Министерство образования и науки Украины
Национальный горный университет

ФИЗИКА

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Для студентов высших учебных заведений
заочной формы обучения
отрасли знаний «Инженерия»

Днепропетровск
НГУ
2007

Физика. Методические указания и контрольные задания для студентов заочной формы обучения высших учебных заведений./ Сост. И.П. Гаркуша, Л.Ф. Мостипан. - Днепропетровск: НГУ, 2007. -128с.

Пособие предназначено для студентов-заочников отрасли знаний «Инженерия» и призвано оказать им методическую помощь в изучении курса физики и выполнении контрольных работ. В пособии приводятся основные законы и формулы, примеры решения задач и 10 вариантов контрольных заданий по всем разделам курса физики. Кроме того, даны общие методические указания по решению задач и оформлению контрольной работы. Пособие содержит также справочные таблицы, некоторые сведения по математике и приближенным вычислениям.

Может быть использовано для самостоятельной работы студентами дневной формы обучения и преподавателями вузов.

Составители: Гаркуша И.П., канд. физ.-мат.наук
Мостипан Л.Ф., канд. техн. наук

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие

Настоящее пособие предназначено для оказания методической помощи студентам-заочникам инженерно-технических специальностей вузов в изучении курса физики и выполнении контрольных работ. Пособие составлено в соответствии с действующей программой курса физики для высших технических учебных заведений. Вариант программы курса физики, отражающий опыт работы кафедры физики Национального горного университета со студентами-заочниками, приведен в начале пособия.

Даны общие методические указания по решению задач и оформлению контрольной работы. Традиционно материал курса физики разделен на шесть разделов. В начале каждого разделе приводятся основные законы и формулы, примеры решения задач и после этого 10 вариантов контрольных заданий. Кроме того, пособие содержит также справочные таблицы, некоторые сведения по математике и приближенным вычислениям.

Наряду с оригинальными составители использовали примеры и задачи из других пособий, имеющие большую методическую ценность, в частности, из «Методических указаний и контрольных заданий» под редакцией А.Г.Чертова, М., «Высшая школа», 1987.

Пособие может оказать существенную помощь и студентам дневной формы обучения вузов при самостоятельной работе над курсом физики. Оно будет полезно преподавателям физики вузов.

ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ «ФИЗИКА» ДЛЯ СТУДЕНТОВ-ЗАОЧНИКОВ ОТРАСЛИ ЗНАНИЙ 09. «ИНЖЕНЕРИЯ»

Введение

Предмет физики и ее связь с другими науками.

Физические основы механики

Элементы кинематики материальной точки. Система отсчета, радиус-вектор, траектория, путь, вектор перемещения. Скорость и ускорение точки как производные радиус-вектора по времени. Нормальное и тангенциальное ускорения.

Динамика материальной точки и поступательного движения твердого тела. Закон инерции и инерциальные системы отсчета. Масса. Сила. Второй и третий законы Ньютона. Механические силы (сила тяжести и вес, силы упругости и трения). Закон сохранения импульса. Центр масс.

Работа и энергия. Работа силы, мощность. Кинетическая и потенциальная энергии. Связь кинетической энергии с работой сил, приложенных к системе. Консервативные силы. Связь между консервативной силой и потенциальной энергией. Закон сохранения механической энергии. Применение законов сохранения к удару абсолютно упругих и абсолютно неупругих тел.

Механика твердого тела. Кинематика вращательного движения. Угловая скорость и угловое ускорение. Связь угловых и линейных скоростей и ускорений. Момент инерции. Кинетическая энергия вращения. Момент силы. Уравнение динамики вращательного движения твердого тела. Момент импульса и закон его сохранения. Кинетическая энергия тела при плоском движении.

Элементы специальной теории относительности. Преобразования Галилея. Постулаты Эйнштейна. Преобразования Лоренца. Следствия из преобразований Лоренца. Интервал между событиями. Основной закон релятивистской динамики. Релятивистское выражение для кинетической энергии. Взаимосвязь массы и энергии покоя.

Основы молекулярной физики и термодинамики

Молекулярно-кинетическая теория идеальных газов. Статистический и термодинамический методы. Опытные законы идеального газа. Уравнение Клапейрона – Менделеева. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеальных газов. Число степеней свободы молекулы. Закон равномерного распределения энергии по степеням свободы молекул. Средняя кинетическая энергия молекул. Закон Максвелла о распределении молекул идеального газа по скоростям и энергиям теплового движения. Барометрическая формула. Закон Больцмана для распределения частиц во внешнем потенциальном поле. Среднее число столкновений и средняя длина свободного пробега молекул. Явления переноса в термодинамически неравновесных системах. Опытные законы диффузии, теплопроводности и внутреннего трения.

Основы термодинамики. Работа, совершаемая газом при изменении его объема. Количество теплоты. Теплоемкость. Внутренняя энергия. Первый закон термодинамики. Применение первого закона термодинамики к изопроцессам. Адиабатный процесс. Круговой процесс (цикл). Обратимые и необратимые процессы. Энтропия, ее статистическое толкование. Второй закон термодинамики. Тепловые двигатели и холодильные машины. Цикл Карно и его КПД для идеального газа.

Реальные газы, жидкости и твердые тела. Силы и потенциальная энергия межмолекулярного взаимодействия. Уравнение Ван-дер-Ваальса. Сравнение изотерм Ван-дер-Ваальса с экспериментальными. Строение жидкостей. Поверхностное натяжение. Капиллярные явления. Твердые тела. Моно- и поликристаллы. Физические типы кристаллов. Дефекты в кристаллах.

Электричество и электромагнетизм

Электростатическое поле в вакууме. Закон сохранения электрического заряда. Закон Кулона. Электрическое поле. Напряженность. Принцип суперпозиции полей. Поток вектора напряженности. Теорема Гаусса для электростатического поля в вакууме и ее применение к расчету электростатических полей. Работа перемещения электрического заряда. Потенциал. Напряженность как градиент потенциала.

Электрическое поле в диэлектриках. Свободные и связанные заряды в диэлектриках. Типы диэлектриков. Поляризация. Поляризованность. Диэлектрическая восприимчивость и диэлектрическая проницаемость вещества. Электрическое смещение. Напряженность поля в диэлектрике.

Проводники в электростатическом поле. Электрическое поле заряженного проводника. Проводники во внешнем электрическом поле. Электроемкость уединенного проводника. Конденсаторы. Энергия системы зарядов, заряженных проводников и конденсаторов. Энергия электростатического поля.

Постоянный электрический ток. Сила и плотность тока. Сторонние силы. Электродвижущая сила и напряжение. Закон Ома. Сопротивление проводников. Работа и мощность тока. Закон Джоуля-Ленца. Правила Кирхгофа для разветвленных цепей. Элементарная классическая электронная теория электропроводности металлов. Вывод основных законов электрического тока из электронных представлений. Работа выхода электронов из металла. Термоэлектронная эмиссия. Ток в газах. Понятие о плазме.

Магнитное поле. Магнитная индукция. Закон Био-Савара-Лапласа. Магнитные поля прямолинейного проводника с током и кругового тока. Закон Ампера. Контур с током в магнитном поле. Магнитное поле движущегося заряда. Сила Лоренца. Движение заряженных частиц в магнитном поле. Эффект Холла. Поток и циркуляция вектора магнитной индукции. Магнитное поле соленоида. Работа по перемещению проводника и контура с током в магнитном поле.

Электромагнитная индукция. Закон Фарадея. Правило Ленца. Вращение рамки в магнитном поле. Явление самоиндукции. Индуктивность. Взаимная индукция. Трансформаторы. Энергия магнитного поля.

Магнитное поле в веществе. Магнитные моменты электронов и атомов. Диа- и парамагнетики. Намагниченность. Магнитная восприимчивость и магнитная проницаемость вещества. Ферромагнетики и их свойства. Спиновая природа ферромагнетизма.

Основы теории Максвелла для электромагнитного поля. Вихревое электрическое поле. Ток смещения. Уравнения Максвелла в интегральной форме.

Колебания и волны

Механические и электромагнитные колебания. Гармонические колебания. Дифференциальное уравнение гармонических колебаний. Пружинный, физический и математический маятники. Энергия гармонических колебаний. Свободные гармонические колебания в колебательном контуре. Сложение гармонических колебаний одного направления. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний. Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний (механических и электромагнитных) и его решение. Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний (механических и электромагнитных) и его решение. Резонанс.

Упругие волны. Образования волн в упругой среде. Продольные и поперечные волны. Уравнение бегущей волны. Волновое уравнение. Фазовая скорость. Энергия волны. Интерференция волн. Стоячие волны. Звуковые волны. Эффект Доплера в акустике.

Электромагнитные волны, их основные свойства и применение. Дифференциальное уравнение электромагнитной волны. Энергия электромагнитных волн. Поток энергии. Вектор Умова-Пойнтинга. Излучение диполя.

Волновая оптика

Интерференция света. Когерентность и монохроматичность световых волн. Интерференция света от двух источников. Интерференция света в тонких пленках. Интерферометры.

Дифракция света. Принцип Гюйгенса – Френеля. Метод зон Френеля. Дифракция на круглом отверстии и диске. Дифракция Фраунгофера на щели и дифракционной решетке. Дифракция рентгеновского излучения. Формула Вульфа – Брэггов. Принцип голографии.

Влияние среды на свойства света. Естественный и поляризованный свет. Закон Малюса. Поляризация света при отражении и преломлении на границе двух диэлектриков. Закон Брюстера. Двойное лучепреломление. Поляроиды. Дисперсия, поглощение, рассеяние света.

Квантовая природа излучения

Тепловое излучение. Опытные законы излучения абсолютно черного тела (законы Кирхгофа, Стефана-Больцмана и Вина). Квантовая гипотеза и формула Планка. Фотоэлектрический эффект. Фотоны. Уравнение Эйнштейна для внешнего фотоэффекта. Энергия и импульс фотона. Давление света. Эффект Комптона и его элементарная теория.

Элементы атомной физики и квантовой механики

Волновые свойства микрочастиц. Формула де Бройля. Соотношение неопределенностей. Волновая функция и ее статистический смысл. Уравнение Шредингера для стационарных состояний. Движение свободной частицы. Частица в бесконечно глубокой «потенциальной яме». Квантование энергии частицы. Прохождение частицы сквозь потенциальный барьер. Атом водорода в квантовой механике. Главное, орбитальное и магнитное квантовые числа. Спин электрона. Фермионы и бозоны. Принцип Паули. Распределение электронов в атоме по состояниям. Поглощение, спонтанное и вынужденное излучения. Понятие о лазере.

Элементы квантовой статистики и физики твердого тела

Квантовая статистика. Фазовое пространство. Функция распределения. Понятие о квантовой статистике Бозе-Эйнштейна и Ферми-Дирака. Вырожденный электронный газ в металлах. Энергия Ферми. Влияние температуры на распределение электронов. Уровень Ферми. Понятие о квантовой теории теплоемкости. Фононы. Характеристическая температура Дебая. Электропроводность металлов. Сверхпроводимость. Понятие об эффекте Джозефсона.

Энергетические зоны в кристаллах. Металлы, диэлектрики и полупроводники по зонной теории. Собственная проводимость полупроводников. Квазичастицы – электроны проводимости и дырки. Примесная проводимость полупроводников. Контакт электронного и дырочного полупроводника (*p*-*n*-переход) и его вольт-амперная характеристика. Фотоэлектрические явления в полупроводниках.

Элементы физики атомного ядра и элементарных частиц

Заряд, размер и состав атомного ядра. Массовое и зарядовое числа. Ядерные силы. Дефект массы и энергия связи ядра. Радиоактивность и ядерные реакции. Реакция деления ядер. Понятие о ядерной энергетике. Реакция синтеза атомных ядер. Проблема управляемых термоядерных реакций. Элементарные частицы. Четыре типа фундаментальных взаимодействий: сильное, электромагнитное, слабое и гравитационное.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Основная

1. Трофимова Т.И. Курс физики. – М., «Академия», 2005, 560 с.
2. Кучерук І. М., Горбачук І.Т, Луцик П.П. Загальний курс фізики. У 3 т. Т.1: Механіка. Молекулярна фізика і термодинаміка. К.; «Техніка», 1999, – 536 с.Т.2. Електрика і магнетизм. К.; «Техніка», 2001, – 452 с. Т.3. Оптика. Квантова фізика. К.; «Техніка», 1999, – 520 с.
3. Чертов А.Г. Воробьев А.А. Задачник по физике. – М.: «Физмат лит», 2005 – 640 с.
4. Гаркуша І.П., Горбачук І.Т., Курінний В.П. та ін. Загальний курс фізики: Збірник задач. – К.: «Техніка», 2004,– 560 с.

Дополнительная

5. Савельев И.В. Курс физики. В 3-х т. Т 1: Механика. Молекулярная физика. – М.: «Наука», 1989, – 352с., Т.2: Электричество. Колебания и волны. Волновая оптика. М.: «Наука», 1989, – 464с. Т.3:Квантовая оптика. Атомная физика. Физика твердого тела. Физика атомного ядра и элементарных частиц. М.: «Наука», 1989, – 304с.
6. Иродов И.Е. Механика. Основные законы. М. «Лаборатория базовых знаний».2005.– 309 с. Физика макросистем. Основные законы. М. «Лаборатория базовых знаний».2001.– 208 с. Электромагнетизм. Основные законы. М. «Лаборатория базовых знаний».2002.– 320 с. Волновые процессы. М. «Лаборатория базовых знаний». 2005.– 309 с. Квантовая физика. Основные законы. М. «Лаборатория базовых знаний».2004.– 256 с.
7. Бушок Г.Ф., Левандовський В.В., Півень Г.Ф.. Курс фізики. У 2 кн.: Кн.1.Фізичні основи механіки. Електрика і магнетизм. К.:«Либідь», 2001. – 448с.
8. Бушок Г.Ф., Венгер Є.Ф. . Курс фізики:Кн.2. Оптика. Фізика атома і атомного ядра. Молекулярна фізика і термодинаміка. К.: «Либідь», 2001. – 424с
9. Чолпан П.П.. Фізика: К.: «Вища шк.»., 2004.– 567с.
10. Зачек І.Р., Кравчук І.М, Романишин Б.М. та ін. Курс фізики. Під ред. І.Є.Лопатинського – Львів, „Бескід Біт”, 2002, – 376 с.
11. Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс физики. М. «Высш. шк.», 1989, – 609 с.
12. Яворский Б.М, Детлаф А.А., Справочник по физике. М., «Наука», 1985, – 512 с.
13. Калашников Н.П.,. Смондырев М.А. Основы физики. т.1,2. – М. «Дрофа».2003, 398 с. 431 с.
14. .Геворкян Р.Г,. Шепель В.В. Курс общей физики. – М.: «Высш . шк.» , 1972, – 599 с.
15. Волькенштейн В.С. Сборник задач по общему курсу физики.– СПб.: «Книжный мир», 2005.– 328 с.
16. Трофимова Т.И., Павлова З.Г.. Сборник задач по курсу физики с решениями. М.: «Высш. шк.», 1999. – 591 с.
17. Сивухин Д.В. Общий курс физики. – М.: «Наука», 1977-1980.– Т. 1, 2, 3, 4.
18. .Матвеев А.Н. Механика и теория относительности. Молекулярная физика. Электродинамика. Оптика. Атомная физика.– М.: «Высш. шк.». 1980-1986.

ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

1. За время изучения курса физики студент обязан выполнить 6 контрольных работ. Студент берет для решения тот вариант, номер которого совпадает с последней цифрой его шифра (цифра нуль означает 10-й вариант).

2. Контрольные работы нужно выполнять в школьной тетради, на обложке которой привести сведения по следующему образцу:

Министерство образования и науки Украины Национальный горный университет Кафедра физики КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № …… студента ……курса, группы….. института заочно-дистанционного обучения НГУ Коваленко А. В. Домашний адрес: г. Павлоград, ул. Лесная, 2, кв.5 Шифр 257320 Вариант 10 Преподаватель, выдавший задание Сидоров П.И. Дата отправления «….»…………..200…г.

3. Условия задач в контрольной работе надо переписывать полностью без сокращений. Для замечаний преподавателя на страницах тетради оставлять поля.

4. В конце контрольной работы указать, каким учебником или учебным пособием студент пользовался во время изучения физики (название учебника, автор, год издания). Это делается для того, чтобы рецензент, если возникнет потребность, имел возможность указать, что надо студенту выучить для завершения контрольной работы.

5. Присылать на рецензию надо одновременно не больше одной работы. Во избежание одних и тех же ошибок, очередную работу следует высылать только после получения рецензии на предыдущую.

6. Если контрольная работа при рецензировании не зачтена, студент обязан исправить все ошибки и возвратить работу на повторную рецензию. Повторную работу необходимо представить вместе с незачтенной.

7. Зачтенные контрольные работы поступают к экзаменатору. Во время экзамена студент должен быть готов дать объяснения решения задач, входящих в контрольную работу.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

1. Для успешного выполнения контрольных работ предварительно изучите соответствующий *теоретический материал*, а затем рассмотрите приведенные в пособии задачи с решениями. Каждую из этих задач рекомендуется решить самостоятельно и сопоставить свое решение с решением, .приведенным в пособии.

2. Приступая к решению задачи, необходимо выяснить ее физическую сущность, вникнуть в ее смысл и постановку вопроса. Как правило, ни одно слово в условии не является лишним. Необходимо *определить все информативные слова* и отобразить

информацию, которую они несут, в сокращенной записи. Значения величин следует выражать только в единицах СИ.

Установите, какие данные , необходимые для решения, приведены. Недостающие данные можно найти в таблицах приложения.

3. Если позволяет характер задачи, следует обязательно *сделать рисунок* или схему, поясняющий сущность задачи. Грамотный рисунок облегчает поиск решения.

4. Один из методов решения состоит в том, что сначала *находят формулу,* содержащую искомую величину и величины, заданные в условии. Если в этой формуле имеются неизвестные величины, то используя вспомогательные формулы, выражают их через известные величины. Подставив найденные выражения этих неизвестных величин в формулу искомой величины, получают формулу общего решения задачи.

Другой метод состоит в том, что находят формулы, которые выражают *функциональную зависимость* между величинами, известными из условия. В конечном итоге искомая величина определяется через величины, связанные с условием.

Многие физические задачи решаются с помощью *законов сохранения*. Напомним, что всякий физический закон верен лишь при выполнении определенных условий. Поэтому следует проверить, применим ли тот или иной закон в условиях данной задачи.

5. Решения задач следует сопровождать краткими, но исчерпывающими *пояснениями,* которые в логической последовательности раскрывают ход рассуждений. Решать задачи надо в общем виде, т.е. выразить искомую величину в буквенных обозначениях величин, которые являются заданными в условии. При таком способе избегают вычисления промежуточных величин.

6. Получив решение в общем виде, следует его *проанализировать,* для чего убедиться в том, что полученный результат имеет *единицы измерения* искомой величины. Неверная единица измерения свидетельствует об ошибочности решения.

В приложении приводятся единицы физических величин и их выражение через основные единицы (в СИ – метр, килограмм, секунда, ампер, кельвин, кандела). Можно упростить анализ, подставляя в правую часть формулы общего решения только наименования величин. Если наименование правой части совпадает с наименованием искомой величины, то решение задачи правильно.

7. Вычисление искомой величины надо проводить, пользуясь *правилами действий с приближенными числами* (см. приложение «О приближенных вычислениях»). Производя численные расчеты, надо учитывать степень точности данных задачи. Распространенной является ошибка, когда окончательный числовой результат, полученный с помощью калькулятора, имеет точность, превышающую точность исходных данных.

В пособии все величины ***в условиях*** задач выражены с точностью *до **трех значащих цифр***. Если какое-нибудь число содержит одну или две значащие цифры, то это означает, что последующие две или одна значащие цифры – нули, которые в целях упрощения записи опущены. Например, числа 0,1, 4, 16 следует принимать за 0,100, 4,00, 16,0 и т.д.

Следовательно, ***ответ*** *должен быть вычислен также с точностью до* ***трех значащих цифр***. Числовой результат следует записывать как произведение десятичной дроби с одной значащей цифрой перед запятой на соответствующую степень десяти. Например, вместо 3520 надо писать $3{,}52 \cdot 10^3$, вместо 0,00129 писать $1{,}29 \cdot 10^{-3}$ и т.п.

8. После получения числового результата следует оценить его *правдоподобность*. Такая оценка иногда помогает найти допущенную ошибку. Например, скорость частицы не может превышать скорости света, заряд частицы не может быть меньшим заряда электрона и т.д.

ТЕМЫ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ И МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ПО РАЗДЕЛАМ КУРСА ФИЗИКИ

1. ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕХАНИКИ

ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ И ФОРМУЛЫ

1.1. Кинематика материальной точки

- Положение материальной точки в пространстве задается радиус-вектором **r**:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

где **i**, **j**, **k**– единичные векторы – орты системы координат; x, y, z – координаты точки.

- Средняя и мгновенная скорости материальной точки

$$\langle \mathbf{v} \rangle = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}, \qquad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt},$$

где $\Delta\mathbf{r}$ – перемещение материальной точки за промежуток времени Δt,

$\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}$, $\upsilon_x = \dfrac{dx}{dt}; \upsilon_y = \dfrac{dy}{dt}; \upsilon_z = \dfrac{dz}{dt}$ – проекции скорости **v** на оси координат.

- Модуль вектора скорости

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2}.$$

- Путь, пройденный точкой

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \upsilon dt.$$

- Среднее и мгновенное ускорение

$$<\mathbf{a}> = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}, \qquad \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt};$$

где $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$; $a_x = \dfrac{d\upsilon_x}{dt}; \; a_y = \dfrac{d\upsilon_y}{dt}; \; a_z = \dfrac{d\upsilon_z}{dt};$ – проекции ускорения **a** на оси координат.

- Модуль мгновенного ускорения

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

- Полное ускорение при криволинейном движении

$$, \mathbf{a} = \mathbf{a}_n + \mathbf{a}_\tau$$

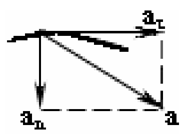


Рис. 1.1

где $\mathbf{a}_n$ – нормальная, $\mathbf{a}_\tau$ – тангенциальная составляющие ускорений (рис. 1.1). Модули этих ускорений

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R}; \quad a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt}; \quad a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2},$$

где R – радиус кривизны траектории в данной точке.

Путь и скорость для равнопеременного движения

$$s = \upsilon_0 t \pm \frac{at^2}{2}; \upsilon = \upsilon_0 \pm at; \upsilon^2 - \upsilon_0^2 = \pm 2as,$$

где υ_0 – начальная скорость.

1.2. Кинематика вращательного движения

• Средняя и мгновенная угловые скорости

$$\langle\omega\rangle = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}, \qquad \omega = \frac{d\varphi}{dt},$$

где φ – угол поворота радиус-вектора материальной точки.

• Угловое ускорение

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}.$$

Угловая скорость для равномерного вращения

$$\omega = \frac{\varphi}{t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi n$$

где T – период вращения, n – частота вращения ($n = N/t$, где N – число оборотов, совершаемых телом за время t).

Угол поворота и угловая скорость для равнопеременного вращательного движения

$$\varphi = \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2}; \qquad \omega = \omega_0 \pm \varepsilon t.$$

• Связь между линейными и угловыми величинами:

$$s = R\varphi, \ \upsilon = \omega R, \ a_\tau = \varepsilon R, \ a_n = \omega^2 R, \ a = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

1.3. Динамика материальной точки и поступательного движения твердого тела

• Импульс материальной точки

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}.$$

• Второй закон Ньютона (основное уравнение динамики материальной точки)

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt},$$

где **F** – результирующая сила, действующая на материальную точку.

• Силы, рассматриваемые в механике:

а) сила тяжести

$$\mathbf{P} = m\mathbf{g};$$

б) сила гравитационного взаимодействия (закон всемирного тяготения)

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2},$$

где F – сила взаимного притяжения двух материальных точек массами m_1 и m_2; G – гравитационная постоянная; r – расстояние между точками.

в) сила упругости (закон Гука для продольного растяжения или сжатия)

$$F_x = -kx, \quad \text{или } \sigma = \varepsilon E,$$

где F_x – проекция упругой силы на ось x, k – коэффициент упругости (в случае пружины – жесткость), x– деформация; $\sigma = F_{упр}/S$– нормальное напряжение, S – площадь поперечного сечения, $\varepsilon = x/l$ – относительная деформация, l – начальная длина тела, E – модуль Юнга.

г) сила трения скольжения

$$F_{тр} = \mu N,$$

где μ – коэффициент трения скольжения; N – сила нормального давления.

- Закон сохранения импульса для замкнутой системы тел

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{v}_i = \text{const}.$$

- Работа, совершаемая постоянной силой,

$$dA = F_s ds = F\, ds \cos\alpha,$$

где α – угол между направлением силы и перемещения.

- Работа переменной силы на пути s

$$A = \int_s F_s ds.$$

- Мгновенная мощность

$$N = \frac{dA}{dt} = F\upsilon\cos\alpha.$$

- Кинетическая энергия тела, движущегося поступательно,

$$T = \frac{m\upsilon^2}{2}, \text{ или } T = \frac{p^2}{2m}.$$

- Потенциальная энергия:

а) упруго деформированной пружины

$$\Pi = \frac{kx^2}{2},$$

б) гравитационного взаимодействия двух материальных точек

$$\Pi = -G\frac{m_1 m_2}{r},$$

в) тела, поднятого над поверхностью Земли на высоту h

$$\Pi = mgh,$$

где g – ускорение свободного падения (формула справедлива при условии $h << R$, где R – радиус Земли).

- Закон сохранения механической энергии (выполняется в замкнутой системе, в которой действуют только консервативные силы)

$$T + \Pi = \text{const}.$$

- Работа A результирующей всех сил равна приращению кинетической энергии материальной точки:

$$A = T_2 - T_1.$$

- Работа A консервативных сил равна убыли потенциальной энергии материальной точки:

$$A = \Pi_1 - \Pi_2.$$

1.4. Динамика вращения вокруг неподвижной оси

- Момент инерции материальной точки относительно оси Oz

$$J_z = mr^2,$$

где m – масса материальной точки, r – расстояние от нее до оси Oz.

- Момент инерции твердого тела относительно оси Oz

$$J_z = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i r_i^2$$

где r_i – расстояние i-го элемента массы m_{i} до оси Oz. В случае непрерывного распределения масс

$$J = \int r^2 dm.$$

Моменты инерции некоторых тел правильной геометрической формы:

Тело	Ось, относительно которой определяется момент инерции	Момент инерции
Однородный тонкий стержень массой m и длиной l	Проходит через центр масс стержня перпендикулярно стержню	$\frac{1}{12}ml^2$
	Проходит через конец стержня перпендикулярно стержню	$\frac{1}{3}ml^2$
Тонкое кольцо, обруч, труба радиусом R и массой m	Ось симметрии	mR^2
Круглый однородный диск, цилиндр радиусом R и массой m	То же	$\frac{1}{2}mR^2$
Однородный шар радиусом R и массой m	Проходит через центр шара	$\frac{2}{5}mR^2$

- Момент инерции тела относительно произвольной оси (теорема Штейнера)

$$J = J_0 + ma^2,$$

где J_0 – момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс тела параллельно заданной оси; a – расстояние между осями; m – масса тела.

- Момент силы относительно оси вращения Oz

$$M_z = F_{\perp} l,$$

где $F_{\perp}$ – проекция силы на плоскость, перпендикулярную оси Oz, l – плечо силы (кратчайшее расстояние от оси вращения до линии действия силы).

- Момент импульса твердого тела относительно неподвижной оси вращения Oz

$$L_z = J_z \omega,$$

где J_z – момент инерции относительно оси вращения, ω – угловая скорость.

- Уравнение динамики вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси z

$$M_z = \frac{dL_z}{dt} = \frac{d(J_z\omega)}{dt}, \text{ или } M_z = J_z\varepsilon$$

где M_z – результирующий момент относительно оси Oz внешних сил, действующих на тело; ε – угловое ускорение; J_z – момент инерции твердого тела относительно оси вращения.

- Если $M_z = 0$ (система замкнута), то имеет место закон сохранения момента импульса относительно оси Oz

$$J_z\omega = \text{const}.$$

- Кинетическая энергия тела, вращающегося вокруг неподвижной оси z,

$$T = \frac{J_z\omega^2}{2}.$$

- Работа при вращательном движении

$$dA = M_z d\varphi,$$

где $d\varphi$ – угол поворота тела.

- Кинетическая энергия тела, катящегося по плоскости

$$T = \frac{m\upsilon_c^2}{2} + \frac{J_c\omega^2}{2},$$

где v_c – скорость центра масс, J_c – момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс.

1.5. Релятивистская механика

- Во всех задачах считается, что система отсчета K' движется со скоростью v в положительном направлении оси Ox системы K, причем оси Ox' и Ox совпадают, а оси Oy' и Oy, а также Oz' и Oz параллельны.
- Релятивистское сокращение длины стержня

$$l = l_0\sqrt{1-\left(\frac{\upsilon}{c}\right)^2},$$

где l_0 – длина стержня, измеренная в системе координат, относительно которой стержень покоится, l – длина стержня, измеренная в системе координат, относительно которой он движется со скоростью v.

- Релятивистское замедление хода часов

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}},$$

где Δt_0 – интервал времени между двумя событиями, происходящими в одной точке системы K', измеренный по часам этой системы (движущимся вместе с телом), Δt – интервал времени между двумя событиями, измеренный по часам системы K, относительно которой тело движется со скоростью v.

- Релятивистский закон сложения скоростей

$$v = \frac{v' + v_0}{1 + v_0 v'/c^2},$$

где v′ – скорость тела относительно системы *K′*; v_0 – скорость системы *K′* относительно *K*, v – скорость тела относительно системы *K*.

- Релятивистская масса и релятивистский импульс

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \qquad p = mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-(v/c)^2}},$$

где m_0 – масса покоя.

- Полная энергия релятивистской частицы

$$E = mc^2 = m_0c^2 + T, \quad T = (m - m_0)c^2,$$

где *T* – кинетическая энергия частицы, $m_0c^2 = E_0$ – ее энергия покоя.

- Связь между энергией и импульсом релятивистской частицы

$$E^2 = m_0^2c^4 + p^2c^2, \quad p^2c^2 = T(T - 2E_0).$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1.1. *С башни в горизонтальном направлении брошено тело с начальной скоростью v_0 = 10 м/с. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить для момента времени t = 2 с после начала движения:1) скорость тела;2) радиус кривизны его траектории.*

Решение. Предположим, что через *t* = 2 с после начала движения тело находится в точке *A*. Проведем в этой точке по касательной к траектории вектор мгновенной скорости и разложим его на горизонтальную $\mathbf{v}_x$ и вертикальную $\mathbf{v}_y$ составляющие (рис. 1.2). Тело участвует в двух взаимно перпендикулярных движениях: равномерном прямолинейном движении вдоль оси *Ox* (со скоростью $v_x = v_0$) и свободном падении вдоль оси *Oy* (со скоростью $v_y = gt$). Следовательно, скорость тела в точке *A*

$$v = \sqrt{v_0^2 + g^2t^2}.$$

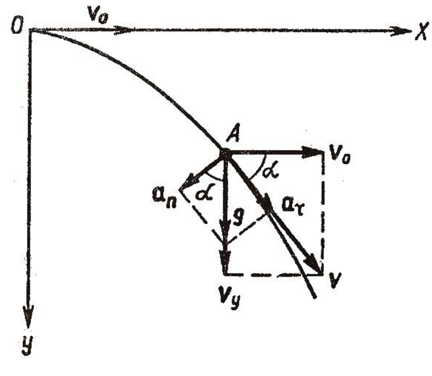


Рис. 1.2

Отметим, что для свободного полета полное ускорение всегда равно **g** – ускорению свободного падения. Разложим вектор **g** на нормальное $\mathbf{a}_n$ и тангенциальное $\mathbf{a}_\tau$ ускорения. Из рисунка видно, что

$$a_n = g\cos\alpha = \frac{gv_0}{\sqrt{v_0^2 + g^2t^2}}.$$

С другой стороны, $a_n = v^2/R$, откуда

$$R = \frac{v^2}{a_n} = \frac{(v_0^2 + g^2t^2)^{3/2}}{gv_0}.$$

Вычисляя, получаем: 1) v = 22 м/с; 2) *R* = 109 м.

Пример 1.2. *Скорость материальной точки изменяется по закону* $\mathbf{v} = (2 + 3t)\mathbf{i} + 10t^2\mathbf{j}$*,(м/с),* **i** *и* **j** *– орты осей x и y. Определить в момент времени t = 2 с* *после начала движения:1) модуль перемещения; 2) модуль скорости; 3) модуль ускорения.*

Решение. Скорость материальной точки задана в задаче как вектор **v** = v_x**i** + v_y**j**. Модуль вектора скорости равен

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2} = \sqrt{(2+3t)^2 + (10t^2)^2}.$$

Компоненты вектора скорости есть производные по времени от компонент радиус-вектора

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j}.$$

Из соотношения $\upsilon_x = \dfrac{dx}{dt}$ следует, что

$$x_2 - x_1 = \int_{t_1}^{t_2} \upsilon_x dt = \int_0^t (2+3t)dt = 2t + \frac{3t^2}{2}.$$

Аналогично находится

$$y_2 - y_1 = \int_{t_1}^{t_2} \upsilon_y dt = \int_0^t 10t^2 dt = \frac{10t^3}{3}.$$

Модуль перемещения

$$|\Delta\mathbf{r}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{t^2(2 + \frac{3t}{2})^2 + (\frac{10t^3}{3})^2}.$$

Ускорение определяется производной от вектора скорости по времени, то есть

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d(2+3t)}{dt}\mathbf{i} + \frac{d(10t^2)}{dt}\mathbf{j} = 3\mathbf{i} + 20t\mathbf{j}.$$

Модуль вектора **a** найдем по формуле

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{9 + (20t)^2}.$$

Подставив числовые значения, получим:

$\Delta r = 28{,}5$ м; $\upsilon = \sqrt{(2+3\cdot 2)^2 + (10\cdot 2^2)^2} = 40{,}8$м/с; $a = \sqrt{9 + (20\cdot 2)^2} = 40{,}1$ м/с^2.

Пример 1.3. *Тело вращается вокруг неподвижной оси по закону* $\varphi = A + Bt + Ct^2$, *где A = 10 рад, B = 20 рад/с, C = – 2 рад/с*^{2}. *Найти полное ускорение точки, находящейся на расстоянии r = 0,1 м от оси вращения, для момента времени t = 4 с.*

Решение. Все точки вращающегося тела описывают окружности. Полное ускорение **a** точки, движущейся по окружности, может быть найдено как векторная сумма тангенциального ускорения $\mathbf{a}_\tau$, направленного по касательной к траектории, и нормального ускорения $\mathbf{a}_n$, направленного к центру кривизны траектории (рис. 1.1):

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_n + \mathbf{a}_\tau.$$

Так как векторы $\mathbf{a}_n$ и $\mathbf{a}_\tau$ взаимно перпендикулярны, то модуль их суммы

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}. \qquad (1)$$

Используем формулы, выражающие связь линейных и угловых величин,

$$a_\tau = \varepsilon r\,,\quad a_n = \omega^2 r\,,$$

где ω– модуль угловой скорости тела; ε – модуль его углового ускорения.

Тогда

$$a = \sqrt{\varepsilon^2 r^2 + \omega^4 r^2} = r\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \qquad (2)$$

Модуль угловой скорости ω найдем, взяв первую производную от угла поворота по времени:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = B + 2\,Ct.$$

Для момента времени $t = 4$ с модуль угловой скорости

ω = [20 + 2(–2)4] рад/с = 4 рад/с.

Угловое ускорение найдем, взяв первую производную от угловой скорости по времени:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 2C = -4 \text{ рад/с}^2.$$

Подставляя значения ω, ε и r в формулу (2), получаем

$$a = 0{,}1\sqrt{(-4)^2 + 4^4} \text{ м/с}^2 = 1{,}65 \text{ м/с}^2.$$

Пример 1.4. *При выстреле из пружинного пистолета вертикально вверх пуля массой m = 20 г поднялась на высоту h = 5 м. Определить жесткость k пружины пистолета, если она была сжата на x = 10 см. Массой пружины и силами трения пренебречь.*

Решение. Рассмотрим систему пружина – пуля. Так как на тела системы действуют только консервативные силы (тяжести и упругой деформации пружины), то для решения задачи можно применить закон сохранения механической энергии. Согласно ему полная механическая энергия системы в начальном состоянии (в данном случае перед выстрелом) равна полной энергии в конечном состоянии (когда пуля поднялась на высоту h), т. е.

$$T_1 + \Pi_1 = T_2 + \Pi_2\,, \qquad (1)$$

где T_1, T_2, Π_1 и Π_2 – кинетические и потенциальные энергии системы в начальном и конечном состояниях.

