Министерство образования и науки, молодежи и спорта Украины
Государственное высшее учебное заведение
«Национальный горный университет»

Библиотека иностранного студента

Физика

Ч. 1. Механика

Учебное пособие для бакалавров отрасли знаний
«Разработка полезных ископаемых»

Днепропетровск
ДВНЗ НГУ
2011

ББК 22.3я72
Г42
УДК 53(075.4)

Рекомендовано

Физика. Ч.1. Механика. Учебное пособие для бакалавров отрасли знаний 0503 «Разработка полезных ископаемых». /Сост. И.П. Гаркуша, В.П.Куринной. - Днепропетровск: ДВНЗ «НГУ», 2011. - 129 с.

Составители: Гаркуша И.П. – канд. физ.-мат. наук, профессор (общая редакция, главы: введение, 1, 2, 5, 6), Куринной В.П. – докт. техн. наук, профессор (главы: 3,4,7).

Рецензенты: Докт. физ. - мат. наук, проф. Е.Д. Солдатова (Днепропетровский национальный университет); докт. техн. наук., проф. В.И. Бузило (ДВНЗ «Национальный горный университет»); канд. физ.-мат. наук, проф. Б.Н. Дикарев (Приднепровская государственная академия строительства и архитектуры).

Пособие составлено в соответствии с программой нормативной дисциплины «Физика» и является первой из шести частей курса лекций, предназначенных для бакалавров отрасли знаний 0503 «Разработка полезных ископаемых». Может быть полезным студентам дневных и заочных отделений других технических направлений подготовки, а также преподавателям высших технических учебных заведений.

ISBN 966-8271-44-0

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

§ 1. Векторы и скаляры. Некоторые операции над векторами

Физика как точная наука имеет дело с величинами. Одни из них характеризуются только своим численным значением и не имеют направления. Они называются ***скалярами***. Например, длина, время, масса, энергия, температура, электрический заряд и пр.

Другие физические величины определяются не только числом, но и определенным направлением. ***Векторами*** *называются величины, которые характеризуются числовым значением, направлением в пространстве и складываются геометрически – по правилу параллелограмма.* Правило параллелограмма поясняет рис 1.1: сумма ***c*** двух векторов ***a*** и ***b*** (***c*** = ***a*** + ***b***) совпадает с диагональю параллелограмма, построенного на векторах ***a*** и ***b***, отложенных из общей точки.

Равносильное правило называется правилом треугольника. Чтобы сложить векторы ***a*** и ***b***, начало ***b*** совмещается с концом ***a***. Вектор ***c***, проведенный из начала ***a*** в конец ***b***, является суммой векторов ***a*** и ***b***.

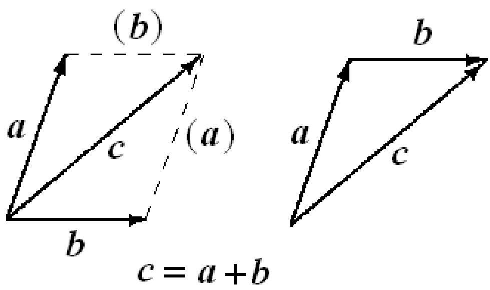


Рис. 1.1.

Векторы встречаются во всех разделах физики. Так, основные законы механики или электромагнитной теории наиболее удобно записываются в векторной форме.

Направленный отрезок, служащий изображением вектора, будет одним и тем же, какую бы систему координат мы ни использовали при его построении. Соотношение между векторами также остается неизменным при переносе начала отсчета и повороте координатных осей. Уравнения, выражающие законы физики в векторной форме, не зависят от выбора системы -координат. Язык векторов соответствует физическому опыту, кроме того, он сжат и выразителен. К векторным величинам относятся, например, скорость, ускорение, сила, напряженности электрических и магнитных полей и пр.

Числовое значение вектора называется его ***модулем.***

На рисунках векторы изображаются в виде прямолинейных отрезков со стрелкой на конце, указывающей направление вектора. Вектор характеризуется точкой приложения его начала. Длину отрезка в установленном масштабе выбирают равной модулю вектора.

Принято при письме вектор записывать буквой со стрелкой наверху $\vec{a}$, при печати - буквой полужирного шрифта $\boldsymbol{a}$. Абсолютная величина (модуль) вектора $\boldsymbol{a}$ обозначается прямыми скобками $|\boldsymbol{a}|$ или той же буквой обычного шрифта a.

Проекцией вектора на любую ось называется произведение модуля вектора на косинус угла между вектором и положительным направлением оси: $a_x = a \cos \alpha$ (рис. 1.2).

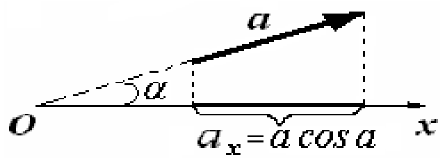


Рис. 1.2.

Выберем на плоскости прямоугольную систему координат xOy. Любой вектор $\boldsymbol{a}$, лежащий в этой плоскости, можно представить как сумму двух векторов (рис 1.3):

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_x + \boldsymbol{a}_y, \tag{1.1}$$

где $\boldsymbol{a}_x$ – вектор, направленный параллельно оси Ox и называемый *составляющей вектора* по оси Ox, аналогично $\boldsymbol{a}_y$ – *составляющая вектора* по оси Oy.

Эта процедура называется *разложением вектора на составляющие*.

Обозначим через $\boldsymbol{i}$ – вектор, направленный вдоль оси Ox, длина которого равна единице (единичный вектор или орт), а через $\boldsymbol{j}$ – единичный вектор вдоль оси Oy.

Каждую составляющую вектора $\boldsymbol{a}$ можно записать как произведение проекции вектора на единичный вектор соответствующей оси (рис. 1.3):

$$\boldsymbol{a}_x = a_x\,\boldsymbol{i}; \quad \boldsymbol{a}_y = a_y\,\boldsymbol{j}. \tag{1.2}$$

Тогда вектор $\boldsymbol{a}$ можно представить в виде суммы:

$$\boldsymbol{a} = a_x\,\boldsymbol{i} + a_y\,\boldsymbol{j}. \tag{1.3}$$

Модуль вектора $\boldsymbol{a}$ по теореме Пифагора равен

$$a = |\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}\,. \tag{1.4}$$

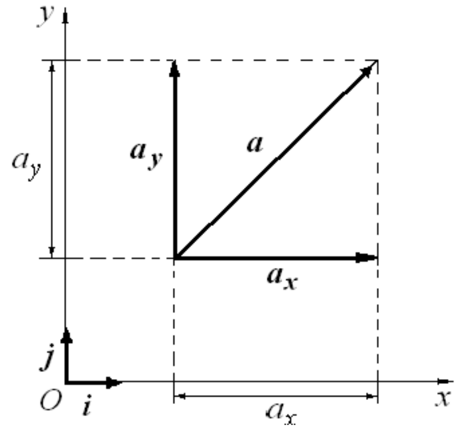


Рис. 1.3.

В общем случае, когда вектор не лежит в плоскости, а расположен в пространстве, его можно отнести к пространственной прямоугольной координатной системе.

Обозначая орт оси *Oz* через $\boldsymbol{k}$, запишем вектор $\boldsymbol{a}$ через его проекции на координатные оси (называемые *компонентами вектора*) и орты этих осей:

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}. \tag{1.5}$$

В этом случае модуль вектора $\boldsymbol{a}$ равен

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\,. \tag{1.6}$$

Пользуясь представлениями вектора через его проекции, подчеркнем разницу между скалярными и векторными величинами: значение скалярной величины задается *одним* числом, значение векторной величины представляется *тремя* числами (проекциями вектора на координатные оси)

Приведем основные правила умножения векторов.

Произведение вектора а на число b дает новый вектор $\boldsymbol{c} = b\,\boldsymbol{a}$, компоненты которого равны: $c_x = b\,a_x$; $c_y = b\,a_y$; $c_z = b\,a_z$. Вычисляя длину нового вектора формуле (1.6), убедимся, что она равна длине вектора $\boldsymbol{a}$, умноженной на абсолютное значение числа b. Кроме того, новый вектор сохраняет направление, если $b > 0$ и изменяет направление на обратное, если $b < 0$.

Существуют две операции умножения вектора на вектор. ***Скалярное произведение*** $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ – это число, равное произведению модулей векторов на косинус угла между ними:

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}| \cos (\boldsymbol{a}\hat{\ }\boldsymbol{b}) = ab \cos \alpha, \qquad (1.7)$$

где a и b – модули перемножаемых векторов, α – угол между векторами сомножителями. (Другое обозначение скалярного произведения: $\boldsymbol{ab}$, иногда $(\boldsymbol{ab})$). В результате скалярного умножения вектора на вектор получается не вектор, а число – скаляр.

