполя. Заряд здійснює коливання уздовж осі z . З початку координат проводяться відрізки, довжина яких пропорційна випромінюваній в даному напрямку енергії, тобто $\sin^2 \theta$. Якщо з'єднати кінці цих відрізків, вийде лінія, показана на рис. 28.7. Щоб отримати розподіл енергії випромінювання в просторі, необхідно побудувати поверхню, яка вийде обертанням діаграми навколо осі z - поверхня тороїда, вісь якого збігається з віссю диполя. Відрізок променя від центру диполя до діаграми характеризує інтенсивність випромінювання в даному напрямку.

Діапазон частот електромагнітних хвиль, що зустрічаються в природі, дуже широкий. Його розбивають на ряд областей, що характеризуються певними властивостями хвиль або способами їх отримання. На рис. 28.8 наведена шкала електромагнітних хвиль.

Основні діапазони шкали електромагнітних хвиль такі.

1). **Низькочастотні хвилі**, частота коливань яких не перевищує 100 КГц. Цей діапазон частот використовується в електротехніці. У промисловій електроенергетиці використовується частота 50 Гц, на якій здійснюється передача електричної енергії по лініях і перетворення напруг трансформаторами. В авіації використовується частота 400 Гц, яка дає вигоду по вазі електричних машин і трансформаторів в 8 разів у порівнянні з частотою 50 Гц. В імпульсних джерелах живлення використовуються частоти змінного струму одиниці і десятки кГц.

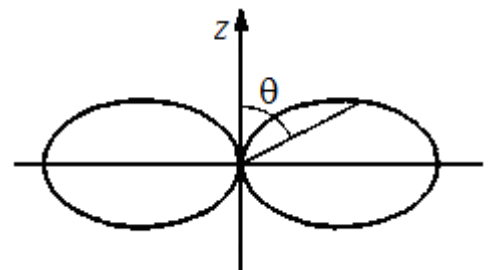


Рис. 28.7.

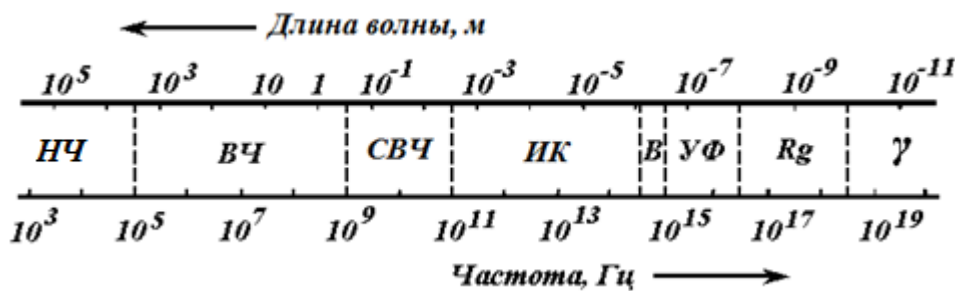


Рис. 28.8.

2). **Радіохвилі** – електромагнітні хвилі, частоти яких лежать в діапазоні $\nu = 10^5 - 10^{11}$ Гц, а довжини - в діапазоні $\lambda = 1\ 000\ \text{м} - 1\ \text{мм}$. Хвилі з довжиною хвилі менше, ніж 1 мм (частота менше ніж 300 ГГц) називаються мікрохвилями або

хвилями надвисоких частот (НВЧ - хвилі). Радіохвилі отримують за допомогою коливальних контурів і макроскопічних вібраторів. У природі радіохвилі випромінюються різними позаземними джерелами (ядра галактик, квазари).

3). **Інфрачервоне випромінювання** - електромагнітне випромінювання, що займає спектральну область між червоним кінцем видимого світла (з довжиною хвилі $\lambda = 0,74\ \mu\text{м}$ і частотою 430 ТГц) і мікрохвильовим радіовипромінювання ($\lambda \sim 1-2\ \text{мм}$, частота 300 ГГц).

Інфрачервоне випромінювання також називають «тепловим» випромінюванням, оскільки інфрачервоне випромінювання від нагрітих предметів сприймається шкірою людини як відчуття тепла. Інфрачервоне випромінювання становить більшу частину випромінювання ламп розжарювання, газорозрядних ламп, близько 50% випромінювання Сонця; інфрачервоне випромінювання випускають деякі лазери. Для його реєстрації користуються тепловими та фотоелектричними приймачами, а також спеціальними фотоматеріалами.