Так как кинетические энергии пули в начальном и конечном состояниях равны нулю, то равенство (1) примет вид

$$\Pi_1 = \Pi_2\,. \qquad (2)$$

Примем потенциальную энергию пули в поле сил тяготения Земли, когда пуля покоится на сжатой пружине, равной нулю, а высоту подъема пули будем отсчитывать от торца сжатой пружины. Тогда энергия системы в начальном состоянии будет равна потенциальной энергии сжатой пружины, т. е.

$$\Pi_1 = \frac{kx^2}{2}\,,$$

а в конечном состоянии – потенциальной энергии пули на высоте h, т. е.

$$П_2 = mgh\,.$$

Подставив выражения $П_1$ и $П_2$ в формулу (2), найдем

$$k = \frac{2mgh}{x^2}\,. \qquad (3)$$

Проверим, дает ли полученная формула единицу жесткости k. Для этого в правую часть формулы (3) вместо величин подставим единицы их измерения:

$$\frac{[m][g][h]}{[x]^2} = \frac{1кг \cdot 1м \cdot с^{-2} 1м}{1м^2} = 1\frac{Н}{м}\,.$$

Убедившись, что полученная единица является единицей жесткости (1 Н/м), подставим в формулу (3) значения величин и произведем вычисления:

$$k = \frac{2 \cdot 0{,}02 \cdot 9{,}81 \cdot 5}{(0{,}1)^2}\frac{\text{Н}}{\text{м}} = 196\frac{\text{Н}}{\text{м}}\,.$$

Пример 1.5. *Шар массой m_1, движущийся горизонтально с некоторой скоростью v_1, столкнулся с неподвижным шаром массой m_2. Удар прямой, центральный, абсолютно упругий. Какую долю ε своей кинетической энергии первый шар передал второму?*

Решение. Доля энергии, переданной первым шаром второму, выразится соотношением

$$\varepsilon = \frac{T_2}{T_1} = \frac{m_2 u_2^2}{m_1 v_1^2} = \frac{m_2}{m_1}\left(\frac{u_2}{v_1}\right)^2, \qquad (1)$$

где T_1 – кинетическая энергия первого шара до удара; u_2 и T_2 – скорость и кинетическая энергия второго шара после удара.

Как видно из формулы (1), для определения ε надо найти u_2. Так как удар шаров абсолютно упругий, то механическая энергия тел не переходит в другие виды энергии, выполняются законы сохранения импульса и механической энергии:

$$m_1 v_1 = m_1 u_1 + m_2 u_2; \qquad (2)$$

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}, \qquad (3)$$

Здесь v – скорости тел до удара ($v_2 = 0$), u – после удара. Решим совместно уравнения (2) и (3):

$$u_2 = \frac{2m_1 v_1}{m_1 + m_2}.$$

Подставив выражение u_2 в формулу (1) и сократив на v_1 и m_1, получим

$$\varepsilon = \frac{m_2}{m_1}\left[\frac{2m_1 v_1}{v_1(m_1 + m_2)}\right]^2 = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}.$$

Из найденного соотношения видно, что доля переданной энергии зависит только от масс сталкивающихся шаров.

Пример 1.6. *Сила тяги автомобиля изменяется с расстоянием по закону $F = A + Bs + Cs^2$, где $A = 1$ кН, $B = 0{,}5$ кН/м, $C = 0{,}3$ кН/м^2. Определить работу силы тяги* *на участке пути s = 10 м и среднюю мощность автомобиля, если разгон длился t = 2 с.*

Решение. Работа, совершаемая переменной силой, на пути s

$$A = \int_s F_s ds = \int_s F \cos \alpha ds,$$

где α – угол между направлениями силы и перемещения. Очевидно, что сила тяги действует вдоль перемещения, поэтому α = 0, cos α = 1. Интегрируя, получим

$$A = \int_0^{s_1} \left(A + Bs + Cs^2\right) ds = As_1 + B\frac{s_1^2}{2} + C\frac{s_1^3}{3}.$$

Подставляя числа, найдем $A = 1{,}35 \cdot 10^5$ Дж.

Средняя мощность, развиваемая автомобилем $\langle N \rangle = \dfrac{A}{t}$.

Вычисляя, получим $\langle N \rangle = 67{,}5$ кВт.

Пример 1.7. *Через блок в виде сплошного диска, имеющего массу m = 80г, перекинута тонкая гибкая нить, к концам которой подвешены грузы с массами m_1 = 100 г и m_2 = 200 г. Определить ускорение, с которым будут двигаться грузы, если их предоставить самим себе. Трением и массой нити пренебречь.*

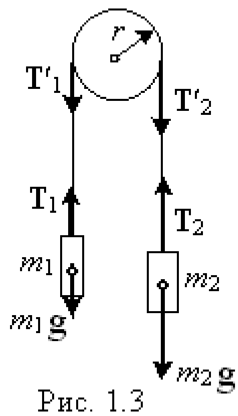


Рис. 1.3

Решение. Рассмотрим силы, действующие на каждый груз и на блок в отдельности. На каждый груз действуют две силы: сила тяжести mg и сила T натяжения нити. Напишем для каждого груза уравнение движения (второй закон Ньютона) в проекциях на вертикаль. Для первого груза

$$T_1 - m_1 g = m_1 a; \qquad (1)$$

для второго груза

$$m_2 g - T_2 = m_2 a. \qquad (2)$$

Согласно основному уравнению динамики вращательного движения, вращающий момент M, приложенный к диску, равен произведению момента инерции I диска на его угловое ускорение ε:

$$M = I\varepsilon. \qquad (3)$$

Определим вращающий момент. Силы натяжения нитей действуют не только на грузы, но и на диск. По третьему закону Ньютона силы T'_1 и T'_2, приложенные к ободу диска, равны соответственно силам T_1 и T_2, но по направлению им противоположны. При движении грузов диск ускоренно вращается по часовой стрелке, следовательно, $T'_2 > T'_1$.

Вращающий момент, приложенный к диску,

$$M = (T'_2 - T'_1)r.$$

Подставив в формулу (3) выражения M, углового ускорения $\varepsilon = a/r$, и момента инерции блока (сплошного диска) $I = (½)mr^2$, получим

$$(T'_2 - T'_1)r = \frac{mr^2}{2}\frac{a}{r}. \qquad (4)$$

Согласно третьему закону Ньютона, с учетом невесомости и нерастяжимости нити,

$$T'_1 = T_1,\ T'_2 = T_2.$$

Воспользовавшись этим, подставим в уравнение (4) вместо T'_1 и T'_2 выражения T_1 и T_2, получив их предварительно из уравнений (1) и (2),

$$(m_2 g - m_2 a)r - (m_1 g + m_1 a)r = \frac{mr^2 a}{2r}.$$

После сокращения на r и перегруппировки членов найдем

$$a = \frac{(m_2 - m_1)g}{m/2 + m_2 + m_1}.$$

После подстановки числовых значений, получим a = 2,88 м/с^2.

Пример 1.8. *Маховик в виде сплошного диска радиусом R = 0,2 м и массой m = 50 кг раскручен до частоты вращения n_1 = 480 мин$^{-1}$ и предоставлен сам себе. Под действием сил трения маховик остановился через t = 50 с. Найти момент M сил трения.*

Решение. Для решения задачи воспользуемся основным уравнением динамики вращательного движения в виде

$$dL_z = M_z dt, \qquad (1)$$

где dL_z – изменение проекции на ось Oz момента импульса маховика, вращающегося относительно оси Oz, совпадающей с геометрической осью маховика, за интервал времени dt; M_z – момент внешних сил (в данном случае момент сил трения), действующих на маховик относительно оси Oz.

Момент сил трения можно считать не изменяющимся с течением времени (M_z= $const$), поэтому интегрирование уравнения (1) приводит к выражению

$$\Delta L_z = M_z \Delta t. \qquad (2)$$

При вращении твердого тела относительно неподвижной оси изменение проекции момента импульса равно

$$\Delta L_z = J_z \Delta\omega, \qquad (3)$$

где J_z – момент инерции маховика относительно оси Oz; $\Delta\omega$ – изменение угловой скорости маховика.

Приравняв правые части равенств (2) и (3), получим $M_z \Delta t = J_z \Delta\omega$, откуда

$$M_z = J_z \frac{\Delta\omega}{\Delta t}. \qquad (4)$$

Момент инерции маховика в виде сплошного диска определяется по формуле

$$J_z = \frac{mr^2}{2}.$$

Изменение угловой скорости $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ выразим через конечную n_2 и начальную n_1 частоту вращения, пользуясь соотношением $\omega = 2\pi n$:

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = 2\pi(n_2 - n_1).$$

Подставив в формулу (4) выражения J_z и $\Delta\omega$, получим

$$M_z = \frac{\pi m r^2 (n_2 - n_1)}{\Delta t}. \qquad (5)$$

Проверим, дает ли расчетная формула единицу момента силы (Н·м). Для этого в правую часть формулы вместо символов величин подставим их единицы:

$$\frac{[m][R^2][n]}{[t]} = \frac{1кг \cdot 1м^2 \cdot 1с^{-1}}{1с} = 1Н \cdot м.$$

Подставим в (5) числовые значения величин и произведем вычисления, учитывая, что n_1 = 480 мин$^{-1}$= (480/60) с$^{-1}$ = 8 с$^{-1}$.

$$M_z = \frac{3{,}14 \cdot 50 \cdot (0{,}2)^2 \cdot (0 - 8)}{50} \text{Н} \cdot \text{м} = -1\text{Н} \cdot \text{м}.$$

Знак минус показывает, что момент сил трения оказывает на маховик тормозящее действие.

Пример 1.9. *Платформа в виде сплошного диска радиусом R = 1,5 м и массой m_1 = 180 кг вращается около вертикальной оси с частотой n =10 мин$^{-1}$. В центре платформы стоит человек массой m_2 = 60 кг. Какую линейную скорость* v *относительно пола помещения будет иметь человек, если он перейдет на край платформы?*

Решение. Согласно условию задачи, момент внешних сил относительно оси вращения *Oz*, совпадающей с геометрической осью платформы, можно считать равным нулю. При этом условии проекция L_z момента импульса системы платформа – человек остается постоянной:

$$L_z = J_z \omega = const, \qquad (1)$$

где J_z – момент инерции платформы с человеком относительно оси z, ω – угловая скорость платформы.

Момент инерции системы равен сумме моментов инерции тел, входящих в состав системы, поэтому в начальном состоянии $J_z = J_1 + J_2$, а в конечном состоянии $J_z' = J_1' + J_2'$

С учетом этого равенство (1) примет вид

$$(J_1 + J_2)\omega = (J_1' + J_2')\omega', \qquad (2)$$

где значения моментов инерции J_1 и J_2 платформы и человека, соответственно, относятся к начальному состоянию системы; J_1' и J_2' – к конечному.

Момент инерции платформы относительно оси *Oz* при переходе человека не изменяется: $J_1 = J'_1 = \frac{1}{2} m_1 R^2$. Момент инерции человека относительно той же оси будет изменяться. Если рассматривать человека как материальную точку, то его момент инерции J_2 в начальном состоянии (в центре платформы) можно считать равным нулю. В конечном состоянии (на краю платформы) момент инерции человека $J'_2 = m_2 R^2$.

Подставим в формулу (2) выражения моментов инерции, начальной угловой скорости вращения платформы с человеком ($\omega = 2\pi n$) и конечной угловой скорости (ω' = v/R, где v – скорость человека относительно пола):

$$\left(\frac{1}{2} m_1 R^2 + 0\right) \cdot 2\pi n = \left(\frac{1}{2} m_1 R^2 + m_2 R^2\right) \frac{\upsilon}{R}.$$

После сокращения на R^2 и простых преобразований находим скорость:

$$\upsilon = \frac{2\pi n R m_1}{m_1 + 2m_2}.$$

Произведем вычисления

$$\upsilon = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot \frac{1}{6} \cdot 1{,}5 \cdot 180}{180 + 2 \cdot 60} \text{ м/с} = 0{,}942 \, м/с.$$

Пример 1.10. *Определить, какая кинетическая энергия должна быть сообщена ракете массой m_0 = 1,5 т, чтобы она приобрела скорость*
v = *120 Мм/с.*

Решение. Кинетическая энергия ракеты

$$T = (m - m_0)c^2,$$

где $m = m_0 / \sqrt{1 - v^2 / c^2}$.

Из этих выражений получаем, что

$$T = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} - 1 \right).$$

Вычисляя, получаем $T = 1{,}23 \cdot 10^{19}$ Дж.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №1

ВАРИАНТ 1

1. Начальная скорость частицы $\mathbf{v}_1 = 1\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ (м/с), конечная – $\mathbf{v}_2 = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ (м/с). Определить: а) приращение скорости $\Delta\mathbf{v}$; б) модуль приращения скорости $|\Delta\mathbf{v}|$; в) приращение модуля скорости Δv.

2. Движения двух материальных точек выражаются уравнениями $x_1 = A_1 + B_1 t + C_1 t^2$, $x_2 = A_2 + B_2 t + C_2 t^2$, где $A_1 = 20$ м; $A_2 = 2$ м, $B_1 = B_2 = 2$ м/с; $C_1 = 4$ м/с^2; $C_2 = 0{,}5$ м/с^2. В какой момент времени t скорости этих точек будут одинаковыми? Определить скорости v_1 и v_2 и ускорения a_1 и a_2 точек в этот момент

3. Колесо вращается с постоянным угловым ускорением $\varepsilon = 3$ рад/с^2. Определить радиус колеса, если через $t = 1$ с после начала движения полное ускорение точки на ободе колеса $a = 7{,}5$ м/с^2.

4. Две одинаковых тележки массой M каждая движутся по инерции (без трения) друг за другом с одинаковой скоростью v_0. В какой-то момент времени человек массой m, находящийся на задней тележке, прыгнул в переднюю со скоростью u относительно своей тележки. Определить скорость v_1 передней тележки.

5. Тонкий однородный стержень длиной $l = 50$ см и массой $m = 400$ г вращается с угловым ускорением $\varepsilon = 3$ рад/с^2 около оси, проходящей перпендикулярно стержню через его середину. Определить вращающий момент M.

6. Полый тонкостенный цилиндр катится вдоль горизонтального участка дороги со скоростью v =1,5 м/с. Определить путь, который он пройдет в гору за счет кинетической энергии, если уклон горы равен 5 м на каждые 100 м пути.

7. Две релятивистские частицы движутся в лабораторной системе отсчета навстречу друг другу вдоль одной прямой со скоростями $v_1 = 0{,}6\,c$ и $v_2 = 0{,}9\,c$. Определить их относительную скорость.

ВАРИАНТ 2

1. Радиус-вектор материальной точки изменяется со временем по закону $\mathbf{r} = 4t^2\mathbf{i} + 3t\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ (м). Определить: 1) скорость точки $\mathbf{v}$; 2) ускорение точки $\mathbf{a}$; 3) модуль скорости точки в момент времени $t = 2$ с.

2. Якорь электродвигателя, имеющий частоту вращения $n = 50$ с$^{-1}$, после выключения тока, сделав $N = 628$ оборотов, остановился. Определить угловое ускорение ε якоря.

3. К пружинным весам подвешен блок. Через блок перекинут шнур, к концам которого привязали грузы массами m_1 = 1,5 кг и m_2 = 3 кг. Каково будет показание весов во время движения грузов? Массой блока и шнура пренебречь.

4. Платформа с песком общей массой M = 2 т стоит на рельсах на горизонтальном участке пути. В песок попадает снаряд массой m = 8 кг и застревает в нем. Пренебрегая трением, определить, с какой скоростью будет двигаться платформа, если снаряд падает сверху вниз под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту со скоростью v = 450 м/с.

5. Сплошной однородный диск скатывается без скольжения по наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом. Определить линейное ускорение a центра диска.

6. Маховик, момент инерции которого J = 40 кг·м^2, начал вращаться равноускоренно из состояния покоя под действием момента силы M = 20 Н·м.. Определить кинетическую энергию T, приобретенную маховиком через t = 10 с.

7. Время жизни покоящегося мюона τ_0 = 2,2 мкс. От точки рождения до детектора, зарегистрировавшего его распад, мюон пролетел расстояние l = 6 км. С какой скоростью v (в долях скорости света) двигался мюон?

ВАРИАНТ 3

1. Материальная точка движется вдоль прямой так, что ее ускорение линейно растет и за первые t = 10 с достигает значения a = 5 м/с^2. Определить в конце десятой секунды: 1) скорость точки; 2) пройденный точкой путь.

2. Колесо автомашины вращается равнозамедленно. За время t = 2 мин оно изменило частоту вращения от 240 до 60 мин$^{-1}$. Определить: 1) угловое ускорение колеса; 2) число полных оборотов, сделанных колесом за это время.

3. Пуля массой m = 10 г, летящая горизонтально со скоростью v = 0,5 км/с, попадает в подвешенный на тросах ящик с песком массой M = 6 кг и застревает в нем. Определить высоту h, на которую поднимется такой баллистический маятник, отклонившись после удара.

4. Тело массой m = 0,4 кг соскальзывает без начальной скорости по наклонной плоскости высотой h = 10 см и длиной l = 1 м и, пройдя по горизонтальной плоскости некоторый путь, останавливается. Коэффициент трения на всем пути f = 0,04. Определить: 1) кинетическую энергию тела у основания плоскости; 2) путь, пройденный телом на горизонтальном участке до остановки.

5. На вращающейся вокруг вертикальной оси платформе стоит человек и держит в руках стержень длиной l = 2,4 м и массой m = 8 кг, расположенный вертикально по оси вращения платформы. Платформа с человеком вращается с частотой n_1 = 1 с$^{-1}$. С какой частотой n_2 будет вращаться платформа с человеком, если он повернет стержень в горизонтальное положение? Суммарный момент инерции J человека и платформы равен 6 кг·м^2.

6. Маховик начинает вращаться из состояния покоя с постоянным угловым ускорением ε = 0,4 рад/с^2. Определить кинетическую энергию маховика через время t_2 = 25 с после начала движения, если через t_1 = 10 с после начала движения момент импульса L_1 маховика составлял 60 кг·м^2/с.

7. Вычислить энергию покоя: 1) электрона; 2) протона; 3) α-частицы. Ответ выразить в джоулях и мегаэлектрон-вольтах.

ВАРИАНТ 4

1. Уравнение прямолинейного движения тела имеет вид $x = At – Bt^2 + Ct^3$ (A = 2 м/с, B = 3 м/с^2, C = 4 м/с^3). Записать выражения для скорости и ускорения. Определить для момента времени t = 2 с после начала движения: 1) пройденный путь; 2) скорость; 3) ускорение.

2. Точка движется по окружности радиусом R = 15 см с постоянным тангенциальным ускорением a_τ. К концу четвертого оборота после начала движения линейная скорость точки υ = 15 см/с. Определить нормальное ускорение a_n точки через t = 16 с после начала движения.

3. Пуля массой m = 10 г, летящая горизонтально, попадает в подвешенный на тросах длиной l =1 м ящик с песком массой M = 1,5 кг и застревает в нем. Такой баллистический маятник отклонился после удара на угол φ = 30°. Определить скорость пули.

4. Найти работу A подъема груза по наклонной плоскости длиной l = 2 м, если масса груза m = 100 кг, угол наклона наклонной плоскости φ = 30°, коэффициент трения f = 0,1, и груз движется с ускорением a = 1 м/с^2.

5. Шар радиусом R = 10 см и массой m = 5 кг вращается вокруг оси симметрии согласно уравнению $\varphi = A + Bt^2 + Ct^3$ (B = 2 рад/с^2, C = –0,5 рад/с^3). Определить момент вращающей силы M для t = 3 с.

6. Горизонтальная платформа массой m = 25 кг и радиусом R = 0,8 м вращается с частотой n_1 = 18 мин$^{-1}$. В центре стоит человек и держит на вытянутых руках гантели. Считая платформу диском, определить частоту вращения платформы, если человек, опустив руки, уменьшит свой момент инерции от J_1 = 3,5 кг·м^2 до J_2 = 1 кг·м^2.

7. Полная энергия тела возросла на ΔE = 1 Дж. На сколько при этом изменилась масса тела?

ВАРИАНТ 5

1. С вышки бросили камень в горизонтальном направлении. Через промежуток времени t = 2 с камень упал на землю на расстоянии s = 40 м от основания вышки. Определить начальную v_0 и конечную v скорости камня.

2. Диск радиусом R = 10 см вращается вокруг неподвижной оси так, что зависимость угла поворота радиуса диска от времени задается уравнением $\varphi = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$ (B = 1 рад/с, C = 1 рад/с^2, D = 1 рад/с^3). Определить для точек на ободе диска к концу второй секунды после начала движения: 1) тангенциальное ускорение a_τ; 2) нормальное ускорение a_n; 3) полное ускорение a.

3. Материальная точка массой m = 1 кг, двигаясь равномерно, описывает четверть окружности радиуса r = 1,2 м в течении времени t = 2 с. Найти изменение Δp импульса точки.

4. Пуля массой m = 10 г, летящая горизонтально со скоростью v = 200 м/с, попадает в подвешенный на тросах длиной l =1 м ящик с песком массой M = 1,5 кг и застревает в нем. Определить угол отклонения φ такого баллистического маятника.

5. Сплошной цилиндр массой m = 4 кг катится без скольжения по горизонтальной поверхности. Линейная скорость центра масс цилиндра v = 1 м/с. Определить полную кинетическую энергию T цилиндра.

6. На вращающейся вокруг вертикальной оси платформе стоит человек и держит в руках стержень длиной l = 2,5 м и массой m = 8 кг, расположенный вертикально по оси вращения платформы. Платформа с человеком вращается с частотой n_1 = 12 мин$^{-1}$. С какой частотой n_2 будет вращаться платформа с человеком, если он повернет стержень в горизонтальное положение? Суммарный момент инерции J человека и платформы равен 10 кг·м^2.

7. На космическом корабле-спутнике находятся часы, синхронизированные до полета с земными. Скорость v_0 спутника составляет 7,9 км/с. На сколько отстанут часы на спутнике за время τ_0 = 0,5 года по часам земного наблюдателя?

ВАРИАНТ 6

1. Радиус-вектор материальной точки изменяется со временем по закону $\mathbf{r} = At^2\mathbf{i} + Bt\mathbf{j} + C\mathbf{k}$, где A = 2 м/с^2; B = 5 м/с; C = 3 м. Определить: 1) скорость **v**; 2) ускорение **a**; 3) модуль скорости v в момент времени t = 4 с.

2. Диск вращается вокруг неподвижной оси так, что зависимость угла поворота радиуса диска от времени задается уравнением $\varphi = At^2$ (A = 0,5 рад/с^2). Определить к концу второй секунды после начала движения: 1) угловую скорость диска; 2) угловое ускорение диска; 3) для точки, находящейся на расстоянии 80 см от оси вращения, тангенциальное a_τ, нормальное a_n и полное a ускорения.

3. По наклонной плоскости с углом наклона α = 30° к горизонту скользит тело. Определить скорость тела в конце второй секунды от начала скольжения, если коэффициент трения f = 0,15.

4. Пуля массой m = 10 г, летящая с горизонтальной скоростью v = 0,6 км/с, попадает в мешок с песком массой M = 10 кг, висящий на длинной нити, и застревает в нем. Определить: 1) высоту, на которую поднимется мешок, отклонившись после удара; 2) долю кинетической энергии, израсходованной на пробивание песка.

5. Шар и сплошной цилиндр одинаковой массы, изготовленные из одного и того же материала, катятся без скольжения с одинаковой скоростью. Определить, во сколько раз кинетическая энергия шара меньше кинетической энергии сплошного цилиндра.

6. Человек массой m = 60 кг, стоит на краю горизонтальной платформы массой M = 120 кг, вращающейся по инерции вокруг неподвижной вертикальной оси с частотой n_1 = 10 мин$^{-1}$. Считая платформу круглым однородным диском, а человека – точечной массой, определить, с какой частотой n_2 будет вращаться платформа, если человек перейдет к ее центру.

7. Электрон движется со скоростью v = 0,6 c. Определить релятивистский импульс p электрона.

ВАРИАНТ 7

1. Диск вращается вокруг неподвижной оси так, что зависимость угла поворота радиуса диска от времени задается уравнением $\varphi = At^2$ (A = 0,1 рад/с^2). Определить полное ускорение **a** точки на ободе диска к концу второй секунды после начала движения, если линейная скорость этой точки в этот момент v = 0,4 м/с.

2. Материальная точка массой m = 2 кг движется под действием некоторой силы F согласно уравнению $x = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, где C = 1 м/с^2, D = –0,2 м/с^3. Найти значения этой силы в моменты времени t_1 = 2 с и t_2 = 5 с. В какой момент времени сила равна нулю?

3. К стальной проволоке радиусом r = 1 мм подвешен груз массой m = 100 кг. На какой наибольший угол α можно отклонить проволоку с грузом, чтобы она не разорвалась при прохождении этим грузом положения равновесия?

4. Шар массой m_1 = 10 кг, движущийся со скоростью v_1 = 4 м/с, сталкивается с шаром массой m_2 = 4 кг, скорость v_2 которого ровна 12 м/с. Считая удар центральным и абсолютно неупругим, найти скорость u шаров после удара в двух случаях: 1) малый шар нагоняет большой шар, движущийся в том же направлении; 2) шары движутся навстречу друг другу.

5. Полная кинетическая энергия T диска, катящегося по горизонтальной поверхности, равна 24 Дж. Определить кинетическую энергию T_1 поступательного и T_2 вращательного движения диска.

6. Платформа, имеющая форму сплошного однородного диска, вращается по инерции вокруг неподвижной вертикальной оси. На краю платформы стоит человек, масса которого в 3 раза меньше массы платформы. Определить, как и во сколько раз изменится угловая скорость вращения платформы, если человек перейдет ближе к центру на расстояние, равное половине радиуса платформы. Считать человека точечной массой.

7. Фотонная ракета движется относительно Земли со скоростью v = 0,6 c. Во сколько раз замедлится ход времени в ракете с точки зрения земного наблюдателя?

ВАРИАНТ 8

1. Диск радиусом R = 10 см вращается так, что зависимость линейной скорости точек, лежащих на ободе диска, от времени задается уравнением $v = At + Bt^2$ (A = 0,3 м/с^2, B = 0,1 м/с^3). Определить момент времени, для которого вектор полного ускорения **a** образует с радиусом колеса угол φ = 4°.

2. Вычислить работу A, совершаемую на пути s = 12 м равномерно возрастающей силой, если в начале пути сила F_1 = 10 Н, в конце пути F_2 = 46 Н.

3. Пружина жесткостью k = 10 кН/м была сжата на x_1 = 4 см. Какую нужно совершить работу A, чтобы сжатие пружины увеличить до x_2 = 8 см?

4. При центральном упругом ударе движущееся тело массой m_1 ударяется в покоящееся тело массой m_2, в результате чего скорость первого тела уменьшается в два раза. Определить: 1) во сколько раз масса первого тела больше массы второго тела;

2) кинетическую энергию второго тела непосредственно после удара, если первоначальная кинетическая энергия первого тела равна 800 Дж.

5. Вал массой m = 100 кг и радиусом R = 5 см вращался с частотой n = 8 $с^{-1}$. К цилиндрической поверхности вала прижали тормозную колодку с силой F = 40 Н, под действием которой вал остановился через время t = 10 с. Определить коэффициент трения f.

6. Бревно высотой h = 3 м и массой m = 50 кг начинает падать из вертикального положения на землю. Определить скорость верхнего конца и момент импульса бревна в момент падения на землю.

7. На сколько увеличится масса α-частицы при ускорении ее от начальной скорости, равной нулю, до скорости, равной 0,9 скорости света?

ВАРИАНТ 9

1. Тело движется прямолинейно. Зависимость пройденного телом пути от времени задается уравнением $s = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$ (C = 0,1 м/$с^2$, D = 0,03 м/$с^3$). Определить: 1) через сколько времени после начала движения ускорение a тела будет равно 2 м/$с^2$; 2) среднее ускорение $\langle a \rangle$ тела за этот промежуток времени.

2. Диск радиусом R = 10 см вращается так, что зависимость угла поворота радиуса диска от времени задается уравнением $\varphi = At + Bt^3$ (A = 2 рад/с, B = 4 рад/$с^3$). Определить для точек на ободе колеса: 1) нормальное ускорение a_n в момент времени t = 2 с; 2) тангенциальное ускорение a_τ для этого же момента; 3) угол поворота φ_1, при котором полное ускорение составляет с радиусом колеса угол $\alpha = 45°$.

3. Тело массой m = 2 кг падает вертикально с ускорением a = 5 м/$с^2$. Определить силу сопротивления при движении этого тела.

4. Тело, падая с некоторой высоты, в момент соприкосновения с Землей обладает импульсом p = 100 кг·м/с и кинетической энергией T = 500 Дж. Определить: 1) с какой высоты тело падало; 2) массу тела.

5. Определить, во сколько раз уменьшится скорость шара, движущегося со скоростью v_1 при его соударении с покоящимся шаром, масса которого в n раз больше массы налетающего шара. Удар считать центральным абсолютно упругим.

6. Шар массой m = 10 кг и радиусом R = 20 см вращается вокруг оси, проходящей через его центр, по закону $\varphi = A + Bt^2 - Ct^3$, где B = 4 рад/$с^2$; C = –1 рад/$с^3$. Найти закон изменения момента сил, действующих на шар.

7. Два ускорителя выбрасывают навстречу друг другу частицы со скоростями $|v|$ = 0,9 c. Определить относительную скорость u_{21} сближения частиц в системе отсчета, движущейся вместе с одной из частиц.

ВАРИАНТ 10

1. Движение материальной точки задано уравнением $\mathbf{r}(t) = A(\mathbf{i}\cos\omega t + \mathbf{j}\sin\omega t)$, где A = 0,5 м; ω = 5 рад/с. Начертить траекторию точки. Определить модуль скорости $|v|$ и модуль нормального ускорения a_n.

2. Диск радиусом R = 10 см вращается вокруг неподвижной оси так, что зависимость угла поворота радиуса диска от времени задается уравнением $\varphi = A + Bt + Ct^2$

$+ Dt^3$ ($B = 1$ рад/с, $C = 1$ рад/с^2, $D = 1$ рад/с^3). Определить для точек на ободе диска к концу второй секунды после начала движения: 1) тангенциальное ускорение a_τ; 2) нормальное ускорение a_n; 3) полное ускорение a.

3. Тело массой $m = 2$ кг движется прямолинейно по закону $s = A - Bt + Ct^2 - Dt^3$ ($C = 2$ м/с^2, $D = 0{,}4$ м/с^3). Определить силу, действующую на тело в конце первой секунды движения.

4. Тело массой $m_1 = 3$ кг движется со скоростью $v_1 = 2$ м/с и ударяется о неподвижное тело такой же массы. Считая удар центральным и неупругим, определить количество теплоты, выделившееся при ударе.

5. Обруч и сплошной цилиндр, имеющие каждый массу $m = 2$ кг, катятся без скольжения с одинаковой скоростью $v = 5$ м/с. Определить кинетические энергии этих тел.

6. Маховик вращается по закону, выражаемому уравнением $\varphi = A + Bt + Ct^2$, где $A = 2$ рад; $B = 32$ рад/с; $C = -4$ рад/с^2. Найти среднюю мощность $\langle N \rangle$, развиваемую силами, действующими на маховик при его вращении, до остановки, если его момент инерции $J = 100$ кг·м^2.

7. Определить импульс p частицы (в единицах m_0c), если ее кинетическая энергия равна энергии покоя.

2. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ И ФОРМУЛЫ

2.1. Молекулярно-кинетическая теория идеальных газов

- Количество вещества[1] тела (системы)

$$\nu = \frac{m}{M} \quad \text{или} \quad \nu = \frac{N}{N_A},$$

где N – число структурных элементов (молекул, атомов, ионов и т.п.), составляющих тело; N_A.–постоянная Авогадро ($N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$).

- Молярная масса вещества (масса 1 моля вещества)

$$M = \frac{m}{\nu},$$

где m–масса однородного тела (системы); ν – количество вещества этого тела.

- Относительная молекулярная масса вещества

$$M_r = \sum n_i A_{r,i},$$

где n_i - число атомов i-го химического элемента, входящих в состав молекулы данного вещества; $A_{r,i}$ – относительная атомная масса этого элемента. Относительные атомные массы приводятся в таблице Д. И. Менделеева.

- Молярная масса, выраженная в граммах на моль, численно равна относительной молекулярной массе

---

[1]Количество вещества – число структурных элементов (молекул, атомов, ионов и т. п.), содержащихся в теле или системе. Количество вещества выражается в молях. Моль равен количеству вещества системы, содержащей столько же структурных элементов, сколько содержится атомов в углероде-12 массой 0,012 кг.

$$M = M_r k\,,$$

где k = 10^{-3} кг/моль.

- Уравнение состояния идеального газа (уравнение Клапейрона – Менделеева)

$$pV = \frac{m}{M}RT = \nu RT\,,$$

где m – масса газа, M – молярная масса газа, R – молярная газовая постоянная, ν – количество вещества, T – термодинамическая температура.

- Опытные газовые законы, являющиеся частными случаями уравнения Менделеева – Клапейрона для изопроцессов:

а) закон Бойля – Мариотта (изотермический процесс: $T = const,\ m = const$)

$pV = const$, или для двух состояний газа $p_1V_1 = p_2V_2$;

б) закон Гей-Люссака (изобарный процесс: $p = const,\ m = const$)

$\dfrac{V}{T} = const$, или для двух состояний $\dfrac{V_1}{T_1} = \dfrac{V_2}{T_2}$;

в) закон Шарля (изохорный процесс: $V = const,\ m = const$)

$\dfrac{p}{T} = const$, или для двух состояний $\dfrac{p_1}{T_1} = \dfrac{p_2}{T_2}$;

где p_1 ,V_1, T_1 – давление, объем и температура газа в начальном состоянии; p_2, V_2, T_2 – те же величины в конечном состоянии.

- Концентрация молекул однородной системы

$$n = \frac{N}{V} = \frac{N_A\rho}{M}\,,$$

где N – число молекул, содержащихся в данной системе; ρ – плотность вещества в любом агрегатном состоянии; V – объем системы.

- Зависимость давления газа от концентрации молекул и температуры

$$p = nkT\,,$$

где $k = R/N_А = 1{,}38\cdot10^{-23}$ Дж/К – постоянная Больцмана.

- Основное уравнение молекулярно-кинетической теории газов

$$p = \frac{1}{3}nm_0\langle v_{кв}\rangle^2 \quad \text{или} \quad pV = \frac{2}{3}N\left(\frac{m_0\langle v_{êâ}\rangle^2}{2}\right) = \frac{2}{3}E$$

$$\text{или} \qquad p = \frac{1}{3}\rho\langle v_{кв}\rangle^2,$$

где $\langle v_{кв}\rangle$ – средняя квадратичная скорость молекул, E – суммарная кинетическая энергия поступательного движения всех молекул газа, m_0 – масса одной молекулы.

- Средняя кинетическая энергия молекулы с учетом поступательного и вращательного движения. Вклад в энергию колебательного движения учитывается только при температурах порядка нескольких тысяч кельвинов.

$$\langle\varepsilon\rangle = \frac{i}{2}kT,$$

где i – сумма числа поступательных и вращательных степеней свободы молекулы; i = 3 для одноатомной молекулы, i = 5 для двухатомной и i = 6 для трех- и более атомной молекулы.

- Средняя кинетическая энергия:

поступательного движения молекулы ($i_п$ = 3)

$$\langle \varepsilon_{\text{п}} \rangle = \frac{3}{2}kT\ ,$$

вращательного движения молекулы

$$<\varepsilon_{\text{вр}}> = \frac{i_{\text{вр}}}{2}kT\ ,$$

где $i_{\text{вр}}$ – число вращательных степеней свободы ($i_{\text{вр}}$ = 2 для двухатомной и $i_{\text{вр}}$ = 3 для трех- и более атомной молекулы).

- Скорости газовых молекул:

средняя квадратичная

$$\langle \upsilon_{\text{кв}} \rangle = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}},$$

средняя арифметическая

$$\langle \upsilon \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}},$$

наиболее вероятная

$$\langle \upsilon_{\text{в}} \rangle = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}},$$

где m_0 – масса одной молекулы.

- Барометрическая формула

$$p(h) = p_0 \exp -(Mgh/RT),$$

где $p(h)$– давление атмосферы на высоте h от поверхности Земли, p_0 – давление на поверхности (h = 0).

- Среднее число соударений, испытываемых одной молекулой газа в единицу времени,

$$<z> = \sqrt{2}\pi d^2 n <\upsilon>\ ,$$

где d – эффективный диаметр молекулы; n – концентрация молекул; <v> – средняя арифметическая скорость молекул.

- Средняя длина свободного пробега молекул газа

$$<l> = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}\ .$$

2.2. Основы термодинамики

- Внутренняя энергия идеального газа

$$U = \frac{m}{M}\frac{i}{2}RT\ .$$

- Первое начало термодинамики

$$Q = \Delta U + A\ ,$$

где Q–количество теплоты, сообщенное системе (газу); ΔU–изменение ее внутренней энергии; A – работа системы против внешних сил.

- Связь между удельной c и молярной C теплоемкостями

$$C = cM\ .$$

- Молярные теплоемкости газа при постоянном объеме (C_V) и постоянном давлении (C_p)

$$C_V = \frac{i}{2}R\ , \qquad C_p = \frac{i+2}{2}R\ .$$

- Уравнение Майера

$$C_p = C_V + R.$$

- Работа расширения газа:

в общем случае $$A = \int_{V_1}^{V_2} pdV;$$

при изобарном процессе $$A = p(V_2 - V_1);$$

при изотермическом процессе $$A = \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

- Уравнения адиабатного процесса (уравнение Пуассона)

- $$pV^{\gamma} = const.$$

- Связь между начальными и конечными значениями параметров идеального газа при адиабатном процессе

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma}, \quad \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma - 1}, \quad \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{(\gamma - 1)/\gamma},$$

где $\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{i+2}{i}$ – показатель адиабаты.