Скалярное произведение выражается через проекции векторов по формуле

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \qquad (1.8)$$

В отличие от скалярного умножения при векторном умножении двум заданным векторам ставится в соответствие вектор.

Векторное произведение $[\boldsymbol{ab}]$ двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ равно вектору $\boldsymbol{c}$, определяемому следующим образом:

1) модуль векторного произведения $|\boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}| \sin (\boldsymbol{a}\hat{\ }\boldsymbol{b})$, или

$c = ab \sin \alpha$, где a и b – модули перемножаемых векторов, α – угол между векторами сомножителями. Таким образом, модуль векторного произведения численно равен площади параллелограмма, построенного на перемножаемых векторах;

2) вектор $\boldsymbol{c}$ перпендикулярен плоскости, в которой лежат вектора сомножители $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

3) векторы $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ образуют правую тройку векторов: если головку винта вращать по направлению от $\boldsymbol{a}$ к $\boldsymbol{b}$, то винт продвинется в направлении вектора $\boldsymbol{c}$ (рис. 1.4).

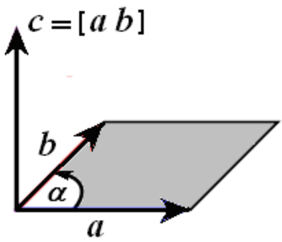


Рис. 1.4.

Векторное произведение обозначается квадратными скобками (или знаком × – «умножить»):

$$\boldsymbol{c} = [\boldsymbol{ab}] \qquad (\text{или } \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}).$$

Векторное произведение можно записать в виде определителя, который разлагается по элементам первой строки:

$$[\boldsymbol{ab}] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \quad (1.9)$$

Производная векторной функции $\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}$ вычисляется по обычным правилам дифференцирования с учетом того, что ***i, j, k*** **–** постоянные векторы.

$$\frac{d\boldsymbol{a}}{dt} = \frac{da_x}{dt}\boldsymbol{i} + \frac{da_y}{dt}\boldsymbol{j} + \frac{da_z}{dt}\boldsymbol{k}. \quad (1.10)$$

Производная вектора ***a*** – это вектор, чьи компоненты равны производным от соответствующих компонент ***a***.

Пример. Заданы два вектора: $\boldsymbol{a} = 3\,\boldsymbol{i} - 4\,\boldsymbol{j} + 5\,\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{b} = -\,\boldsymbol{i} + 2\,\boldsymbol{j} + 4\,\boldsymbol{k}$. Определить:

1) модуль каждого вектора;
2) скалярное произведение ***ab***;
3) векторное произведение **[*ab*]**.

1). По формуле (1.6):

$$a = \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}, \quad b = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{21}.$$

2). По формуле (1.8):

$$\boldsymbol{ab} = 3\cdot(-1) + (-4)\cdot 2 + 5\cdot 4 = 9.$$

3) По формуле (1.9):

$$[\boldsymbol{ab}] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 3 & -4 & 5 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = (-16 - 10)\,\boldsymbol{i} - (12 + 5)\,\boldsymbol{j} + (6 - 4)\,\boldsymbol{k} = -26\boldsymbol{i} - 17\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}.$$

§ 2. Система единиц измерения физических величин

Содержание физических законов обычно выражается в математической форме как зависимость между численными значениями изучаемых физических величин.

Измерить физическую величину – значит сравнить ее с величиной, принятой за единицу, то есть сравнить с эталоном. В результате получают численное значение измеряемой величины, вместе с которым указывают единицы измерения.

Единицы измерения разбиваются на два класса – *основные и производные*.

Основные единицы системы СИ

Величина	*Название*	*Обозначение*
Длина	метр	м
Масса	килограмм	кг
Время	секунда	с
Сила тока	ампер	А
Термодинамическая температура	кельвин	К
Сила света	кандела	кд
Количество вещества	моль	моль

Для основных физических величин выбирают эталоны. Единицы остальных физических величин устанавливают, пользуясь физическими законами, связывающими между собой производные физические величины с основными.

В физике наиболее широко пользуются Международной системой единиц (СИ), которая является предпочтительной для применения во всех областях науки и техники. В этой системе принято семь основных единиц.

Метр равен расстоянию, которое проходит свет в вакууме за промежуток времени, равный $\frac{1}{299\,792\,458}$ секунды.

Из этого определения следует, что в системе СИ скорость света в вакууме принята равной в точности 299 792 458 м/с.

Килограмм определяется как масса *международного эталона килограмма*, хранящегося в Международном бюро мер и весов (в Севре, близ Парижа) и представляющего собой цилиндрическую гирю диаметром и высотой 39,17 мм из платиноиридиевого сплава (90 % Pt, 10 % Ir).

Секунда представляет собой интервал времени, равный 9 192 631 770 периодам колебаний световой волны, излученной при переходе между сверхтонкими уровнями основного (квантового) состояния атома цезия-133 в покое при 0 К при отсутствии возмущения внешними полями.

Ампером называется сила постоянного тока, текущего в каждом из двух параллельных бесконечно длинных бесконечно малого кругового сечения проводников в вакууме на расстоянии 1 метр, и создающая силу взаимодействия между ними $2\cdot10^{-7}$ ньютонов на каждый метр длины проводника.

Кельвин равен 1/273,16 термодинамической температуры тройной точки воды. Начало шкалы (0 К) совпадает с абсолютным нулём. Пересчёт в градусы Цельсия:

$$°\mathrm{C} = \mathrm{K} - 273{,}15$$

(температура тройной точки воды равна 0,01 °C).

Канде́ла равна силе света, испускаемого в заданном направлении источником монохроматического излучения частотой $5{,}4\cdot10^{14}$ герц, энергетическая сила света которого в этом направлении составляет (1/683) Вт/ср.

Моль соответствует количеству вещества, в котором содержится N_A частиц (молекул, атомов, ионов, электронов или любых других тождественных структурных частиц).

$N_A = 6{,}02214179(30)\cdot10^{23}$ – постоянная Авогадро.

Контрольные вопросы

1. Каким условиям должна удовлетворять физическая величина, чтобы она выражалась вектором?
2. Представьте графически сумму векторов; разность векторов.
3. Изменяется ли длина вектора при поворотах системы координат?
4. Зависит ли величина скалярного произведения от выбора системы координат?
5. Скалярное произведение двух векторов равно нулю. Какой вывод следует отсюда?
6. Каков результат скалярного произведения $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}$ вектора самого на себя? Векторного произведения $[\boldsymbol{aa}]$?
7. Чему равно векторное произведение орта $\boldsymbol{i}$ на орт $\boldsymbol{j}$?
8. Изменится ли величина и направление силы при переходе от правовинтовой системы координат к левовинтовой системе?
9. Сила $\boldsymbol{F}$, действующая со стороны магнитного поля $\boldsymbol{B}$ на электрический заряд q, движущийся со скоростью $\boldsymbol{v}$ в некоторой системе отсчета выражается формулой $\boldsymbol{F} = q[\boldsymbol{vB}]$. Изменится ли величина и направление силы при переходе к другой системе отсчета?
10. Какие требования предъявляются к эталонам единиц измерения?

Глава 1. **КИНЕМАТИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ**

§ 3. Основные понятия кинематики материальной точки

Кинематика изучает движение тел, не интересуясь причинами, которые его вызывают, и оперирует такими величинами, как перемещение, путь, время, скорость, ускорение.

Положение тела в пространстве можно определить только по отношению к каким-то другим телам. Тела, которые служат для определения положения движущегося тела, называются телами отсчета. В повседневной практике естественным телом отсчета служит Земля. Совокупность тела отсчета и жестко связанных с ним системы координат и часов называется ***системой отсчета.***

Одной из физических моделей, используемых в кинематике, является материальная точка.

Под ***материальной точкой*** понимают тело, обладающее массой, размерами которого можно пренебречь в сравнении с размерами других тел или расстояниями до них в условиях данной задачи. Так, например, в задаче о движении Земли вокруг Солнца Землю можно рассматривать как точку в физическом смысле, так как диаметр Земли гораздо меньше расстояния от Земли до Солнца.

В дальнейшем, говоря о теле или частице, мы будем понимать под ними материальную точку.

Положение точки M в прямоугольной системе координат можно задать не только с помощью трех координат x,y,z, но также с помощью одной векторной величины $\mathbf{r}$ - ***радиус-вектора*** точки M, проведенного в эту точку из начала системы координат (рис. 3 1).