Інфрачервоне випромінювання випускають збуджені атоми або іони. Інфрачервоне випромінювання дають всі тіла при будь-якій температурі. Людина випромінює електромагнітні хвилі $\lambda \approx 9 \cdot 10^{-6}\ \text{м}$.

Найважливіші властивості ІЧ - випромінювання: проходить через деякі непрозорі тіла, а також крізь дощ, серпанок, сніг, чинить хімічну дію на фотопластинки, поглинаючись речовиною, нагріває її; викликає внутрішній фотоефект у германію, ІЧ - випромінювання є невидимим.

Використовуючи ІЧ - випромінювання, в промисловості сушать пофарбовані вироби, стіни будинків, деревину. Інфрачервоний обігрівач віддає тепло переважно випромінюванням, а не конвекцією. Особливо актуальне використання ІЧ - випромінювання для отримання зображення предметів в темряві в приладах нічного бачення. Інфрачервоні діоди і фотодіоди повсюдно застосовуються в пультах дистанційного управління, системах автоматики і т.д.

4) **Видиме випромінювання** - електромагнітні хвилі, що сприймаються людським оком. Зазвичай в якості короткохвильової границі видимого світла приймають ділянку 380 - 400 нм (750 - 790 ТГц) - фіолетовий колір, а в якості довгохвильової – 760 - 780 нм (385 - 395 ТГц) - червоний колір.

5). **Ультрафіолетове випромінювання** - електромагнітне випромінювання, що займає спектральний діапазон між видимим і рентгенівським випромінюваннями. Довжини хвиль УФ - випромінювання лежать в інтервалі від 10 до 400 нм ($7,5 \cdot 10^{14} - 3 \cdot 10^{16}$ Гц).

Джерелами є газорозрядні лампи з трубками з кварцу (кварцові лампи). Випромінюється усіма твердими тілами, у яких $T > 1000\ \text{°C}$, а також світлою ртутною парою. Входить до складу сонячного світла. Є невидимим.

Має високу хімічну активність, велику проникаючу здатність, убиває мікроорганізми, в невеликих дозах благотворно впливає на організм людини (засмага), але у великих дозах чинить негативний біологічний вплив, викликаючи зміни в розвитку клітин і обміні речовин, діє на очі.

6). **Рентгенівські промені** становлять собою електромагнітні хвилі з довжиною від 50 нм до 10^{-3} нм, що відповідає енергії квантів від 20 еВ до 1 МеВ.

Рентгенівське випромінювання виникає при гальмуванні швидких заряджених частинок (електронів, протонів та ін.), а також в результаті процесів, що відбуваються всередині електронних оболонок атомів. Отримують за допомогою рентгенівської трубки: електрони у вакуум-

ній трубці прискорюються електричним полем при високій напрузі, досягаючи анода, при зіткненні різко гальмуються. При гальмуванні електрони рухаються з прискоренням і випромінюють рентгенівські електромагнітні хвилі.

Застосовується в медицині (діагностика захворювань внутрішніх органів), в промисловості (контроль внутрішньої структури різних виробів, зварних швів).

7). **γ -випромінювання** складають електромагнітні хвилі з довжиною хвилі менше 10^{-2} нм, що відповідає енергії квантів більше 0,1 МеВ. Випускається збудженими атомними ядрами під час радіоактивних перетворень і ядерних реакцій.