- Работа при адиабатном процессе

$$A = -\Delta U = -\frac{m}{M} C_V \Delta T \quad \text{или} \quad \grave{A} = \frac{RT_1}{\gamma - 1} \frac{m}{M} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma - 1}\right].$$

- Термический КПД цикла

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1},$$

где Q_1 – количество теплоты, полученное рабочим телом от нагревателя; Q_2 – количество теплоты, отданное рабочим телом холодильнику, A – работа, совершаемая за цикл.

- Термический КПД цикла Карно

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

где T_1 и T_2 – температуры нагревателя и холодильника.

- Изменение энтропии при равновесном переходе из состояния A в состояние B

$$\Delta S = \int_A^B \frac{dQ}{T}.$$

2.3. Свойства жидкостей

- Поверхностное натяжение

$$\sigma = \frac{F}{l}, \quad \text{или} \quad \sigma = \frac{\Delta E}{\Delta S},$$

где F – сила поверхностного натяжения, действующая на контур l, ограничивающий поверхность жидкости; ΔE – поверхностная энергия, связанная с площадью ΔS поверхности пленки.

- Формула Лапласа, выражающая избыточное давление Δp, создаваемое сферической поверхностью жидкости:

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{R},$$

где R – радиус сферической поверхности.

- Высота подъема жидкости в капиллярной трубке

$$h = \frac{2\sigma\cos\theta}{\rho g r},$$

где θ – краевой угол (θ = 0 при полном смачивании стенок трубки жидкостью); r– радиус канала трубки; ρ – плотность жидкости; g – ускорение свободного падения.

- Высота подъема жидкости между двумя близкими параллельными друг другу плоскостями

$$h = \frac{2\sigma\cos\theta}{\rho g d},$$

где d – расстояние между плоскостями.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 2.1. *Определить число N молекул, содержащихся в объеме V = 1 мм*^{3} *воды, и массу* m_0 *молекулы воды. Считая условно, что молекулы воды имеют вид шариков, соприкасающихся друг с другом, найти диаметр d молекул.*

Решение. Число N молекул, содержащихся в некоторой системе массой m, равно произведению постоянной Авогадро N_A на количество вещества ν:

$$N = \nu N_A . = \frac{mN_A}{M},$$

где M – молярная масса.

Выразив в этой формуле массу как произведение плотности на объем V, получим

$$N = \frac{\rho V N_A}{M}.$$

Произведем вычисления, учитывая, что $M = 18\cdot10^{-3}$ кг/моль:

$$N = \frac{10^3\cdot10^{-9}}{18\cdot10^{-3}}\cdot 6{,}02\cdot10^{23}\text{молекул} = 3{,}34\cdot10^{19}\text{молекул}.$$

Масса m_0 одной молекулы

$$m_0 = \frac{M}{N_A}. \qquad (1)$$

Подставив в (1) значения M и N_A, найдем массу молекулы воды:

$$m_0 = \frac{18\ \cdot10^{-3}}{6{,}02\cdot10^{23}}\text{кг} = 2{,}99\cdot10^{-26}\text{кг}.$$

Если молекулы воды плотно прилегают друг к другу, то можно считать, что на каждую молекулу приходится объем (кубическая ячейка) $V_0 = d^3$, где d – диаметр молекулы. Отсюда

$$d = \sqrt[3]{V_0}. \qquad (2)$$

Объем V_0 найдем, разделив молярный объем V_m на число молекул в моле, т. е. на N_A:

$$V_0 = \frac{V_\mathrm{m}}{N_\mathrm{A}} = \frac{\mathrm{M}}{\rho N_A}. \qquad (3)$$

Подставим выражение (3) в (2):

$$d=\sqrt[3]{\frac{M}{\rho N_{\text{A}}}}\,. \qquad (4)$$

Проверим, дает ли правая часть выражения (4) единицу длины:

$$\left\{\frac{[M]}{[\rho][N_A]}\right\}^{1/3}=\left\{\frac{1\,\text{кг/моль}}{1\,\text{кг/м}^3\cdot 1\,\text{моль}^{-1}}\right\}^{1/3}=1\,\text{м}\,.$$

Произведем вычисления:

$$d=\sqrt[3]{\frac{18\cdot 10^{-3}}{10^3\cdot 6{,}02\cdot 10^{23}}}\,\text{м}=3{,}11\cdot 10^{-10}\,\text{м}=311\,\text{пм}\,.$$

Пример 2.2. *Чему равны средние кинетические энергии поступательного и вращательного движения всех молекул, содержащихся в* m *= 2 кг водорода при температуре T = 400 К?*

<u>Решение:</u> Считаем водород идеальным газом. Молекула водорода – двухатомная, связь между атомами считаем жесткой, т.е. колебательных степеней свободы не учитываем, тогда число степеней свободы молекулы водорода i = 5. В среднем на одну степень свободы приходится энергия $\langle\varepsilon_i\rangle=\frac{1}{2}kT$, где k – постоянная Больцмана, T – термодинамическая температура.

Поступательному движению приписывается три ($i_п$ =3), а вращательному движению двухатомной молекулы – две ($i_{вр}$ =2) степени свободы. Средние энергии:

$$\langle\varepsilon_{пост}\rangle=\frac{3}{2}kT\,,\ \langle\varepsilon_{вр}\rangle=\frac{2}{2}kT\,.$$

Число молекул, содержащихся в произвольной массе газа, $N=\nu N_A=\frac{m}{M}N_A$, где ν – число молей, N_A – постоянная Авогадро.

Тогда средняя кинетическая энергия поступательного движения всех молекул водорода будет равна:

$$\langle\varepsilon_{пост}\rangle=\frac{3}{2}kT\cdot N=\frac{3m}{2M}RT\,, \qquad (1)$$

где $R=kN_A$ - молярная газовая постоянная.

Аналогично средняя кинетическая энергия вращательного движения молекул водорода

$$\langle\varepsilon_{вр}\rangle=\frac{m}{M}RT\,. \qquad (2)$$

Подставляя числовые значения в формулы (1) и (2), имеем

$$\langle\varepsilon_{пост}\rangle=4{,}99\cdot 10^6\,\text{Дж}\,,$$

$$\langle\varepsilon_{вр}\rangle=3{,}32\cdot 10^6\,\text{Дж}\,.$$

Пример 2.3. *Определить среднюю длину свободного пробега и среднее число столкновений за 1с молекулы кислорода, находящегося в сосуде емкостью V = 2 л при температуре* t *= 27°C и давлении* p *= 100 кПа.*

<u>Решение</u>. Средняя длина свободного пробега молекул вычисляется по формуле

$$\langle l\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}\,,$$

где d – эффективный диаметр молекулы кислорода находим из таблиц, d = 0,29 нм; n – число молекул в единице объема, которое можно определить из уравнения $p = nkT$

$$\langle l \rangle = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p}.$$

Среднее число соударений молекулы за 1с равно

$$\langle z \rangle = \frac{\langle \upsilon \rangle}{\langle l \rangle},$$

где $\langle \upsilon \rangle$ - средняя арифметическая скорость молекулы

$$\langle \upsilon \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}.$$

Подставляя числовые значения, находим

$\langle l \rangle = 3{,}56 \cdot 10^{-8}$ м, <z> = $1{,}25 \cdot 10^{10}$ с$^{-1}$.

Пример 2.4. *Определить удельные теплоемкости при постоянном объеме c_V и при постоянном давлении c_P неона и водорода, принимая эти газы за идеальные.*

Решение. Удельные теплоёмкости идеальных газов выражаются формулами

$$c_V = \frac{i}{2}\frac{R}{M} \quad \text{и} \quad c_p = \frac{i+2}{2}\frac{R}{M},.$$

где i – число степеней свободы молекулы газа, M – молярная масса. Для неона (одноатомный газ) $i_1 = 3$, $M_1 = 20 \cdot 10^{-3}$ кг/моль. Подставив значения i_1, M_1, R и произведя вычисления, найдем:

c_{V1} =624 Дж/(кг·К); c_{p1}= 1,04 кДж/(кг·К).

Для водорода (двухатомный газ) $i_2 = 5$, $M_2 = 2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль. Вычисление даёт следующие значения^

c_{V2} =10,4 кДж/(кг·К); c_{p2}= 14,6 кДж/(кг·К).

Пример 2.5. *Кислород массой m = 160 г нагревают при постоянном давлении от T_1 = 320 К до T_2 = 340 К. Определить количество теплоты, поглощенное газом, изменение внутренней энергии и работу расширения газа*.

Решение: Количество теплоты, необходимое для нагревания газа при постоянном давлении,

$$Q = mc_p(T_2 - T_1) = \frac{m}{M}C_p(T_2 - T_1). \qquad (1)$$

Здесь c_p *и* $C_p = Mc_p$ – удельная и молярная теплоемкости газа при постоянном давлении, $M = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль – молярная масса кислорода. Для всех двухатомных газов $\tilde{N}_{\eth} = \frac{7}{2}R$; C_{p} = 29,09 Дж/(моль К).

Изменение внутренней энергии газа находим по формуле

$$\Delta U = \frac{m}{M}C_V(T_2 - T_1), \qquad (2)$$

где C_V – молярная теплоемкость газа при постоянном объеме. Для всех двухатомных газов $\tilde{N}_V = \frac{5}{2}R$, C_{V} = 20,78 Дж/(моль К).

Работа расширения газа при изобарном процессе $\grave{A} = \eth\Delta V$, где $\Delta V = V_2 - V_1$ – изменение объема газа, которое можно найти из уравнения Клапейрона – Менделеева.

При изобарном процессе

$$pV_1 = \frac{m}{M}RT_1, \qquad (3)$$

$$pV_2 = \frac{m}{M} RT_2 . \qquad (4)$$

Вычитая выражения (4) из (3), находим

$$p(V_2 - V_1) = \frac{m}{M} R(T_2 - T_1) ,$$

следовательно,

$$A = \frac{m}{M} R(T_2 - T_1) . \qquad (5)$$

Подставляя числовые значения в формулы (1), (2) и (5), получаем,

Q = 2,91 кДж; ΔU = 2,08 кДж; A = 831 Дж.

Пример 2.6. *Объем аргона, находящегося при давлении р = 80 кПа, увеличился от* V_1 *= 1 л до* V_2 *= 2 л. На сколько изменится внутренняя энергия газа, если расширение производилось: а) изобарно; б) адиабатно?*

Решение*:* Изменение внутренней энергии

$$\Delta U = \frac{m}{M} \frac{i}{2} R\Delta T \qquad (1).$$

зависит от характера процесса, при котором идет расширение газа. Найти ΔU по формуле (1) нельзя, так как масса газа и температура в условии задачи не даны. Поэтому необходимо провести преобразование формулы (1). Запишем уравнение Клапейрона - Менделеева для начального и конечного состояний газа:

$$pV_1 = \frac{m}{M} RT_1 \ \text{ и } \ pV_2 = \frac{m}{M} RT_2$$

или, вычитая уравнения,

$$p(V_2 - V_1) = \frac{m}{M} R(T_2 - T_1) . \qquad (2)$$

Подставив (2) в (1), получим

$$\Delta U = \frac{i}{2} p(V_2 - V_1) . \qquad (3)$$

При адиабатном расширении газа теплообмена с внешней средой не происходит, поэтому $Q = 0$. Первый закон термодинамики $Q = \Delta U + A$ запишется в виде

$$0 = \Delta U + A,$$

откуда

$$\Delta U = -A. \qquad (4)$$

Работа, совершаемая газом в адиабатном процессе

$$A = \frac{m}{M} \frac{RT_1}{\gamma - 1}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma - 1}\right], \qquad (5)$$

где γ –показатель адиабаты, равный отношению теплоемкостей:

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{i+2}{i} .$$

Для аргона – одноатомного газа число степеней свободы i = 3, поэтому γ = 1,67.

Находим изменение внутренней энергии при адиабатном процессе, учитывая формулы (4) и (5):

$$\Delta U = \frac{m}{M} \frac{RT_1}{\gamma - 1}\left[\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma - 1} - 1\right]. \qquad (6)$$

Формулу (6) следует преобразовать, учитывая при этом параметры, данные в условии задачи. Применив уравнение Клапейрона - Менделеева для данного случая $p_1V_1 = (m/M)RT_1$, получим

$$\Delta U = \frac{p_1V_1}{\gamma - 1}\left[\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} - 1\right].$$

Подстановка числовых значений дает

а) при изобарном расширении

$$\Delta U = 3/2 \cdot 0{,}8 \cdot 10^5\,\text{Па} \cdot 10^{-3}\,\text{м}^3 = 121\,\text{Дж},$$

б) при адиабатном расширении

$$\Delta U = \frac{0{,}8\cdot 10^5\,\text{Па}\cdot 10^{-3}\,\text{м}^3}{(1{,}67-1)}\left[\left(\frac{10^{-3}}{2\cdot 10^{-3}}\right)^{1{,}67-1} - 1\right] = -44{,}6\,\text{Дж}.$$

Пример 2.7. *Определить изменение* ΔS *энтропии при изотермическом расширении азота массой m = 10 г, если давление газа уменьшилось от* p_1 *= 1,1 МПа до* p_2 *= 50 кПа.*

Решение. Так как процесс изотермический, то в выражении изменения энтропии

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T}$$

температуру выносят за знак интеграла.

$$\Delta S = \frac{1}{T}\int_1^2 dQ = \frac{Q}{T}. \qquad (1)$$

Согласно первому началу термодинамики, количество теплоты, полученное газом, $Q = A + \Delta U$. Для изотермического процесса $\Delta U = 0$, поэтому $Q = A$.

Работа A газа в изотермическом процессе

$$A = \frac{m}{M}RT\ln\frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{M}RT\ln\frac{p_1}{p_2}. \qquad (2)$$

Подставив (2) в (1), найдем искомое изменение энтропии

$$\Delta S = \frac{m}{M}R\ln\frac{p_1}{p_2}.$$

Вычисляя, получим ΔS = 2,06 Дж/К.

Пример 2.8. *Найти добавочное давление внутри мыльного пузыря диаметром d =10 см. Какую работу нужно совершить, чтобы выдуть этот пузырь?*

Решение. Пленка мыльного пузыря имеет две сферические поверхности: внешнюю и внутреннюю. Обе поверхности оказывают давление на воздух, заключенный внутри пузыря. Так как толщина пленки чрезвычайно мала, то диаметры обеих поверхностей практически одинаковы. Поэтому добавочное давление

$$\Delta p = 2\frac{2\sigma}{r},$$

где r – радиус пузыря. Так как $r = \frac{d}{2}$, то $\Delta p = \frac{8\sigma}{d}$.

Работа, которую нужно совершить, чтобы, растягивая пленку, увеличить ее поверхность на ΔS, выражается формулой

$$A = \sigma\Delta S = \sigma(S - S_0). \qquad (1)$$

В данном случае S – общая площадь двух сферических поверхностей пленки мыльного пузыря; $S_о$ – общая площадь двух поверхностей плоской пленки, затягивавшей отверстие трубки до выдувания пузыря.

Пренебрегая $S_о$, получаем

$$A = \sigma S = 2\pi d^2 \sigma .$$

Произведем вычисления:

Δp = 3,2 Па, A =$2 \cdot 3{,}14 \cdot (0{,}1)^2 \cdot 40 \cdot 10^{-3}$ Дж = $2{,}5 \cdot 10^{-3}$ Дж = 2,5 мДж.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2

ВАРИАНТ 1

1. В закрытом сосуде объемом 20 л содержатся водород массой 6 г и гелий массой 12 г. Определить: 1) давление; 2) молярную массу газовой смеси в сосуде, если температура смеси T = 300 К.

2. Определить среднюю квадратичную $\langle v_{кв} \rangle$, среднюю арифметическую $\langle v \rangle$ и наиболее вероятные $v_в$ скорости молекул водорода. Вычисления выполнить для трех значений температуры: 1) T = 20 К; 2) T = 300 К; 3) T = 5 кК.

3. В сферической колбе объемом V = 1 л содержится азот. При какой плотности ρ азота средняя длина свободного пробега молекул азота больше размеров сосуда?

4. Азот массой m = 10,5 г изотермически расширяется при температуре t = –23 °С, причем его давление изменяется от p_1 = 250 кПа до p_2 = 100 кПа. Определить работу A, выполненную газом при расширении.

5. Кислород нагревается при неизменном давлении p = 80 кПа. Его объем увеличивается от V_1 = 1 м^3 до V_2 = 3 м^3. Определить: 1) изменение ΔU внутренней энергии кислорода; 2) работу A**,** выполненную им при расширении; 3) количество теплоты Q, сообщенное газу.

6. Вследствие изотермического расширения в цикле Карно газ получил от нагревателя 150 кДж теплоты. Определить работу A изотермического сжатия этого газа, если известно, что КПД цикла η = 0,4.

7. Масса 100 капель спирта, который вытекает из капилляра, m = 0,71 г. Определить поверхностное натяжение σ спирта, если диаметр d шейки капли в момент отрыва равен 1 мм.

ВАРИАНТ 2

1. В баллоне емкостью 15 л находится азот под давлением 100 кПа при температуре t_1 = 27 °С. После того, как из баллона выпустили азот массой 14 г, температура газа стала равной t_2 = 17 °С. Определить давление азота, который остался в баллоне.

2. Вычислить кинетическую энергию $\langle E \rangle$ вращательного движения двух молей молекул кислорода при температуре 17 °С.

3. Вычислить среднее число столкновений $\langle z \rangle$ за единицу времени молекул некоторого газа, если средняя длина свободного пробега $\langle l \rangle$ = 5 мкм, а средняя квадратичная скорость его молекул $v_{кв}$ = 500 м/с.

4. При изотермическом расширении массы m = 10 г азота, который находится при температуре t = 17 °С, была выполнена работа A = 860 Дж. Во сколько раз изменилось давление азота при расширении?

5. Два разных газа, одноатомный и двухатомный, имеют одинаковые объемы и температуры. Газы сжимают адиабатно так, что их объемы уменьшаются в два раза. Какой из газов нагреется больше и во сколько раз?

6. Вычислить приращение энтропии ΔS водорода, масса которого m = 0,8 кг во время его сжатия от 0,1 МПа при температуре 27 °С до 1,5 МПа при температуре 127 °С.

7. Трубка имеет диаметр d_1 = 0,2 см. На нижнем конце трубки повисла капля воды, которая имеет в момент отрыва вид сферы. Вычислить диаметр d_2 этой капли.

ВАРИАНТ 3

1. Азот массой 7 г находится под давлением p = 0,1 МПа при температуре t_1 = 290 °С. Вследствие изобарного нагревания азот занял объем V_2 = 10 л. Определить: 1) объем V_1 газа до расширения; 2) температуру T_2 газа после расширения; 3) плотность газа до и после расширения.

2. Колба емкостью V = 4 л содержит некоторый газ массой m = 0,6 г под давлением p = 200 кПа. Определить среднюю квадратичную скорость $\langle v_{кв} \rangle$ молекул газа.

3. Вычислить среднюю длину свободного пробега $\langle l \rangle$ молекул водорода при давлении p = 0,1 Па и температуре T = 100 К.

4. Кислород, масса которого 80 г, изобарно нагревают от 15 до 115 °С. Определить работу A, выполненную газом, изменение внутренней энергии ΔU и количество подведенной теплоты Q.

5. Вследствие адиабатного расширения объем газа увеличивается в два раза, а термодинамическая температура снижается в 1,32 раза. Сколько степеней свободы i имеют молекулы этого газа?

6. Кислород, масса которого m = 2 кг, увеличил свой объем в n = 5 раз, первый раз изотермически, второй раз – адиабатно. Определить изменение энтропии ΔS в каждом из процессов.

7. Какую работу A нужно выполнить, чтобы, выдувая мыльный пузырек, увеличить его диаметр от d_1 = 1 см до d_2 = 5 см? Считать процесс изотермическим.

ВАРИАНТ 4

1. В сосуде вместимостью 1 л находится кислород массой 1 г. Определить концентрацию молекул кислорода в сосуде.

2. Вычислить среднюю кинетическую энергию $\langle \varepsilon_{вр} \rangle$ вращательного движения одной молекулы кислорода при температуре T = 350 К и среднюю кинетическую энергию $\langle E \rangle$ вращательного движения всех молекул кислорода, масса которого m = 4 г.

3. При каком давлении p средняя длина свободного пробега $\langle l \rangle$ молекул азота составляет 1 м, если температура газа T = 300 К?

4. В сосуде объемом V = 5 л содержится газ при давлении p = 200 кПа и температуре t = 17 °С. При изобарном расширении газом была выполнена работа A = 196 Дж. На сколько градусов нагрелся газ?

5. При адиабатном сжатии воздуха в цилиндрах двигателя внутреннего сгорания давление изменяется от p_1 = 0,1 МПа до p_2 = 3,5 МПа. Начальная температура воздуха t_1 = 40 °С. Определить температуру T_2 воздуха в конце сжатия.

6. Кислород массой m = 200 г занимает объем V_1 = 100 л и находится под давлением p_1 = 200 кПа. Во время нагревания газ расширился при постоянном давлении до объема V_2 = 300 л, а потом его давление возросло до p_2 = 500 кПа при неизменном объеме. Определить изменение внутренней энергии ΔU газа, работу A, совершенную газом и количество теплоты Q, сообщенную газу. Построить график процесса.

7. Две капли ртути радиусом r = 1 мм каждая слились в одну большую каплю. Какая энергия E выделится при этом слиянии? Считать процесс изотермическим.

ВАРИАНТ 5

1. В сосуде вместимостью V = 0,3 л при температуре T = 290 К содержится неон. На сколько понизится давление p газа в сосуде, если из него через вентиль выйдет N = 10^{19} молекул?

2. Определить наиболее вероятную скорость молекул газа, плотность которого при давлении 40 кПа составляет 0,35 кг/м^3.

3. Баллон объемом V = 10 л содержит водород массой m = 1 г. Определить среднюю длину свободного пробега $\langle l \rangle$ молекул.

4. При изобарном расширении двухатомного газа была выполненная работа A = 156,8 Дж. Какое количество теплоты Q было сообщено газу?

5. Газ расширяется адиабатно, причем объем его увеличивается вдвое, а термодинамическая температура падает в 1,32 раза. Какое число степеней свободы i имеют молекулы этого газа?

6. Холодильная машина, которая работает по обратному циклу Карно, передает тепло от холодильника с водой при температуре t_2 = 0 °С кипятильнику с водой при температуре t_1 = 100 °С. Какую массу m_2 воды нужно заморозить в холодильнике, чтобы превратить в пар массу m_1 = 1 кг воды в кипятильнике?

7. Воздушный пузырек диаметром d =20 мкм находится в воде возле самой ее поверхности. Определить плотность ρ воздуха в пузырьке. Атмосферное давление принять нормальным.

ВАРИАНТ 6

1. В сосуде вместимостью 5 л при нормальных условиях находится азот. Определить: 1) количество вещества ν; 2) массу азота; 3) концентрацию n его молекул в сосуде.

2. Давление газа p = 1 мПа, концентрация его молекул n = 10^{10} см$^{-3}$. Определить: 1) температуру T газа; 2) среднюю кинетическую энергию $\langle \varepsilon_п \rangle$ поступательного движения молекул газа.

3. Определить плотность ρ разреженного водорода, если средняя длина свободного пробега $\langle l \rangle$ молекул равна 1 см.

4. Двухатомному газу сообщили количество теплоты Q = 2,093 кДж. Газ расширяется при постоянном давлении. Определить работу A расширения газа.

5. Двухатомный газ, который находится при давлении p_1 = 2 МПа и температуре t_1 = 27 °С, сжимается адиабатно от объема V_1 до $V_2 = 0{,}5\ V_1$. Определить температуру t_2 и давление p_2 газа после сжатия.

6. В некотором процессе энтропия термодинамической системы изменилась на ΔS = 1,38 мДж/К. Как при этом изменилась термодинамическая вероятность состояния системы w ?

7. На сколько давление p воздуха внутри мыльного пузырька большее атмосферного давления p_0, если диаметр пузырька d = 5 мм?

ВАРИАНТ 7

1. В баллоне содержится газ при температуре t_1 =100 °С. До какой температуры t_2 нужно нагреть газ, чтобы его давление увеличилось в два раза?

2. Определить среднюю кинетическую энергию $\langle \varepsilon_п \rangle$ поступательного движения, среднее значение $\langle \varepsilon \rangle$ полной кинетической энергии молекулы водяного пара при температуре T = 600 К. Определить также энергию W поступательного движения всех молекул пара, которые содержатся в ν = 1 кмоль вещества.

3. Вычислить среднее число $\langle z \rangle$ столкновений, которые испытывает молекула кислорода за 1 с при нормальных условиях.

4. Разность удельных теплоемкостей для некоторого газа $c_p - c_V$ = 189 Дж/(кг К). Определить, какой это газ.

5. Азот в количестве ν = 1 кмоль, который находится при нормальных условиях, расширяется адиабатно от объема V_1 до $V_2 = 5\ V_1$. Определить изменение ΔU внутренней энергии газа и работу A, выполненную газом при расширении.

6. Осуществляя замкнутый процесс, газ получил от нагревателя количество теплоты Q_1 = 4 кДж. Определить работу A газа за цикл, если его термический КПД □ = 0,1.

7. Глицерин поднялся в капиллярной трубке на высоту h = 20 мм. Определить поверхностное натяжение σ глицерина, если диаметр d канала трубки равен 1 мм.

ВАРИАНТ 8

1. При нагревании идеального газа на ΔT = 1 К при постоянном давлении объем его увеличился на 1/350 первоначального объема. Найти начальную температуру T газа.

2. Определить средние значения $\langle \varepsilon \rangle$ полной кинетической энергии одной молекулы гелия, кислорода и водяного пара при температуре T = 400 К.

3. На сколько уменьшится атмосферное давление p = 100 кПа при подъеме наблюдателя над поверхностью Земли на высоту h = 100 м? Считать, что температура T воздуха равняется 290 К и не изменяется с высотой.

4. В закрытом сосуде находится масса m_1 = 20 г азота и масса m_2 = 32 г кислорода. Определить изменение ΔU внутренней энергии смеси газов при охлаждении ее на ΔT = 28 К.

5. Газ расширяется адиабатно так, что его давление падает от p_1 = 200 кПа до p_2 = 100 кПа. Потом он нагревается при постоянном объеме до первоначальной температуры, причем его давление становится p = 122 кПа. Определить отношение C_p/C_v для этого газа. Начертить график процесса.

6. Идеальный газ, который выполняет цикл Карно, 2/3 количества теплоты Q_1, полученной от нагревателя, отдает холодильнику. Температура холодильника T_2 = 280 К. Определить температуру T_1 нагревателя.

7. Разность Δh уровней жидкости в коленах U-образной трубки равна 23 мм. Диаметры d_1 и d_2 каналов в коленах трубки равны соответственно 2 и 0,4 мм. Плотность жидкости ρ = 0,8 г/см^3. Определить поверхностное натяжение жидкости.

ВАРИАНТ 9

1. В цилиндре под поршнем содержится газ при нормальных условиях. Сначала при T = const объем газа увеличили в β = 5 раз, потом газ нагрели при p = const до температуры t = 127 °С. Определить концентрацию n молекул в конечном состоянии.

2. Некоторая масса кислорода находится при температуре t = 27 °С и давлении p = 100 кПа. Кинетическая энергия поступательного движения молекул кислорода <E> = 6,3 Дж. Определить количество молекул N кислорода, его массу m и объем V.

3. Определить среднюю продолжительность <□> свободного пробега молекул кислорода при температуре T = 250 К и давления p = 100 Па.

4. Водород массой m = 6,5 г, который находится при температуре t = 27 °С, расширяется вдвое при p = const за счет сообщенной извне теплоты. Определить работу A расширения газа, увеличение ΔU внутренней энергии газа и количество теплоты Q, сообщенное газу.

5. Двухатомный газ занимает объем V_1 = 0,5 л при давлении p_1 = 50 кПа. Газ сжимается адиабатно до некоторого объема V_2 и давления p_2. Потом он охлаждается при V_2 = const до первоначальной температуры, причем его давление становится p_0 = 100 кПа. Начертить график этого процесса. Определить объем V_2 и давление p_2.

6. Идеальный газ выполняет цикл Карно. Температура T_2 холодильника равна 290 К. В сколько раз увеличится КПД цикла, если температура нагревателя повысится от T_1' = 400 К до T_1'' = 600 К?

7. В воду погружена на очень малую глубину стеклянная трубка с диаметром d внутреннего канала, равным 1 мм. Вычислить массу m воды, которая вошла в трубку.

ВАРИАНТ 10

1. В сосуде вместимостью V= 3 дм^3 содержится азот при температуре t = 17 °С и давлении p = 10^{-4} Па. Определить количество молекул N азота в сосуде, массу m

азота и среднюю кинетическую энергию <E> поступательного теплового движения молекул газа.

2. До какой температуры T нужно нагреть идеальный газ при p = const, чтобы его плотность уменьшилась в два раза по сравнению с плотностью этого газа при $t_0 = 0$ °С ?

3. Какой должна быть температура T воздуха Земли, чтобы средняя квадратичная скорость молекулы водорода равнялась бы второй космической скорости ?

4. Гелий, который находится при нормальных условиях, изотермически расширяется от объема V_1 = 1 л до объема V_2 = 2 л. Определить работу A, совершенную газом при расширении, и количество теплоты Q, полученное газом.

5. Определить удельные теплоемкости c_p и c_V некоторого газа, если известно, что его плотность при нормальных условиях ρ = 1,43 кг/м^3, а отношение молярных теплоемкостей равно 1,4. Какой это газ?

6. Идеальный газ выполняет цикл Карно. Температура T_1 нагревателя в три раза выше температуры T_2 холодильника. От нагревателя получено количество теплоты Q_1 = 42 кДж. Какую работу A выполнил газ?

7. На какую высоту h поднимается вода между двумя параллельными стеклянными пластинками, если расстояние d между ними равно 0,2 мм?

3. ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ И ФОРМУЛЫ

3.1. Электростатика

- Закон Кулона

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 Q_2}{\varepsilon r^2},$$

где F - сила взаимодействия двух точечных зарядов Q_1 и Q_2; r - расстояние между зарядами; ε - диэлектрическая проницаемость среды; ε_0 = 8,85·10^{-12} Ф/м – электрическая постоянная.

- Напряженность и потенциал электростатического поля

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{Q_0};\ \varphi = \frac{\Pi}{Q_0},$$

где **F** – сила, действующая на точечный положительный заряд Q_0,, помещенный в данную точку поля, П – потенциальная энергия заряда Q_0.

- Напряженность и потенциал электростатического поля точечного заряда Q на расстоянии r от заряда

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}; \qquad \varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}.$$

- Поток вектора напряженности через площадку dS и произвольную поверхность S

$$d\Phi_E = E_n dS; \qquad \Phi_E = \int_S E_n dS.$$

- Принцип суперпозиции (наложения) электрических полей

$$\mathbf{E}=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{E}_i\ .; \quad \varphi=\sum_{i=1}^{n}\varphi_i\ .$$

- Теорема Гаусса для электростатического поля в вакууме. Поток вектора напряженности **E** через любую замкнутую поверхность, охватывающую заряды $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$,

$$\oint_S E_n dS=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}Q_i\ ,$$

где $\sum_{i=1}^{n}Q_i$ – алгебраическая сумма зарядов, заключенных внутри замкнутой поверхности; n – число зарядов.

- Напряженность поля, создаваемого бесконечной равномерно заряженной плоскостью,

$$E = \sigma/(2\varepsilon_0),$$

где $\sigma = \Delta Q/\Delta S$ – поверхностная плотность заряда.

- Напряженность электрическою поля, создаваемого равномерно заряженной сферической поверхностью радиусом R, несущей заряд Q, на расстоянии r от центра сферы:

а) внутри сферы $(r<R)$

$$E=0;$$

б) вне сферы ($r \geq R$)

$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\ .$$

- Напряженность поля, создаваемого бесконечно длинной равномерно заряженной нитью (или цилиндром) на расстоянии r от ее оси,

$$E=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\tau}{r}\ ,$$

где $\tau = \Delta Q/\Delta l$ – линейная плотность заряда.

- Напряженность поля плоского конденсатора:

$$E = \sigma/(\varepsilon_0\varepsilon).$$

- Поляризованность

$$\mathbf{P}=\frac{1}{\Delta V}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{p}_i\ ,$$

где $\mathbf{p}_i$ – электрический момент отдельной (i -й) молекулы; N–число молекул, содержащихся в объеме ΔV .

- Связь поляризованности диэлектрика с напряженностью **E** электростатического поля

$$\mathbf{P} = \kappa\varepsilon_0\mathbf{E},$$

где κ – диэлектрическая восприимчивость.

- Связь диэлектрической проницаемости ε с диэлектрической восприимчивостью

$$\varepsilon=1+\kappa\ .$$

- Напряженность E поля в диэлектрике

$$E=\frac{E_0}{\varepsilon} \text{ и } E=E_0-\frac{P}{\varepsilon_0}\ ,$$

где E_0 – напряженность внешнего поля.

- Электрическое смещение **D**:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0\varepsilon\mathbf{E} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}.$$

- Электрическая емкость уединённого проводника или конденсатора

$$C = \frac{\Delta Q}{\Delta \varphi},$$

где ΔQ – заряд, сообщенный проводнику (конденсатору); $\Delta\varphi$ – изменение потенциала, вызванное этим зарядом.

- Электрическая емкость уединенной проводящей сферы радиусом R, находящейся в бесконечной среде с диэлектрической проницаемостью ε,

$$C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon R.$$

- Емкость плоского конденсатора

$$C = \frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{d},$$

где S – площадь каждой пластины; d – расстояние между пластинами.

- Емкость системы конденсаторов при последовательном и параллельном соединении:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_n}, \quad C = C_1 + C_2 + \ldots + C_n,$$

где n – число конденсаторов.

- Энергия заряженного проводника и заряженного конденсатора:

$$W = \frac{C\varphi^2}{2} = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q\varphi}{2}, \qquad W = \frac{CU^2}{2} = \frac{Q^2}{2C} = \frac{QU}{2}.$$

- Сила притяжения между двумя разноименными заряженными обкладками конденсатора

$$|F| = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0\varepsilon S} = \frac{\sigma^2 S}{2\varepsilon_0\varepsilon} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon E^2 S}{2}.$$

- Объемная плотность энергии электростатического поля

$$w = \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon E^2 = \frac{1}{2}ED.$$

3.2. Постоянный электрический ток

- Сила и плотность электрического тока

$$I = \frac{dQ}{dt}, \; \mathrm{j} = \frac{I}{S},$$

где Q – количество электричества, прошедшее через поперечное сечение проводника, S – площадь поперечного сечения проводника.

- Плотность тока j, средняя скорость <v> упорядоченного движения носителей заряда и их концентрация n связаны соотношением

$$j = en\langle v\rangle,$$

где e – величина электрического заряда.

- Сопротивление однородного проводника

$$R = \rho\frac{l}{S},$$

где ρ – удельное электрическое сопротивление; S – площадь поперечного сечения проводника, l – его длина.

- Проводимость G проводника и удельная проводимость γ вещества

$$G = 1/R, \quad \gamma = 1/\rho .$$

- Зависимость удельного сопротивления ρ от температуры

$$\rho = \rho_o(1 + \alpha t),$$

где α – температурный коэффициент сопротивления.

- Сопротивление проводников при последовательном и параллельном соединении:

$$R = \sum_{i=1}^{n} R_i ; \qquad \frac{1}{R} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i} .$$

Здесь R_i - сопротивление i-го проводника; n - число проводников.

- Закон Ома:

для однородного участка цепи $\quad I = \dfrac{U}{R};$

для неоднородного участка цепи $\quad I = \dfrac{(\varphi_1 - \varphi_2) \pm \varepsilon_{12}}{R};$

для замкнутой цепи $(\varphi_1 = \varphi_2)$ $\quad I = \dfrac{\varepsilon}{R}.$

Здесь $(\varphi_1 - \varphi_2)$ – разность потенциалов на концах участка цепи; ε_{12}– ЭДС источников тока, входящих в участок; U – напряжение на участке цепи; R – сопротивление цепи (участка цепи); ε – алгебраическая сумма ЭДС всех источников тока цепи.

- Закон Ома в дифференциальной форме

$$\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E}.$$

- Работа тока за время t,

$$A = IUt = I^2Rt = \frac{U^2}{R}t..$$

- Мощность тока

$$P = IU == I^2R = \frac{U^2}{R}.$$

- Закон Джоуля-Ленца

$$Q = I^2Rt = IUt,$$

где Q - количество теплоты, выделяющееся в участке цепи за время t.

- Закон Джоуля-Ленца в диффенциальной форме

$$w = \gamma E^2,$$

где w – объемная плотность тепловой мощности.

- Правила Кирхгофа.

Первое правило: алгебраическая сумма сил токов, сходящихся в узле, равна нулю, т.е.

$$\sum_{i=1}^{n} I_i = 0,$$

где n – число токов.

Второе правило: в замкнутом контуре алгебраическая сумма напряжений на всех участках контура равна алгебраической сумме электродвижущих сил, т.е.

$$\sum_{i=1}^{n} I_i R_i = \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i ,$$

где I_i – сила тока на i-м участке; R_i – сопротивление на i-м участке; ε_i – ЭДС источников тока на i-м участке; n – число участков, содержащих сопротивление; k – число участков, содержащих источники тока.