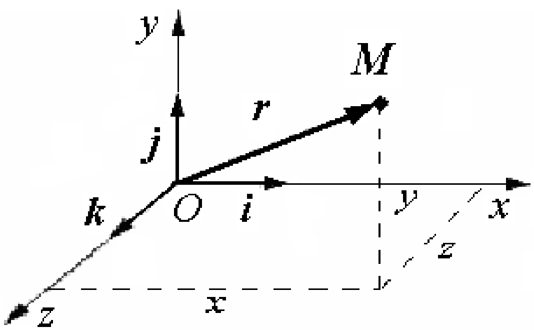


Рис.3.1.

Проекции (или компоненты) радиус-вектора x, y, z равны координатам точки M.

Если ***i, j, k*** - единичные векторы (орты) осей прямоугольной (декартовой) системы координат, то

$$\boldsymbol{r} = x\,\boldsymbol{i} + y\,\boldsymbol{j} + z\,\boldsymbol{k}. \qquad (3.1)$$

При движении частицы ее радиус-вектор и координаты изменяются с течением времени t. Поэтому для задания закона движения материальной точки необходимо указать либо вид функциональной зависимости всех трех ее координат от времени:

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t), \qquad (3.2)$$

либо зависимость от времени радиус-вектора этой точки:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t). \qquad (3.3)$$

Три скалярных уравнения (3.2) или эквивалентное им одно векторное уравнение (3.3) называются *кинематическими уравнениями движения материальной точки.*

Линия, которую описывает точка при своем движении, называется ***траекторией*. Т**раекторией является положение концов радиус-вектора $\boldsymbol{r}$ во все моменты времени.

В зависимости от формы траектории различают прямолинейное и криволинейное движения точки. Если все участки траектории точки лежат в одной плоскости, то движение точки называют плоским.

Уравнения (3.2) и (3.3) задают траекторию точки в так называемой параметрической форме. Роль параметра играет время t. Решая эти уравнения совместно и исключая из них время t, можно определить уравнение траектории в явном виде $f(x,y) = 0$.

Пример. Уравнения движения материальной точки заданы в параметрической форме $x = a\sin\omega t,\ y = b\cos\omega t.$ Определить уравнение движения в виде $f(x, y) = 0.$

Из первого уравнения выразим $\sin\omega t = \dfrac{x}{a}.$

Тогда $\cos\omega t = \sqrt{1-\sin^2\omega t} = \sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}$. Подставив это значение во второе уравнение, найдем: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Точка движется по эллипсу.

Рассмотрим движение частицы вдоль произвольной кривой из начальной точки *1* траектории в конечную точку *2* (рис.3.2).

Вектор $\Delta\boldsymbol{r}$, проведенный из начального положения частицы в конечное положение, называется ***перемещением***.

Из рисунка следует, что по правилу треугольника сложения векторов $\boldsymbol{r}_1 + \Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2$ или $\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$.

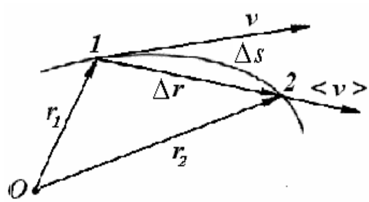


Рис.3.2.

Другими словами, перемещение $\Delta\boldsymbol{r}$ равно приращению (от конечного значения отнять начальное) радиус-вектора частицы за время Δt движения.

От перемещения следует отличать пройденный частицей путь.

Путь $\Delta\ s$ –скалярная величина, равная длине участка траектории, пройденного частицей за промежуток времени Δt. Модуль вектора перемещения $|\Delta\boldsymbol{r}|$ между двумя точками в общем случае не совпадает с путем. Например, при движении частицы по окружности за один оборот перемещение равно нулю, а пройденный частицей путь – длине окружности. Только при бесконечно малом перемещении, а также в случае прямолинейного движения с неизменной по направлению скоростью $|\Delta\boldsymbol{r}| = \Delta s$.

§ 4. Скорость

Введем понятие ***скорости*** частицы. Пусть за промежуток времени Δt частица переместилась из точки *1* в точку *2* (рис. 3.2). Отношение вектора перемещения $\Delta\boldsymbol{r}$ к величине интервала времени Δt называют ***средней скоростью*** $<\boldsymbol{v}>$ движения точки за время Δt (среднее значение обозначается с помощью угловых скобок)

$$<\boldsymbol{v}>=\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t} \qquad (4.1)$$

При делении вектора $\Delta\boldsymbol{r}$ на скаляр Δt получается вектор $<\boldsymbol{v}>$, направление которого совпадает с направлением перемещения $\Delta\boldsymbol{r}$.

Поэтому вектор средней скорости $<\boldsymbol{v}>$ направлен так же, как вектор перемещения $\Delta\boldsymbol{r}$, т.е. вдоль хорды, стягивающей дугу.

Если в выражении (4.1) перейти к пределу при $\Delta t \to 0$, то получим выражение для скорости частицы в момент прохождения ее через точку *1* траектории (ее называют также *мгновенной скоростью* или просто *скоростью в данный момент времени*):

$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \dot{\boldsymbol{r}}\,. \qquad (4.2)$$

(В физике производные по времени обозначают не штрихом, а точкой над буквой).

***Скоростью** называется векторная величина, характеризующая быстроту и направление движения и равная производной радиус-вектора по времени.*

В процессе уменьшения промежутка времени Δt, точка *2* приближается к точке *1* (рис 3.2). При этом длина дуги Δs сближается с длиной хорды, равной $|\Delta \boldsymbol{r}|$. Предельным положением секущей является касательная к траектории в точке *1*. Поэтому *вектор скорости* движущейся точки направлен *по касательной к траектории* в каждой точке траектории в сторону движения.

Численное значение скорости можно определить из уравнения (4.2)

$$v = |\boldsymbol{v}| = \frac{|d\boldsymbol{r}|}{dt} = \frac{ds}{dt} = \dot{s} \qquad (4.3)$$

Другими словами, модуль скорости равен производной пути по времени.

Часто пользуются скалярной величиной $v_{\text{ср}}$, называемой средней путевой скоростью неравномерного движения на данном участке Δs траектории. Если путь Δs пройден за конечный промежуток времени Δt , то *средней путевой скоростью* называют отношение

$$v_{cp} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \qquad (4.4)$$

Т.к. $\Delta s = |\Delta \boldsymbol{r}|$ только в случае прямолинейного движения с неизменной по направлению скоростью, то в общем случае средняя путевая скорость не равна модулю средней скорости:

$$v_{cp} \neq |\langle \boldsymbol{v} \rangle| \qquad (4.5)$$

По правилу дифференцирования векторов (учитываем, что
i, j, k **-** постоянные):

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}} = \dot{x}\boldsymbol{i} + \dot{y}\boldsymbol{j} + \dot{z}\boldsymbol{k}\,. \qquad (4.6)$$

Вектор скорости, как и всякий вектор, можно задавать тремя компонентами по осям координат

$$\boldsymbol{v} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} + v_z\boldsymbol{k}\,. \qquad (4.7)$$

Сравнивая последние два выражения, получим, что проекции вектора скорости равны первым производным по времени от соответствующих координат материальной точки

$$v_x = \dot{x}, v_y = \dot{y}, v_z = \dot{z}\,. \qquad (4.8)$$

Модуль вектора скорости по общему правилу вычисления модуля вектора равен

$$v = \sqrt{\left(\dot{x}\right)^2 + \left(\dot{y}\right)^2 + \left(\dot{z}\right)^2}\,. \qquad (4.9)$$

Покажем теперь, как можно вычислить путь, пройденный частицей с неизменным по направлению движением от момента времени t_1 до момента времени t_2 . Разобьем путь s, пройденный частицей, на бесконечно малые участки ds. Из формулы (4.3) следует, что $ds = v\,dt$. Здесь v - модуль скорости на промежутке dt . Весь путь s , пройденный частицей, равен сумме бесконечно малых путей ds, т.е. равен определенному интегралу от модуля скорости по времени:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt\,. \qquad (4.10)$$

Так как модуль скорости всегда положителен. $v \geq 0$, то путь s с течением времени может только возрастать или быть постоянным, если частица неподвижна.

§ 5.Ускорение

Скорость частицы может изменяться как по величине, так и по направлению. Чтобы охарактеризовать изменение скорости со временем вводится понятие ускорения.

***Ускорением** называется векторная величина **a**, характеризующая быстроту изменения скорости движущейся точки и равная первой производной от скорости по времени*:

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}. \qquad (5.1)$$

Рассмотрим частицу, движущуюся по некоторой криволинейной траектории. (рис.5.1).

Вектор скорости в любой точке траектории, в том числе и в точках A и B, направлен по касательной к ней. Пусть частица в положении A в момент времени t имеет скорость $\boldsymbol{v}$. За время Δt частица перейдет в положение B и приобретет скорость $\boldsymbol{v}_1$, которая отличается от $\boldsymbol{v}$ как по величине, так и по направлению (вектор скорости повернулся и стал длиннее).