Контрольні питання

1. Які основні слідства випливають з теорії Максвелла?
2. Як показати, що з рівнянь Максвелла випливає висновок про існування електромагнітних хвиль?
3. Перелічіть основні властивості електромагнітних хвиль.
4. У чому полягає відмінність електромагнітних хвиль від всіх інших видів хвиль?
5. Якою хвилею - поперечною або поздовжньою - є електромагнітна хвиля?
6. Як спрямовані вектори \mathbf{E} і \mathbf{B} відносно швидкості поширення \mathbf{v} в плоскій електромагнітній хвилі? Які співвідношення між фазами коливань векторів \mathbf{E} і \mathbf{B} біжучої електромагнітної хвилі?
7. Скільки повних коливань робить в секунду вектор напруженості \mathbf{E} електричного поля електромагнітної хвилі довжиною $\lambda = 0,55$ мкм в вакуумі?
8. Чи можна виявити випромінювання електромагнітних хвиль, яке створюється провідником з промисловим змінним струмом частотою 50 Гц? Якою є довжина хвилі випромінювання при цьому?
9. На що витрачається енергія джерела: а) постійного струму; б) змінного струму?
10. За теорією Максвелла показник заломлення n світла для деякої прозорої речовини і її діелектрична проникність ϵ пов'язані співвідношенням $n = \sqrt{\epsilon\mu}$, або, враховуючи, що для прозорих діелектриків $\mu \approx 1$, $n = \sqrt{\epsilon}$. Діелектрична проникність води $\epsilon = 81$. Здавалося б, що $n = 9$. Але добре відомо, що для води $n = 1,33$. Як пояснити цей факт?
11. Чи можливе існування хвилі, в якій змінювалася б тільки напруженість електричного поля, а магнітне поле залишалось б постійним?
12. Перелічіть основні джерела електромагнітних хвиль.
13. Чому при електромагнітних коливаннях в закритому контурі не відбувається випромінювання електромагнітних хвиль, а в відкритому вібраторі відбувається?
14. А) Звук певної частоти поширюється в воді і повітрі. В якому середовищі більше довжина звукової хвилі? Б) Світло певної частоти поширюється в воді і повітрі. В якому середовищі більше довжина світлової хвилі?
15. Чим відрізняються вирази для густини потоку енергії механічних і електромагнітних хвиль?
16. У хвильовій зоні елементарного вібратора електромагнітна хвиля може вважатися сферичною. Чи має сферичну симетрію електромагнітне поле такої хвилі?

Література для поглибленого вивчення

1. Кучерук І. М., Горбачук І.Т, Луцик П.П. Загальний курс фізики. У 3 т. Т.1: Механіка. Молекулярна фізика і термодинаміка. – К.: «Техніка», 1999, – 523 с
2. Бушок Г.Ф., Левандовський В.В., Півень Г.Ф.. Курс фізики. У 2 кн.: Кн.1. Фізичні основи механіки. Електрика і магнетизм. – К.:«Либідь», 2001. – 448с.
3. Кингсеп А.С., Локшин Г.Р., Ольхов О.А. Основы физики. Курс общей физики. В 2 т. Т.1. Механика. Электричество и магнетизм. Колебания и волны, волновая оптика. М.: Физматлит, 2001. – 560 с.
4. Савельев И.В. Курс физики. В 3-х т. Т 2. Электричество. Колебания и волны. Волновая оптика. – М.: «Наука», 1989, – 464с.,
5. Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс физики. – М. «Высш. шк.», 1989, – 609 с.
6. Иродов И.Е. Электродинамика. Основные законы. – М. «Лаборатория базовых знаний». 2002.– 320 с.
7. Ф. Крауфорд. Волны. Берклевский курс физики, т.3. Перевод с англ. под ред. А.И.Шальникова и А.О.Вайсенберга, изд.2-е.М.»Наука»,1976.- 528 с.
8. Сивухин Д.В. Общий курс физики. – М.: «Наука», 1977.– Т. 3. Электричество. 688 с.
9. Стрелков С.П. Механика. М.: «Наука», 1975– 560 с.
10. Калашников Н.П., Смондырев М.А. Основы физики. В 2 т. Т. 1. М.:Дрофа, 2003, 400 с.
11. Бутиков Е.И., Кондратьев А.С. Физика. Учеб. пособие. В 3 кн.Кн.2. Электродинамика. Оптика. – М.: Физматлит, 2004.-336 с.
12. Трофимова Т.И. Курс физики. – М., «Академия», 2005, – 560 с.

- 13.. Чертов А.Г. Воробьев А.А. Задачник по физике. – М.: «Физмат лит», 2005 – 640 с.
- 14.. Гаркуша І.П., Горбачук І.Т., Курінний В.П. та ін. Загальний курс фізики: Збірник задач – К.: «Техніка», 2004,– 560 с.