3.3. Магнитное поле

- Магнитная индукция **B** связана с напряженностью **H** магнитного поля соотношением:

$$\mathbf{B} = \mu_0\mu\mathbf{H},$$

где $\mu_0 = 4\pi\cdot10^{-7}$ Гн/м – магнитная постоянная, μ – магнитная проницаемость среды.

- Закон Био–Савара–Лапласа

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0\mu}{4\pi}\frac{I[d\mathbf{lr}]}{r^3},$$

где $d\mathbf{B}$ – магнитная индукция поля, создаваемого элементом длины $d\mathbf{l}$ проводника с током I; $\mathbf{r}$ – радиус-вектор, проведенный от $d\mathbf{l}$ к точке, в которой определяется магнитная индукция.

- Модуль вектора $d\mathbf{B}$

$$dB = \frac{\mu_0\mu}{4\pi}\frac{Idl\sin\alpha}{r^2},$$

где α - угол между векторами $d\mathbf{l}$ и $\mathbf{r}$.

- Принцип суперпозиции магнитных полей: магнитная индукция результирующего поля равна векторной сумме магнитной индукции складываемых полей, т. е.:

$$\mathbf{B} = \sum_{i=1}^{n}\mathbf{B}_i .$$

В частном случае наложения двух полей модуль магнитной индукции

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2 + 2B_1B_2\cos\alpha},$$

где α – угол между векторами $\mathbf{B}_1$ и $\mathbf{B}_2$.

- Магнитная индукция поля, создаваемого бесконечно длинным прямым проводником с током,

$$B = \frac{\mu_0\mu}{2\pi}\frac{I}{R},$$

где R – расстояние от оси проводника.

- Магнитная индукция поля, создаваемого отрезком проводника

$$B = \frac{\mu_0\mu}{4\pi}\frac{I}{r_0}(\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2).$$

Обозначения ясны из рис. 3.1а. Вектор индукции **B** перпендикулярен плоскости чертежа, направлен к нам и поэтому изображен точкой.

При симметричном расположении концов проводника относительно точки, в которой определяется магнитная индукция (рис. 3.1б)

$$B = \frac{\mu_0\mu}{2\pi}\frac{I}{r_0}\cos\varphi .$$

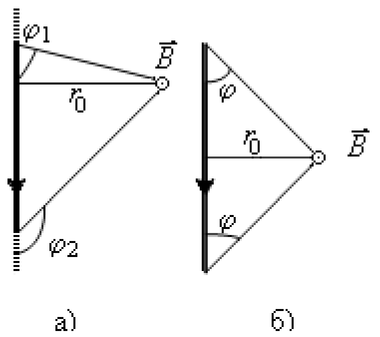


Рис. 3.1

- Магнитная индукция в центре кругового проводника с током

$$B = \frac{\mu_0 \mu I}{2R},$$

где R - радиус кривизны проводника.

- Закон Ампера. Сила, действующая на элемент длины $d\mathbf{l}$ проводника с током I, помещенный в магнитное поле с индукцией **B**,

$$d\mathbf{F} = I[d\mathbf{l}, \mathbf{B}],$$

- Модуль силы Ампера

$$dF = IBdl\sin\alpha,$$

где α угол между векторами $d\mathbf{l}$ и **B**.

- Сила взаимодействия двух прямых бесконечных параллельных проводников с токами I_1 и I_2, находящихся на расстоянии d друг от друга, рассчитанная на отрезок проводника длиной l, выражается формулой

$$F = \frac{\mu_0 \mu}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{d} l.$$

- Магнитный момент контура с током I

$$\mathbf{p}_\text{m} = IS\mathbf{n},$$

где **n** – единичный вектор нормали к поверхности контура площадью S.

- Механический момент, действующий на контур с током, помещенный в однородное магнитное поле,

$$\mathbf{M} = [\mathbf{p}_\text{m}\mathbf{B}].$$

- Сила $\mathbf{F}$, действующая на заряд Q, движущийся со скоростью $\mathbf{v}$ в магнитном поле с индукцией $\mathbf{B}$ (сила Лоренца),

$$\mathbf{F} = Q[\mathbf{v}\mathbf{B}] \text{ или по модулю } F = QvB\sin\alpha,$$

где α - угол, образованный вектором скорости $\mathbf{v}$ движущейся частицы и вектором магнитной индукции $\mathbf{B}$.

- Закон полного тока для магнитного поля в вакууме (теорема о циркуляции вектора **B**):

$$\oint_L B_l dl = \mu_0 \sum_{i=1}^{n} I_\text{i},$$

где μ_0 - магнитная постоянная; $B_l = B\cos\alpha$ – проекция вектора В на направление касательной контура L произвольной формы (с учетом выбранного направления обхода), $\sum_{i=1}^{n} I_\text{i}$ – алгебраическая сумма токов, охватываемых контуром L; n – число токов.

- Магнитная индукция поля внутри соленоида в средней его части (или тороида на его оси),

$$B = \mu_0 \mu n I,$$

где $n = \frac{N}{l}$ – число витков, приходящихся на единицу длины соленоида; I – сила тока в обмотке соленоида.

- Магнитный поток Φ через плоский контур площадью S:

а) в случае однородного поля

$$\Phi = B_n S = BS\cos\alpha,$$

где α - угол между вектором нормали $\mathbf{n}$ к плоскости контура и вектором магнитной индукции $\mathbf{B}$; B_n - проекция вектора $\mathbf{B}$ на нормаль $\mathbf{n}$;

б) в случае неоднородного поля

$$\Phi = \int_S B_n dS,$$

где интегрирование ведется во всей поверхности S.

- Потокосцепление, т.е. полный магнитный поток, сцепленный со всеми N витками соленоида или тороида,

$$\Psi = N\Phi_1 = \mu_0 \mu \frac{N^2 I}{l} S,$$

где Φ_1 – магнитный поток через один виток.

- Работа по перемещению проводника с током в магнитном поле

$$dA = Id\Phi,$$

где $d\Phi$– магнитный поток, пересеченный движущимся проводником.

- Работа по перемещению замкнутого контура с током в магнитном поле

$$A = I\Delta\Phi,$$

где $\Delta\Phi$ - изменение магнитного потока, пронизывающего поверхность, ограниченную контуром.

3.4. Электромагнитная индукция

- Основной закон электромагнитной индукции (закон Фарадея-Максвелла):

$$\xi_{инд} = -N\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\Psi}{dt},$$

где $\xi_{инд}$ - электродвижущая сила индукции; N - число витков контура; Ψ – потокосцепление.

- Частные случаи применения основного закона электромагнитной индукции:

а) разность потенциалов U на концах проводника длиной l, движущегося со скоростью v в однородном магнитном поле,

$$U = Blv\sin\alpha,$$

где α - угол между направлениями векторов скорости **v** и магнитной индукции **B**;

б) электродвижущая сила индукции $\xi_{инд}$, возникающая в рамке площадью S, содержащей N витков, при вращении рамки с угловой скоростью ω в однородном магнитном поле с индукцией **B**

$$\xi_{ÈÍÄ} = BNS\omega\sin\omega t,$$

где ωt - мгновенное значение угла между вектором **B** и вектором нормали **n** к плоскости рамки.

- Количество электричества Q, протекающего в контуре,

$$Q = \frac{\Delta\Psi}{R},$$

где R - сопротивление контура; $\Delta\Psi$ - изменение потокосцепления.

- Электродвижущая сила самоиндукции $\xi_{инд}$, возникающая в замкнутом контуре при изменении силы тока в нем,

$$\xi_{si} = -L\frac{dI}{dt},$$

где L - индуктивность контура.

- Потокосцепление контура

$$\Psi = LI,$$

где L - индуктивность контура.

- Индуктивность соленоида (тороида)

$$L = \mu_0 \mu n^2 V,$$

где $n = \frac{N}{l}$ – количество витков на единицу длины соленоида, V – объем соленоида.

- Энергия магнитного поля, создаваемого током I в замкнутом контуре индуктивностью L,

$$W = \frac{LI^2}{2}.$$

- Объемная плотность энергии однородного магнитного поля (например, поля длинного соленоида)

$$w = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} = \frac{B^2}{2\mu_0 \mu} = \frac{BH}{2}.$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 3.1. *Расстояние l между двумя точечными зарядами Q_1 = 2 нКл и Q_2 = – 3 нКл, расположенными в вакууме, равно 20 см. Определить: 1) напряженность E; 2) потенциал φ поля, создаваемого этими зарядами в точке, удаленной от первого заряда на расстояние r_1 = 15 см и от второго заряда на r_2 = 10 см.*

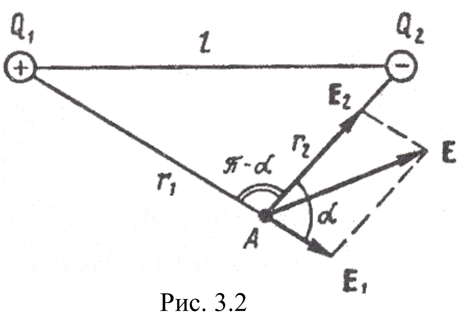


Рис. 3.2

Решение*:* Напряженность поля, создаваемого зарядами, находится по принципу суперпозиции. Результирующая напряженность **E** равна векторной сумме напряженности полей, создаваемых каждым зарядом в данной точке поля:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2.$$

Модули напряженностей электрических полей, создаваемых отдельными точечными зарядами,

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|Q_1|}{r_1^2}, \quad E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|Q_2|}{r_2^2}. \qquad (1)$$

Чтобы найти модуль напряженности результирующего поля в заданной точке A, надо сначала построить векторы напряженности. Так как заряд Q_1 положительный, вектор $\mathbf{E}_1$ направлен от точки A в сторону от заряда Q_1, создающего поле. Так как заряд Q_2 отрицательный, вектор $\mathbf{E}_2$ направлен от точки A к заряду Q_2, создающему поле (направления векторов показаны на рис. 3.2).

Модуль вектора **E** находится по теореме косинусов:

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2\cos\alpha}, \qquad (2)$$

где

$$\cos\alpha = \frac{l^2 - r_1^2 - r_2^2}{2r_1r_2} = 0{,}25. \qquad (3)$$

Подставив (1) и (3) в формулу (2), найдем искомую напряженность в точке A:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sqrt{\frac{Q_1^2}{r_1^2} + \frac{2|Q_1||Q_2|}{r_1^2r_2^2}\cos\alpha + \frac{Q_2^2}{r_2^2}}.$$

Согласно принципу суперпозиции потенциал результирующего поля

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2,$$

где $\varphi_1 = \dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1}$, $\varphi_2 = \dfrac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2}$ – соответственно потенциалы полей, создаваемых зарядами Q_1 и Q_2. Подставляя, найдем

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_1}{r_1} + \frac{Q_2}{r_2}\right).$$

Подставив числовые значения, получим

1) E = 3 кВ/м; 2) φ = – 150 В.

Пример 3.2. *Электроемкость плоского воздушного конденсатора C = 1 нФ, расстояние между обкладками d = 4 мм. На помещенный между обкладками конденсатора заряд Q_0 = 4,9 нКл действует сила F_0 = 98 мкН. Площадь S каждой обкладки равна 100 см^2. Определить: 1) напряженность E поля; 2) разность потенциалов U между обкладками; 3) энергию W поля и объемную плотность энергии w конденсатора; 4) силу F, с которой притягиваются пластины конденсатора.*

Решение*:* Поле между обкладками конденсатора считаем однородным. Напряженность поля конденсатора определяется из выражения $E = F_0/Q_0$.

Разность потенциалов между обкладками $U = Ed = F_0 d/Q_0$.

Энергия поля конденсатора

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 S}{d}\left(\frac{F_0 d}{Q_0}\right)^2.$$

Объемная плотность энергии

$$w = \frac{W}{V} = \frac{W}{Sd} = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{F_0}{Q_0}\right)^2,$$

Чтобы определить силу притяжения между пластинами конденсатора, рассуждаем следующим образом. Заряд Q одной пластины находится в поле, созданном зарядом другой пластины конденсатора. Следовательно, на первый заряд действует сила $F = QE_{пласт}$. Эта сила и будет искомой силой притяжения. Так как поле, создаваемое одной заряженной пластиной

$$E_{пласт} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{Q}{S}\frac{1}{2\varepsilon_0},$$

где $\sigma = Q/S$ – поверхностная плотность заряда пластины, то

$$F_{прит} = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S} = \frac{S}{2\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{S}\right)^2 = \frac{S}{2\varepsilon_0}\sigma^2.$$

Формула силы специально записана так, чтобы можно было ввести напряженность поля, создаваемого двумя бесконечными параллельными разноименно заряженными плоскостями (поле плоского конденсатора)

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

Тогда выражение для силы притяжения пластин конденсатора примет вид

$$F_{прит} = \frac{\varepsilon_0 S}{2}E^2 = \frac{\varepsilon_0 S}{2}\left(\frac{F_0}{Q_0}\right)^2.$$

Подставив числовые значения, найдем:

E = 20 кВ/м; U = 80 В; W = 70,8 нДж; w = 1,77 мДж/м^3; $F_{\text{прит}}$ = 17,7 мкН.

Пример 3.3. *Электростатическое поле создается положительно заряженной бесконечной нитью (рис.3.3) с постоянной линейной плотностью заряда τ = 1 нКл/м. Какую скорость приобретет электрон, приблизившись под действием поля к нити вдоль линии напряженности с расстояния r_1 = 1,5 см до r_2 = 1 см? Начальная скорость электрона равна нулю.*

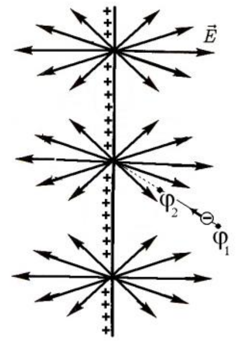


Рис. 3.3

<u>Решение</u>. Приращение кинетической энергии электрона равно работе сил электрического поля

$$T_2 - T_1 = \frac{m\upsilon_2^2}{2} - \frac{m\upsilon_1^2}{2} = A = e(\varphi_1 - \varphi_2),$$

где T_1 и T_2 – кинетическая энергия электрона до и после прохождения ускоряющего поля, v_1 и v_2 – начальная и конечная скорости электрона, e – заряд, m – масса электрона, φ_1 и φ_2 – потенциалы начальной и конечной точек пути.

Для определения разности потенциалов воспользуемся соотношением между напряженностью поля и изменением потенциала, которое в случае осевой симметрии поля нити имеет вид:

$$E = -\frac{d\varphi}{dr} \text{ или } d\varphi = -E dr.$$

Интегрируя это выражение, найдем разность потенциалов двух точек, отстоящих на расстояния r_1 и r_2 от нити:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = -\int_{r_1}^{r_2} E dr.$$

Подставив сюда выражение для напряженности поля, создаваемого бесконечно длинной нитью ($E = \tau/(2\pi\varepsilon_0 r)$), получим

$$\varphi_2 - \varphi_1 = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r} = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{r_1},$$

или

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{r_1}.$$

Учитывая, что $v_1 = 0$ и $T_1 = 0$, получим

$$\frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{e\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{r_1} \text{ и } \upsilon = \sqrt{\frac{e\tau}{m\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{r_1}}.$$

Подставив числовые значения, найдем v = 1,6 Мм/с.

Пример 3.4. *Сила тока в проводнике сопротивлением R = 10 Ом равномерно нарастает за время Δt = 4 с от I_0 = 0 до I_{max} = 8 А. Определить количество теплоты, выделившееся в проводнике за первые t_1= 3 с.*

<u>Решение</u>. Закон Джоуля–Ленца в виде $Q = I^2Rt$ справедлив для постоянного тока. Если же сила тока в проводнике изменяется, то этот закон справедлив для бесконечно малого интервала времени

$$dQ = I^2 R dt. \quad (1)$$

По условию задачи сила тока равномерно растет, тогда закон изменения тока можно записать в виде $I = kt$, где k – коэффициент пропорциональности, численно равный приращению тока в единицу времени:

$$k=\frac{\Delta I}{\Delta t}=\frac{8\text{А}}{4\text{с}}=2\text{А/с}.$$

Следовательно,

$$dQ=k^2t^2Rdt. \qquad (2)$$

Для определения теплоты, выделившейся за конечный промежуток времени, выражение (2) надо проинтегрировать. За первые t_1 секунд выделится количество теплоты

$$Q=\int_0^{t_1}k^2t^2Rdt=k^2R\int_0^{t_1}t^2dt=\frac{k^2Rt_1^3}{3}.$$

Подставляя числовые значения, получим Q = 360 Дж.

Пример 3.5. *Батарея состоит из n = 5 последовательно соединенных элементов. ЭДС каждого ε = 1,4 В, внутреннее сопротивление каждого r_i = 0,3 Ом. При каком токе полезная мощность батареи равна P_n = 8 Вт? Определить также наибольшую полезную мощность $(P_n)_{max}$ батареи:*

Решение*:* Полезной мощностью батареи считают ту, которая выделяется во внешней цепи

$$P_n=I^2R, \qquad (1)$$

где R – сопротивление внешней цепи, I – сила тока, текущего в цепи, которая определяется по закону Ома для замкнутой цепи

$$I=\frac{n\varepsilon}{nr_i+R}. \qquad (2)$$

Здесь $n\varepsilon$ – ЭДС, а nr_i – внутреннее сопротивление n последовательно соединенных элементов.

Решим первую часть задачи. Выразим R из (1) и подставим это выражение в (2), получим

$$I=\frac{n\varepsilon}{nr_i+P_n/I^2}. \qquad (4)$$

Преобразуя выражение (4), получим квадратное уравнение относительно тока I:

$$nr_iI^2-n\varepsilon I+P_n=0.$$

Решая квадратное уравнение, найдем

$$I_{1,2}=\frac{n\varepsilon\pm\sqrt{n^2\varepsilon^2-4nr_iP_n}}{2nr_i}.$$

Подставляя числовые значения, получим два корня. Оба корня положительные и имеют физический смысл: I_1 = 2,66 А и I_2 = 2 А.

Чтобы теперь определить наибольшую полезную мощность батареи, установим зависимость мощности от внешнего сопротивления. Подставим в уравнение (1) выражение (2):

$$P_n=\varepsilon^2\frac{n^2R}{(nr_i+R)^2}. \qquad (5)$$

Из этой формулы следует, что при данном источнике (постоянные величины ε и r_i) мощность является функцией одной переменной – внешнего сопротивления R. Значение R, соответствующее максимальной мощности, мы получим, дифференцируя выражение $P_п$ по R и приравнивая первую производную нулю, $dP_n/dR=0$, следовательно, имеем

$$\frac{dP_n}{dR} = \frac{n^2\varepsilon^2(R+nr_i) - 2n^2\varepsilon^2 R}{(R+nr_i)^3} = 0$$

откуда, учитывая, что R и r_{i} всегда положительны, получаем

$(R+nr_i) - 2R = 0$, или $R = nr_{\text{i}}$ (6)

Мощность, выделяемая во внешней цепи, достигает наибольшего значения, если сопротивление внешней цепи равно внутреннему сопротивлению источника. Подставляя найденные значения R в формулу (5), имеем

$$P_{n\max} = n\varepsilon^2/(4r_i).$$

Производя вычисления, найдем $P_{\text{п max}}$ = 8,16 Вт.

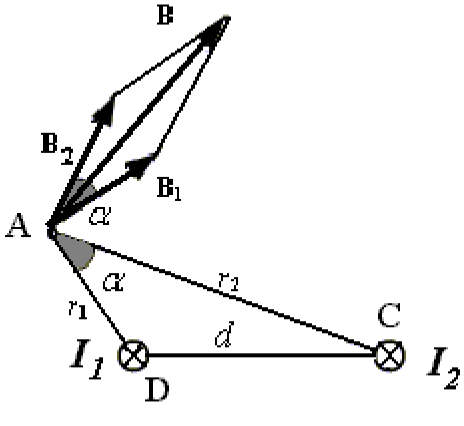


Рис. 3.4

Пример 3.6. *Для параллельных бесконечно длинных провода, по которым текут в одном направлении токи I = 60 А, расположены на расстоянии d = 10 см друг от друга. Определить магнитную индукцию **B** в точке, отстоящей от одного проводника на расстояние r_1 = 5 см и от другого на расстояние r_2 = 12 см.*

Решение. Для нахождения магнитной индукции в указанной точке A (рис. 3.4) определим направления векторов индукции $\mathbf{B}_1$ и $\mathbf{B}_2$ полей, создаваемых каждым проводником в отдельности, и, согласно принципу суперпозиции, сложим их векторно, т.е. $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2$. Модуль вектора **B** найдем по теореме косинусов:

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2 + 2B_1B_2\cos\alpha}. \qquad (1)$$

Модули B_1 и B_2 : $B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_1}$, $B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_2}$. Подставляя эти выражения в формулу (1), найдем искомое B:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{2}{r_1 r_2}\cos\alpha}. \qquad (2)$$

Убедимся в том, что правая часть этого равенства дает единицу магнитной индукции (Тл):

$$\frac{[\mu_0][I]}{\sqrt{[r^2]}} = \frac{1\text{Ãí/ì}\cdot 1\text{À}}{1\text{ì}} = \frac{1\text{Ãí}\cdot(1\text{À})^2}{1\text{À}\cdot(1\text{ì})^2} = \frac{1\text{Äæ}}{1\text{À}\cdot(1\text{ì})^2} = \frac{1\text{Í}}{1\text{À}\cdot 1\text{ì}} = 1\text{Òë}.$$

Здесь мы воспользовались определяющей формулой для магнитной индукции $B = M_{\max}/p_{\text{m}}$. Из нее следует, что:

$$1\text{Тл} = \frac{1\text{Н}\cdot 1\text{м}}{1\text{А}\cdot(1\text{м})^2} = \frac{1\text{Н}}{1\text{А}\cdot 1\text{м}}.$$

Вычисляем $\cos\alpha$. Заметим, что $\alpha = \angle DAC$, как углы со взаимно перпендикулярными сторонами. Поэтому по теореме косинусов запишем $d^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos\alpha$. Подставив данные, вычислим значение косинуса: $\cos\alpha = 0{,}576$. Подставив в формулу (2) значения μ_0, I, r_1, r_2 и $\cos\alpha$, найдем В=286 мкТл.

Пример 3.7. *Электрон, имея скорость* v *= 2 Мм/с, влетел в однородное магнитное поле с индукцией B = 30 мТл под углом* α *= 30° к направлению линий индукции. Определить радиус* r *и шаг* h *винтовой линии, по которой будет двигаться электрон.*

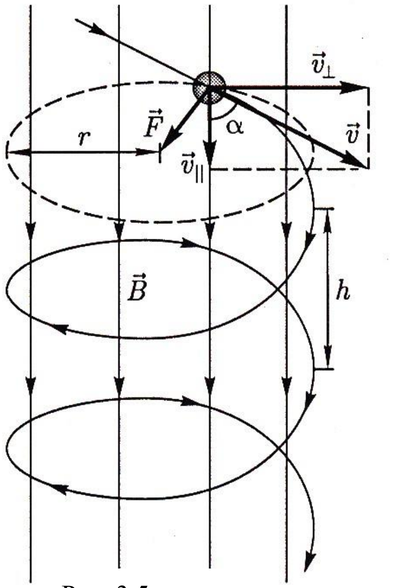


Рис. 3.5

<u>Решение.</u> Известно, что на заряженную частицу, влетевшую в магнитное поле, действует сила Лоренца, перпендикулярная векторам магнитной индукции **B** и скорости **v** частицы. Модуль этой силы

$$F = Q\text{v}B\sin\alpha, \qquad (1)$$

где Q – заряд частицы (Q = |e|), α – угол между **v** и **B**.

Разложим, как это показано на рис. 3.5, скорость **v** электрона на две составляющие: параллельную вектору **B** ($\mathbf{v}_{||}$) и перпендикулярную ему ($\mathbf{v}_\perp$). Скорость $\mathbf{v}_{||}$ в магнитном поле не изменяется – если заряженная частица движется в магнитном поле вдоль линий магнитной индукции, то угол α между векторами **v** и **B** равен 0 или π. Тогда по формуле (1) сила Лоренца равна нулю и частица движется равномерно и прямолинейно.

Скорость $\mathbf{v}_\perp$ в результате действия силы Лоренца будет изменяться только по направлению ($\mathbf{F}_Л \perp \mathbf{v}$) (в отсутствие параллельной составляющей движение электрона происходило бы по окружности в плоскости, перпендикулярной силовым линиям). Таким образом, движение электрона можно представить как наложение двух движений: 1) равномерного прямолинейного движения вдоль поля со скоростью $\text{v}_{||} = \text{v}\cos\alpha$; 2) равномерного движения со скоростью $\text{v}_\perp = \text{v}\sin\alpha$ по окружности. Поэтому траектория электрона – спираль (винтовая линия), ось которой параллельна магнитному полю.

Радиус окружности, по которой движется электрон, найдем следующим образом. Сила Лоренца **F** сообщает электрону нормальное ускорение $a_n = \frac{\upsilon_\perp^2}{R}$. Тогда по второму закону Ньютона

$$|e|\upsilon B\sin\alpha = \frac{m\upsilon_\perp^2}{r},$$

откуда после сокращения находим радиус винтовой линии

$$r = \frac{m\upsilon\sin\alpha}{|e|B}.$$

Подставив значения величин m, v, e, B и α и произведя вычисления, получим r = 0,19 мм.

Шаг винтовой линии равен пути, пройденному электроном вдоль поля со скоростью $\upsilon_{||} = \upsilon\cos\alpha$ за время, которое понадобится электрону для того, чтобы совершить один оборот,

$$h = \upsilon_{||}T, \qquad (2)$$

где $T = \frac{2\pi r}{\upsilon_\perp}$ – период обращения электрона. Подставив выражение для r и $\text{v}_\perp$, получим

$$h = \frac{2\pi m\upsilon \cos\alpha}{B|e|}.$$

Подставив значения величин, получим h = 2,06 мм**.**

Пример 3.8.. *Магнитная индукция поля между полюсами магнита генератора равна B = 0,8 Тл. Ротор имеет N = 100 витков площадью S = 400 см*^{2}*. Определить частоту вращения якоря, если максимальная ЭДС индукции равна* $\xi_{i,\max}$ *= 200 В.*

Решение. Угол между вектором индукци магнитного поля и нормалью к плоскости витков изменяется по закону $\alpha = 2\pi\nu t$.

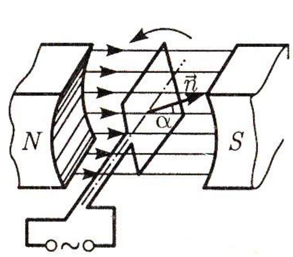


Рис. 3.6

Полный магнитный поток (потокосцепление) через катушку равен

$\Psi = NBS\cos\alpha = NBS\cos 2\pi\nu t$.

Мгновенное значение ЭДС индукции ξ_i, определяется законом Фарадея

$$\xi_i = -\frac{d\Psi}{dt} = 2\pi\nu NBS\sin(2\pi\nu t).$$

Максимальное значение синуса равно единице, следовательно, максимальное значение ЭДС индукции равно

$$\xi_{i,\max} = 2\pi\nu NBS,$$

откуда

$$\nu = \frac{\xi_{i,\max}}{2\pi NBS} = \frac{200}{2\cdot 3{,}14\cdot 100\cdot 0{,}8\cdot 400\cdot 10^{-4}} = 9{,}95c^{-1}.$$

Пример 3.9. *Соленоид без сердечника с однослойной обмоткой из проволоки диаметром d = 0,4 мм имеет длину l = 0,5 ми поперечное сечение S = 60 см*^{2}*. За какое время при напряжении U = 10 В и силе тока I = 1,5 А в обмотке выделится количество теплоты, равное энергии поля внутри соленоида. Поле считать однородным.*

Решение. При прохождении тока I при напряжении U в обмотке за время t выделяется теплота

$$Q = IUt. \qquad (1)$$

Энергия поля внутри соленоида

$$W = \frac{B^2}{2\mu_0\mu}V = \frac{B^2}{2\mu_0\mu}lS, \qquad (2)$$

где $B = \mu_0\mu NI/l$ (N– общее число витков соленоида). Если витки соленоида вплотную прилегают друг к другу, то $l = Nd$, откуда $N = l/d$. Подставив выражения для B и N в (2), получаем

$$W = \frac{\mu_0\mu}{2}\frac{I^2 lS}{d^2}. \qquad (3)$$

Согласно условию задачи $Q = W$. Приравняв выражения (1) и (3) , найдем искомое время

$$t = \frac{\mu_0\mu ISt}{2Ud^2}.$$

Вычисляя, получаем t = 1,77 мс.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №3

ВАРИАНТ 1

1. Четыре одинаковых заряда $Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q_4 = 40$ кНл закреплены в вершинах квадрата со стороной $a = 10$ см. Определить силу F, действующую на каждый из этих зарядов со стороны трех остальных.

2. Между пластинами плоского конденсатора находится точечный заряд $Q = 30$ нКл. Поле конденсатора действует на заряд с силой $F_1 = 10$ мН. Определить силу F взаимного притяжения пластин, если площадь S каждой пластины равна 100 см^2.

3. Протон, начальная скорость v которого равна 100 км/с, влетел в однородное электрическое поле ($E = 300$ В/см) вдоль линий напряженности. Какой путь l должен пройти протон в направлении линий поля чтобы его скорость удвоилась?

4. Три источника тока с ЭДС $\xi_1 = 1{,}8$ В, $\xi_2 = 1{,}4$ В, $\xi_3 = 1{,}1$ В соединены накоротко одноименными полюсами. Внутреннее сопротивление первого источника $r_1 = 0{,}4$ Ом, второго $r_2 = 0{,}6$ Ом. Определить внутреннее сопротивление третьего источника, если через первый источник идет ток $I_1 = 13$ А.

5. По проволочной рамке, имеющей форму правильного шестиугольника, идет ток $I = 2$ А. При этом в центре рамки образуется магнитное поле напряженностью $H = 33$ А/м. Определить длину l проволоки, из которой сделана рамка.

6. Заряженная частица движется в магнитном поле по окружности со скоростью v $= 10^6$ м/с. Индукция магнитного поля $B = 0{,}3$ Тл. Радиус окружности $R = 4$ см. Определить заряд q частицы, если известно, что ее кинетическая энергия $T = 12$ кэВ.

7. Проволочный виток радиусом $r = 4$ см , имеющий сопротивление $R = 0{,}01$ Ом, находится в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}04$ Тл. Плоскость витка составляет угол $\alpha = 30°$ с линиями индукции поля. Какое количество электричества Q протечет по витку, если магнитное поле исчезнет?

8. Индуктивность L соленоида при длине $l = 1$ м и площади поперечного сечения $S = 20$ см^2 равна 0,4 мГн. Определить силу тока в соленоиде, при которой объемная плотность энергии w магнитного поля внутри соленоида равна 0,1 Дж/м^3.

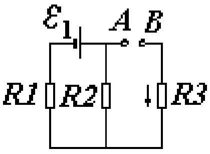
ВАРИАНТ 2

1. Два шарика массой $m = 0{,}1$ г каждый подвешены в одной точке на нитях длиной $1 = 20$ см каждая. Получив одинаковый заряд, шарики разошлись так, что нити образовали между собой угол $\alpha = 60°$. Определить заряд каждого шарика.

2. Электрон находится в однородном электрическом поле напряженностью $E = 200$ кВ/м. Какой путь пройдет электрон за время $t = 1$ нс, если его начальная скорость была равна нулю? Какую скорость будет иметь электрон в конце этого промежутка времени?

3. Пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено стеклом ($\varepsilon = 7$). Расстояние между пластинами $d = 5$ мм, разность потенциалов $U = 500$ В. Определить энергию поляризованной стеклянной пластины, если площадь ее $S = 50$ см^2.

4. Три сопротивления R_1 = 5 Ом, R_2 = 1 Ом и R_3 = 3 Ом, а также источник тока с ЭДС. ε_1 = 1,4 В соединены, как показано на рис. Определить Э. Д. С ε источника тока, который надо подключить в цепь между точками *A* и *B*, чтобы в сопротивлении R_3 шел ток силой *I* = 1 А в направлении, указанном стрелкой. Внутренними сопротивлениями источников тока пренебречь.



5. Проволочный виток радиусом *R* = 5 см находится в однородном магнитном поле напряженностью *H* = 2 кА/м. Плоскость витка образует угол α = 60° с направлением поля. По витку течет ток силой *I* = 4 А. Определить механический момент *M*, действующий на виток.

6. Протон и электрон, ускоренные одинаковой разностью потенциалов, влетают в однородное магнитное поле, перпендикулярное к скорости. Во сколько раз радиус кривизны R_1 траектории протона больше радиуса кривизны R_2 траектории электрона? Масса электрона $m_e = 9{,}11\cdot10^{-31}$ кг, масса протона $m_p = 1{,}67\cdot10^{-27}$ кг.

7. На картонный каркас длиной l = 0,6 м и площадью поперечного сечения *S* = 20 $см^2$ намотан в один слой провод диаметром *d* = 1,2 мм так, что витки плотно прилегают друг к другу. Индуктивность катушки с железным сердечником *L* = 0,28 Гн при токе через обмотку *I* = 5 А. Определить магнитную проницаемость μ железного сердечника.

8. Рамка площадью *S* = 100 $см^2$ содержит $N = 10^3$ витков провода сопротивлением R_1 = 12 Ом. К концам обмотки подключено внешнее сопротивление R_2 = 20 Ом. Рамка равномерно вращается в однородном магнитном поле (*B* = 0,1 Тл) с частотой *n* = 8 $с^{-1}$. Определить максимальную мощность P_{max}, переменного тока в цепи.

ВАРИАНТ 3

1. Электрическое поле создано двумя бесконечными параллельными пластинами, несущими равномерно распределенный по площади заряд с поверхностными плотностями σ_1 = 1 нКл/$м^2$ и σ_2 = 3 нКл/$м^2$. Определить напряженность *E* поля: 1) между пластинами; 2) вне пластин.

2. Вдоль силовой линии однородного электрического поля движется протон. В точке поля с потенциалом φ_1 = 100 В протон имел скорость v_I = 0,1 Мм/с. Определить потенциал φ_2 точки поля, в которой скорость протона возрастает в *n* = 2 раза. Отношение заряда протона к его массе *e/m* = 96 МКл/кг.

3. Два металлических шара радиусами R_1 = 2 см и R_2 = 6 см соединены проводником, емкостью которого можно пренебречь. Шарам сообщен заряд *Q* = 1 нКл. Определить поверхностную плотность σ зарядов на шарах.

4. Плотность тока *j* в алюминиевом проводе равна 1 А/$мм^2$. Найти среднюю скорость <v> упорядоченного движения электронов, предполагая, что число свободных электронов в 1 $см^3$ алюминия равно числу атомов. Плотность алюминия = $2{,}7\cdot10^3$ кг/$м^3$.

5. По тонкому проволочному кольцу течет ток. Не изменяя силы тока в проводнике, ему придали форму квадрата. Во сколько раз изменилась магнитная индукция в центре контура?

6. Прямоугольная рамка с током I = 1,5 мА расположена в одной плоскости с длинным прямым проводом с током так, что длинные стороны рамки параллельны проводу. Сила тока в проводе I_1 = 2 мА, расстояние от него до ближней стороны рамки a = 10 см. Длины сторон рамки l_1 = 30 см, l_2 = 18 см. Определить силы, действующие на каждую из сторон рамки.

7. Заряженная частица прошла ускоряющую разность потенциалов U = 104 В и влетела в скрещенные под прямым углом электрическое (E = 10 кВ/м) и магнитное (B = 0,1 Тл) поля. Найти отношение Q/m заряда частицы к ее массе, если, двигаясь перпендикулярно обоим полям, частица не испытывает отклонений от прямолинейной траектории.

8. Соленоид содержит N = 1 000 витков. Сила тока I в его обмотке равна 1 А, магнитный поток Ф через поперечное сечение соленоида равен 0,1 мВб. Определить энергию W магнитного поля.

ВАРИАНТ 4

1. Металлический шарик диаметром d = 2 см заряжен отрицательно до потенциала φ = 150 В. Сколько электронов находится на поверхности шарика?

2. Точечные заряды Q_1 = 1 мкКл и Q_2 = 0,1 мкКл находятся на расстоянии r_1 = 10 см друг от друга. Какую работу A совершат силы поля,если второй заряд, отталкиваясь от первого, удалится от него на расстояние;1) r_2 = 10 м; 2) $r_3 = \infty$?

3. Расстояние d между пластинами плоского конденсатора равно 2 см, разность потенциалов U = 6 кВ. Заряд каждой пластины Q = 10 нКл. Вычислить энергию W поля конденсатора и силу F взаимного притяжения пластин.

4. ЭДС батареи аккумуляторов ξ = 12 В, сила тока I короткого замыкания равна 5 А. Какую наибольшую мощность P_{max} можно получить во внешней цепи, соединенной с такой батареей?

5. Два однозарядных иона, пройдя одинаковую ускоряющую разность потенциалов, влетели в однородное магнитное поле перпендикулярно линиям индукции. Один ион, масса m_1 которого равна 12 а. е. м., описал дугу окружности радиусом R_1 = 4 см. Определить массу m_2 другого иона, который описал дугу окружности радиусом R_2 = 6 см.