Перенесем вектор $\boldsymbol{v}$ параллельно самому себе в точку B, и построим векторный треугольник, в котором $\Delta\boldsymbol{v}$ – приращение вектора скорости:

$$\boldsymbol{v} + \Delta\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1. \qquad (5.2)$$

Отношение приращения скорости $\Delta\boldsymbol{v}$ к промежутку времени Δt, в течение которого произошло это приращение, выражает *среднее ускорение*:

$$\langle \boldsymbol{a} \rangle = \frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}. \qquad (5.3)$$

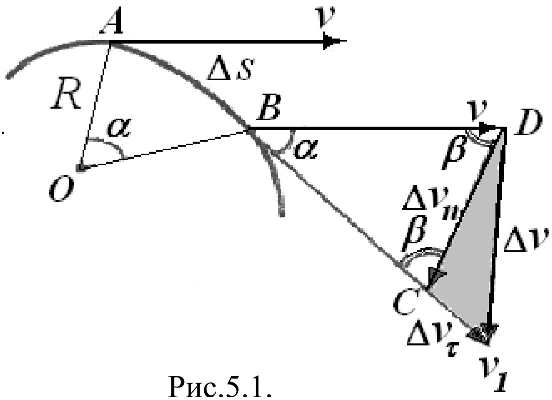


Рис.5.1.

Вектор, среднего ускорения $\langle\boldsymbol{a}\rangle$ совпадает по направлению с вектором $\Delta\boldsymbol{v}$.

Мгновенное ускорение в точке A получим, вычисляя предел среднего ускорения при стремлении промежутка времени Δt к нулю:

$$\boldsymbol{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \dot{\boldsymbol{v}} = \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \ddot{\boldsymbol{r}}. \qquad (5.4)$$

Как и быстрота изменения любой физической величины, ускорение определяется первой производной вектора $\boldsymbol{v}$ по времени t, а, следовательно, второй производной радиус-вектора $\boldsymbol{r}$ по времени:

Разложим вектор $\Delta\boldsymbol{v}$ на две составляющих $\Delta\boldsymbol{v}_n$ и $\Delta\boldsymbol{v}_\tau$ так, чтобы $BC = BD = v$.

$$\Delta\boldsymbol{v} = \Delta\boldsymbol{v}_n + \Delta\boldsymbol{v}_\tau \,. \tag{5.5}$$

Из рисунка видно, что составляющая $\Delta\boldsymbol{v}_\tau$ показывает, насколько длиннее стал направленный отрезок, изображающий вектор скорости в точке B. Другими словами, эта часть приращения вектора скорости определяет изменение скорости только по модулю.

В случае равномерного движения модуль скорости не изменяется, $v_1 = v$ и $\Delta\boldsymbol{v}_\tau = 0$.

Другая составляющая $\Delta\boldsymbol{v}_n$ показывает, насколько повернулся вектор скорости при неизменном модуле. Эта составляющая существует и при равномерном движении частицы по окружности. Очевидно, что $\Delta\boldsymbol{v}_n = 0$ только в том случае, когда движение частицы прямолинейное.

При $\Delta t \to 0$ $\alpha \to 0$. Если угол α устремить к нулю, то в равнобедренном треугольнике BCD угол $\beta \to \pi/2$, и вектор $\Delta\boldsymbol{v}_n$ становится перпендикулярным вектору скорости $\boldsymbol{v}$.

Таким образом, вектор ускорения можно представить в виде суммы двух взаимно перпендикулярных векторов:

$$\boldsymbol{a} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{v}_\tau + \Delta\boldsymbol{v}_n}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{v}_\tau}{\Delta t} + \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{v}_n}{\Delta t} = \boldsymbol{a}_\tau + \boldsymbol{a}_n \,. \tag{5.6}$$

Вектор $\boldsymbol{a}_\tau$ называется ***тангенциальным ускорением***. Оно характеризует быстроту изменения скорости только по величине и направлено по касательной к траектории. Модуль вектора $\boldsymbol{a}_\tau$ равен производной модуля скорости по времени:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}. \tag{5.7}$$

Вторая составляющая – вектор $\boldsymbol{a}_n$ – называется ***нормальным ускорением*** и характеризует быстроту изменение скорости только по направлению. Это ускорение всегда перпендикулярно направлению скорости. Для вычисления модуля нормального ускорения предположим, что точка B (рис. 5.1) достаточно близка к точке A , угол $\alpha \to 0$,поэтому Δs можно считать дугой окружности радиуса R.

При этом по величине дуга мало отличается от хорды AB. Тогда из подобия треугольников OAB и BDC получим:

$$\frac{\Delta v_n}{v} = \frac{AB}{R} \text{ и } \Delta v_n = \frac{v}{R} AB .$$

Таким образом,

$$a_n = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_n}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{AB}{\Delta t} \frac{v}{R} = \frac{v^2}{R} . \qquad (5.8)$$

Полное ускорение a материальной точки равно векторной сумме ее тангенциального и нормального ускорений (рис.5.2)

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_\tau + \boldsymbol{a}_\text{n}. \qquad (5.9)$$

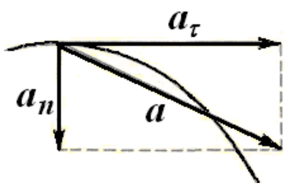


Рис.5.2.

Модуль полного ускорения вычисляется по теореме Пифагора

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2} \qquad (5.10)$$

В случае прямолинейного (например, вдоль оси Ox) движения с постоянным ускорением (a_x = const) из (5.7) можно получить

$$dv_x = a_x\, dt,$$

откуда интегрированием получаем

$$v_x = \int dv_x = \int a_x\, dt + C_1,$$
$$v_x = a_x t + C_1.$$

Учитывая, что $dx = v_x dt$, получаем координату материальной точки

$$x = \int v_x(t) dt = \int (a_x t + C_1) dt = \frac{a_x t^2}{2} + C_1 t + C_2.$$

Здесь C_1 и C_2 – постоянные интегрирования. Они определяются из начальных условий, а именно: при $t = 0$ начальная скорость $v_x = v_{0x}$. Следовательно, $C_1 = v_{0x}$.Положим также, что при $t = 0$ $x = 0$, т.е. в момент начала отсчета времени частица находилась в начале отсчета пути. Тогда $C_2 = 0$.

Если индекс, обозначающий проекции векторов на ось, опустить, можно получить практически важные выражения для скорости и пути (полагаем, что направление движения не меняется) равнопеременного прямолинейного движения:

$$v = v_0 + at,$$
$$s = v_0 t + \frac{at^2}{2}, \qquad (5.11)$$
$$v^2 - v_0^2 = 2as.$$

Пример. Небольшое тело брошено с начальной скоростью v_0 = 30 м/с под углом α = 60 ° к горизонту. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить скорость, нормальное и тангенциальное ускорения, а также радиус кривизны траектории через t_1 = 2 с после начала полета.

Выберем систему координат таким образом, чтобы ось *Ox* была горизонтальной, ось *Oy* – вертикальной (рис.5.3).

Если пренебречь сопротивлением воздуха, то ускорение тела, движущегося в однородном поле тяготения вблизи поверхности Земли, постоянно, равно g = 9,81 м/с^2, является полным ускорением и направлено по вертикали вниз.

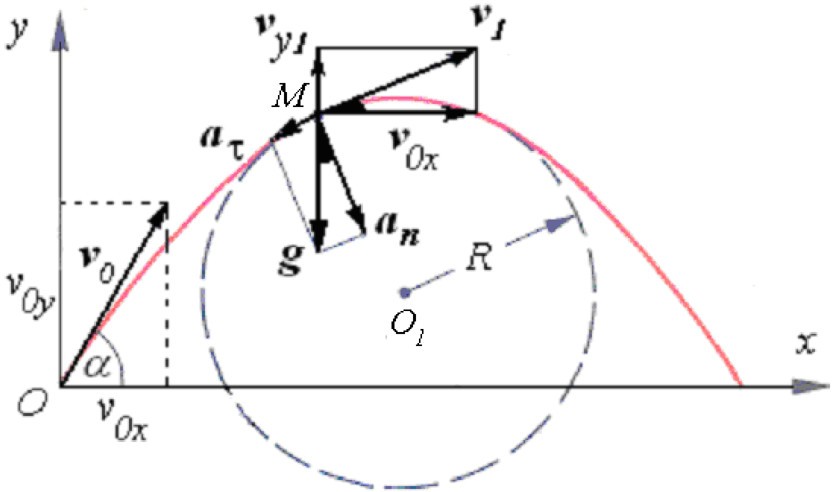


Рис. 5.3.

Согласно принципу независимости движений сложное криволинейное движение можно рассматривать как совокупность двух прямолинейных движений: вдоль оси *Ox* – равномерное, вдоль оси *Oy* – равнопеременное (равнозамедленное на участке подъема и равноускоренное на участке спуска).

В выбранной системе координат проекции ускорения, скорости и координат тела как функции времени имеют вид:

$$a_x = 0, \quad v_x = v_0 \cos\alpha = \text{const}, \quad x = (v_0 \cos\alpha)\cdot t;$$
$$a_y = -g, \quad v_y = v_0 \sin\alpha - gt, \quad y = (v_0 \sin\alpha)\cdot t - gt^2/2.$$

Нормальная и тангенциальная компоненты ускорения в точке *M* могут быть определены из рисунка:

$$a_n = g\cos\alpha_1, \quad a_\tau = g\sin\alpha_1.$$

Угол α_1, который образует в момент времени t_1 вектор скорости v_1 с горизонтом, можно определить из треугольника скоростей (рис. 5.3):

$$tg\alpha_1 = \frac{v_{y1}}{v_{0x}} = \frac{v_0 \sin\alpha - gt_1}{v_0 \cos\alpha} = 0{,}424, \qquad \alpha_1 = 23^{\circ}.$$

Подставив числовые значения, получим

$$a_n = 9{,}03 \text{ м/с}^2, \; a_\tau = 3{,}83 \text{ м/с}^2.$$

Соответственно компоненты и модуль скорости в этот момент времени равны

$$v_{0x} = 15 \text{ м/с}, \; v_{y1} = 6{,}36 \text{ м/с}, \; v = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{y1}^2} = 16.29 \text{ м/с}.$$

Используя связь (5.8) нормального ускорения с радиусом кривизны, находим $R = v^2/a_n = 29{,}4$ м.

§ 6. Кинематика вращательного движения

Переходя от механики материальной точки к механике твердого тела, нельзя не учитывать размеров и формы тела. Для упрощения задачи рассматривают *модель абсолютно твердого тела.* В этой модели расстояние между любыми двумя точками не меняется в процессе движения, т.е. деформациями тела пренебрегают. Основными видами движения твердого тела являются *поступательное* и *вращательное* движение. Произвольное движение твердого тела можно представить в виде совокупности поступательного движения всего тела и

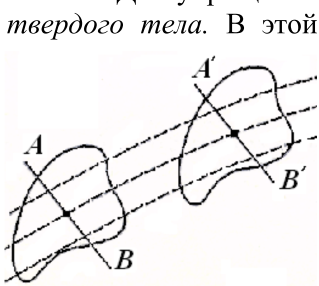


Рис. 6.1.

вращения его вокруг оси, проходящей через центр масс.

Движение, при котором любая прямая, связанная с движущимся телом, остается параллельной самой себе (рис 6.1), называется ***поступательным.*** Примерами поступательного движения являются движение кабины лифта, кузова автомобиля на прямолинейном горизонтальном участке дороги и т.п.

При поступательном движении все точки твердого тела имеют в любой момент времени одинаковые скорости и ускорения и описывают траектории одинаковой формы, только смещенные по отношению друг к другу. Определив движение какой-либо из точек твердого тела, можно определить движение всех остальных его точек.

Другой вид движения твердого тела – ***вращение вокруг неподвижной оси.*** При таком движении все точки тела движутся по окружностям, расположенным в плоскостях, перпендикулярных оси вращения. Центры окружностей лежат на оси вращения (рис. 6.2).

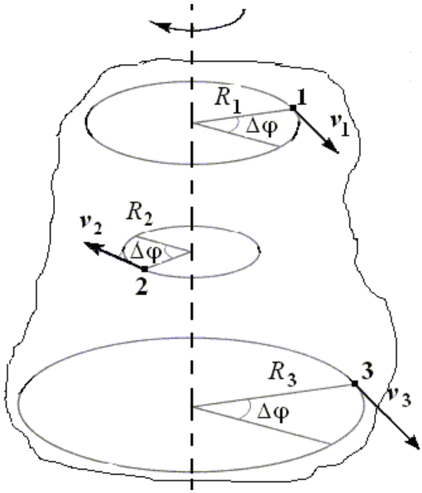


Рис. 6.2.

Примерами вращения вокруг неподвижной оси являются вращение маховиков, колес, валов и т.п.

Окружности, описываемые точками, имеют различный радиус и, следовательно, точки тела имеют различные перемещения, скорости и ускорения. Тем не менее, можно описать вращательное движение всех точек тела одинаковым образом.

Для этого используют угол поворота $\Delta\varphi$ вокруг оси, который для всех точек твердого тела одинаков (рис. 6.2).

Если тело вращается **равномерно**, т.е. за равные промежутки времени Δt тело поворачивается на равные углы $\Delta\varphi$, тогда величина

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \tag{6.1}$$

определит угол поворота в единицу времени. Эту величину, характеризующую быстроту вращения твердого тела вокруг оси, называют ***угловой скоростью вращения*** ω тела.

При равномерном вращении остается постоянной ее величина. Обозначим время, за которое тело совершает один оборот (поворот на угол 2π), через *T*. Его называют периодом вращения.

Следовательно, угловая скорость

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \qquad (6.2)$$

Используется также количество оборотов тела за одну секунду (частота вращения) $n = \dfrac{1}{T}$, тогда ω = 2π *n*..

При неравномерном вращении мгновенное значение угловой скорости определяется по общему правилу: быстрота изменения угла поворота есть производная по времени угла поворота:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}. \qquad (6.3)$$

Чтобы охарактеризовать не только быстроту, но и направление вращения, условились *считать угловую скорость вектором* **ω** и направлять его по оси вращения по *правилу правого винта.*

Угловой скорости приписывается то направление (на рисунке вверх или вниз), в котором будет двигаться (ввинчиваться или вывинчиваться) винт или шуруп, если его головку вращать в направлении вращения (рис.6.3).

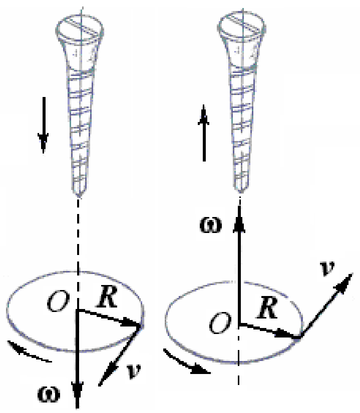


Рис. 6.3.

Поскольку направление угловой скорости **ω** по договоренности связывается с направлением вращения, вектор **ω** называют **псевдовектором** или аксиальным вектором (от англ. axis – ось).

Единицей угловой скорости служит радиан в секунду (рад/с или просто 1/с = c^{-1})

Примеры. 1. Земля вращается вокруг своей оси с запада на восток, вектор **ω** имеет направление от южного полюса к северному. Величина угловой скорости

$$\omega_{\text{Земли}} = \frac{2\pi}{24 \cdot 3600c} = 7{,}3 \cdot 10^{-5} c^{-1}.$$

2. Ротор гироскопа вращается, делая n = 5 000 об/мин. Угловая скорость вращения составляет $\omega = 2\pi n \approx 523$ *рад/с* = 523 $с^{-1}$.

Угловая скорость при движении тела вокруг неподвижной оси может изменяться. Изменение угловой скорости со временем характеризуется ***угловым ускорением,*** также аксиальным вектором, определяемым как производная по времени от угловой скорости:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \dot{\boldsymbol{\omega}}. \tag{6.4}$$

Угловое ускорение измеряется в радианах в секунду за секунду (рад/с^2 или с$^{-2}$). Как и угловая скорость, угловое ускорение также направлено по оси вращения.

В случае вращения тела вокруг неподвижной оси вектор **ω** может изменяться только по модулю. При ускоренном вращении в этом случае вектор **ε** направлен по оси в ту же сторону, что и **ω**, при замедленном – в противоположную сторону (рис.6.4).

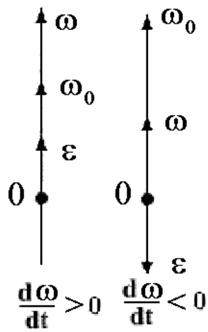


Рис .6.4.

Можно заметить, что все задачи на вращение твердого тела вокруг неподвижной оси аналогичны по форме задачам на прямолинейное движение частицы. Достаточно заменить линейные величины *s*, *v* и *a* на соответствующие угловые φ, ω и ε, как получаются соотношения для вращающегося тела.