6. Тороид с воздушным сердечником содержит 20 витков на 1 см. Определить объемную плотность энергии в тороиде, если по его обмотке протекает ток 3 А.

7. В однородном магнитном поле, индукция которого B = 0,5 Тл, равномерно с частотой n = 300 мин$^{-1}$ вращается катушка, содержащая N = 200 витков, плотно прилегающих друг к другу. Площадь поперечного сечения катушки S = 100 см^2. Ось вращения перпендикулярна оси катушки и направлению магнитного поля. Определить максимальную ЭДС, индуцируемую в катушке.

8. На железное кольцо намотано в один слой N = 200 витков. Определить: магнитный поток $Ф_1$ через один виток; энергию W магнитного поля, если при токе силой I = 2,5 А полный магнитный поток Ψ в железе равен 0,5 мВб.

ВАРИАНТ 5

1. Электрическое поле создано двумя точечными зарядами $Q_1 = 40$ нКл и $Q_2 = -10$ нКл, находящимися на расстоянии $d = 10$ см друг от друга. Определить напряженность E поля в точке, удаленной от первого заряда на $r_1 = 12$ см и от второго на $r_2 = 6$ см.

2. При перемещении заряда $Q = 20$ нКл между двумя точками поля внешними силами была совершена работа $A = 4$ мкДж. Определить разность $\Delta\varphi$ потенциалов этих точек поля.

3. Два конденсатора электроемкостями $C_1 = 3$ мкФ и $C_2 = 6$ мкФ соединены между собой и присоединены к батарее с ЭДС = 120 В. Определить заряды Q_1 и Q_2 конденсаторов и разности потенциалов U_1 и U_2 между их обкладками, если конденсаторы соединены: 1) параллельно; 2) последовательно.

4. Сила тока в проводнике равномерно увеличивается от $I_0 = 0$ до некоторого максимального значения в течение времени $t = 10$ с. За это время в проводнике выделилось количество теплоты $Q = 1$ кДж. Определить скорость нарастания тока в проводнике, если сопротивление R его равно 3 Ом.

5. Два прямолинейных длинных параллельных проводника находятся на расстоянии $d_1 = 10$ см друг от друга. По проводникам в одном направлении текут токи $I_1 = 20$ А и $I_2 = 30$ А. Какую работу A надо совершить (на единицу длины проводников), чтобы раздвинуть эти проводники до расстояния $d_2 = 20$ см?

6. Соленоид длиной $l = 0,5$ м содержит $N = 1000$ витков. Определить магнитную индукцию B поля внутри соленоида, если сопротивление его обмотки $R = 120$ Ом, а напряжение на ее концах $U = 60$ В.

7. Определить частоту n вращения электрона по круговой орбите в магнитном поле, индукция B которого равна 0,2 Тл.

8. Кольцо из алюминиевого провода ($\rho = 26$ нОм·м) помещено в магнитное поле перпендикулярно линиям магнитной индукции. Диаметр кольца $D = 20$ см, диаметр провода $d = 1$ мм. Определить скорость изменения магнитного поля, если сила тока в кольце $I = 0,5$ А.

ВАРИАНТ 6

1. Расстояние между двумя точечными зарядами $Q_1 = 5$ мкКл и $Q_2 = -10$ мкКл равно 10 см. Определить силу F, действующую на точечный заряд $Q = 0,1$ мкКл, удаленный на $r_1 = 6$ см от первого и на $r_2 = 8$ см от второго зарядов.

2. Сила F притяжения между пластинами плоского воздушного конденсатора равна 50 мН. Площадь каждой пластины $S = 200$ см^2. Определить плотность энергии w поля конденсатора.

3. В медном проводнике объемом $V = 6$ см^3 при прохождении по нему постоянного тока за время $t = 1$ мин выделилось количество теплоты $Q = 216$ Дж. Определить напряженность E электрического поля в проводнике.

4. ЭДС батареи $\xi = 20$ В. Сопротивление R внешней цепи равно 2 Ом, сила тока $I = 4$ А. Определить КПД батареи. При каком значении внешнего сопротивления R КПД будет равен 99 %?

5. Вдоль двух длинных прямых параллельных проводников, расположенных на расстоянии $d = 5$ см друг от друга, в одном направлении текут токи силами $I_1 = 5$ А

и I_2 = 10 А. Определить магнитную индукцию B поля в точке, которая отстоит на r_1 = 3 см от первого проводника и на r_2 = 4 см от второго.

6. Вычислить радиус R окружности, которую описывает протон в магнитном поле с индукцией B = 15 мТл, если скорость протона v = 2 Мм/с. Масса протона m_p = $1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг.

7. Внутри соленоида с числом витков N = 200 с никелевым сердечником (μ = 200) напряженность однородного магнитного поля H = 10 кА/м. Площадь поперечного сечения сердечника S = 10 см^2. Определить: 1) магнитную индукцию поля внутри соленоида; 2) потокосцепление.

8. Ток, который изменяется по закону $I = 3 \cos 2t$ (время – в секундах, ток – в амперах), проходит по катушке индуктивностью L = 40 мГн. Установить закон изменения и максимальное значение ЭДС самоиндукции.

ВАРИАНТ 7

1. В вершинах правильного шестиугольника со стороной a = 10 см расположены точечные заряды Q, $2Q$, $3Q$, $4Q$, $5Q$, $6Q$ (Q = 0,1 мкКл). Определить силу F, действующую на точечный заряд Q, лежащий в плоскости шестиугольника и равноудаленный от его вершин.

2. Плоский воздушный конденсатор состоит из двух круглых пластин радиусом r = 10 см каждая. Расстояние d_1 между пластинами равно 1 см. Конденсатор зарядили до разности потенциалов U = 1,2 кВ и отключили от источника тока. Какую работу A нужно совершить, чтобы, удаляя пластины друг от друга, увеличить расстояние между ними до d_2 = 3,5 см?

3. В центре сферы радиусом R = 20 см находится точечный заряд Q = 10 нКл. Определить поток Φ_E вектора напряженности через часть сферической поверхности площадью S = 20 см^2.

4. К зажимам батареи аккумуляторов присоединен нагреватель. ЭДС ξ батареи равна 24 В, внутреннее сопротивление r = 1 Ом. Нагреватель, включенный в цепь, потребляет мощность P = 80 Вт. Вычислить силу тока I в цепи и КПД нагревателя.

5. Определить магнитную индукцию B поля, создаваемого отрезком бесконечно длинного провода, в точке, равноудаленной от концов отрезка и находящейся на расстоянии R = 4 см от его середины. Длина отрезка провода l = 20 см, а сила тока в проводе I = 10 А.

6. Электрон, ускоренный разностью потенциалов U = 6 кВ, влетает в однородное магнитное поле под углом α = 30° к направлению поля и движется по винтовой траектории. Индукция магнитного поля B = 13 мТл. Определить радиус R и шаг h винтовой траектории.

7. Сила тока в катушке без сердечника равномерно увеличивается на 0,1 А за 1 с. Катушка длиной l = 0,5 м и диаметром поперечного сечения D = 0,1 м имеет N = 1 000 витков. На катушку плотно надето кольцо из медного провода площадью поперечного сечения S = 2 мм^2. Определить силу тока в кольце, если магнитные потоки, которые пересекают катушку и кольцо, одинаковы.

8. Определить энергию магнитного поля соленоида, который содержит N = 300 витков, намотанных на картонный каркас радиуса r = 3 см и длиной l = 6 см, если по нему проходит ток I = 4 А.

ВАРИАНТ 8

1. Два одинаковых проводящих заряженных шара находятся на расстоянии r = 60 см. Сила отталкивания F_1 шаров равна 70 мкН. После того, как шары привели в соприкосновение и удалили друга от друга на прежнее расстояние, сила отталкивания возросла и стала равной F_2 = 160 мкН. Вычислить заряды Q_1 и Q_2, которые были на шарах до их соприкосновения. Диаметр шаров считать много меньшим расстояния между ними.
2. Заряженная частица, пройдя ускоряющую разность потенциалов U = 600 кВ, приобрела скорость v = 5,4 Мм/с. Определить удельный заряд частицы (отношение заряда к массе).
3. Конденсаторы электроемкостями C_1 = 1 мкФ, C_2 = 2 мкФ, C_3 = 3 мкФ включены в цепь с напряжением U = 1,1 кВ. Определить энергию каждого конденсатора в случаях: 1) последовательного их включения; 2) параллельного включения.
4. При силе тока I_1 = 3 А во внешней цепи батареи аккумуляторов выделяется мощность P_1 = 18 Вт, при силе тока 1_2 = 1 А – соответственно P_2 = 10 Вт. Определить ЭДС ξ и внутреннее сопротивление r батареи.
5. Напряженность H магнитного поля в центре кругового витка равна 200 А/м. Магнитный момент p_{m} витка равен 1 А·м^2. Вычислить силу тока I в витке и радиус R витка.
6. Частица, несущая один элементарный заряд, влетела в однородное магнитное поле с индукцией B = 0,5 Тл. Определить момент импульса L, которым обладала частица при движении в магнитном поле, если ее траектория представляла дугу окружности радиусом R = 0,1 см.
7. В однородном магнитном поле с индукцией B = 0,01 Тл находится прямой провод длиной l = 8 см, расположенный перпендикулярно линиям индукции. По проводу течет ток силой I = 2 А. Под действием сил поля провод переместился на расстояние s = 5 см. Определить работу A сил поля.
8. Рамка из провода сопротивлением R = 0,01 Ом равномерно вращается в однородном магнитном поле с индукцией B = 0,05 Тл. Ось вращения лежит в плоскости рамки и перпендикулярна линиям индукции. Площадь S рамки равна 100 см^2. Найти, какое количество электричества Q протечет через рамку за время поворота ее на угол $\alpha = 30°$ от $\alpha_0 = 0$ до $\alpha_1 = 30°$.

ВАРИАНТ 9

1. В вершинах правильного треугольника со стороной a = 10 см находятся заряды Q_1 = 10 мкКл, Q_2 = 20 мкКл и Q_3 = 30 мкКл. Определить силу F, действующую на заряд Q_1 со стороны двух других зарядов.
2. . Конденсатор электроемкостью C_1 = 0,6 мкФ был заряжен до разности потенциалов U_1 = 300 В и соединен со вторым конденсатором электроемкостью C_2 = 0,4

мкФ, заряженным до разности потенциалов U_2 = 150 В. Определить заряд ΔQ, перетекающий с пластин первого конденсатора на второй.

3. Определить плотность тока j в железном проводнике длиной l = 10 м, если проводник находится под напряжением U = 6 В.

4. Сила тока в проводнике сопротивлением R = 10 Ом равномерно убывает от I_0 = 3 А до I = 0 за 30 с. Определить выделившееся за это время в проводнике количество теплоты Q.

5. Длинный прямой соленоид из проволоки диаметром d = 0,5 мм намотан на картонный каркас так, что витки плотно прилегают друг к другу. Какова магнитная индукция B внутри соленоида при силе тока I = 4 А? Толщиной изоляции пренебречь.

6. Плоский контур, площадь S которого равна 300 см^2, находится в однородном магнитном поле с индукцией B = 0,01 Тл. Плоскость контура перпендикулярна линиям индукции. В контуре поддерживается неизменный ток силой I = 10 А. Определить работу A внешних сил по перемещению контура с током в область пространства, магнитное поле в которой отсутствует.

7. Электрон движется в магнитном поле с индукцией B = 0,02 Тл по окружности радиусом R = 1 см. Определить кинетическую энергию электрона (в джоулях и электрон-вольтах).

8. Какова индукция магнитного поля, если при удалении из него кругового медного проводника длиной l = 20 см и поперечным сечением S = 1 мм^2 по нему протекает заряд Q = 1 мКл?

ВАРИАНТ 10

1. Определить потенциальную энергию системы двух точечных зарядов Q_1 = 100 нКл и Q_2 = 10 нКл, находящихся на расстоянии d = 10 см друг от друга.

2. Какая ускоряющая разность потенциалов U требуется для того, чтобы сообщить скорость v = 30 Мм/с: 1) электрону; 2) протону? Масса электрона $m_e = 9{,}11\cdot10^{-31}$ кг, масса протона $m_p = 1{,}67\cdot10^{-27}$ кг.

3. . Сила тока в проводнике сопротивлением R = 100 Ом равномерно нарастает от I_0 = 0 до I_{max} = 10 А в течение времени t = 10 с. Какое количество теплоты Q выделяется в этом проводнике за указанный промежуток времени?

4. Три источника тока с ЭДС ξ_1 = 1,8 В, ξ_2 = 1,4 В и ξ_3 = 1,1 В соединены накоротко одноименными полюсами. Внутреннее сопротивление первого источника r_1 = 0,4 Ом, второго r_2 = 0,6 Ом. Определить внутреннее сопротивление третьего источника, если через первый источник идет ток I_1 = 1,13 А.

5. По двум бесконечно длинным прямым параллельным проводникам, расположенным на расстоянии d = 15 см друг от друга, в противоположных направлениях текут токи I_1 = 70 А и I_2 = 50 А. Определить магнитную индукцию B в точке, которая отстоит на r_1 = 20 см от первого проводника и на r_2 = 30 см от второго.

6. Какая мощность необходима для того, чтобы проводник длиной l = 40 см перемещать со скоростью v = 5 мс перпендикулярно магнитному полю индукцией B = 10 мТл, если по проводнику идет ток I = 20 А

7. Заряженная частица влетела перпендикулярно линиям индукции в однородное магнитное поле, созданное в среде. В результате взаимодействия с веществом частица, находясь в поле, потеряла половину своей первоначальной энергии. Во сколько раз будут отличаться радиусы кривизны R траектории начала и конца пути?

8. В однородном магнитном поле равномерно вращается прямоугольная рамка с частотой n = 600 мин$^{-1}$. Амплитуда индуцируемой в рамке ЭДС ξ_0= 3 В. Определить максимальный магнитный поток через рамку.

4. КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ И ФОРМУЛЫ

4.1. Механические и электромагнитные колебания

- Уравнение гармонических колебаний

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi),$$

где x – смещение колеблющейся величины от положения равновесия; A – амплитуда колебаний; $\omega = 2\pi/T = 2\pi\nu$ – круговая (циклическая) частота; $\nu = 1/T$ – частота, T – период колебаний; φ – начальная фаза.

- Скорость и ускорение материальной точки, совершающей гармонические колебания:

$$\upsilon = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi); \quad a = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

Кинетическая энергия колеблющейся точки массой m

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}\sin^2(\omega_0 t + \varphi).$$

Потенциальная энергия

$$\Pi = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}\cos^2(\omega_0 t + \varphi).$$

Полная энергия

$$E = mA^2\omega_0^2/2.$$

Период колебаний пружинного маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}},$$

где m – масса пружинного маятника, k – жесткость пружины.

Период колебаний физического маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}},$$

где I – момент инерции маятника относительно оси колебаний, l – расстояние между точкой подвеса и центром масс маятника.

Период колебаний математического маятника длиной l

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

- Сложение гармонических колебаний одного направления и одинаковой частоты:

а) амплитуда результирующего колебания

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)};$$

б) начальная фаза результирующего колебания

$$\varphi=arctg\,\frac{A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2}.$$

- Уравнение траектории движения точки, участвующей в двух взаимно перпендикулярных колебаниях одинаковой частоты $x=A_1\cos\omega t$, $y=A_2\cos(\omega t+\varphi)$:

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{2xy}{A_1A_2}\cos\varphi+\frac{y^2}{A_2^2}=\sin^2\varphi$$

- Уравнение затухающих колебаний

$$x=A_0e^{-\beta t}\cos(\omega t+\varphi),$$

где $\omega=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}$ – частота затухающих колебаний, β – коэффициент затухания.

- Логарифмический декремент затухания

$$\lambda=\ln\frac{A(t)}{A(t+T)}=\beta T=\frac{T}{\tau}=\frac{1}{N_e},$$

где $A(t)$ и $A(t+T)$ – амплитуды двух последовательных колебаний, соответствующих моментам времени, отличающимся на период, $\tau=1/\beta$ – время релаксации, N_e – число колебаний, совершаемых за время уменьшения амплитуды в e раз.

- Добротность колебательной системы

$$Q=\frac{\pi}{\lambda}=\frac{\omega_0}{2\beta}.$$

- Амплитуда вынужденных колебаний и резонансная частота

$$A=\frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}}\;;\quad \omega_{рез}=\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}\,.$$

- Период собственных колебаний электрического колебательного контура, сопротивление которого $R=0$, индуктивность L, емкость C (формула Томсона)

$$T=2\pi\sqrt{LC}\,.$$

- Полная энергия колебательного контура

$$W=\frac{CU_0^2}{2}=\frac{LI_0^2}{2}=\frac{q_0^2}{2C}\,.$$

- Частота затухающих электромагнитных колебаний

$$\omega=\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}\,.$$

4.2. Упругие и электромагнитные волны

- Уравнение упругой плоской волны, распространяющейся вдоль оси Ox

$$\xi=A\cos\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)=A\cos(\omega t-kx),$$

где ξ - смещение любой из точек среды с координатой x в момент t; v – фазовая скорость распространения колебаний в среде, $k=2\pi/\lambda=\omega/v$– волновое число $\lambda=vT$ – длина волны.

- Связь разности фаз $\Delta\varphi$ колебаний с расстоянием Δx между точками среды, отсчитанным в направлении распространения колебаний;

$$\Delta\varphi=\frac{2\pi}{\lambda}\Delta x=k\Delta x\,.$$

- Скорость и длина электромагнитных волн в веществе

$$\upsilon = \frac{c}{n}, \quad \lambda = \frac{\lambda_0}{n},$$

где c, λ_0 – скорость и длина электромагнитных волн в вакууме, $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$ – показатель преломления вещества.

- Уравнение плоской монохроматической электромагнитной волны, распространяющейся вдоль оси Ox,

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_m \cos(\omega t - kx);$$
$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_m \cos(\omega t - kx).$$

- Связь между модулями векторов **E** и **H** в бегущей волне

$$\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon}E = \sqrt{\mu_0\mu}H.$$

- Интенсивность плоской бегущей электромагнитной волны

$$I = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0\varepsilon}{\mu_0\mu}}E_m^2.$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 4.1. *Материальная точка массой m = 5 г совершает гармонические колебания с частотой ν = 0,5 Гц. Амплитуда колебаний A = 3 см. Определить:*

1) скорость v *точки в момент времени, когда смещение x = 1,5 см;*

2) максимальную силу F_{max}, действующую на точку;

3) полную энергию E колеблющейся точки.

Решение. 1. Уравнение гармонического колебания имеет вид

$$x = A\cos(\omega t + \varphi), \qquad (1)$$

а формулу скорости получим, взяв первую производную по времени от смещения:

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi). \qquad (2)$$

Чтобы выразить скорость через смещение, надо исключить из формул (1) и (2) время. Для этого выразим из уравнений (1) и (2):

$$\cos(\omega t + \varphi) = \frac{x}{A}, \quad \sin(\omega t + \varphi) = -\frac{\upsilon}{A\omega}.$$

Учитывая, что $\cos^2(\omega t + \varphi) + \sin^2(\omega t + \varphi) = 1$, получим

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{\upsilon^2}{A^2\omega^2} = 1, \text{ или } \frac{x^2}{A^2} + \frac{\upsilon^2}{4\pi^2\nu^2A^2} = 1.$$

Решив последнее уравнение относительно v, найдем

$$\upsilon = \pm 2\pi\nu\sqrt{A^2 - x^2}.$$

Выполнив вычисления по этой формуле, получим v = ± 8,2 см/с.

Знак плюс соответствует случаю, когда направление скорости совпадает с положительным направлением оси x, знак минус – когда направление скорости совпадает с отрицательным направлением оси x.

2. Силу, действующую на материальную точку, найдем по второму закону Ньютона:

$$F = ma, \qquad (3)$$

где a – ускорение точки, которое получим, взяв производную по времени от скорости:

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi),$$

или

$$a = -4\pi^2 \nu^2 A \cos(\omega t + \varphi).$$

Подставив выражение ускорения в формулу (3), получим

$$F = -4\pi^2 \nu^2 mA \cos(\omega t + \varphi).$$

Сила максимальна, когда $\cos(\omega t + \varphi) = 1$, то есть

$$F_{\max} = 4\pi^2 \nu^2 mA .$$

Подставив в это уравнение значения величин π, ν, m и A, найдем $F_{\max}$ = 1,49 мН.

3. Полная энергия колеблющейся точки есть сумма кинетической и потенциальной энергий, вычисленных для любого момента времени.

Проще всего вычислить полную энергию в момент, когда кинетическая энергия достигает максимального значения. В этот момент потенциальная энергия равна нулю. Поэтому полная энергия E колеблющейся точки равна максимальной кинетической энергии $T_{\max}$:

$$E = T_{\max} = \frac{m\upsilon_{\max}^2}{2} . \qquad (4)$$

Максимальную скорость определим из формулы (2), положив $\cos(\omega t + \varphi) = 1$:

$$\upsilon_{\max} = 2\pi\nu A .$$

Подставив выражение скорости в формулу (4), найдем

$$E = 2\pi^2 m\nu^2 A^2 .$$

Произведя вычисления, получим

$$E = 2 \cdot 3{,}14^2 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}5^2 \left(3 \cdot 10^{-2}\right)^2 = 22{,}1 \cdot 10^{-6}\,\text{Äæ} = 22{,}1\,\text{ìêÄæ} .$$

Пример 4.2. *Физический маятник представляет собой тонкий однородный стержень. Определить длину стержня l, если частота колебаний маятника максимальна, когда точка подвеса О находится от центра масс С на расстоянии а = 20,2 см.*

<u>Решение</u>. Циклическая частота колебаний физического маятника

$$\omega = \sqrt{mga / I} , \qquad (1)$$

где m – масса маятника, I – момент его инерции, a – расстояние от центра масс до точки подвеса.

Согласно теореме Штейнера момент инерции стержня относительно точки подвеса, отстоящей от центра масс на расстоянии *a?*

$$I = \frac{ml^2}{12} + ma^2 . \qquad (2)$$

Подставив (2) в (1), получим

$$\omega = \sqrt{\frac{12ga}{l^2 + 12a^2}} . \qquad (3)$$

Найдем экстремум функции (3)

$$\frac{d\omega}{d\text{à}} = \frac{6g(l^2 - 12\text{à}^2)}{\text{à}^{1/2}(l^2 - 12\text{à}^2)^{3/2}} = 0 ,$$

откуда

$$l^2 - 12a^2 = 0,$$

т.е. искомая длина маятника $l = 2\sqrt{3}a$. Вычисляя, получим l = 70 см.

Пример 4.3. *Материальная точка участвует одновременно в двух взаимно перпендикулярных гармонических колебаниях, уравнения которых* $x = A_1 \cos(\omega t + \varphi)$, $y = A_2 \cos\frac{\omega}{2}t$, *где* A_1 = 1 *см,* A_2 = 2 *см,* $\omega = \pi$ c^{-1}. *Найти уравнение траектории точки. Построить траекторию с соблюдением масштаба и указать направление движения точки.*

Решение. Чтобы найти уравнение траектории точки, исключим время t из заданных уравнений. Для этого воспользуемся формулой

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}.$$

В данном случае $\alpha = \omega t,$ поэтому

$$y = A_2 \cos\frac{\omega}{2}t = A_2\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}.$$

Так как по условию $\cos\omega t = \frac{x}{A_1}$, то уравнение траектории

$$y = A_2\sqrt{\frac{1+\frac{x}{A_1}}{2}}. \qquad (1)$$

Полученное выражение представляет собой уравнение параболы, ось которой совпадает с осью Ox. Из уравнений в условии задачи следует, что смещение точки по осям координат ограничено и заключено в пределах от –1 до +1 см по оси Ox и от –2 до +2 см по оси Oy**.**

Для построения траектории найдем по уравнению (1) значения y**,** соответствующие ряду значений x, удовлетворяющих условию $|x| \le 1$ см**,** и составим таблицу:

x, см	–1	–0,75	–0,5	0	0,5	1
y, см	0	±0,707	±1	±1,41	±1,73	±2

Начертив координатные оси и выбрав масштаб, нанесем на плоскость xOy найденные точки. Соединив их плавной кривой, получим траекторию точки, совершающей колебания в соответствии с уравнениями движения (1) и (2).

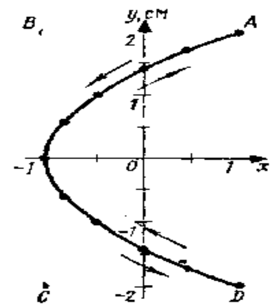


Рис. 4.1

Для того чтобы указать направление движения точки, проследим за тем, как изменяется ее положение с течением времени. В начальный момент t = 0 координаты точки равны $x(0)$ = 1 см и $y(0)$ = 2 см. В последующий момент времени, например при t_1= 1 с, координаты точек изменятся и станут равными $x(1)$ = –1 см, $y(t)$ = 0**.** Зная положения точек в начальный и последующий (близкий) моменты времени, можно указать направление движения точки по траектории. На рисунке это направление движения указано стрелкой (от точки A к началу координат). После того, как в момент t_2 = 2с колеблющаяся точка достигнет точки D, она будет двигаться в обратном направлении.

Пример 4.4. *Разность потенциалов на обкладках конденсатора в колебательном контуре изменяется со временем по закону* $U = 100\sin 1000\pi t$. *Электроемкость конденсатора С = 0,5 мкФ. Определить период собственных колебаний, индуктивность, энергию контура и максимальную силу тока, текущего по катушке индуктивности.*

Решение. Напряжение на конденсаторе изменяется по гармоническому закону

$$U = U_0 \sin\omega_0 t,$$

где U_0 – амплитудное (максимальное) значение напряжения на обкладках конденсатора; ω_0 – собственная циклическая частота колебаний, которая связана с периодом соотношением

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}.$$

Отсюда находим

$$T = \frac{2\pi}{1000\,\pi c^{-1}} = 0{,}002\,c.$$

Период собственных колебаний в контуре определяется по формуле Томсона

$T = 2\pi\sqrt{LC}$, откуда $L = T^2/4\pi^2 C$.

Определим индуктивность $L = \dfrac{2\cdot 10^{-6}\,c^2}{4\cdot 3{,}14^2\cdot 0{,}5\cdot 10^{-6}\,Ф} = 0{,}2Гн$.

Полная энергия контура равна сумме энергий электрического и магнитного полей

$$W = W_э + W_м = \frac{CU^2}{2} + \frac{LI^2}{2},$$

и равна либо максимальной энергии поля конденсатора $W_{э\max} = \dfrac{CU_{\max}^2}{2}$,

либо максимальной энергии катушки индуктивности $W_{м\max} = \dfrac{LI_{\max}^2}{2}$.

$$W = 0{,}5\cdot 10^{-6}\,Ф\cdot 100^2\,В/2 = 2{,}5\cdot 10^{-3}\,Дж.$$

Зная полную энергию, можно определить максимальную силу протекающего по катушке индуктивности тока:

$$I_{\max} = \sqrt{\frac{2W}{L}}\ ;\ I_{\max} = \sqrt{\frac{2\cdot 2.5\cdot 10^{-3}\,Дж}{0.2Гн}} = 0{,}15А.$$

Пример 4.5. *Тело совершает колебания с частотой ν = 50 Гц. Логарифмический декремент затухания λ равен 0,01. Определить: 1) время, за которое амплитуда колебаний тела уменьшится в 20 раз; 2) число полных колебаний тела, чтобы произошло подобное уменьшение амплитуды.*

Решение. Амплитуда затухающих колебаний

$$A = A_0 e^{-\beta t}, \qquad (1)$$

где A_0 – амплитуда колебаний в момент $t = 0$, β – коэффициент затухания.

Логарифмический декремент затухания $\lambda = \beta T$ ($T = 1/\nu$– условный период затухающих колебаний). Тогда $\beta = \lambda\nu$ и выражение (1) можно записать в виде

$$A = A_0 e^{-\lambda\nu t},$$

откуда искомое время

$$t = \frac{1}{\lambda\nu}\ln\left(\frac{A_0}{A}\right).$$

Число искомых полных колебаний

$$N = t/T = t\nu.$$

Вычислив, получим 1) t = 6с; 2) N = 300.

Пример 4.6. *Колебательный контур состоит из катушки индуктивностью L = 25 мГн, конденсатора емкостью С = 10 мкФ и резистора. Определить сопротивление резистора, если известно, что амплитуда тока в контуре уменьшилась в е раз за 16 полных колебаний*.

Решение. Число колебаний, совершаемых за время уменьшения амплитуды силы тока в e раз

$$N_e = \tau/T,$$

где $\tau = 1/\beta$ – время релаксации, $T = 2\pi/\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ – условный период затухающих колебаний ($\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ – собственная частота контура, $\beta = R/(2L)$ – коэффициент затухания).

Подставляя эти выражения в (1), получим

$$N_e = \frac{\frac{2L}{R}\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{4L}{R^2C} - 1}.$$

Отсюда искомое сопротивление:

$$R = 2\sqrt{\frac{L}{C(1+4\pi^2N^2)}}.$$

Вычисляя, получим R = 0,995 Ом.

Пример 4.7. *Плоская волна распространяется вдоль прямой со скоростью* v *= 20 м/с. Две точки, находящиеся на этой прямой на расстояниях* x_1 *=12 м и* x_2 *= 15 м от источника волн, колеблются с разностью фаз* $\Delta\varphi$ *= 0,75 π. Определить длину волны λ, написать уравнение волны и найти смещение указанных точек в момент* t *= 1,2 с, если амплитуда колебаний А = 0,1 м.*

Решение. Точки, находящиеся друг от друга на расстоянии, равном длине волны λ, колеблются с разностью фаз, равной 2π ; точки, находящиеся друг от друга на любом расстоянии Δx, колеблются с разностью фаз, равной

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi\Delta x}{\lambda} = \frac{2\pi(x_2 - x_1)}{\lambda}.$$

Решая это равенство относительно λ, получаем

$$\lambda = \frac{2\pi(x_2 - x_1)}{\Delta\varphi}. \qquad (1)$$

Подставив числовые значения величин, входящих в выражение (1), и выполнив арифметические действия, получим

$$\lambda = \frac{2\pi(15-12)}{0{,}75\pi}\text{ м} = 8\text{м}.$$

Для того чтобы написать уравнение плоской волны, надо определить циклическую частоту ω. Так как $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$, $\lambda = vT$, то $\omega = \dfrac{2\pi v}{\lambda}$.

Произведем вычисления: $\omega = \dfrac{2\pi \cdot 20}{8}\text{с}^{-1} = 5\pi\ \text{с}^{-1}$.

Зная амплитуду A колебаний, циклическую частоту ω и скорость v распространения волны, можно написать уравнение плоской волны для данного случая:

$$\xi = A\cos\omega\left(t - \frac{x}{v}\right), \qquad (2)$$

где A =0,1 м, ω= 5π с^{-1}, v =20 м/с.

Чтобы найти смещение ξ указанных точек, достаточно в уравнение (2) подставить значения t и x:

$$\xi_1 = 0{,}1\cos 5\pi\left(1{,}2 - \frac{12}{20}\right) = 0{,}1\cos 3\pi = -0{,}1 м\ ;$$

$$\xi_2 = 0{,}1\cos 5\pi\left(1{,}2 - \frac{15}{20}\right) = 0{,}1\cos 2{,}25\pi = 0{,}071 м..$$

Пример 4.8. *Определить энергию, переносимую плоской синусоидальной электромагнитной волной, распространяющейся в вакууме, за* t *= 1 с через поверхность площадью* $S_{пл}$ *= 1м*^{2}*, расположенную перпендикулярно направлению распространения волны. Амплитуда напряженности электрического поля волны* E_0 *= 5 мВ/м. Период волны* $T \ll t$*.*

Решение. Плотность потока энергии (или интенсивность излучения) электромагнитных волн, т. е. количество энергии, переносимой за единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную направлению распространения волны, определяется вектором Пойнтинга

$$\mathbf{S} = [\mathbf{EH}],$$

где $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ – векторы напряженности электрического и магнитного полей в электромагнитной волне.

Учитывая, что Å⊥Í , получим для модуля вектора

$$S = EH. \qquad .$$

Так как величины E и H в каждой точке электромагнитной волны меняются со временем по закону синуса, находясь в одинаковых фазах, то мгновенное значение величины S равно

$$S = (E_0 \sin\omega t)(H_0 \sin\omega t) = E_0 H_0 \sin^2 \omega t\,. \qquad (1)$$

Таким образом, величина S является функцией времени. Согласно определению плотности потока энергии, имеем

$$S = \frac{1}{S_{пл}} \frac{dW}{dt} \qquad (2)$$

где dW – энергия, переносимая волной через площадку $S_{пл}$ за время dt .

Из выражений (2) и (1) получим выражение для энергии, переносимой за бесконечно малый промежуток времени dt:

$$dW = SS_{пл}dt = S_{пл}E_0 H_0 (\sin^2 \omega t)dt\,. \qquad (3)$$

Для определения dW необходимо знать величину H_0, которая может быть найдена из соотношения

$$\frac{\varepsilon\varepsilon_0 E_0^2}{2} = \frac{\mu\mu_0 H_0^2}{2}.$$

Отсюда

$$H_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}} E_0.$$

По условию, $\varepsilon = \mu = 1$, тогда

$$H_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_0. \qquad (4).$$

Подставляя (4) в (3), получим

$$dW = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_0^2 S_{пл} (\sin^2 \omega t) dt.$$

Энергию, переносимую волной за время t, найдем интегрированием полученного выражения

$$W = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_0{}^2 S_{пл} \int_0^t (\sin^2 \omega t) dt = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_0{}^2 S_{пл} \frac{t}{2}\left(1 - \frac{\sin 2\omega t}{2\omega t}\right).$$

По условию задачи$T \ll t$, или $2\pi/\omega \ll t$, $2\pi \ll \omega t$. При очень больших значениях ωt вторым слагаемым в скобке можно пренебречь – значения синуса при любом аргументе не превосходят единицу, а в знаменателе стоит очень большая величина. Тогда

$$W = \frac{t}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_0{}^2 S_{пл}.$$

Подставляя числовые значения, получим $W = 3{,}25 \cdot 10^{-8}$ Äæ.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №4

ВАРИАНТ 1

1. Амплитуда гармонических колебаний точки A = 5 см, амплитуда скорости v_{max} = 7,85 см/с. Вычислить циклическую частоту ω колебаний и максимальное ускорение a_{max} точки.

2. Точка совершает одновременно два гармонических колебания одинаковой частоты, которые происходят во взаимно перпендикулярных направлениях. Уравнения колебаний $x = A \cos \omega t$ и $y = A \cos (\omega t + \varphi)$. Определить уравнение траектории точки. Принять A = 2 см, $\varphi = \pi/2$.

3. Материальная точка, масса которой m = 10 г, осуществляет гармонические колебания по закону косинуса с периодом T = 2 с и начальной фазой φ = 0. Полная механическая энергия точки E = 0,1 мДж. Определить амплитуду колебаний A и записать закон движения точки. Вычислить максимальное значение F_{max} силы, которая действует на точку.

4. Груз массой m = 500 г, подвешенный к спиральной пружине жесткостью k = 20 Н/м, совершает упругие колебания в некоторой среде. Логарифмический декремент

затухания колебаний λ = 0,004. Определить количество N полных колебаний, которые может совершить груз, чтобы энергия колебаний уменьшилась в n = 2 раза. За какое время Δt состоится это уменьшение?

5. Плоская гармоническая звуковая волна возбуждается источником колебаний частоты ν = 200 Гц и распространяется вдоль оси OX. Амплитуда колебаний точек источника ξ_0 = 4 мм. Написать уравнение колебаний источника ξ (0,t), если в начальный момент времени смещения точек источника было максимальным. Определить смещение точек среды, которые находятся на расстоянии x = 100 см от источника, в момент времени t = 0,1 с. Скорость звуковой волны принять v = 340 м/с. Затуханием пренебречь.

6. Колебательный контур содержит конденсатор емкостью C = 8 пФ и катушку индуктивностью L = 0,5 мГн. Каково максимальное напряжение U_{max} на обкладках конденсатора, если максимальная сила тока в контуре I_{max} = 40 мА?

7. В вакууме распространяется плоская электромагнитная волна, напряженность электрического поля которой описывается уравнением

$\mathbf{E} = \mathbf{e}_y E_m \cos(\omega t - kx)$, где $\mathbf{e}_y$ – орт оси OY, E_m = 160 В/м, k = 0,51 м$^{-1}$. Определить напряженность магнитного поля **H** волны в точке с координатой x = 7,7 м в момент времени t = 33 нс.

ВАРИАНТ 2

1. Точка совершает колебания по закону синуса с периодом T = 12 с. В некоторый момент времени смещения x точки равнялось 1 см. Когда фаза колебаний увеличилась вдвое, скорость v точки стала равняться π/6 см/с. Определить амплитуду A колебаний.

2. Точка совершает одновременно два гармонических колебания одинаковой частоты, которые происходят в взаимно перпендикулярных направлениях по уравнениям: $x = A_1 \cos \omega t$ и $y = A_2 \sin \omega t$. Определить уравнение траектории точки. Принять: A_1 = 3 см, A_2 = 1 см.

3. Материальная точка, масса которой m = 50 г, совершает колебания по закону $x = 10\sin(2t + \frac{\pi}{3})$, где x дано в сантиметрах, а аргумент синуса – в радианах. Определить максимальные значения силы F_{max}, возвращающей точку в положение равновесия, и кинетической энергии $W_{к\,max}$.

4. Амплитуда колебаний маятника длиной l = 1 м за время t = 10 мин уменьшилась в два раза. Определить логарифмический декремент λ затухания системы.

5. Плоская звуковая волна имеет период T = 3 мс, амплитуду ξ_0 = 0,2 мм и длину волны λ = 1,2 м. Найти скорость точек среды, удаленных от источника колебаний на расстояние x = 2 м, в момент времени t = 7 мс. Начальную фазу колебаний принять равной нулю.

6. Колебательный контур имеет такие параметры: резонансная частота $\nu_{рез}$ = 600 кГц, емкость конденсатора C = 350 пФ, активное сопротивление R = 15 Ом. Определить добротность контура.

7. В вакууме распространяется плоская электромагнитная волна, амплитуда напряженности магнитного поля которой H_m = 0,1 А/м. Определить интенсивность волны.

ВАРИАНТ 3

1. Точка, которая совершает гармонические колебания по закону $x = A\cos(\omega t + \varphi)$ см, в определенный момент времени t_1 имеет смещение $x_1 = 4$ см, скорость $v_1 = 5$ см/с и ускорение $a_1 = -80$ см/с^2. Определить амплитуду A и период T колебаний точки; фазу колебаний $\omega t + \varphi$ в момент времени, который рассматривается; максимальные скорость v_{max} и ускорение a_{max} точки.

2. Складываются два взаимно перпендикулярных колебания, которые выражаются уравнениями $x = A_1 \sin \omega t$ и $y = A_2 \cos \omega(t + \tau)$, где $A_1 = 2$ см, $A_2 = 1$ см, $\omega = \pi$ с$^{-1}$, $\tau = 0{,}5$ с. Найти уравнение траектории.

3. Брусок, масса которого $m = 0{,}5$ кг, лежит на гладком столе. Он соединен горизонтальной пружиной жесткостью $k = 32$ Н/м со стеной . В начальный момент времени пружину сжали на $x_0 = 1$ см и отпустили. Установить закон движения бруска. Трением пренебречь.

4. Логарифмический декремент λ затухания маятника равен 0,01. Определить число N полных колебаний маятника до уменьшения его амплитуды в 3 раза.

5. Поперечная волна распространяется вдоль упругого шнура с скоростью 10 м/с. Амплитуда колебаний точек шнура 5 см, период колебаний 1 с. Записать уравнение волны и определить: 1) длину волны, 2) фазу колебаний, смещение, скорость и ускорение точки, которая удалена на расстояние 9 м от источника колебаний в момент времени $t_1 = 2{,}5$ с.

6. На какую длину волны λ будет резонировать контур, который состоит из катушки индуктивностью $L = 4$ мкГн и конденсатора электроемкостью $C = 1{,}11$ нФ?

7. Чему равны амплитуды напряженностей E_m и H_m электрического и магнитного полей плоской электромагнитной волны в воздухе в фокусе излучения лазера, где интенсивность $I = 10^{14}$ Вт/см^2?

ВАРИАНТ 4

1. Точка совершает колебания по закону $x = A\cos(\omega t + \varphi)$, где $A = 4$ см. Определить начальную фазу φ, если: а) $x(0) = 2$ см, $v(0) < 0$; б) $x(0) = -2$ см, $v(0) < 0$; в) $x(0) = 2$ см, $v(0) > 0$; г) $x(0) = -2$ см, $v(0) > 0$. Построить векторную диаграмму для момента времени $t = 0$.

2. Два гармонических колебания одинаковых амплитуд и периодов, которые направлены по одной прямой, складываются в одно колебание той же амплитуды. Найти разность фаз $\Delta\varphi$ складываемых колебаний.

3. Гвоздь забит в стену горизонтально. На него подвешен тонкий обруч, который колеблется в плоскости, параллельной стене. Радиус обруча $R = 30$ см. Вычислить период T колебаний обруча.

4. Амплитуда затухающих колебаний за время $t_1 = 20$ с уменьшилась в два раза. Во сколько раз она уменьшится за время $t_2 = 1$ мин?

5. От источника колебаний распространяется гармоническая волна вдоль оси OX. Амплитуда ξ_0 колебаний равняется 10 см. Каким будет смещение точки, удаленной

от источника на $x = 3/4\ \lambda$, в момент, когда от начала колебаний прошло время $t = 0{,}9$ T?

6. Индуктивность L колебательного контура равняется 0,5 мГн. Какова должна быть электроемкость C контура, чтобы он резонировал на длину волны $\lambda = 300$ м?

7. Электромагнитная волна с частотой $\nu = 4$ МГц переходит из немагнитной среды с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 3$ в вакуум. Определить увеличение ее длины волны.

ВАРИАНТ 5

1. Точка совершает колебания по закону $x = A\sin(\omega t + \varphi)$, где $A = 4$ см. Определить начальную фазу φ, если: $x(0) = -2\sqrt{3}$ см и $v(0) > 0$. Построить векторную диаграмму для момента $t = 0$.

2. Вычислить возвращающую силу F в момент времени $t_1 = 1{,}25$ с и полную механическую энергию E материальной точки, масса которой $m = 10$г, а колебания осуществляются по закону $x = 0{,}1\cos(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{4})$, м.

3. Тонкий стержень, подвешенный за конец, совершает колебания с такой же частотой, что и математический маятник длиной $l = 1$ м. Чему равна длина стержня?

4. Добротность колебательной системы $Q = 3$, частота свободных колебаний $\omega = 150\ с^{-1}$. Определить собственную частоту ω_0 колебаний системы.

5. Определить интенсивность звука (Вт/м^2), если уровень громкости его

$L = 67$ дБ. Интенсивность звука на пороге слышимости $I_0 = 10^{-12}$ Вт/м^2.

6. В колебательном контуре происходят свободные незатухающие электромагнитные колебания. Зная, что максимальный заряд конденсатора $q_m = 10^{-6}$ Кл, а максимальная сила тока $I_m = 10$ А, определить длину волны, на которую резонирует контур.

7. Электромагнитная волна имеет частоту $\nu = 4\cdot10^{14}$ Гц, длину в некотором веществе $\lambda = 0{,}1$ мкм. Какова скорость распространения волны в этом веществе? Чему равен показатель преломления вещества? Какой будет длина волны после перехода ее в воздух?

ВАРИАНТ 6

1. Максимальная скорость точки, которая совершает гармонические колебания, равняется 10 см/с, максимальное ускорение 100 см/с^2. Определить круговую частоту ω колебаний, их период T и амплитуду A.

2. Определить амплитуду A и начальную фазу φ результирующего колебания, которое получится при сложении двух колебаний одинакового направления и периода: $x_1 = A_1\sin\omega t$ и $x_2 = A_2\sin\omega(t + \tau)$, где $A_1 = A_2 = 1$ см; $\omega = \pi\ с^{-1}$, $\tau = 0{,}5$ с.

3. Айсберг в виде прямой призмы колеблется вдоль вертикальной оси. Определить период T малых колебаний айсберга, если высота его надводной части $h = 100$ м.

4. Тело, масса которого $m = 1$ кг, совершает колебания под действием упругой силы ($k = 10$ Н/м). Определить коэффициент сопротивления r вязкой среды, если период затухающих колебаний $T = 2{,}1$ с.

5. Звуковые колебания с частотой $\nu = 450$ Гц и амплитудой $\xi_0 = 0{,}3$ мм распространяются в воздухе. Длина волны $\lambda = 80$ см. Чему равняется средняя энергия, которая переносится волной в единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную направлению волны? Плотность воздуха $\rho = 1{,}29$ кг/м^3.

6. Емкость конденсатора колебательного контура $C = 7$ мкФ, индуктивность его катушки $L = 0{,}23$ Гн, сопротивление $R = 40$ Ом. Конденсатору сообщили заряд $q_0 = 0{,}56$ мКл и присоединили его к катушке. Определить период колебаний, логарифмический декремент затухания и записать закон изменения напряжения на конденсаторе в зависимости от времени.

7. В колебательном контуре индуктивность катушки можно изменять от 50 до 500 Гн, а емкость конденсатора от 10 до 1000 пФ. Какой диапазон длин волн можно получить при настройке такого контура?

ВАРИАНТ 7

1. Материальная точка, масса которой $m = 10$ г, осуществляет гармонические колебания по закону косинуса с периодом $T = 2$ с и начальной фазой $\varphi = 0$. Полная механическая энергия точки $E = 0{,}1$ мДж. Определить амплитуду колебаний A и записать закон движения точки. Вычислить максимальное значение $F_{\max}$ силы, которая действует на точку.

2**.** Математический маятник длиной $l_1 = 40$ см и физический маятник в виде тонкого стержня длиной $l_2 = 60$ см синхронно колеблются около одной и той же горизонтальной оси. Определить расстояние от центра масс стержня до оси колебаний.

3. Амплитуда затухающих колебаний маятника за время $t_1 = 5$ мин уменьшилась в два раза. За какое время t_2 амплитуда уменьшится в восемь раз?

4. Груз массой $m = 0{,}5$ кг подвешен на пружине, жесткость которой $k = 0{,}49$ Н/см, и помещен в масло. Коэффициент сопротивления движению в масле $r = 0{,}5$ кг/с. На верхний конец пружины действует вертикальная возмущающая сила, которая изменяется по закону $F = 0{,}98 \sin \omega t$, Н. При какой частоте возмущающей силы амплитуда вынужденных колебаний будет максимальной? Чему она равняется?

5. Определить скорость υ распространения волны в упругой среде, если разность фаз $\Delta\varphi$ колебаний двух точек среды, отстоящих друг от друга на $\Delta x = 10$ см, равняется $\pi/3$. Частота колебаний $\nu = 25$ Гц.

6. Сила тока в колебательном контуре, который содержит катушку индуктивностью $L = 0{,}1$ Гн и конденсатор, с течением времени изменяется по уравнению $I = -0{,}1 \sin 200\pi t$. Определить: 1) период колебаний, 2) емкость конденсатора, 3) максимальное напряжение на обкладках конденсатора, 4) максимальную энергию магнитного поля, 5)максимальную энергию электрического поля.

7. В вакууме вдоль оси OX распространяется плоская электромагнитная волна. Амплитуда напряженности электрического поля волны составляет 18,8 В/м. Определить среднюю энергию, которая проходит за $t = 1$ мин через площадку $S = 0{,}5$ м^2, размещенную перпендикулярно направлению распространения волны.

ВАРИАНТ 8

1. Определить максимальные значения скорости v_{max} и ускорения a_{max} точки, которая совершает гармонические колебания с амплитудой A = 3 см и круговой частотой $\omega = \pi/2$ с$^{-1}$.

2. Материальная точка массой m = 50 г совершает колебания, уравнение которых имеет вид $x = A \cos \omega t$, где A = 10 см, ω = 5 с$^{-1}$. Найти силу F, действующую на точку, в двух случаях: 1) в момент, когда фаза $\omega t = \pi/3$; 2) в положении наибольшего смещения точки.

3. Груз подвешен на пружине, жесткость которой k = 0,1 Н/м, и погружен в среду с коэффициентом сопротивления r = 0,05 кг/с. Масса груза m = 1 кг. Определить добротность Q колебательной системы.

4. Шарик массой m = 50 г колеблется на легкой нити, длина которой l = 1 м. Считая, что коэффициент сопротивления воздуха r = 0,1 кг/с, определить частоту собственных колебаний ν_0; резонансную частоту колебаний $\nu_{рез}$; резонансную амплитуду $A_{рез}$, если амплитудное значение возмущающей силы F_0 = 0,01 Н.

5. Плотность некоторого двухатомного газа при нормальном давлении равна 1,78 кг/м^3 .Определить скорость распространения звука в газе при этих условиях.

6. Напряжение на обкладках конденсатора колебательного контура изменяется по закону $U = 30 \cos 10^3\pi t$, В. Емкость конденсатора C = 0,3 мкФ. Определить период T колебаний, индуктивность катушки L и установить закон изменения силы тока $I(t)$ в контуре.

7. В вакууме вдоль оси OX распространяется плоская электромагнитная волна. Амплитуда напряженности электрического поля волны составляет 18,8 В/м. Длина волны λ = 31 м. Записать уравнение электромагнитной волны.

ВАРИАНТ 9

1. Точка совершает гармонические колебания. Наибольшее смещение x_{max} точки равняется 10 см, наибольшая скорость x_{max} = 20 см/с. Определить круговую частоту ω колебаний.

2. В электронном осциллографе электронный луч отклоняется в двух взаимно перпендикулярных направлениях. Колебания луча описываются уравнениями $x = A \sin 3\omega t$, $y = A \cos 2\omega t$. Построить траекторию светящейся точки на экране, соблюдая масштаб. Принять A = 4 см.

3. Однородный диск радиусом R = 30 см совершает колебания вокруг горизонтальной оси, которая проходит через одну из образующих цилиндрической поверхности диска. Определить период T его колебаний.

4. Тело массой m = 0,1 кг подвешено на пружине жесткостью k = 10 Н/м. Верхняя часть пружины находится под действием вертикальной силы $F = 10^{-3}\cos \omega t$, Н. Колебания происходят в вязкой среде. Определить максимальную силу трения $F_{т\ max}$, которая мешает движению, если при резонансе амплитуда $A_{рез}$ = 0,1 м.

5. Плоская звуковая волна имеет период T = 3 мс, амплитуду ξ_0 = 0,2 мм и длину волны λ = 1,2 м. Для точек среды, удаленных от источника колебаний на расстояние

x = 2 м, найти смещение ξ (x, t) в момент t = 7 мс. Начальная фаза колебаний равна нулю.

6. Емкость конденсатора колебательного контура C = 1 мкФ, индуктивность его катушки L = 10 мГн. Какое активное сопротивление R необходимо ввести в контур, чтобы его собственная частота колебаний уменьшилось на 0,01%?

7. Электромагнитные волны распространяются в однородной среде со скоростью $2 \cdot 10^8$ м/с. Какую длину волны имеют электромагнитные волны в этой среде, если их частота 1 МГц?

ВАРИАНТ 10

1. Груз массой m = 0,1 кг, подвешенный на спиральной пружине, растягивает ее на Δx = 0,1 мм. Какую амплитуду A будут иметь колебания груза, если полная механическая энергия E = 1 Дж?

2. Однородный диск радиуса R = 30 см совершает колебания вокруг горизонтальной оси, которая проходит через середину одного из радиусов перпендикулярно к плоскости диска. Определить период T его колебаний.

3. Груз, масса которого m = 0,1 кг, подвешен на вертикальной пружине жесткостью k = 10 Н/м. Сила сопротивления движения пропорциональна скорости, коэффициент пропорциональности r = 0,87 кг/с. Груз оттянули на x_{max} = 2 см от положения равновесия и отпустили без толчка. Записать закон движения груза.

4. На гармонический осциллятор массой m = 10 г, который совершает колебания с коэффициентами квазиупругой силы $k = 10^2$ Н/г и затухания $\beta = 1$ с$^{-1}$, действует возмущающая сила F = 0,1 cos 90t, Н. Установить закон, по которому происходят колебания. Сравнить значение амплитуды колебаний с амплитудой в резонансе

5. Поперечная волна распространяется вдоль упругого шнура с скоростью v = 10 м/с. Амплитуда колебаний точек шнура A = 5 см, период колебаний T = 1 с. Записать уравнение волны и определить: 1) длину волны, 2) фазу колебаний, смещение, скорость и ускорение точки, отстоящей на 9 м от источника колебаний в момент времени t_1 = 2,5 с.

6. Емкость конденсатора колебательного контура C = 39,5 мкФ, индуктивность его катушки L = 100 мГн. Заряд конденсатора q = 3 мкКл. Пренебрегая сопротивлением контура, записать уравнение 1) изменения силы тока в контуре в зависимости от времени, 2) изменения напряжения на конденсаторе в зависимости от времени.

7. В вакууме распространяется плоская электромагнитная волна, амплитуда напряженности электрического поля которой E_m = 160 В/м. Определить амплитуду напряженности магнитного поля волны.

5. ВОЛНОВАЯ ОПТИКА.
КВАНТОВАЯ ПРИРОДА ИЗЛУЧЕНИЯ

ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ И ФОРМУЛЫ

5.1. Интерференция света

- Скорость света в среде:

$$v = \frac{c}{n},$$

где c - скорость света в вакууме, n - показатель преломления среды.

- Оптическая длина пути световой волны:

$$L = nl,$$

где l - геометрическая длина пути световой волны в среде с показателем преломления n.

- Оптическая разность хода двух световых волн:

$$\Delta = L_2 - L_1.$$

- Зависимость разности фаз от оптической разности хода световых волн:

$$\Delta\varphi = 2\pi\frac{\Delta}{\lambda_0},$$

где λ_0 - длина световой волны в вакууме.

- Условие интерференционных максимумов:

$$\Delta = \pm m\lambda_0 (m = 0,1,2,\ldots).$$

- Условие интерференционных минимумов:

$$\Delta = \pm(2m+1)\frac{\lambda_0}{2} (m = 0,1,2,\ldots).$$

- Оптическая разность хода световых волн, возникающая при отражении монохроматического света от верхней и нижней поверхностей тонкой пленки, находящейся в воздухе:

$$\Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i_1} \pm \frac{\lambda_0}{2}, \text{ или } \Delta = 2dn\cos i_2 \pm \frac{\lambda_0}{2},$$

где d – толщина пленки; n – показатель преломления пленки; i_1 - угол падения; i_2 – угол преломления света в пленке.

- Радиусы светлых колец Ньютона в отраженном свете:

$$r_k = \sqrt{(2k-1)R\frac{\lambda_0}{2}}, \ (k = 1,2,3,\ldots),$$

где k – номер кольца; R – радиус кривизны линзы.

- Радиусы темных колец Ньютона в отраженном свете:

$$r_k = \sqrt{kR\lambda}, \ (k = 0,1,2,\ldots)$$

5.2. Дифракция света

- Радиус внешней границы i–ой зоны Френеля для сферической волны

$$r_m = \sqrt{\frac{ab}{a+b}m\lambda},$$

где m – номер зоны Френеля, λ – длина волны, a и b – соответственно расстояния диафрагмы с круглым отверстием от точечного источника и от экрана, на котором наблюдается дифракционная картина.

- Угол φ отклонения лучей, соответствующий максимуму (светлая полоса) при дифракции на одной щели, на которую свет падает нормально

$$a\sin\varphi = \pm(2k+1)\frac{\lambda}{2}, \ (k = 1,2,3,\ldots),$$

где a – ширина щели; k – порядковый номер максимума.

- Угол φ отклонения лучей, соответствующий максимуму (светлая полоса) при дифракции света на дифракционной решетке, на которую свет падает нормально

$$d\sin\varphi = \pm k\lambda\,,\ \ (k = 0,1,2,3,\ldots),$$

где d – период дифракционной решетки.

- Период дифракционной решетки

$$d = 1/N_0,$$

где N_0 – число щелей, приходящихся на единицу длины решетки.

- Разрешающая способность дифракционной решетки

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = kN\,,$$

где $\Delta\lambda$ – наименьшая разность длин волн двух соседних спектральных линий (λ и $\lambda + \Delta\lambda$), при которой эти линии могут быть видны раздельно в спектре, полученном посредством данной решетки; N – полное число щелей решетки.

- Условие дифракционных максимумов от пространственной решетки (формула Вульфа – Брэггов):

$$2d\sin\theta = k\lambda\,,$$

где θ – угол скольжения (угол между направлением параллельного пучка рентгеновского излучения, падающего на кристалл, и атомной плоскостью в кристалле); d – расстояние между атомными плоскостями кристалла.

5.3. Поляризация света. Взаимодействие электромагнитных волн с веществом

- Закон Малюса:

$$I = I_0\cos^2\alpha\,,$$

где I_0 – интенсивность плоскополяризованного света, падающего на анализатор; I – интенсивность этого света, прошедшего через анализатор; α – угол между направлением колебаний электрического вектора света; падающего на анализатор, и плоскостью пропускания анализатора.

- Закон Брюстера:

$$tg i_B = n_{21}\,,$$

где i_B – угол падения, при котором отраженный от диэлектрика луч является плоскополяризованным; n_{21}– относительный показатель преломления второй среды относительно первой.

- Связь между показателем преломления и диэлектрической проницаемостью вещества

$$n = \sqrt{\varepsilon}\,.$$

- Закон ослабления света в веществе

$$I = I_0 e^{-\alpha x}\,,$$

где I_0 и I – интенсивности плоской монохроматической световой волны соответственно на входе и выходе слоя поглощающего вещества толщиной x, α – коэффициент поглощения.

5.4. Квантовая природа излучения

- Закон Стефана–Больцмана;

$$R_e = \sigma T^4\,,$$

где R_e – энергетическая светимость (излучательность) абсолютно черного тела; σ – постоянная Стефана-Больцмана; T – термодинамическая температура.

- Закон смещения Вина:

$$\lambda_m = \frac{b}{T},$$

где λ_m – длина волны, на которую приходится максимум энергии излучения; b – постоянная Вина.

- Энергия фотона:

$$\varepsilon = h\nu = \frac{hc}{\lambda}, \text{ или } \varepsilon = \hbar\omega,$$

где h – постоянная Планка; $\hbar$ – постоянная Планка, деленная на 2π; ν – частота фотона; ω – циклическая частота.

- Формула Эйнштейна для фотоэффекта:

$$h\nu = A + T_{\max} = A + \frac{m\upsilon_{\max}^2}{2},$$

где $h\nu$ – энергия фотона, падающего на поверхность металла; A – работа выхода электрона из металла; $T_{\max}$ – максимальная кинетическая энергия фотоэлектрона.

- «Красная граница» фотоэффекта:

$$\nu_0 = \frac{A}{h}, \text{ или } \lambda_0 = \frac{hc}{A},$$

где ν_0 – минимальная частота света, при которой еще возможен фотоэффект; λ_0 – максимальная длина волны света, при которой еще возможен фотоэффект; h – постоянная Планка; c – скорость света в вакууме.

- Масса и импульс фотона:

$$m = \frac{\varepsilon}{c^2} = \frac{h\nu}{c^2}; \qquad p = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda},$$

где c – скорость света в вакууме; λ – длина волны фотона.

- Давление света при нормальном падении на поверхность:

$$p = \frac{E_e(1+\rho)}{c} = w(1+\rho)$$

где $E_e = Nh\nu$ – энергия всех фотонов, падающих на единицу поверхности в единицу времени (облучённость); w – объемная плотность энергии излучения; ρ – коэффициент отражения.

- Изменение длины волны рентгеновского излучения при комптоновском рассеянии:

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 c}(1-\cos\theta) = 2\frac{h}{m_0 c}\sin^2\frac{\theta}{2} = 2\lambda_C \sin^2\frac{\theta}{2},$$

где λ – длина волны фотона, встретившегося со свободным или слабо связанным электроном; λ' – длина волны фотона, рассеянного на угол θ после столкновения с электроном; m_0 – масса покоящегося электрона,

$\lambda_C = \dfrac{h}{m_0 c}$ – комптоновская длина волны, $\lambda_C = 2{,}436$ пм..

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 5.1. *На стеклянный клин с малым углом нормально к его грани падает параллельный пучок лучей монохроматического света с длиной волны* $\lambda = 0{,}6$ *мкм. Число т возникающих при этом интерференционных полос, приходящихся на l = I см, равно 10. Определить угол* α *клина.*

Решение. Параллельный пучок света, падая нормально к грани клина, отражается как от верхней, так и от нижней грани. Эти отраженные пучки света когерентны. Поэтому на поверхности клина будут наблюдаться интерференционные полосы. Так как угол клина мал, то отраженные пучки 1 и 2 света (рис. 5.1) будут практически параллельны.

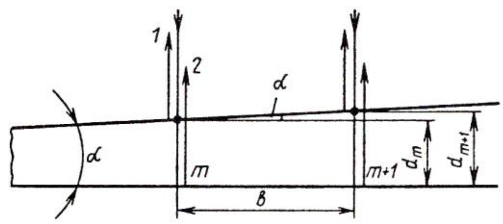


Рис. 5.1.

Темные полосы видны на тех участках клина, для которых разность хода лучей кратна нечетному числу половин длин волн:

$$\Delta = (2m+1)\frac{\lambda}{2} \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots . \qquad (1)$$

Разность хода Δ двух волн (лучи 1 и 2 на рисунке) складывается из разности оптических длин путей этих волн $(2dn\cos i_2)$ и половины длины волны $(\lambda/2)$. Величина $\lambda/2$ представляет собой добавочную разность хода, возникающую при отражении одной из световых волн (луч 1) от оптически более плотной среды. Подставляя в формулу (1) разность хода световых волн, получаем

$$2d_m n\cos i_2 + \frac{\lambda}{2} = (2m+1)\frac{\lambda}{2}, \qquad (2)$$

где n – показатель преломления стекла ($n = 1{,}5$); d_m – толщина клина в том месте, где наблюдается темная полоса, соответствующая номеру m; i_2 –угол преломления.

Согласно условию угол падения равен нулю, следовательно, и угол преломления i_2 равен нулю, а $\cos i_2 = 1$. Раскрыв скобки в правой части равенства (2), после упрощения получим:

$$2d_m n = m\lambda . \qquad (3)$$

Пусть произвольной темной полосе m-го номера соответствует толщина d_m клина, а темной полосе $(m + 1)$-го номера – толщина d_{m+1} клина. Тогда из рисунка, учитывая, что m полос укладывается на расстоянии l, найдем

$$\sin\alpha = \frac{d_{m+1} - d_m}{(l/m)} . \qquad (4)$$

Выразим из (3) d_m и d_{m+1} и подставим их в формулу (4). Затем, учитывая, что $\sin\alpha \approx \alpha$ (из-за малости угла α), получим

$$\alpha = \frac{(m+1)\lambda - m\lambda}{2(l/m)n} = \frac{\lambda m}{2nl} .$$

Здесь α выражается в радианах. Подставляя значения величин, найдем $\alpha = 2\cdot 10^{-4}$ рад.

Выразим α в секундах. Для этого воспользуемся соотношением: 1 секунда (") равна $4{,}85\cdot 10^{-6}$ рад. Тогда $\alpha = 2\cdot 10^{-4} = 41{,}2''$.

Пример 5.2. *На дифракционную решетку нормально к ее поверхности падает монохромати-*

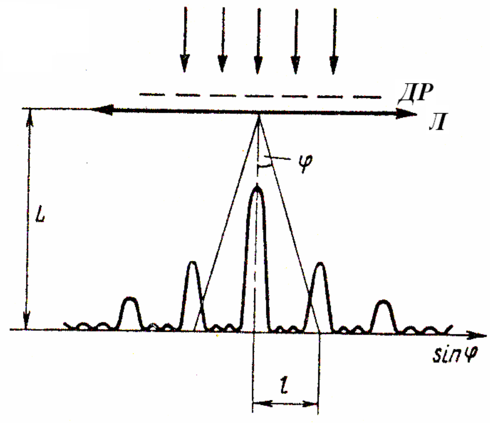


Рис. 5.2

ческий свет с длиной волны λ = 0,55 мкм. На экране, расположенном параллельно решетке и отстоящем от нее на расстояние L = 1 м, наблюдается дифракционная картина (рис. 5.2). Первый главный максимум наблюдается на расстоянии l = 12 см от центрального. Определить: 1) период дифракционной решетки; 2) число штрихов на 1 см ее длины; 3) общее число главных максимумов, получаемых с помощью этой решетки; 4) угол дифракции, соответствующий последнему максимуму..

Решение. На рисунке штрихами схематично изображена дифракционная решетка (*ДР*). Параллельно решетке расположена собирающая линза (*Л*), в фокальной плоскости которой поставлен экран. Зависимость интенсивности света на экране от угла дифракции изображается в виде чередующихся максимумов и минимумов. Условие главных максимумов дифракционной решетки:

$$d\sin\varphi = \pm m\lambda, \qquad (1)$$

где d – постоянная дифракционной решетки; φ – угол отклонения лучей от нормального направления распространения света; m– порядок главного дифракционного максимума (по условию задачи m = 1); λ – длина волны падающего на решетку света. Из рисунка следует, что tg φ = l/L. Так как $l \ll L$, то $tg\,\varphi \approx \sin\varphi$.

Тогда выражение (1) можно записать в виде

$$dl/L = m\lambda,$$

откуда

$$d = m\lambda L/l.$$

Число штрихов на l_1 = 1 см

$$n = l_1/d.$$

Для определения общего числа главных максимумов, даваемых дифракционной решеткой, исходим из условия, что максимальный угол отклонения лучей от нормального направления распространения не может превышать 90°, т.е.sin 90º = 1, тогда формула (1) примет вид

$$m_{\max} \le \frac{d}{\lambda}.$$

Естественно, что число m должно быть целым.

Общее число максимумов, даваемых дифракционной решеткой, равно

$$N = 2m_{\max} + 1,$$

т.е. влево и вправо от центрального максимума будут наблюдаться по $m_{\max}$ максимумов, единица учитывает центральный максимум.

Угол дифракции, соответствующий последнему максимуму, найдем, записав условие (1) в виде

$$d\sin\varphi_{\max} = m_{\max}\lambda,$$

откуда

$$\varphi_{\max} = \arcsin\frac{m_{\max}\lambda}{d}.$$

Вычисляя, получим: 1) d = 4,58 мкм; 2) $n = 2{,}18\cdot 10^3$ см$^{-1}$; 3) N = 17; 4) $\varphi_{\max}$ = 73,9º.

Пример 5.3. *Пучок естественного света падает на полированную поверхность стеклянной пластины, погруженной в жидкость. Отраженный от пластины пучок света образует угол* $\varphi = 97^\circ$ *с падающим пучком и полностью поляризован (рис. 5.3). Определить: 1) показатель преломления* n_1 *жидкости; 2) угол преломления.*

<u>Решение</u>. При падении света на границу раздела двух диэлектриков отраженный и преломленный лучи оказываются частично поляризованными. В отраженном луче преобладают колебания, перпендикулярные к плоскости падения (на рис. 5.3 эти колебания обозначены точками), в преломленном луче – колебания, параллельные плоскости падения (на рис.5.3. они изображаются двусторонними стрелками).

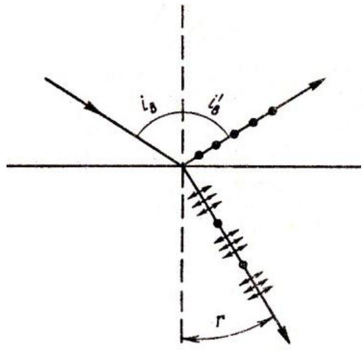


Рис.5.3

Согласно закону Брюстера пучок света, отраженный от диэлектрика, максимально поляризован в том случае, если тангенс угла падения численно равен относительному показателю преломления

$$tg i_B = n_{21},$$

где n_{21} относительный показатель преломления второй среды (стекла) относительно первой (жидкости), $n_{21} = n_2/n_1$.

Следовательно,

$$tg i_B = \frac{n_2}{n_1}.$$

Так как угол падения равен углу отражения, то $i_B = \varphi/2$ и, следовательно,

$$tg\frac{\varphi}{2} = \frac{n_2}{n_1},$$

откуда

$$n_1 = \frac{n_2}{tg(\varphi/2)}.$$

Произведя вычисления, получим $n_1 = 1{,}33$.

Если свет падает на границу раздела под углом Брюстера, то отраженный и преломленный лучи взаимно перпендикулярны: $\mathrm{tg}\, i_B = \sin i_B / \cos i_B$; $n_{21} = \sin i_B / \sin r$; откуда $\cos i_B = \sin r$, следовательно, $i_B + r = \pi/2$. С учетом закона отражения света ($i_B' = i_B$)имеем $i_B' + r = \pi/2$. Тогда искомый угол преломления

$$r = 90° - i_B = 41° \, 30'.$$

Пример 5.4. *Во сколько раз увеличится мощность излучения абсолютно черного тела, если максимум энергии излучения передвинется от красной границы видимого спектра к его фиолетовой границе?*

<u>Решение</u>. Длина волны, на которую приходится максимум энергии излучения абсолютно черного тела, определяется из первого закона смещения Вина:

$$\lambda_{max} = \frac{b}{T}, \qquad (1)$$

где T – термодинамическая температура излучателя; $b = 2{,}9 \cdot 10^{-3}$ м $\cdot$ К – постоянная Вина.

По формуле (1) определяем температуру, соответствующую красной и фиолетовой границам видимой области спектра:

$$T_к = \frac{b}{\lambda_k}, \quad T_ф = \frac{b}{\lambda_ф}.$$

Мощность излучения абсолютно черного тела

$$P = R_e S,$$

где R_e – энергетическая светимость абсолютно черного тела; S – - площадь поверхности излучающего тела.

В соответствии с законом Стефана–Больцмана

$$R_e = \sigma T^4, \qquad (2)$$

где $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м$^2 \cdot$ К^4) – постоянная Стефана-Больцмана.

Для красной и фиолетовой границ видимой области спектра

$$P_k = \sigma T_k^4 \cdot S,\ P_\Phi = \sigma T_\Phi^4 \cdot S.$$

Из формул (1) и (2) следует,

$$n = \frac{P_\Phi}{P_K} = \frac{\sigma S (b/\lambda_\Phi)^4}{\sigma S (b/\lambda_K)^4} = \left(\frac{\lambda_\kappa}{\lambda_\phi}\right)^4.$$

Вычисляя, получим n = 16.

Пример 5.5. *На зачерненную поверхность нормально падает монохроматический свет с длиной волны λ = 0,65мкм, производя давление p =* $0{,}5 \cdot 10^{-5}$ *Па. Определить концентрацию фотонов вблизи поверхности и число фотонов, падающих на площадь 1м^2 в 1с.*

Решение. Давление света при нормальном падении на поверхность с коэффициентом отражения ρ вычисляется по формуле

$$p = \frac{E_e}{c}(1+\rho), \qquad (1)$$

где E_e – энергетическая освещенность, т.е. энергия всех фотонов, падающих в единицу времени на единицу поверхности, $E_e = Nh\nu$; c – скорость света в вакууме; ρ – коэффициент отражения поверхности, в данном случае $\rho = 0$.

Так как $\nu = c/\lambda$, то $p = Nh(1 + \rho)/\lambda$, откуда число фотонов, падающих ежесекундно на единицу площади поверхности

$$N = \frac{p\lambda}{(1+\rho)h}. \qquad (2)$$

За время Δt до элемента площади ΔS долетят те фотоны, которые отстоят от поверхности тела не более, чем на $c\Delta t$, т.е. которые заключены в объеме цилиндра с основанием ΔS и высотой $c\Delta t$. Число этих фотонов равно $N = n\Delta Sc\Delta t$., где n – концентрация фотонов (число фотонов в единице объема). Так как ΔS = 1 м^2 и Δt = 1 с, то

$$N = nc. \qquad (3)$$

Из (2) и (3) получаем искомую концентрацию фотонов

$$n = \frac{p\lambda}{(1+\rho)hc}.$$

Подставим числовые данные и определим: $N = 4{,}8 \cdot 10^{21}$ с$^{-1}$м$^{-2}$; $n = 1{,}6 \cdot 10^{13}$ м$^{-3}$.

Пример 5.6. *Определить максимальную скорость $v_{\max}$ фотоэлектронов, вырываемых с поверхности серебра: 1) ультрафиолетовым излучением с длиной волны λ_1 = 155 нм; 2) γ-излучением с длиной волны λ_2 = 1 пм.*

Решение. Максимальную скорость фотоэлектронов можно определить из уравнения Эйнштейна для фотоэффекта:

$$\varepsilon = A + T_{\max}, \qquad (1)$$

где ε – энергия фотонов, падающих на поверхность металла; A – работа выхода электрона из металла; которую находим по таблицам, для серебра A = 4,7 эВ, T_{max}– максимальная кинетическая энергия фотоэлектронов.

Энергия фотона вычисляется по формуле

$$\varepsilon = h\nu = \frac{hc}{\lambda}, \qquad (2)$$

где h – постоянная Планка; c – скорость света в вакууме; λ – длина волны.

Кинетическая энергия электрона может быть выражена по классической

$$T = \frac{m_0 v^2}{2}, \qquad (3)$$

или по релятивистской формуле

$$T = E_0\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right) \qquad (4)$$

в зависимости от того, какая скорость сообщается фотоэлектрону.

Скорость фотоэлектрона зависит от энергии фотона, вызывающего фотоэффект: если энергия ε фотона много меньше энергии покоя E_0 электрона, то может быть применена формула (3), если же ε сравнима по величине с E_0, то вычисление по формуле (3) приводит к грубой ошибке, поэтому нужно пользоваться формулой (4).