При вращении с постоянным угловым ускорением:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t,$$

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}, \tag{6.5}$$

$$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\varepsilon\varphi.$$

§ 7. Связь угловых и линейных скоростей и ускорений

Каждая из точек вращающегося тела движется с определенной линейной скоростью $\boldsymbol{v}$, направленной по касательной к соответствующей окружности. Но эта же точка, участвуя во вращении тела, обладает и угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$. (рис.7.1)

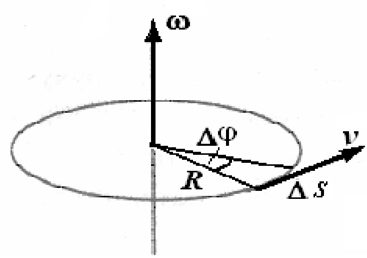


Рис. 7.1.

Установим связь линейных величин ($\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{a}$) с угловыми ($\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$).

Известно, что углы можно измерять как в градусах, так и в радианах (в системе СИ).

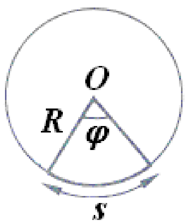


Рис. 7.2.

Один радиан (рад) равен углу между двумя радиусами окружности, длина дуги между которыми равна радиусу (рис. 7.2). Тогда произвольный угол φ в радианах выразится соотношением

$$\varphi = \frac{s}{R}. \tag{7.1}$$

Если $s = 2\pi R$ – длина окружности радиуса R, то $\varphi = 2\pi$ рад = 360º. Отсюда следует, что 1 рад ≈ 57,3º .

Из определения радиана следует, что длина дуги Δs, которой соответствует центральный угол $\Delta\varphi$, равна $\Delta s = R\,\Delta\varphi$. Подставим это соотношение в выражение для модуля линейной скорости

$$v = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{R\Delta\varphi}{\Delta t} = R\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = R\omega. \tag{7.2}$$

Таким образом, связь между модулями линейной и угловой скоростей:

$$v = \omega R. \tag{7.3}$$

Соответственно, модули тангенциального и нормального ускорений выражаются через угловые величины:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d(\omega R)}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R\varepsilon. \tag{7.4}$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R. \qquad (7.5)$$

Нормальное ускорение точек вращающегося твердого тела часто называют *центростремительным ускорением*.

Полное ускорение a также линейно зависит от R:

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}\,. \qquad (7.6)$$

Пример. Компакт-диск в компьютере равномерно вращается, совершая n = 3000 об/мин, Радиус диска $R \approx$ 6 см.

Тогда его угловая скорость $\omega = 2\pi\, n$ = 314 с$^{-1}$, линейная скорость точек на краю диска $v = \omega R$=314·0,06 = 18,84 м/с, ускорение этих точек

$$a = \omega^2 R = (314)^2 \cdot 0{,}06 \approx 5{,}9 \cdot 10^3 \text{ м/с}^2.$$

Установим теперь связь между векторами $\mathbf{v}$ *и* $\boldsymbol{\omega}$.

Точка A вращается по окружности радиусом R. Положение точки A определяется с помощью радиус-вектора $\boldsymbol{r}$, проведенного из начала координат точки O, лежащей на оси вращения Oz (рис 7.3).

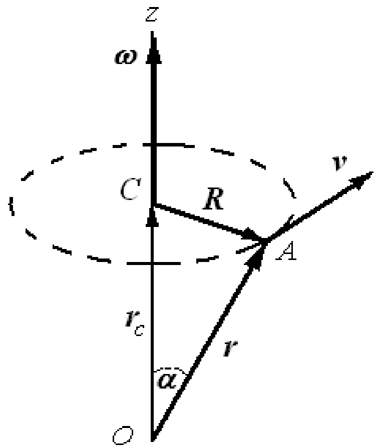


Рис. 7.3

Из рисунка видно, что

$$R = r \sin \alpha.$$

Подставив это значение в (7.3), получим

$$v = \omega\, r \sin \alpha.$$

Так как $\boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{r}$, это дает основание представить линейную скорость любой частицы A твердого тела $\boldsymbol{v}$ в виде векторного произведения $\boldsymbol{\omega}$ на $\boldsymbol{r}$:

$$\boldsymbol{v} = [\boldsymbol{\omega}\, \boldsymbol{r}] \qquad (7.7)$$

Из рисунка также следует, что $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r_c} + \boldsymbol{R}$. Тогда

$$\boldsymbol{v} = [\boldsymbol{\omega}\, [\boldsymbol{r_c} + \boldsymbol{R}]] = [\boldsymbol{\omega}\, \boldsymbol{r_c}] + [\boldsymbol{\omega}\, \boldsymbol{R}].$$

Первое слагаемое равно нулю, так как векторное произведение коллинеарных векторов равно нулю. Следовательно,

$$\boldsymbol{v} = [\boldsymbol{\omega}\, \boldsymbol{R}]. \qquad (7.8)$$

Вектор $\boldsymbol{R}$ – радиус-вектор частицы A относительно точки C оси вращения – перпендикулярен оси вращения и направлен от нее, а его модуль равен радиусу окружности, по которой движется материальная точка.

Угол между векторами-сомножителями равен π/2, поэтому модуль векторного произведения $v = \omega R \sin(\pi/2) = \omega R$.

Вращая головку винта от первого сомножителя векторного произведения **ω** ко второму сомножителю $\boldsymbol{R}$ по часовой стрелке, получим направление вектора $\boldsymbol{v}$ – на рис.7.4 по касательной от нас.

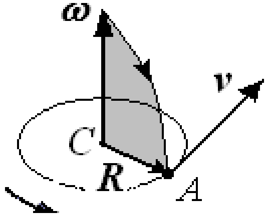


Рис. 7.4.

Пример. Колесо радиусом R = 0,1 м вращается так, что зависимость угла поворота радиуса колеса от времени описывается уравнением

$\varphi(t) = A\sin(Bt) + Ct^2$, где A = 1 рад, B = 3 с$^{-1}$, C = 2 рад/с^2. Определить через время $t_1 = 2\pi/3$ с после начала движения: угловую ω и линейную v скорости, угловое ε, тангенциальное a_τ, нормальное a_n и полное ускорение a этих точек; угол β между векторами тангенциального $\boldsymbol{a}_\tau$ и полного $\boldsymbol{a}$ ускорений.

Мгновенная угловая скорость равна по модулю первой производной от угла поворота по времени: $\omega(t) = \dfrac{d\varphi}{dt} = AB\cos(Bt) + 2Ct$.Мгновенная линейная скорость точек на ободе колеса $v(t) = \omega(t)R = (AB\cos(Bt) + 2Ct)R$.

Модули ускорений: углового

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = -AB^2\sin(Bt) + 2C,$$

тангенциального

$$a_\tau = (-AB^2\sin(Bt) + 2C)R,$$

нормального

$$a_n = \omega^2 R = (AB\cos(Bt) + 2Ct)^2 R,$$

полного $a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}$.

Угол β между векторами $\boldsymbol{a}_\tau$ и $\boldsymbol{a}$ можно определить из соотношения (рис. 7.5)

$$tg\beta = \frac{a_n}{a_\tau}.$$

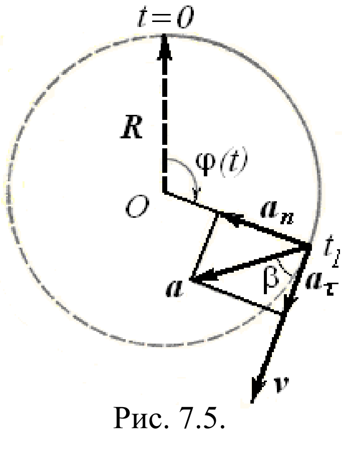


Рис. 7.5.

Подставив числа, определим для момента времени время $t_1 = 2\pi/3$ с:
$\omega(t_1) = 11{,}38$ рад/с, $v(t_1) = 1{,}14$ м/с, $\varepsilon\,(t_1) = 4$ рад/с^2, $a_\tau = 0{,}4$ м/с^2,
$a_n = 12{,}94$ м/с^2, $a = 12{,}95$ м/с^2, $\beta = arctg\dfrac{12{,}94}{0{,}4} = 88{,}23^\circ$.