Вычислим энергию фотона ультрафиолетового излучения по формуле (2):

$$\varepsilon_1 = \frac{6{,}63\cdot10^{-34}\cdot3\cdot10^{8}}{1{,}55\cdot10^{7}}\text{ Дж} = 1{,}28\cdot10^{-18}\text{ Дж},$$

или

$$\varepsilon_2 = \frac{1{,}28\cdot10^{-18}}{1{,}6\cdot10^{-19}}\text{ эВ} = 8\text{ эВ}.$$

Полученная энергия фотона (8 эВ) много меньше энергии покоя электрона (0,51 МэВ), следовательно, для данного случая кинетическая энергия фотоэлектрона в формуле (1) может быть выражена по классической формуле (3):

$$\varepsilon_1 = A + \frac{m_0 v^2}{2},$$

откуда

$$v_{max\,1} = \sqrt{2(\varepsilon_1 - A)/m_0}\,. \qquad (5)$$

Подставив значения величин в формулу (5), найдем

$$v_{max\,1} = \sqrt{\frac{2(1{,}28\cdot10^{-18} - 0{,}75\cdot10^{-18})}{9{,}11\cdot10^{-31}}}\text{ м/с} = 1{,}08\cdot10^{6}\text{ м/с}.$$

Теперь рассмотрим второй случай. Вычислим энергию фотона γ -излучения

$$\varepsilon_2 = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6{,}63\cdot10^{-34}\cdot3\cdot10^{8}}{10^{-12}}\text{ Дж} = 1{,}99\cdot10^{-13}\text{ Дж},$$

или во внесистемных единицах:

$$\varepsilon_2 = \frac{1{,}99\cdot10^{-13}}{1{,}6\cdot10^{-19}}\text{ эВ} = 1{,}24\cdot10^{6}\text{ эВ} = 1{,}24\text{ МэВ}.$$

Работа выхода электрона ($A = 4{,}7$ эВ) пренебрежимо мала по сравнению с энергией фотона ($\varepsilon_2 = 1{,}24$ МэВ), поэтому можно принять, что максимальная кинетическая энергия электрона равна энергии фотона:

$$T_{max\,2} = \varepsilon_2 = 1{,}24\text{ МэВ}.$$

Так как в данном случае кинетическая энергия электрона больше его энергии покоя, то для вычисления скорости электрона следует взять релятивистскую формулу кинетической энергии (4). Из этой формулы найдем

$$\beta = \frac{\sqrt{(2E_0 + T)T}}{E_0 + T}.$$

Заметив, что $\upsilon = c\beta$ и $T_{\max} = \varepsilon_2$, получим

$$\upsilon_{\max 2} = c\frac{\sqrt{(2E_0 + \varepsilon_2)\varepsilon_2}}{E_0 + \varepsilon_2}.$$

Произведем вычисления:

$$\upsilon_{\max 2} = 3\cdot 10^8 \frac{\sqrt{(2\cdot 0{,}51 + 1{,}24)\cdot 1{,}24}}{0{,}51 + 1{,}24}\ \text{м/с} = 2{,}87\cdot 10^8\ \text{м/с}.$$

Пример 5.7. *Угол рассеяния фотона с энергией ε_1 = 1,2 МэВ на свободном электроне θ = 60°. Определить длину волны λ' рассеянного фотона, кинетическую энергию T и импульс электрона отдачи. Кинетической энергией электрона до соударения пренебречь.*

Решение. Изменение длины волны фотона при комптоновском рассеянии равно

$$\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = \frac{h}{m_0 c}(1-\cos\theta) = \lambda_C(1-\cos\theta), \qquad (1)$$

где λ_1 и λ_2 – длины волн падающего и рассеянного фотонов; $h = 6{,}62\cdot 10^{-34}$ Дж·с – постоянная Планка; $m_0 = 9.11\cdot 10^{-31}$ кг – масса покоя электрона; $c = 3\cdot 10^8$ м/с – скорость света в вакууме; $\lambda_C = 2{,}43\cdot 10^{-12}$ м – комптоновская длина волны; θ – угол рассеяния.

На рисунке 5.4 показаны $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_2$ – импульсы падающего и рассеянного фотонов, $\mathbf{p}_e$ – импульс электрона.

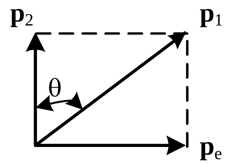


Рис. 5.4

Из формулы (1) находим

$$\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda = \lambda_1 + \lambda_C(1-\cos\theta).$$

Выражая λ_1 через энергию фотона $\varepsilon_1 = hc/\lambda_1$, получаем

$$\lambda_1 = hc/\varepsilon_1 + \lambda_C(1-\cos\theta). \qquad (2)$$

Энергия электрона отдачи по закону сохранения энергии

$$T_e = \varepsilon_1 - \varepsilon_2.$$

Выразим изменение длины волны через изменение частоты:

$$\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = \frac{c}{\nu_2} - \frac{c}{\nu_1} = \frac{c(\nu_1 - \nu_2)}{\nu_1\nu_2}.$$

С учетом (1) можно написать:

$$\nu_1 - \nu_2 = \frac{h\nu_1\nu_2}{m_0 c^2}(1-\cos\theta). \qquad (3)$$

Умножая выражение (3) на h и учитывая, что $h\nu_1 = \varepsilon_1$, $h\nu_2 = \varepsilon_2$, $m_0c^2 = E_0$, $\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = T_e$ получаем

$$T_e = \frac{\varepsilon_1^2(1-\cos\theta)}{E_0 + \varepsilon_1(1-\cos\theta)}, \qquad (4)$$

где $E_0 = 0{,}511\,\text{МэВ} = 0{,}82\cdot 10^{-13}$ Дж – энергия покоя электрона.

Зная энергию электрона, найдем его релятивистский импульс

$$p_e = \frac{1}{c}\sqrt{T_e(T_e + 2E_0)}. \qquad (5)$$

Подставляя числовые значения в формулы (2), (4) и (5), получаем:

$$\lambda_2 = \frac{6{,}62\cdot 10^{-34}\text{Дж}\cdot\text{с}\cdot 3\cdot 10^{8}\ \text{м/с}}{1{,}92\cdot 10^{-13}\text{Дж}} + 2{,}43\cdot 10^{-12}(1-0{,}5)\text{м} = 2{,}25\cdot 10^{-12}\text{м};$$

.

$$T = \frac{(1{,}2)^2\cdot 0{,}5}{0{,}511+1{,}2\cdot 0{,}5}\ \text{МэВ} = 0{,}648\text{МэВ} = 1{,}04\cdot 10^{-13}\text{Дж}.$$

$$p_e = \frac{1}{3\cdot 10^{8}\ \text{м/с}}\sqrt{1{,}04\cdot 10^{-13}\text{Дж}(1{,}04+2\cdot 2\cdot 0{,}82)\cdot 10^{-13}\text{Дж}} = 5{,}55\cdot 10^{-22}\text{кг}\cdot\text{м/с}$$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 5

ВАРИАНТ 1.

1. Во сколько раз увеличится расстояние между соседними интерференционными полосами на экране в опыте Юнга, если зеленый светофильтр (λ_1 = 500 нм) заменить красным (λ_2 = 650 нм)?

2. На грань кристалла каменной соли падает параллельный пучок рентгеновского излучения (λ = 147 пм). Определить расстояние d между атомными плоскостями кристалла, если дифракционный максимум второго порядка наблюдается, когда излучение падает под углом $\theta = 31°\ 30'$ к поверхности кристалла.

3. Естественный свет проходит через поляризатор и анализатор, установленные так, что угол между их плоскостями равняется φ. Как поляризатор, так и анализатор поглощают и отражают 8 % падающего на них света. Оказалось, что интенсивность луча, который вышел из анализатора, составляет 9 % интенсивности естественного света, который падает на поляризатор. Определить угол φ.

4. Свет с длиной волны λ = 600 нм нормально падает на зеркальную поверхность и производит на нее давление p = 4 мкПа. Определить число N фотонов, падающих за время t = 10 с на площадь S = 1 мм^2 этой поверхности.

5. При фотоэффекте с платиновой поверхности электроны полностью задерживаются разностью потенциалов U = 0,8 В. Определить длину волны λ примененного излучения и предельную длину волны λ_0, при которой еще возможен фотоэффект.

6. Зачерненный шарик остывает от температуры T_1 = 300 К до T_2 = 200 К. Считая поверхность шарика абсолютно черной, определить на сколько изменилась длина волны λ, соответствующая максимуму спектральной плотности энергетической светимости?

7. Какой была длина волны λ рентгеновского излучения, если при комптоновском рассеянии этого излучения графитом под углом $\theta = 60°$ длина волны рассеянного излучения оказалась равной λ' = 25,4 пм?

ВАРИАНТ 2.

1. В опыте Юнга отверстия освещались монохроматическим светом (λ = 600 нм). Расстояние между отверстиями d = 1 мм, расстояние от отверстий до экрана L = 3 м. Определить положение третьей светлой полосы.

2. На дифракционную решетку нормально падает пучок монохроматического света. Максимум третьего порядка наблюдается под углом φ = 36° 48' к нормали. Определить постоянную d решетки, выраженную в длинах волн падающего света.

3. Определить угол φ между плоскостями поляризатора и анализатора, если интенсивность естественного света, который проходит через поляризатор и анализатор, уменьшается в 4 раза.

4. Какую мощность P надо подводить к зачерненному металлическому шарику радиусом r = 2 см, чтобы поддерживать его температуру на ΔT = 27К выше температуры окружающей среды? Температура окружающей среды T = 293 К. Считать, что поверхность шарика является абсолютно черной, и тепло теряется только вследствие излучения.

5. Определить длину волны λ_0 света, который соответствует красной границе фотоэффекта для лития, натрия, калия и цезия.

6. Определить длину волны λ фотона, масса которого равняется массе покоя: 1) электрона; 2) протона.

7. На поверхность, которая идеально отражает, в течение времени t = 3 мин нормально падает монохроматический свет, энергия которого W = 9 Дж. Площадь поверхности S = 5 см^2. Определить давление света на поверхность.

ВАРИАНТ 3.

1. В опыте Юнга на пути одного из интерферирующих лучей размещалась тонкая стеклянная пластинка, вследствие чего центральная светлая полоса смещалась в положение, которое сначала было занято пятой светлой полосой (не считая центральной). Луч падает перпендикулярно к поверхности пластинки. Показатель преломления пластинки n = 1,5. Длина волны λ = 600 нм. Какова толщина h пластинки?

2. На щель шириной a = 2 мкм падает нормально параллельный пучок монохроматического света (λ = 589 нм). Определить ширину A изображения щели на экране, удаленном от щели на расстояние l = 1 м. Шириной изображения считать расстояние между первыми дифракционными минимумами, размещенными по обе стороны от главного максимума освещенности.

3. Пучок естественного света, который идет в воде, отражается от грани алмаза, погруженного в воду. При каком угле падения $i_В$ отраженный свет целиком поляризован?

4. Поверхность тела нагрета до температуры T = 1 000 К. Потом одна половина этой поверхности нагревается на ΔT = 100 К, другая охлаждается на ΔT = 100 К. Во сколько раз изменится энергетическая светимость $R_э$ поверхности тела?

5. Длина волны света, которая соответствует красной границе фотоэффекта, для некоторого металла λ_0 = 275 нм. Определить минимальную энергию ε фотона, который вызовет фотоэффект.

6. Давление p монохроматического света (λ = 600 нм) на черную поверхность, расположенную перпендикулярно падающим лучам, равно 0,1 мкПа. Определить количество N фотонов, которые падают за время t = 1 с на поверхность площадью S = 1 см^2.

7. Рентгеновское излучение с длиной волны $\lambda = 20$ пм испытывает комптоновское рассеяние под углом $\theta = 90°$. Определить изменение $\Delta\lambda$ длины волны рентгеновского излучения при рассеянии, а также энергию и импульс электрона отдачи.

ВАРИАНТ 4.

1. На тонкий клин в направлении нормали к его поверхности падает монохроматический свет ($\lambda = 600$ нм). Определить угол α между поверхностями клина, если расстояние b между соседними интерференционными минимумами в отраженном свете равно 4 мм.

2. Точечный источник света ($\lambda = 0{,}5$ мкм) расположен на расстоянии $a = 1$ м перед диафрагмой с круглым отверстием диаметра $d = 2$ мм. Определить расстояние b от диафрагмы до точки наблюдения, если отверстие открывает три зоны Френеля.

3. Угол Брюстера i_B при падении света из воздуха на кристалл каменной соли равен 57°. Определить скорость света в этом кристалле.

4. Абсолютно черное тело имеет температуру $T_1 = 2\,900$ К. В результате остывания тела длина волны, на которую приходится максимум спектральной плотности энергетической светимости, изменилась на $\Delta\lambda = 9$ мкм. До какой температуры T_2 охладилось тело?

5. Длина волны света, которая соответствует красной границе фотоэффекта, для некоторого металла $\lambda_0 = 275$ нм. Определить работу выхода A электрона из металла, максимальную скорость v_{max} электронов, которые вырываются из металла светом с длиной волны $\lambda = 180$ нм, и максимальную кинетическую энергию W_{max} электронов.

6. Монохроматическое излучение с длиной волны $\lambda = 500$ нм падает нормально на плоскую зеркальную поверхность и давит на нее с силой $F = 10$ нН. Определить количество N_1 фотонов, которые каждую секунду падают на эту поверхность.

7. Определить энергию ε, массу m и импульс p фотона, если соответствующая ему длина волны $\lambda_1 = 1{,}6$ пм.

ВАРИАНТ 5.

1. На мыльную пленку падает белый свет под углом $i = 45°$ к ее поверхности. При какой наименьшей толщине h пленки отраженные лучи будут иметь желтый цвет ($\lambda = 600$ нм)? Показатель преломления мыльной воды $n = 1{,}33$.

2. Какой должна быть постоянная d дифракционной решетки, чтобы в первом порядке были разрешены линии спектра калия $\lambda_1 = 404{,}4$ нм и $\lambda_2 = 404{,}7$ нм? Ширина решетки $a = 3$ см.

3. Предельный угол $i_{пр}$ полного отражения пучка света на границе жидкости с воздухом равен 43°. Определить угол Брюстера i_B для падения луча из воздуха на поверхность этой жидкости.

4. Во сколько раз надо увеличить термодинамическую температуру абсолютно черного тела, чтобы его энергетическая светимость R_e возросла в два раза?

5. Параллельный пучок монохроматического света (λ = 662 нм) нормально падает на зачерненную поверхность и производит на нее давление p = 0,3 мкПа. Определить концентрацию n фотонов в световом пучке.

6. Определить угол θ рассеяния фотона, испытавшего соударение со свободным электроном, если изменение длины волны при рассеянии $\Delta\lambda$ = 3,63 пм.

7. Определить массу m фотона: а) видимого света (λ_1 = 700 нм); б) рентгеновских лучей (λ_1 = 25 пм); в) гамма-лучей (λ = 1,6 пм).

ВАРИАНТ 6.

1. Мыльная пленка расположена вертикально и образует клин вследствие стекания жидкости. При наблюдении интерференционных полос в отраженном свете ртутной дуги (λ = 546,1 нм) оказалось, что расстояние между пятью полосами l = 2 см. Определить угол α клина. Свет падает перпендикулярно поверхности пленки. Показатель преломления мыльной воды n = 1,33.

2. Плоская световая волна (λ = 0,7 мкм) падает нормально на диафрагму с круглым отверстием радиусом r = 1,4 мм. На пути лучей, прошедших через отверстие, помещен экран. Определить максимальное расстояние b_{max} от центра отверстия до экрана, при котором в центре дифракционной картины еще будет наблюдаться темное пятно.

3. Коэффициент поглощения некоторого вещества для монохроматического света определенной длины волны α = 0,1 см$^{-1}$. Определить толщину слоя вещества, которая необходима для ослабления света в 2 раза.

4. Определить относительное увеличение $\Delta R_e/R_e$ энергетической светимости абсолютно черного тела при увеличении его температуры на 1%.

5. Определить частоту ν света, который вырывает из металла электроны, если они целиком задерживаются разностью потенциалов U = 3 В. Фотоэффект начинается при частоте света ν_0= $6\cdot10^{14}$ Гц. Найти работу выхода A электрона из металла.

6. Фотон с длиной волны λ = 15 пм рассеялся на свободном электроне. Длина волны рассеянного фотона λ' = 16 пм. Определить угол θ рассеяния.

7. С какой скоростью v должен двигаться электрон, чтобы его кинетическая энергия равнялась энергии фотона с длиной волны λ = 520 нм?

ВАРИАНТ 7.

1. На пути световой волны, которая распространяется в воздухе, поставили стеклянную пластинку толщиной h = 1 мм. На сколько изменится оптическая длина пути, если волна падает на пластинку: 1) нормально; 2) под углом i = 30°?

2. Постоянная дифракционной решетки d = 2 мкм. Какую разность длин волн $\Delta\lambda$ может разрешить эта решетка в области желтых лучей (λ = 600 нм) в спектре второго порядка? Ширина решетки a = 2,5 см.

3. Угол φ между плоскостями поляризатора и анализатора равен 45°. Во сколько раз уменьшится интенсивность света, который выходит из анализатора, если угол увеличить до 60°?

4. Температура T верхних слоев звезды Сириус равна 10 кК. Полагая свойства поверхности звезды подобными свойствам абсолютно черного тела, определить поток энергии Φ_e, излучаемый с поверхности площадью $S = 1$ км^2 этой звезды.

5. Фотоны с энергией $\varepsilon = 4{,}9$ эВ вырывают электроны из металла с работой выхода $A = 4{,}5$ эВ. Определить максимальный импульс p_{max}, сообщенный поверхности металла при вылете каждого электрона.

6. С какой скоростью v должен двигаться электрон, чтобы его импульс равнялся импульсу фотона с длиной волны $\lambda = 520$ нм?

7. Энергия рентгеновских фотонов $\varepsilon = 0{,}6$ МэВ. Определить энергию электрона отдачи, если длина волны рентгеновских лучей после комптоновского рассеяния изменилась на 20%.

ВАРИАНТ 8.

1. Установка для наблюдения колец Ньютона освещается монохроматическим светом с длиной волны $\lambda = 600$ нм, который падает по нормали к поверхности пластинки. Определить толщину h воздушного зазора между линзой и стеклянной пластинкой в том месте, где наблюдается четвертое темное кольцо в отраженном свете.

2. На дифракционную решетку падает нормально пучок света. Красная линия (λ = 700 нм) в спектре первого порядка видна под углом дифракции $\varphi = 30°$. Определить постоянную d дифракционной решетки. Какое количество штрихов N_0 нанесено на единицу длины этой решетки?

3. Во сколько раз ослабляется интенсивность естественного света, который проходит через два поляризатора, плоскости которых образуют угол $\varphi = 30°$?

4. В каких областях спектра лежат длины волн, которые соответствуют максимуму спектральной плотности энергетической светимости, если источником света служит: а) спираль электрической лампочки (T = 3 000 К); б) поверхность Солнца (T = 6 000 К); в) атомная бомба, в которой в момент взрыва развивается температура $T \approx 10^7$ К?

5. Определить постоянную Планка h, если известно, что электроны, которые вырываются из металла светом с частотой $\nu_1 = 2{,}2\cdot10^{15}$ Гц, полностью задерживаются разностью потенциалов $U_1 = 6{,}6$ В, а те, которые вырываются светом с частотой $\nu_2 = 4{,}6\cdot10^{15}$ Гц, – разностью потенциалов $U_2 = 16{,}5$ В.

6. На плоскую идеально отражающую поверхность нормально падает монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 0{,}55$ мкм. Поток излучения Φ_e составляет 0,45 Вт. Определить силу давления, которую испытывает эта поверхность.

7. Какую энергию ε должен иметь фотон, чтобы его масса равнялась массе покоя электрона?

ВАРИАНТ 9.

1. Расстояние $\Delta r_{1,2}$ между первым и вторым темными кольцами Ньютона в отраженном свете равно 1 мм. Определить расстояние $\Delta r_{9,10}$ между девятым и десятым кольцами.

2. Свет от монохроматического источника (λ = 600 нм) падает нормально на диафрагму с диаметром отверстия d = 6 мм. За диафрагмой на расстоянии l = 3 м от нее помещен экран. Какое количество k зон Френеля укладывается в отверстии диафрагмы? Каким будет центр дифракционной картины на экране: темным или светлым?

3. Определить показатель преломления стекла, если при отражении от него света отраженный луч полностью поляризован в случае, когда угол преломления составляет 35°.

4. Поток энергии Φ_e, который излучается из окошка плавильной печи, равен 45,4 Вт, площадь отверстия S = 8 см^2. Считая, что отверстие печи излучает как абсолютно черное тело, определить температуру T печи.

5. Определить максимальную скорость v_{max} фотоэлектронов, вылетающих из металла при облучении γ–фотонами с энергией ε = 1,53 МэВ.

6. При какой температуре T кинетическая энергия молекулы двухатомного газа будет равняется энергии фотона с длиной волны λ = 589 нм?

7. Фотон с энергией 100 кэВ вследствие эффекта Комптона рассеялся при столкновении со свободным электроном на угол $\theta = \pi/2$. Определить энергию фотона после рассеяния.

ВАРИАНТ 10.

1. На поверхность стеклянного объектива (n_1 = 1,5) нанесена тонкая пленка, показатель преломления которой n_2 = 1,2 (пленка, которая „просветляет”). При какой наименьшей толщине d этой пленки произойдет максимальное ослабление отраженного света в средней части видимого спектра?

2. Определить наибольший порядок m спектра для желтой линии натрия (λ = 589 нм), если постоянная дифракционной решетки d = 2 мкм.

3. Определить, под каким углом к горизонту должно находиться Солнце, чтобы отраженные от поверхности воды (n = 1,33) лучи были полностью поляризованными.

4. Определить температуру T, при которой энергетическая светимость R_e абсолютно черного тела равняется 10 кВт/м^2.

5. Определить задерживающее напряжение U для электронов, которые вырываются при облучении калия светом с длиной волны λ = 330 нм.

6. На зеркальную поверхность площадью S = 6 см^2 падает нормально поток излучения Φ = 0,8 Вт. Определить давление p и силу давления F света на эту поверхность.

7. Определить длину волны λ фотона, импульс которого равняется импульсу электрона, движущемуся со скоростью v = 10 Мм/с.

6. ЭЛЕМЕНТЫ КВАНТОВОЙ ФИЗИКИ АТОМОВ, ФИЗИКИ ТВЁРДОГО ТЕЛА И АТОМНОГО ЯДРА

ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ И ФОРМУЛЫ

6.1. Элементы квантовой механики

● Длина дебройлевской волны частицы с импульсом p

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m\upsilon}$$

где m –масса частицы, v – ее скорость.

● Импульс частицы и его связь с кинетической энергией:

а) в классическом приближении (v<<c) $p = m_0\upsilon$; $p = \sqrt{2m_0T}$,

б) в релятивистском случае $p = m\upsilon = \dfrac{m_0\upsilon}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}}$; $p = \dfrac{1}{c}\sqrt{(2E_0+T)T}$,

где m_0 – масса покоя частицы; m – релятивистская масса; υ – скорость частицы; c – скорость света в вакууме; E_0 – энергия покоя частицы $\left(E_0 = m_0c^2\right)$

● Соотношение неопределенностей:

а) $\Delta p_x \Delta x \geq \hbar$, (для координаты и импульса);

где Δp_x – неопределенности проекции импульса на ось x; Δx – неопределенность координаты, $\hbar = h/(2\pi)$ – постоянная Планка.

б) $\Delta E \Delta t \geq \hbar$, (для энергии и времени),

где ΔE – неопределенность энергии данного квантового состояния; Δt – время пребывания системы в данном энергетическом состоянии.

● Вероятность нахождения частицы в объеме dV

$$dW = \psi\,\psi^*\,dV = |\psi|^2\,dV,$$

где $\psi = \psi\,(x,y,z)$ – координатная часть волновой функции, ψ^* – функция, комплексно сопряженная с ψ, $|\psi|^2 = \psi\,\psi^*$ – квадрат модуля волновой функции.

• Вероятность обнаружения частицы в интервале от x_1 до x_2:

$$W = \int_{x_1}^{x_2} |\psi(x)|^2\,dx\,.$$

• Одномерное уравнение Шредингера для стационарных состояний:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E-U)\psi(x) = 0\,,$$

где $\psi(x)$ – волновая функция, описывающая состояние частицы; m – масса частицы; E – полная энергия; $U = U(x)$ – потенциальная энергия частицы.

• Решение уравнения Шредингера для одномерной, бесконечно глубокой, прямоугольной потенциальной ямы:

а) $\psi_n(x) = \sqrt{\dfrac{2}{l}}\sin\dfrac{\pi n}{l}x$ (собственная нормированная волновая функция);

б) $E_n = \dfrac{\pi^2\hbar^2 n^2}{2ml^2}$ (собственное значение энергии частицы),

где n – квантовое число, номер энергетического уровня, n = 1, 2, 3, …; l – ширина потенциальной ямы.

• Коэффициент прозрачности D прямоугольного потенциального барьера конечной ширины l

$$D = D_0 \exp\left[-\frac{2l}{\hbar}\sqrt{2m(U-E)}\right].$$

6.2. Элементы квантовой статистики и физики твердого тела

- Распределение Ферми-Дирака по энергиям для свободных электронов в металле

$$\langle N(E)\rangle = \frac{1}{e^{(E-E_F)/(kT)}+1},$$

где $<N(E)>$ – среднее число электронов в квантовом состоянии с энергией E; k – постоянная Больцмана; T– термодинамическая температура, E_F – энергия Ферми.

При $T = 0$ К

$$\langle N(E)\rangle = \left[\frac{1 \text{ при } E < E_F}{0 \text{ при } E > E_F}\right].$$

- Характеристическая температура Дебая (при $T << T_D$)

$$T_D = \frac{\hbar\omega_D}{k},$$

где ω_D – предельная частота упругих колебаний кристаллической решетки.

- Удельная проводимость собственных полупроводников

$$\gamma = \gamma_0 e^{-\Delta E/(2kT)},$$

где γ_0 – постоянная, характерная для данного полупроводника, ΔE – ширина запрещенной зоны.

6.3. Элементы физики атомного ядра

- Массовое число ядра (число нуклонов в ядре):

$$A = Z + N,$$

где Z – зарядовое число (число протонов); N – число нейтронов.

- Энергия связи нуклонов в ядре

$$E_{св} = [Zm_p + (A - Z)\, m_n - m_я\,]c^2 = [Zm_H + (A - Z)m_n - m_a]c^2,$$

где m_p, m_n, $m_я$, – соответственно массы протона, нейтрона и ядра; Z – зарядовое число ядра (число протонов в ядре); A – массовое число; m_H – масса атома водорода; m_a – масса атома.

- Число ядер, распавшихся в среднем за промежуток времени от t до $t + dt$

$$dN = -\lambda N dt.$$

- Закон радиоактивного распада:

$$N = N_0 e^{-\lambda t},$$

где dN – число ядер, распадающихся за интервал времени dt; N – число ядер, не распавшихся к моменту времени t; N_0 – число ядер в начальный момент $(t = 0)$; λ – постоянная радиоактивного распада.

- Число ядер, распавшихся за время t:

$$\Delta N = N_0 - N = N_0(1 - e^{-\lambda t}).$$

В случае если промежуток времени Δt, за который определяется число распавшихся ядер, много меньше периода полураспада $T_{1/2}$, то число распавшихся ядер можно определить по формуле

$$\Delta N = \lambda N \Delta t.$$

- Связь периода полураспада с постоянной радиоактивного распада:

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0{,}693}{\lambda}.$$

- Среднее время τ жизни радиоактивного ядра, т. е. интервал времени, за который число нераспавшихся ядер уменьшается в e раз:

$$\tau = \frac{1}{\lambda}.$$

- Число N атомов, содержащихся в радиоактивном изотопе:

$$N = \frac{mN_A}{M},$$

где m – масса изотопа; M – молярная масса; N_A – постоянная Авогадро.

- Активность нуклида

$$A = \left|\frac{dN}{dt}\right| = \lambda N.$$

- Правила смещения:

для α -распада $\quad {}^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2}Y + {}^{4}_{2}He$,

для β^- -распада $\quad {}^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A}_{Z+1}Y + {}^{o}_{-1}e + \tilde{\nu}$.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 6.1. *Электрон, начальной скоростью которого можно пренебречь, прошел ускоряющую разность потенциалов U. Найти длину волны де Бройля электрона для двух случаев: 1) U_1 = 51 В; 2) U_2 = 0,51 МВ.*

Решение. Длина волны де Бройля для частицы зависит от ее импульса p и определяется формулой

$$\lambda = \frac{h}{p}, \qquad (1)$$

где $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж·с – постоянная Планка.

Импульс частицы можно определить, если известна ее кинетическая энергия T. Связь импульса с кинетической энергией различна для нерелятивистского случая (когда кинетическая энергия частицы много меньше ее энергии покоя, $T << E_0$) и для релятивистского случая (когда кинетическая энергия сравнима с энергией покоя частиц, $T \approx E_0$):

в нерелятивистском случае

$$p = \sqrt{2m_0T}, \qquad (2)$$

где m_0 – масса покоя частицы.

в релятивистском случае

$$p = \frac{1}{c}\sqrt{(2E_0 + T)T}, \qquad (3)$$

где $E_0 = m_0c^2$ – энергия покоя частицы.

Формула (1) с учетом соотношений (2) и (3) запишется:

в нерелятивистском случае

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_0T}}, \qquad (4)$$

в релятивистском случае

$$\lambda = \frac{hc}{\sqrt{(2E_0 + T)T}}. \qquad (5)$$

Сравним кинетические энергии электрона, прошедшего заданные в условии задачи разности потенциалов U_1 = 51 В и U_2 = 0,51 МВ с энергией покоя электрона и в зависимости от этого решим, какую из формул (4) или (5) следует применить для вычисления длины волны де Бройля.

Как известно, кинетическая энергия электрона, прошедшего ускоряющую разность потенциалов U

$$T = |e|U.$$

В первом случае T_1 = 51 эВ = $0{,}51\cdot 10^{-4}$ МэВ, что много меньше энергии покоя электрона $E_0 = m_0c^2$ = 0,51 МэВ. Следовательно, в этом случае можно применить формулу (4). Вычисляя, получаем λ_1 = 171 пм.

Во втором случае кинетическая энергия T_2 = 0,51 МэВ равна энергии покоя электрона. В этом случае имеем дело с релятивистской частицей, необходимо применить релятивистскую формулу (5). Учитывая, что $T_2 = 0{,}51\text{МэВ} = m_0c^2$, по формуле (5) находим

$$\lambda_2 = \frac{hc}{\sqrt{\left(2m_0c^2 + m_0c^2\right)m_0c^2}} = \frac{h}{\sqrt{3}m_0c}$$

или, учитывая, что h/m_0c = 2,43 пм есть комптоновская длина волны электрона, получим λ_2 = 1,4 пм.

Пример 6.2. *Используя соотношение неопределенностей Гейзенберга, показать, что ядра атомов не могут содержать электронов. Считать радиус ядра равным* 10^{-15} *м.*

Решение. Соотношение неопределенностей Гейзенберга выражается формулой

$$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar = \frac{h}{2\pi} ,$$

где: Δx – неопределенность координаты; Δp_x – неопределенность импульса; h – постоянная Планка.

Если неопределенность координаты принять равной радиусу ядра, т.е.
$\Delta x = R_я$, то неопределенность импульса электрона выразим следующим образом:

$$\Delta p_x = h/(2\pi\, \Delta x).$$

Так как $\Delta p_x = m\Delta v_x$, то $m\Delta v_x = \dfrac{h}{2\pi\Delta x}$ и $\Delta v_x = \dfrac{h}{2\pi\Delta x m}$. Вычислим неопределенность скорости электрона:

$$\Delta v_x = \frac{6{,}62\cdot 10^{-34}\,\text{Дж}\cdot\text{с}}{9{,}1\cdot 10^{-31}\,\text{кг}\cdot 10^{-15}\,\text{м}\cdot 6{,}28} = 1{,}16\cdot 10^{11}\,\text{м/с}$$

Сравнивая полученное значение Δv_x со скоростью света в вакууме с = $3\cdot 10^8$ м/с, видим, что $\Delta v_x > c$, а это невозможно, следовательно, ядра не могут содержать электронов.

Пример 6.3. *Электрон в одномерной прямоугольной «потенциальной яме» шириной l = 200 пм с бесконечно высокими «стенками» находится в возбужденном состоянии (n = 4). Определить 1) минимальную энергию электрона; 2) вероятность W обнаружения электрона в первой четверти ямы.*

Решение. Собственные значения энергии электрона, находящегося на n-м энергетическом уровне в одномерной прямоугольной «потенциальной яме» с бесконечно высокими «стенками»

$$E_n = n^2 \frac{\pi^2\hbar^2}{2ml^2}(n = 1,2,3,\ldots),$$

где m = 9,11·10 $^{-31}$ кг – масса электрона, $\hbar$ = 1,05·10^{-34} Дж·с – постоянная Планка. Минимальную энергию электрон имеет при минимальном n, т.е. при n = 1:

$$E_{\min} = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ml^2}.$$

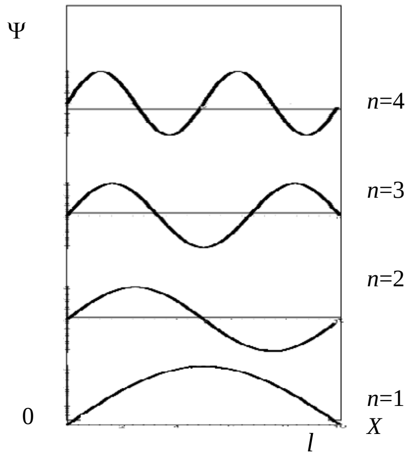


Рис. 6.1

Вероятность обнаружить частицу в интервале $x_1 < x < x_2$

$$W = \int_{x_1}^{x_2} |\psi_n(x)|^2 dx, \qquad (1)$$

где $\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\frac{\pi n}{l} x (n = 1,2,3,\ldots)$ – нормированная собственная волновая функция, соответствующая данному состоянию.

Возбужденному состоянию n = 4 отвечает собственная функция

$$\psi_4(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\frac{4\pi}{l} x (n = 1,2,3,\ldots). \qquad (2)$$

Согласно условию задачи (рис. 6.1) x_1 = 0 и $x_2 = l/4$. Поэтому, подставив (2) в (1), получим

$$W = \frac{2}{l} \int_0^{l/4} \sin^2 \frac{4\pi}{l} x dx.$$

Заменив $\sin^2(4\pi x/l) = ½(1 - \cos 8\pi x/l)$, запишем

$$W = \frac{1}{l}\left[\int_0^{l/4} dx - \int_0^{l/4} \cos(8\pi x/l) dx\right] = \frac{1}{l}\left[\frac{l}{4} - \frac{l}{8\pi}\sin(\frac{8\pi}{l}x)\right]_0^{l/4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{8\pi}(\sin 2\pi - \sin 0) = 0{,}25$$

Вычисляя, получим: 1) $E_{\min} = 1{,}5 \cdot 10^{-18}$ Дж = 9,37 эВ; 2) W = 0,25.

Пример 6.4. *Удельная проводимость кремниевого образца при нагревании от температуры t_1 = 0°С до температуры t_2 = 18°С увеличилась в 4,24 раза. Определить ширину запрещенной зоны кремния.*

Решение. Удельная проводимость собственных полупроводников

$$\gamma = \gamma_0 e^{-\Delta E/(2kT)},$$

где γ_0 – постоянная, характерная для данного полупроводника, ΔE – ширина запрещенной зоны.

Тогда

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{e^{-\Delta E/(2kT_1)}}{e^{-\Delta E/(2kT_2)}} = \exp\left[\frac{\Delta E}{2k}\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)\right].$$

Или, прологарифмировав,

$$\ln\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{\Delta E}{2k}\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right).$$

Откуда искомая ширина запрещенной зоны

$$\Delta E = \frac{2kT_1T_2 \ln(\gamma_1/\gamma_2)}{T_2 - T_1}.$$

Вычисляя, получаем ΔE = 1,1 эВ.

Пример 6.5. *Вычислить дефект массы и энергию связи ядра* $^{7}_{3}Li$.

Решение. Масса ядра всегда меньше суммы масс свободных (находящихся вне ядра) протонов и нейтронов, из которых ядро образовалось. Дефект массы ядра Δm и есть разность между суммой масс свободных нуклонов (протонов и нейтронов) и массой ядра, т.е.

$$\Delta m = Zm_p + (A - Z)m_n - m_я, \qquad (1)$$

где Z – атомный номер (число протонов в ядре); A – массовое число (число нуклонов, составляющих ядро); m_p, m_n, $m_я$ – соответственно массы протона, нейтрона и ядра.

В справочных таблицах всегда даются массы нейтральных атомов, но не ядер, поэтому целесообразно пользоваться преобразованной формулой, в которую входит масса m_a нейтрального атома:

$$m_\alpha = m_я + Zm_e, \text{откуда } m_я = m_a - Zm_e.$$

Выразив в равенстве (1) массу ядра, получим $\Delta m = Zm_p + (A - Z)m_n - m_\alpha + Zm_e$, или $\Delta m = Z(m_p + m_e) + (A - Z)m_n - m_\alpha$. Замечая, что $m_p + m_e = m_H$, где m_H - масса атома водорода, окончательно находим

$$\Delta m = Zm_H + (A - Z)m_n - m_\alpha.$$

Подставив числовые значения масс, получим

$$\Delta m = [3 \cdot 1{,}00783 + (7 - 3) \cdot 1{,}00867 - 7 \cdot 0{,}1601]\text{а.е.м} = 0{,}04216\,\text{а.е.м.}.$$

В соответствии с законом пропорциональности массы и энергии $\Delta E = c^2 \Delta m$, где c – скорость света в вакууме. Коэффициент пропорциональности c^2 может быть выражен двояко: $c^2 = 9 \cdot 10^{16}\text{м}^2/\text{с}^2$, или $c^2 = \dfrac{\Delta E}{\Delta m} = 9 \cdot 10^{16}\text{Дж/кг}$. Если вычислять энергию связи, пользуясь внесистемными единицами, то $c^2 = 931{,}5$ МэВ/а.е.м. С учетом этого

$$\Delta E = 931{,}5 \Delta m (\text{МэВ}). \qquad (2)$$

Подставив найденное значение дефекта массы ядра в формулу (2), получим

$$\Delta E = 931{,}5 \cdot 0{,}04216\,\text{МэВ} = 39{,}27\,\text{МэВ}.$$

Пример 6.6. *Первоначальная масса радиоактивного изотопа радона* $^{222}_{86}Rn$ *(период полураспада* $T_{1/2}$ *= 3,82 сут) равна 1,5 г. Определить: 1) начальную активность изотопа; 2) его активность через 5 сут.*

Решение. Начальная активность изотопа

$$A_0 = \lambda N_0,$$

где $\lambda = (\ln 2)/T_{1/2}$ – постоянная радиоактивного распада; N_0 – число ядер изотопа в начальный момент времени: $N_0 = m_0 N_A/M$, M – молярная масса радона (M = $222 \cdot 10^{-3}$ кг/моль), $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$ – постоянная Авогадро.

Учитывая эти выражения, найдем искомую активность изотопа:

$$A_0 = \frac{m_0 N_A \ln 2}{M T_{1/2}}.$$

Активность изотопа $A = \lambda N$, где, согласно закону радиоактивного распада, $N = N_0 e^{-\lambda t}$ – число нераспавшихся ядер в момент времени t. Учитывая, что $A_0 = \lambda N_0$, найдем, что активность нуклида уменьшается со временем по закону

$$A = A_0 e^{-\lambda t} = A_0 e^{-\frac{\ln 2}{T}t}.$$

Вычисляя, получаем: 1) A_0 = 8,54·10^{15} Бк; 2) A = 3,45·10^{15} Бк.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №6

ВАРИАНТ 1

1. Заряженная частица, ускоренная разностью потенциалов U = 200 В, имеет длину волны де Бройля λ = 2,02 пм. Определить массу m частицы, если ее заряд численно равен заряду электрона.

2. Определить в электрон-вольтах максимальную энергию E фонона, который может возбуждаться в кристалле NaCl, если характеристическая температура Дебая T_D = 320 К. Фотон какой длины волны λ обладал бы такой энергией?

3. Какую наименьшую энергию E нужно затратить, чтобы оторвать один нейтрон от ядра азота ${}^{14}_{7}N$?

4. Определить промежуток времени τ, в течение которого активность A изотопа стронция ^{90}Sr уменьшится в k_1 = 10 раз? В k_2 = 100 раз? Период полураспада стронция $T_{1/2}$ = 28 лет.

5. Какая энергия ΔE выделяется при термоядерной реакции синтеза ${}^{2}_{1}H + {}^{3}_{1}H \rightarrow {}^{4}_{2}He + {}^{1}_{0}n$? Ответ дать в джоулях и электрон-вольтах.

$m_{^2H} = 2{,}01410$ а.е.м. $m_{^3H} = 3{,}01605$ а.е.м. $m_{He} = 4{,}00260$ а.е.м. $m_n = 1{,}00866$ а.е.м.

ВАРИАНТ 2

1. Определить длину волны де Бройля λ для: а) электрона, движущегося со скоростью v = 10^6 м/с; б) атома водорода, движущегося со средней квадратичной скоростью при температуре T = 300 К; в) шарика массой m = 1 г, движущегося со скоростью v = 1 см/с.

2. Что такое фонон, каковы его свойства?

3. Энергия связи $E_{св}$ ядра кислорода ${}^{18}_{8}O$ равна 139,8 МэВ, ядра фтора ${}^{19}_{9}F$ - 147,8 МэВ. Определить, какую минимальную энергию E нужно затратить, чтобы оторвать один протон от ядра фтора.

4. Определить массу m полония ${}^{210}_{84}$Po, активность которого A= 3,7·10^{10} Бк. Период полураспада полония $T_{1/2}$ = 138 сут.

5. Написать недостающие обозначения в реакциях:

а) ${}^{55}_{25}Mn(x,n){}^{55}_{26}Fe$; б) ${}^{27}_{13}Al(\alpha,p)x$;

в) ${}^{14}_{7}N(n,x){}^{14}_{6}C$; г) $x(p,\alpha){}^{22}_{11}Na$.

ВАРИАНТ 3

1. Определить дебройлевскую длину волны λ шарика массой m = 1 г, движущегося со скоростью υ = 100 м/с. Можно ли обнаружить волновые свойства такого шарика, и почему

2. Объяснить физический смысл энергии Ферми.

3. Определить энергию связи $E_{св}$ ядра изотопа лития ${}^{7}_{3}Li$.

4. Какая часть η начального числа ядер ${}^{90}Sr$ распадется за одни сутки и за 15 лет? Какая часть ζ останется через 10 лет и через 100 лет? Период полураспада стронция $T_{1/2} = 28$ лет.

5. Определить наименьшую энергию γ-кванта, достаточную для осуществления реакции разложения дейтона γ-лучами ${}^{2}_{1}H + h\nu \rightarrow {}^{1}_{1}H + {}^{1}_{0}n$.

ВАРИАНТ 4

1. Определить квантовомеханическую неопределенность Δv_x x-компоненты скорости частицы массой $m = 1$ г и электрона, если положение каждого из них определено с одинаковой ошибкой $\Delta x = 10^{-7}$м.

2. Пояснить физический смысл характеристической температуры Дебая.

3. Определить энергию связи $E_{св}$ ядра атома гелия ${}^{4}_{2}He$.

4. Вследствие последовательных радиоактивных распадов ядро урана ${}^{238}_{92}U$ превратилось в ядро свинца ${}^{206}_{82}Pb$. Пользуясь таблицей Менделеева, определить сколько актов α-распада и β-распада при этом произошло.

5. При бомбардировке изотопа азота ${}^{14}_{7}N$ нейтронами получается изотоп углерода ${}^{14}_{6}C$, который оказывается β - радиоактивным. Написать уравнения обеих реакций.

ВАРИАНТ 5

1. Принимая, что электрон находится внутри атома диаметром 0,3 нм, определить (в электрон-вольтах) неопределенность кинетической энергии этого электрона.

2. В германии с примесью бора энергия активации примесных атомов $\Delta E_п = 0{,}01$ эВ. Определить: 1) тип проводимости примесного полупроводника; 2) тип примесной фотопроводимости; 3) красную границу фотопроводимости.

3. Определить энергию связи $E_{св}$ ядра атома алюминия ${}^{27}_{13}Al$.

4. Определить постоянную радиоактивного распада λ ядра ${}^{55}Co$, если за час распадается 4% начального числа ядер. Продукт распада стабильный.

5. Определить суточный расход ядерного горючего ${}^{235}U$ в реакторе АЭС. Тепловая мощность станции равна $P = 10$ МВт. Принять, что в одном акте деления выделяется энергия $Q = 200$ МэВ, а КПД станции равен $\eta = 0{,}2$ (20%).

ВАРИАНТ 6

1. Электрон находится в бесконечно глубокой одномерной прямоугольной потенциальной яме шириной l. Определить, в каких точках интервала ($0 \le x \le l$) плотность вероятности нахождения электрона на первом и втором энергетических

уровнях одинакова. Вычислить плотность вероятности для этих точек. Пояснить графически.

2. В чем смысл понятия «дырка» как носителя тока в полупроводнике? Существуют ли дырки вне полупроводника? Совпадают ли зоны проводимости для электронов и дырок в полупроводниках? Чему равна наименьшая энергия ε_{min} образования пары электрон-дырка в собственном полупроводнике, проводимость которого возрастает в n = 2 раза при повышении температуры от T_1 = 300 К до T_2 = 310 К?

3. Определить энергию связи $E_{св}$ ядер: а) ${}^3_1H$; б) ${}^3_2He$. Какое из этих ядер более устойчиво?

4. За один год начальное количество радиоактивного препарата уменьшилось в 5 раз. Во сколько раз оно уменьшится за два года?

5. Определить энергию E, которая высвободится при соединении одного протона и двух нейтронов в атомное ядро.

ВАРИАНТ 7

1. Электрон в бесконечно глубокой одномерной прямоугольной потенциальной яме шириной l находится в нижнем возбужденном состоянии. Какова вероятность обнаружения электрона в интервале l/4, равноудаленном от стенок ямы?

2. Определить ширину ΔE запрещенной зоны теллура, если его электропроводность возрастает в n = 5 раз при повышении температуры от T_1 =300 К до T_2 = 400 К.

3. Определить энергию связи $E_{св}$, приходящуюся на один нуклон в ядрах; а) ${}^7_3Li$; б) ${}^{14}_7N$.

4. Определить количество ΔN атомов, которые распались в m = 1 мг радиоактивного натрия ${}^{24}{}_{11}$Na за время t_1 = 10 час. Период полураспада натрия $T_{1/2}$ = 15,3 час.

5. Определить энергию Q ядерной реакции: ${}^{44}{}_{20}Ca + {}^1{}_1H \rightarrow {}^{41}{}_{19}K + {}^4{}_2He$.

ВАРИАНТ 8

1. Частица в бесконечно глубокой одномерной прямоугольной потенциальной яме шириной l находится в основном состоянии, которому соответствует энергия E_1 = 8,12 МэВ. Ширина ямы $l = 5\cdot10^{-15}$ м. Определить массу m частицы.

2. Кремниевый образец нагревают от 0 до 10 °С. Принимая ширину ΔE запрещенной зоны кремния 1,1 эВ, определить, во сколько раз возрастет его удельная проводимость.

3. Энергия связи $E_{св}$ ядра, состоящего из двух протонов и одного нейтрона, равна 7,72 МэВ. Определить массу $m_а$ нейтрального атома, имеющего это ядро.

4. Сколько атомов из $N = 10^6$ атомов полония распадается за время t = 1 сут? Период полураспада полония $T_{1/2}$ = 138 сут.

5. Определить энергию Q, выделяющуюся при реакции ${}^7_3Li + {}^1_1H \rightarrow {}^4_2He + {}^4_2He.$

ВАРИАНТ 9

1. Рассматривая приближенно ядро и атом как одномерные прямоугольные бесконечно глубокие потенциальные ямы для электронов и нуклонов, вычислить расстояние между основным и первым возбужденным уровнями в атоме $\Delta E_{а1,2}$ и ядре $\Delta E_{я1,2}$, полагая, что для атома $l_а = 5 \cdot 10^{-10}$ м , а для ядра $l_я = 5 \cdot 10^{-15}$ м.

2. Удельная проводимость кремния имеет значение σ_1 =19 См/м при температуре T_1 = 600 К и σ_2 =4 095 См/м при T_2 = 1 200 К. Определить ширину ΔE запрещенной зоны для кремния.

3. Определить массу $m_а$ нейтрального атома, если ядро этого атома состоит из трех протонов и двух нейтронов и энергия связи $E_{св}$ ядра равна 26,3 МэВ.

4. За время t =1 сут активность изотопа уменьшилась от A_1 = 118 ГБк до A_2 = 7,4 ГБк. Определить период полураспада $T_{1/2}$ этого нуклида.

5. Определить энергию Q, поглощающуюся при реакции $^{14}_{7}N+^{4}_{2}He \to ^{1}_{1}H+^{17}_{8}O$.

ВАРИАНТ 10

1. Электрон с энергией E = 5 эВ движется в положительном направлении оси x , встречая на своем пути прямоугольный потенциальный барьер высотой U_0 = 10 эВ и шириной l = 0,1 нм. Определить для этого барьера коэффициент прозрачности D.

2. В кремнии с примесью мышьяка энергия активации примесных атомов $\Delta E_п$ = 0,05 эВ. Определить: 1) тип проводимости примесного полупроводника; 2) тип примесной фотопроводимости; 3) максимальную длину волны, при которой фотопроводимость еще возбуждается.

3. Определить энергию связи, приходящуюся на один нуклон $E_{св}/A$ в ядрах; а) $^{7}{}_{3}Li$; б) $^{14}{}_{7}N$; в) $^{27}{}_{13}Al$; г) $^{40}{}_{20}Ca$; д) $^{63}{}_{29}Cu$; е) $^{113}{}_{48}Cd$; ж) $^{200}{}_{80}Hg$; з) $^{238}{}_{92}U$. Построить зависимость $E_{св}/A = f(A)$, где A – массовое число.

4. Определить постоянную распада λ радона, если известно, что число атомов радона уменьшается за время t = 1 сут на 18,2%.

5. Определить энергию Q, выделяющуюся при реакции: $^{2}_{1}H+^{2}_{1}H \to ^{1}_{1}H+^{3}_{1}H$.

ПРИЛОЖЕНИЯ

I. ТАБЛИЦЫ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

1. Единицы физических величин (СИ)

Величина	Единица		Выражение через основные единицы
	наименование	обозначение	
Основные единицы			
Длина	метр	м	
Масса	килограмм	кг	
Время	секунда	с	
Сила электрического тока	ампер	А	
Термодинамическая температура	кельвин	К	
Количество вещества	моль	моль	
Сила света	кандела	кд	
Дополнительные единицы			
Плоский угол	радиан	рад	
Телесный угол	стерадиан	ср	
Производные единицы			
Частота	герц	Гц	$с^{-1}$
Сила, вес	ньютон	Н	$м·кг·с^{-2}$
Давление, механическое напряжение	паскаль	Па	$м^{-1}·кг·с^{-2}$
Робота, энергия, количество теплоты	джоуль	Дж	$м^{2}·кг·с^{-2}$
Мощность, поток энергии	ватт	Вт	$м^{2}·кг·с^{-3}$
Электрический заряд	кулон	Кл	с·А
Потенциал электрического поля, электрическое напряжение	вольт	В	$м^{2}·кг·с^{-3}·А^{-1}$
Электрическая емкость	фарад	Ф	$м^{-2}·кг^{-1}·с^{4}·А^{2}$
Электрическое сопротивление	ом	Ом	$м^{2}·кг·с^{-3}·А^{-2}$
Электрическая проводимость	сименс	См	$м^{-2}·кг^{-1}·с^{3}·А^{2}$
Магнитная индукция	тесла	Тл	$кг·с^{-2}·А^{-1}$
Магнитный поток	вебер	Вб	$м^{2}·кг·с^{-2}·А^{-1}$
Индуктивность	генри	Гн	$м^{2}·кг·с^{-2}·А^{-2}$
Световой поток	люмен	лм	кд·ср
Освещенность	люкс	лк	$м^{-2}·кд·ср$
Активность изотопа	беккерель	Бк	$с^{-1}$
Поглощенная доза излучения	грей	Гр	$м^{2}·с^{-2}$

2. Множители и приставки

Множитель	Приставка: Наименование	Обозначение	Пример		Множитель	Приставка: Наименование	Обозначение	Пример	
10^{18}	экса	Е	эксаметр	Ем	10^{-1}	деци	д	дециметр	дм
10^{15}	пэта	П	пэтагерц	ПГц	10^{-2}	санти	с	сантиметр	см
10^{12}	тера	Т	тераджоуль	ТДж	10^{-3}	милли	м	миллиампер	мА
10^{9}	гига	Г	гиганьютон	ГН	10^{-6}	микро	мк	микровольт	мкВ
10^{6}	мега	М	мегаом	МОм	10^{-9}	нано	н	наносекунда	нс
10^{3}	кило	к	километр	км	10^{-12}	пико	п	пикофарад	пф
10^{2}	гекто	г	гектоватт	гВ	10^{-15}	фемто	ф	фемтограмм	фг
10^{1}	дека	да	декалитр	дал	10^{-18}	атто	а	аттокулон	аКл

3. Основные физические постоянные (округленные значения)

Физическая постоянная	***Обозначение***	***Значение***
Нормальное ускорение свободного падения	g	$9{,}81$ м/с^2
Гравитационная постоянная	G	$6{,}67 \cdot 10^{-11}$ м^3/(кг$\cdot$с^2)
Постоянная Авогадро	N_A	$6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$
Молярная газовая постоянная	R	$8{,}31$Дж/(моль$\cdot$К)
Молярный объем идеального газа при нормальных условиях	$V_{0\,\mathrm{m}}$	$22{,}4 \cdot 10^{-3}$ м^3/моль
Постоянная Больцмана	k	$1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К
Элементарный заряд	e	$1{,}60 \cdot 10^{-19}$ Кл
Скорость света в вакууме	c	$3{,}00 \cdot 10^{-8}$ м/с
Постоянная Стефана–Больцмана	σ	$5{,}67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м^{2}К^4)
Постоянная закона смещения Вина	b	$2{,}90 \cdot 10^{-3}$ м$\cdot$К
Постоянная Планка	h	$6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж$\cdot$с
	$\hbar$	$1{,}05 \cdot 10^{-34}$ Дж$\cdot$с
Постоянная Ридберга	R	$1{,}10 \cdot 10^{7}$ м $^{-1}$
Радиус Бора	a_0	$0{,}529 \cdot 10^{-12}$ м
Комптоновская длина волны электрона	Λ	$2{,}43 \cdot 10^{-12}$ м
Магнетон Бора	μ_B	$0{,}927 \cdot 10^{-23}$ А$\cdot$м^2
Энергия ионизации атома водорода	E_i	$2{,}18 \cdot 10^{-18}$ Дж (13,6 эВ)
Атомная единица массы	а. е. м.	$1{,}660 \cdot 10^{-27}$ кг
Электрическая постоянная	ε_0	$8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м
Магнитная постоянная	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м

4. Некоторые астрономические величины

Наименование	***Значение***	***Наименование***	***Значение***
Радиус Земли Масса Земли Радиус Солнца Масса Солнца Радиус Луны Масса Луны	$6{,}37 \cdot 10^{6}$ м $5{,}98 \cdot 10^{24}$ кг $6{,}95 \cdot 10^{8}$ м $1{,}98 \cdot 10^{30}$ кг $1{,}74 \cdot 10^{6}$ м $7{,}33 \cdot 10^{22}$ кг	Расстояние от центра Земли до центра Солнца Расстояние от центра Земли до центра Луны	$1{,}49 \cdot 10^{11}$ м $3{,}84 \cdot 10^{8}$ м

5. Плотность твердых тел

Твердое тело	**ρ, кг/м³**	***Твердое тело***	**ρ, кг/м³**	***Твердое тело***	**ρ, кг/м³**
Алюминий	$2{,}70 \cdot 10^{3}$	Железо	$7{,}88 \cdot 10^{3}$	Свинец	$11{,}3 \cdot 10^{3}$
Барий	$3{,}50 \cdot 10^{3}$	Литий	$0{,}53 \cdot 10^{3}$	Серебро	$10{,}5 \cdot 10^{3}$
Ванадий	$6{,}02 \cdot 10^{3}$	Медь	$8{,}93 \cdot 10^{3}$	Цезий	$1{,}90 \cdot 10^{3}$
Висмут	$9{,}80 \cdot 10^{3}$	Никель	$8{,}90 \cdot 10^{3}$	Цинк	$7{,}15 \cdot 10^{3}$

6. Плотность жидкостей

Жидкость	**ρ, кг/м³**	***Жидкость***	**ρ, кг/м³**
Вода (при 4°С)	$1{,}00 \cdot 10^{3}$	Сероуглерод	$1{,}26 \cdot 10^{3}$
Глицерин	$1{,}26 \cdot 10^{3}$	Спирт	$0{,}80 \cdot 10^{3}$
Ртуть	$13{,}6 \cdot 10^{3}$		

7. Плотность газов (при нормальных условиях)

Газ	**ρ, кг/м³**	***Газ***	**ρ, кг/м³**
Водород	0,09	Гелий	0,18
Воздух	1,29	Кислород	1,43

8. Коэффициент поверхностного натяжения жидкостей

Жидкость	**σ, мН/м**	***Жидкость***	**σ, мН/м**
Вода	72	Ртуть	500
Мыльная вода	40	Спирт	22

9.Эффективный диаметр молекулы

Газ	$d_{эфф}$, **м**	***Газ***	$d_{эфф}$, **м**
Азот	$3{,}0 \cdot 10^{-10}$	Гелий	$1{,}9 \cdot 10^{-10}$
Водород	$2{,}3 \cdot 10^{-10}$	Кислород	$2{,}7 \cdot 10^{-10}$

12.Диэлектрическая проницаемость

Вещество	**ε**	***Вещество***	**ε**
Вода	81	Парафин	2,0
Масло трансформаторное	2,2	Стекло	7,0

11. Удельное сопротивление металлов

Металл	**ρ, Ом·м**	*Металл*	**ρ, Ом·м**
Железо Медь	$9{,}8\cdot10^{-8}$ $1{,}7\cdot10^{-8}$	Нихром Серебро	$1{,}1\cdot10^{-8}$ $1{,}6\cdot10^{-8}$

12. Показатель преломления

Вещество	*n*	*Вещество*	*n*
Алмаз Вода	2,42 1,33	Глицерин Стекло	1,47 1,50

13. Работа выхода электронов

Металл	*A,* **Дж**	*A,* **эВ**
Калий	$3{,}5\cdot10^{-19}$	2,2
Литий	$3{,}7\cdot10^{-19}$	2,3
Платина	$10\cdot10^{-19}$	6,3
Рубидий	$3{,}4\cdot10^{-19}$	2,1
Серебро	$7{,}5\cdot10^{-19}$	4,7
Цезии	$3{,}2\cdot10^{-19}$	2,0
Цинк	$6{,}4\cdot10^{-19}$	4,0

14. Относительные атомные массы (округленные значения) $A_г$ и порядковые номера Z некоторых элементов

Элемент	*Символ*	*A*	*Z*	*Элемент*	*Символ*	*A*	*Z*
Азот	*N*	14	7	Марганец	*Mn*	55	25
Алюминий	*A1*	27	13	Медь	*Cu*	64	29
Аргон	*Аг*	40	18	Молибден	*Mo*	96	42
Барий	*Ba*	137	56	Натрий	*No*	23	11
Ванадий	*V*	60	23	Неон	*Ne*	20	10
Водород	*H*	1	1	Никель	*Ni*	59	28
Вольфрам	*W*	184	74	Олово	*Sn*	119	50
Гелий	*He*	4	2	Платина	*Pt*	195	78
Железо	*Fe*	56	26	Ртуть	*Hg*	201	80
Золото	*Au*	197	79	Сера	*S*	32	16
Калий	*К*	39	19	Серебро	*Ag*	108	47
Кальций	*Ca*	40	20	Уран	*U*	238	92
Кислород	*O*	16	8	Углерод	*C*	12	6
Магний	*Mg*	24	12	Хлор	*C1*	35	17

15. Массы атомов легких изотопов

Изотоп	*Символ*	*Масса,* **а.е.м.**	*Изотоп*	*Символ*	*Масса,* **а.е.м.**
Нейтрон	${}^{1}_{0}n$	1,00867	Бор	${}^{10}_{5}B$	10,01294

Водород	$^{1}_{1}H$	1,00783		$^{11}_{5}B$	11,00930
	$^{3}_{1}H$	3,01605	Углерод	$^{12}_{6}C$	12,00000
Гелий	$^{3}_{2}He$	3,01603		$^{13}_{6}C$	13,00335
	$^{4}_{2}He$	4,00260		$^{14}_{6}C$	14,00324
Литий	$^{6}_{3}Li$	6,01513	Азот	$^{14}_{7}N$	14,00307
	$^{7}_{3}Li$	7.01601			
Бериллий	$^{7}_{4}Be$	7,01693	Кислород	$^{16}_{8}O$	15,99491
	$^{9}_{4}Be$	9,01219		$^{17}_{8}O$	16,99913

16. Периоды полураспада радиоактивных изотопов

Изотоп	*Символ*	*Период полураспада*	*Изотоп*	*Символ*	*Период полураспада*
Актиний	$^{225}_{89}Ac$	10 сут	Йод	$^{131}_{53}I$	8 сут
Кобальт	$^{60}_{27}Co$	5,3 года	Стронций	$^{90}_{38}Sr$	27 лет
Магний	$^{27}_{12}Mg$	10 мин	Фосфор	$^{32}_{15}P$	14,3 сут
Радий	$^{226}_{86}Ra$	1620 лет			
Радон	$^{222}_{86}Rn$	3,8 сут	Церий	$^{144}_{58}Ce$	285 сут

17. Масса и энергия покоя некоторых частиц

Частица	m_0		E_0	
	кг	а.е.м.	Дж	МэВ
Электрон	$9{,}11\cdot10^{-31}$	0,00055	$8{,}16\cdot10^{-14}$	0,511
Протон	$1{,}67\cdot10^{-31}$	1,00728	$1{,}50\cdot10^{-10}$	938
Нейтрон	$1{,}675\cdot10^{-27}$	1,00867	$1{,}51\cdot10^{-10}$	939
Дейтрон	$3{,}35\cdot10^{-27}$	2,01355	$3{,}00\cdot10^{-10}$	1876
α-Частица	$6{,}64\cdot10^{-27}$	4,00149	$5{,}96\cdot10^{-10}$	3733
Нейтральный π-мезон	$2{,}41\cdot10^{-28}$	0,14498	$2{,}16\cdot10^{-11}$	135

Атомная масса некоторых нуклидов $m_{ат}$, а. е. м.

Нуклид	$m_{ат}$	Нуклид	$m_{ат}$
Водород ^{1}H	1,007825	Титан ^{50}Ti	49,944736
Дейтерий ^{2}H	2,0014108	Титан ^{51}Ti	50,949858
Тритий ^{3}H	3,016028	Ванадий ^{52}V	51,944800
Гелий ^{3}He	3,016045	Марганец ^{55}Mn	54,930249
Гелий ^{4}He	4,002596	Кобальт ^{58}Co	57,935776
Литий ^{6}Li	6,015110	Стронций ^{90}Sr	89,907711
Литий ^{7}Li	7,016046	Полоний ^{210}Po	209,982760
Бериллий ^{7}Be	7,016925	Радон ^{222}Rn	222,017422
Бор ^{11}B	11,009304	Радий ^{226}Ra	226,025279
Углерод ^{14}C	14,003217	Торий ^{232}Th	232,038112

Кремний ^{31}Si	30,975350	Уран ^{238}U	238,050637
Фосфор ^{31}P	30,973762	Уран ^{239}U	239,054149
Кальций ^{44}Ca	43?95549	Плутоний ^{239}Pu	239,052037

18. Греческий алфавит

Обозначения	*Названия*	*Обозначения*	*Названия*
Α, α	альфа	Ν, ν	ню
Β, β	бета	Ξ, ξ	кси
Γ, γ	гамма	0, ο	омикрон
Δ,δ	дэльта	Π, π	пи
Ε,ε	эпсилон	Ρ, ρ	ро
Ζ, ζ	дзета	Σ, σ	сигма
Η,η	эта	Τ, τ	тау
Θ, θ	тэта	Υ, υ	ипсилон
Ι, ι	йота	Φ, φ	фи
Κ, κ	каппа	Χ, χ	хи
Λ, λ	ламбда	Ψ, ψ	пси
Μ, μ.	мю	Ω, ω	омега

II. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ПО МАТЕМАТИКЕ

I. Постоянные числа

$\pi = 3{,}1416$; $\pi^2 = 9{,}8696$; $\sqrt{\pi} = 1{,}7725$; e = 2,7183; ln 10 = 2,3026; lg e = 0,4343;
$\ln x = 2{,}303\ \lg x$.

II. Сведения из геометрии

Теорема косинусов $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$.

Теорема синусов $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$,

где *a*, *b*, *c* – стороны треугольника, *A*, *B*, *C* – соответственные углы.

Площадь треугольника $S = (1/2)\, ah_a = (1/2)\, ab \sin C$.

Единицы плоского угла:

1 градус (...°); $1° = \dfrac{\pi}{180}\text{ рад} = 1{,}75 \cdot 10^{-2}$ рад ; 1 рад ≈ 57,3°;

1 минута (...'); $1' = 2{,}91 \cdot 10^{-4}$ рад;

1 секунда (..."); $1'' = 4{,}85 \cdot 10^{-6}$ рад.

Длина окружности $l = 2\pi r$. Площадь круга $S = \pi r^2$.

Площадь поверхности шара $S = 4\pi r^2$. Объем шара $V = (4/3)\pi r^3$.

Уравнение прямой в плоскости с угловым коэффициентом k $y = kx + b$.

Уравнение прямой в отрезках $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$.

III. Тригонометрические функции

Периодичность: $\sin(x + 2n\pi) = \sin x$; $\cos(x + 2n\pi) = \cos x$; $\mathrm{tg}(x + n\pi) = \mathrm{tg} x$.

Связь между тригонометрическими функциями:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1;$$

$$\mathrm{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x};$$

Четность тригонометрических функций:

$$\sin(-x) = -\sin x; \quad \cos(-x) = \cos x; \quad \mathrm{tg}(-x) = -\mathrm{tg} x.$$

Формулы сложения:

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y;$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y;$$

Тригонометрические функции кратных аргументов:

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x; \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

Сумма и разность тригонометрических функций:

$$\sin x \pm \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x \mp y}{2};$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2};$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}.$$

IV. Производные элементарных функций

Функция	Производная
x^a	ax^{a-1}
e^{ax}	ae^{ax}
a^x	$a^x \ln a$
$\ln x$	$1/x$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\mathrm{tg}\, x$	$1/\cos^2 x$

V. Таблица неопределенных интегралов (постоянные интегрирования опущены)

$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1}, \ (a \neq -1);$	$\int \cos x dx = \sin x;$
$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert;$	$\int \mathrm{tg} x dx = -\ln\lvert\cos x\rvert;$
$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax};$	$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a}$

$\int \ln x dx = x(\ln\lvert x\rvert - 1);$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a}$
$\int \sin x dx = -\cos x;$	

VI. Формулы приближенных вычислений

При малых x ($\lvert x\rvert \ll 1$) имеют место приближенные равенства

$(1 \pm x)^{\alpha} \approx 1 \pm \alpha x$ **;** отдельные случаи: $\frac{1}{1 \pm x} \approx 1 \mp x;$ $\sqrt{1 \pm x} \approx 1 \pm \frac{1}{2}x;$ $\frac{1}{\sqrt{1 \pm x}} \approx 1 \mp \frac{1}{2}x;$

$$\ln(1 \pm x) \approx \pm x;$$

$$e^{\pm x} \approx 1 \pm x,;$$

$$\sin x \approx \mathrm{tg} x \approx x;$$

если $\lvert x\rvert \ll \lvert a\rvert,$ $\sqrt{a^2 \pm x^2} \approx a \pm \frac{x^2}{2a};$ $\frac{1}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} \approx a \mp \frac{x^2}{2a}.$

VII. Некоторые сведения о векторах

Разложение вектора по базисным векторам (ортам)

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k},$$

где a_x, a_y, a_z – проекции вектора на соответствующие направления.

Сложение векторов $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ (рис. 1).

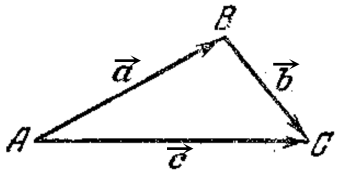


Рис. 1

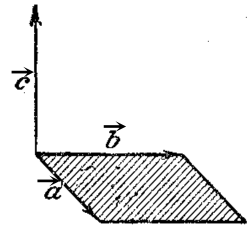


Рис. 2

Модуль вектора

$$a = \lvert \mathbf{a} \rvert = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Задання вектора за допомогою орта $\mathbf{a} = a\mathbf{e}_a$, де $\mathbf{e}_a$ – орт вектора $\mathbf{a}$ ($\lvert\mathbf{e}_a\rvert = 1$),

Скалярное произведение векторов $\mathbf{ab} = ab\cos(\widehat{\mathbf{ab}})$.

Векторное произведение векторов (рис. 2)

$$\mathbf{c} = [\mathbf{ab}], \ c = ab\sin(\widehat{\mathbf{ab}}).$$

IV. О ПРИБЛИЖЕННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЯХ

Числовые значения физических величин всегда являются приближенными. Это связано с недостаточной точностью измерений.

К таким величинам относятся, в частности, многие физические константы. Например, округленные с точность до трех значащих цифр скорость света в вакууме $c \approx 3,00 \cdot 10^8$ м/с, элементарный заряд $e \approx 1,60 \cdot 10^{-19}$ Кл, гравитационная постоянная $G \approx 6,67 \cdot 10^{-11}$ Н·м²/кг² и т.д.

Более точные значения этих величин $c = 2,99792458 \cdot 10^8$ м/с, $e = 1,6021892 \cdot 10^{-19}$ Кл, $G = 6,6720 \cdot 10^{-11}$ Н·м²/кг². Однако, и эти значения являются, в свою очередь, приближенными.

Поэтому, приступая к вычислениям, необходимо помнить о той точности, которую нужно получить.

Одна из самых распространенных ошибок состоит в том, что при вычислениях добиваются получения такой точности результатов, которая совершенно не соответствует точности данных задачи. Недопустимо вести вычисления с большой точностью, если данные задачи не допускают этого.

При вычислениях определяют количество верных ***значащих цифр*** в числе. При подсчете значащих цифр не считаются нули с левой стороны. Нули в середине или в конце числа (справа), обозначающие отсутствие в числе единиц соответствующих разрядов, – значащие цифры. Например, в числе 0,08040 первые два нуля – не значащие, а третий и четвертый – значащие.

Приближенные числа следует записывать, сохраняя только верные знаки. Нули, поставленные в конце целого числа взамен неизвестных цифр и служащие только для определения разрядов остальных цифр, значащими не считаются. В подобных случаях нули в конце числа не пишут, заменяя их соответствующей степенью числа 10. Например, если число 52 400 измерено с абсолютной погрешностью ± 100, то это число должно быть записано в виде или $5,24 \cdot 10^4$. Такая запись подчеркивает, что в данном числе содержатся лишь три значащие цифры.

Если приближенной число содержит лишние цифры, то его ***округляют***. При этом руководствуются следующими ***правилами округления***.

1. Если первая отбрасываемая цифра больше 4, то последняя сохраняемая цифра увеличивается на единицу. Например, округляя число 27,3763 до сотых, следует записать 27,38.
2. Если первая отбрасываемая цифра меньше 4 или равна 4, то последняя сохраняемая цифра не изменяется. Например, округляя число 13 847 до сотен, записывают $138 \cdot 10^2$.
3. Если отбрасываемая часть числа состоит из одной цифры 5, то число округляют так, чтобы последняя сохраняемая цифра была четной. Например, при округлении до десятых $23,65 \approx 23,6$, но $23,75 \approx 23,8$.

Производя вычисления, руководствуются следующими ***правилами подсчета цифр.***

1. При *сложении и вычитании* в результате сохраняют столько десятичных знаков, сколько их содержится в числе с наименьшим количеством десятичных знаков.

2. При *умножении и делении* в результате сохраняют столько значащих цифр, сколько их имеет приближенное число с наименьшим количеством значащих цифр.

3. При *возведении в квадрат и куб* в результате следует сохранять столько значащих цифр, сколько их имеет возводимое в степень число.

4. При *извлечении квадратного и кубического корней* в результате следует брать столько значащих цифр, сколько их имеет подкоренное число.

При вычислении промежуточных результатов сохраняют на одну цифру больше, чем указано в правилах 1. – 4. (так называемая запасная цифра). В окончательном результате запасная цифра отбрасывается.

Если некоторые числа содержат больше десятичных знаков (при сложении и вычитании) или больше значащих цифр (при умножении, делении, возведении в степень, извлечении корня), чем другие, то их ***предварительно округляют,*** сохраняя только одну лишнюю цифру. В окончательном результате запасная цифра отбрасывается.

Пример 1. При сложении чисел 0,2372 + 5,368 + 43,2 = 48,8052 первое и второе нужно округлить до сотых , а в окончательном результате сотые отбросить:

$$0{,}24 + 5{,}37 + 43{,}2 \approx 48{,}8.$$

Сумма округлена до десятых долей, так как слагаемое 43,2 задано с точностью до десятых долей.

Пример 2. Требуется вычислить $10{,}6 \cdot 2{,}456 \cdot 5{,}1846$. Предварительно округляем и вычисляем выражение

$$10{,}6 \cdot 2{,}46 \cdot 5{,}18 = 135{,}07368 \approx 135.$$

В результате оставлено три значащих цифры.

Пример 3. При возведении в куб числа 216 результат должен быть записан только с тремя значащими цифрами:

$$216^3 \approx 101 \cdot 10^5.$$

Пример 4. При извлечении корня в результате сохранено три значащих цифры:

$$\sqrt{1{,}17 \cdot 10^{-8}} \approx 1{,}08 \cdot 10^{-4}.$$

Пример 5.

$$\frac{(3{,}2 + 17{,}062) \cdot \sqrt{3{,}7}}{5{,}1 \cdot 2{,}007 \cdot 10^3}.$$

Сомножитель 5,1 имеет наименьшее число значащих цифр – две. Поэтому результаты всех промежуточных вычислений должны округляться до трех значащих цифр:

$$\frac{(3{,}2 + 17{,}062) \cdot \sqrt{3{,}7}}{5{,}1 \cdot 2{,}007 \cdot 10^3} \approx \frac{20{,}3 \cdot 1{,}92}{10{,}3 \cdot 10^3} \approx \frac{39{,}0}{10{,}3 \cdot 10^3} = 3{,}79 \cdot 10^{-3}.$$

После округления результата до двух значащих цифр, получаем $3{,}8 \cdot 10^3$.