Контрольные вопросы

1. В каком случае тело можно считать материальной точкой?
2. В каком случае модуль перемещения равен пути материальной точки?
3. Двигаясь по окружности, точка описала полукруг. Совпадают ли средняя путевая скорость и модуль средней скорости?
4. Возможен ли случай, когда средняя скорость $<\boldsymbol{v}>$ за некоторый промежуток времени равна нулю, а средняя путевая скорость $v_{\text{ср}}$ отлична от нуля? Наоборот, $v_{\text{ср}} = 0$, при этом $<\boldsymbol{v}> \neq 0$?
5. Может ли полное ускорение при криволинейном движении быть направлено по касательной? По нормали?
6. Как ориентировано полное ускорение материальной точки при криволинейном движении?
7. Какой физический смысл имеет разложение вектора ускорения материальной точки на тангенциальную и нормальную составляющие?
8. Тело брошено под углом к горизонту. Сопротивлением воздуха пренебрегают. Как изменяется полное ускорение тела?
9 Точка движется на плоскости по криволинейной траектории. Известны компоненты скорости как функции времени: $v_x(t)$, $v_y(t)$.
Как определить путь, пройденный точкой за некоторое время t_1?
10. Тело брошено под углом α к горизонту с начальной скоростью v_0. Сопротивлением воздуха пренебрегают. Как определить путь s, пройденный телом за время t?
11. В каком случае можно пользоваться формулой пути для равнопеременного движения $s = v_{0x}t + a_xt^2/2$?
12. Какое движение – поступательное или вращательное - совершает кабина аттракциона «колесо обозрения»?
13. В каком случае можно пользоваться формулой угла поворота для равнопеременного вращения $\varphi = \omega_0 t + \varepsilon t^2/2$?
14. Как направлены угловая скорость и угловое ускорение колес автомобиля – вправо или влево по отношению к направлению движения?
15. Какова связь между линейными и угловыми величинами?

Глава 2. **ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ**

Законы динамики описывают движение тел под действием приложенных к ним сил. Под телом будем, как и раньше, понимать материальную точку.

Основные положения динамики материальной точки были сформулированы выдающимся английским ученым, основателем классической физики И. Ньютоном в 1687 г. в виде трех законов движения. Эти законы возникли в результате обобщения данных большого числа опытов и являются, следовательно, экспериментальными.

§ 8. Первый закон Ньютона (закон инерции)

Первый закон Ньютона гласит:

- ***всякое тело сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения, пока воздействие со стороны других тел не заставит его изменить это состояние.***

Как следует из этого закона, тело, на которое не действуют силы, сохраняет постоянную скорость. Для того, чтобы тело двигалось, двигатель не нужен. Равномерное и прямолинейное движение – это естественное состояние всякого тела, освобожденного от внешних воздействий.

Свойство тела сохранять состояние покоя или равномерного и прямолинейного движения называется ***инерцией***.

Принцип инерции далеко не очевиден. Например, из повседневной жизни известно, что для движения автомобиля с постоянной скоростью должен непрерывно работать его мотор. Однако здесь воздействие двигателя необходимо не для поддержания движения, а для уравновешивания силы трения.

Поставить прямые опыты, которые бы подтверждали первый закон, нельзя. Нельзя поставить движущееся тело в такие условия, чтобы на него не действовали никакие другие тела, хотя бы потому, что на все тела на Земле действует сила притяжения к Земле. Однако, можно поставить тело в такие условия, чтобы действие других тел на данное уравновешивали бы друг друга. Можно также ослабить некоторые действия.

Примеры.

1. Шар на столе неподвижен. На шар действуют Земля и стол. Их действия уравновешены, и шар сохраняет состояние покоя.

2. Железный шар на столе движется равномерно и прямолинейно. Если шар толкнуть сбоку или поднести к нему магнит, шар заворачивает. Действие со стороны рук и магнита изменяет состояние равномерного и прямолинейного движения.

3. Если шар на стекле толкнуть, то через некоторое время он останавливается. Действие со стороны стекла на шар (сила трения) изменяет состояние равномерного и прямолинейного движения шара. Если бы со стороны подставки на шар не действовала бы сила трения, то он двигался бы после толчка равномерно и прямолинейно.

Таким образом, движущая сила нужна не для движения, а для *изменения* состояния движения тела.

Возникает вопрос, относительно какой системы отсчета справедлив первый закон Ньютона?

Проделаем опыт со стеклом и шаром в вагоне. Если вагон будет заворачивать, ускорять или замедлять ход, то есть, если появится ускорение, то покоившийся шар начнет двигаться, хотя никаких других тел, которые могли бы изменить состояние покоя, не появилось. Следовательно, в системе координат, связанной с ускоренно движущимся вагоном, первый закон Ньютона не справедлив.

Система отсчета, в которой выполняется первый закон Ньютона, называется ***инерциальной системой.*** Первый закон Ньютона является обобщением опытных фактов и утверждает, что ***инерциальные системы существуют.***

С большой степенью точности инерциальной системой является гелиоцентрическая система. Начало координат ее находится в почти центре Солнца, а оси координат направлены на три неподвижные звезды на небосводе.

Любая другая система отсчета, движущаяся равномерно и прямолинейно относительно гелиоцентрической системы, также является инерциальной, т.е. их существует бесчисленное множество.

Система отсчета, связанная с Землей, не является инерциальной, потому что Земля вращается вокруг своей оси и обращается вокруг

Солнца. Но при решении большинства инженерных задач эту систему отсчета можно считать инерциальной.

§ 9. Сила и масса. Второй закон Ньютона

На опыте обнаруживается, что в инерциальных системах отсчета всякое ускорение тела вызывается действием на него каких-либо других тел. Для описания воздействия вводят понятие силы.

Сила – это векторная величина, являющаяся мерой механического воздействия на тело со стороны других тел или полей, в результате которого тело приобретает ускорение или деформируется

Сила определена, если задано ее числовое значение, направление в пространстве и точка приложения.

Прямую, проведенную через точку приложения силы в направлении действия силы, называют линией действия силы. Две силы называются численно равными и противоположными по направлению, если одновременное приложение этих сил в одной и той же точке тела не вызывает изменения его механического движения. В частности, если до приложения таких двух сил тело покоилось, то оно продолжает оставаться в покое и после их приложения. Поэтому говорят, что две численно равные и противоположно направленные силы, приложенные в одной и той же точке тела, взаимно уравновешиваются. Если на тело одновременно действует несколько сил, приложенных в одной точке тела, то их можно заменить одной эквивалентной силой, равной их геометрической сумме и приложенной в той же точке. Эта сила называется результирующей или равнодействующей силой.

Измерение сил основано на их свойстве вызывать деформацию упругих тел и осуществляется с помощью динамометров.

Опыт показывает, что всякое тело «оказывает сопротивление» при любых попытках изменить его скорость, как по величине, так и по направлению. Это свойство, выражающее степень сопротивления тела к изменению его скорости, называют *инертностью*. У различных тел оно проявляется в разной степени. *Мера инертности тела называется массой*. Тело с большей массой является более инертным, и наоборот.

С другой стороны, в законе всемирного тяготения устанавливается, что силы тяготения пропорциональны массам тел.

Таким образом, масса тела характеризует также гравитационные свойства вещества. ***Масса*** – физическая величина, определяющая *инертные* (инертная масса) и *гравитационные* (гравитационная масса) свойства тела. В современной физике с большой степенью точности установлено равенство этих масс, поэтому их не различают.

Векторная величина, равная произведению массы материальной точки на ее скорость, называется ***импульсом*** тела:

$$\boldsymbol{p} = m\mathbf{v}. \tag{9.1}$$

При свободном движении тела в инерциальной системе отсчета его импульс остается постоянным. Если же тело взаимодействует с окружающими телами, то его импульс изменяется со временем. Обобщение опытных данных показывает, что изменение импульса тела тем больше, чем интенсивнее его взаимодействие с окружающими телами.

Второй закон Ньютона (основной закон динамики поступательного движения) утверждает, что:

- ***скорость изменения импульса тела равна действующей на тело силе.***

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{F} \tag{9.2}$$

Под скоростью изменения импульса понимают производную импульса по времени. Уравнение (9.2), выражающее второй закон Ньютона, называется *уравнением движения тела.*

В такой самой *общей форме* второй закон Ньютона справедлив и при движении тел с переменной массой. Масса может не оставаться постоянной, например, у самолета, из двигателей которого выбрасываются продукты горения, у поливочной машины и т.п. А при движении элементарных частиц со скоростями, близкими к скорости света, масса частиц возрастает в зависимости от скорости движения.

В случае, когда масса m тела предполагается постоянной, математическое выражение второго закона Ньютона можно представить в форме

$$\boldsymbol{F} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\boldsymbol{a}. \tag{9.3}$$

Здесь учтено, что ускорение равно производной скорости по времени $\boldsymbol{a} = d\mathbf{v}/dt$.

Отсюда вытекает другая формулировка второго закона Ньютона:

- ***ускорение, приобретаемое телом, совпадает по направлению с действующей на него силой и равно отношению этой силы к массе тела***

$$\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{F}}{m}, \tag{9.4}$$

или иначе:

- ***произведение массы тела на его ускорение равно действующей на тело силе:***

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}. \tag{9.5}$$

Масса в СИ измеряется в килограммах, единица силы – ньютон. 1 Н – это сила, которая массе в 1 кг сообщает ускорение 1 м/с^2 в направлении действия силы: 1 Н = 1 кг·м/с^2.

Если на тело действуют несколько сил, то ускорение тела пропорционально векторной сумме действующих на него сил (равнодействующей силе):

$$\boldsymbol{a} = \frac{\sum_i \boldsymbol{F}_i}{m}. \tag{9.6}$$

Второй закон Ньютона, как и все остальные, справедлив только в инерциальной системе отсчета, т.е. в такой системе отсчета, которая сама не имеет ускорения. Земля является хорошим приближением к инерциальной системе отсчета для большинства практических задач.

Для понимания второго закона Ньютона следует помнить, что все силы вызываются телами, действующими на данное. Если нет тела, вызывающего силу, то нет и силы, а если сила обозначена, то обязательно должно быть тело, которое ее вызывает. Например, трамвай поворачивает за счет силы давления со стороны рельса на колесо трамвая. Эта сила сообщает трамваю нормальное (или центростремительное) ускорение.

§ 10. Третий закон Ньютона

Третий закон Ньютона отражает тот факт, что сила есть результат взаимодействия двух различных тел. Если тело A сообщает ускорение телу B, то обнаруживается, что и тело B сообщает ускорение телу A.

• ***Силы, с которыми взаимодействуют две материальные точки, равны по модулю и направлены в противоположные стороны вдоль прямой, соединяющей эти точки .***

Если $\boldsymbol{F}_{12}$ – сила, действующая на первую точку со стороны второй, а $\boldsymbol{F}_{21}$ – сила, действующая на вторую точку со стороны первой, то согласно третьему закону Ньютона

$$\boldsymbol{F}_{12} = -\boldsymbol{F}_{21}. \tag{10.1}$$

В формулировке самого Ньютона этот закон звучит коротко: *действию всегда есть равное и противоположное противодействие.* Таким образом, силы всегда возникают попарно как результат взаимодействия между двумя телами. Важно подчеркнуть, что эти силы приложены *к разным телам*, поэтому их нельзя складывать, они не могут уравновесить друг друга.

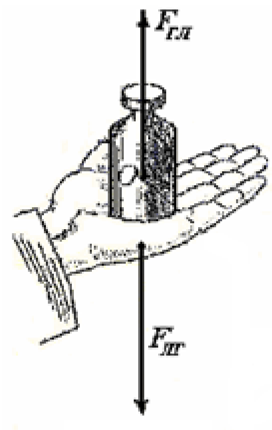


Рис. 10.1

Примеры*. *1. На ладони лежит гиря (рис. 10.1). Ладонь действует на гирю с силой $\boldsymbol{F}_{\text{ГЛ}}$, направленной вверх и приложенной *к гире*, а гиря, в свою очередь, действует на ладонь с такой же по величине силой $\boldsymbol{F}_{\text{ЛГ}}$, но направленной вниз и приложенной *к ладони.*

2. Рука растягивает пружину. (рис.10.2). Сила, с которой рука действует *на пружину* – внешняя сила. Деформированная пружина действует *на руку* с силой, равной внешней силе по величине, но противоположной по направлению. Эта сила называется силой упругости.

$$\boldsymbol{F}_{\text{внеш}} = -\boldsymbol{F}_{\text{упр}}$$

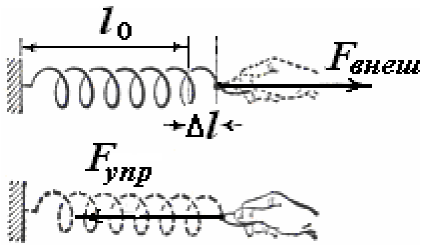


Рис. 10.2

3. При ходьбе мы отталкиваем назад Землю с некоторой силой, Земля с равной и противоположной силой действует на нас.

В третьем законе Ньютона предполагается, что обе силы равны по модулю *в любой* момент времени *независимо от движения* точек.

Согласно представлениям Ньютона взаимодействие между телами распространяется мгновенно. Иначе говоря, если изменить положение одного тела, то сразу же происходят изменения во взаимодействующих с ним телах, как бы далеко они ни находились.

В действительности взаимодействия распространяются с *конечной* скоростью. Максимальная скорость распространения взаимодействий равна скорости света в вакууме. При контакте тел взаимодействие распространяется со скоростью упругих волн в телах и законы Ньютона справедливы лишь тогда, когда время протекания процесса значительно больше времени установления напряженного состояния в телах.

Поэтому третий закон Ньютона имеет определенные пределы применимости. Однако при скоростях тел, значительно меньших скорости света, с которыми имеет дело классическая механика, закон выполняется с очень большой точностью. Об этом свидетельствуют, например, расчеты траекторий планет и искусственных спутников, которые проводятся с помощью законов Ньютона.

§ 11. Природа механических сил. Сила тяжести и вес

Современной физике известны четыре типа фундаментальных взаимодействий: гравитационное, возникающее между всеми телами, электромагнитное, – между телами или частицами, обладающими электрическими зарядами, сильное – между ядерными частицами и слабое, действующее в процессах превращения некоторых элементарных частиц.

В основе всех механических явлений лежат силы гравитационные (сила тяжести и вес тела) и электромагнитные (силы упругости и силы трения).

Два других фундаментальных вида взаимодействия – слабое и сильное – действуют на таких малых расстояниях (слабое – порядка 10^{-18} м, сильное – 10^{-15} м), что в классической механике роли не играют.

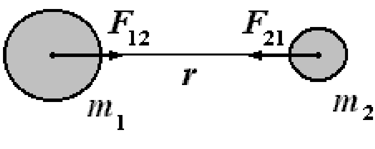


Рис.11.1.

Происхождение **силы тяжести** связано с *гравитационным* *притяжением.* Согласно ***закону всемирного тяготения*** (И. Ньютон, 1687 г) ***любые две материальные точки притягиваются друг к другу с силами, пропорциональными произведению их масс, обратно пропорциональными квадрату расстояния между ними и направленными вдоль прямой, соединяющей эти точки.***

$$F_{12} = F_{21} = G\frac{m_1 m_2}{r^2}. \tag{11.1}$$

Здесь G – гравитационная постоянная, $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ м^3/(кг·с^2). В такой форме закон тяготения Ньютона справедлив для материальных точек и для шаров (рис.11.1) со сферически симметричным распределением вещества. Фигурирующие в этом законе массы называют *гравитационными* в отличие от *инертной* массы, входящей во второй закон Ньютона.

С помощью современных экспериментов установлено, что гравитационная и инертная массы любого тела пропорциональны друг другу с очень высокой точностью (относительная точность до 10^{-12}). Поэтому их можно считать равными.

Опытным путем установлено, что вследствие тяготения все тела вблизи поверхности Земли падают с одинаковым ускорением, т.е. ускорение свободного падения не зависит от массы падающего тела.

Ускорение, сообщаемое телу силой тяготения Земли – *ускорение свободного падения* – на уровне моря на средней географической широте составляет $g \approx 9{,}81$ м/с^2.

Тогда из второго закона Ньютона следует, что на любое тело (материальную точку), находящееся вблизи поверхности Земли, действует ***сила тяжести***

$$\boldsymbol{F}_{\text{тяж}} = m\boldsymbol{g}. \tag{11.2}$$

Если пренебречь неинерциальностью системы отсчета, связанной с Землей, и обусловленной ее вращением, то силу тяжести можно считать равной силе, с которой тело притягивается к Земле.

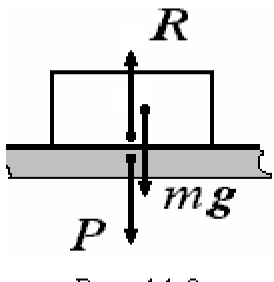


Рис. 11.2.

Рассмотрим силы, действующие на лежащее на столе тело (рис. 11.2). Напомним, что все силы возникают попарно, т.е. всякой силе, приложенной к телу, можно найти равную ей по модулю и противоположную по направлению силу, которая приложена к другому телу, которое взаимодействует с данным. Действие со стороны Земли характеризуется силой тяжести $m\boldsymbol{g}$. Она приложена в центре масс тела. Равная ей по модулю и противоположная сила приложена к центру Земли, ее, естественно, можно не учитывать вследствие малости.

Другая пара взаимодействующих тел – тело и опора (стол). Тело давит на опору, эта сила $\boldsymbol{P}$ приложена к опоре.

Весом *тела называется сила, с которой оно действует опору (или подвес) вследствие притяжения к Земле.* При этом предполагается, что тело и опора (или подвес) неподвижны относительно системы отсчета, в которой определяется вес тела.

Подчеркнем, что вес $\boldsymbol{P}$ приложен не к самому рассматриваемому телу, а к опоре или подвесу, которые удерживают его от свободного падения.

Опора, в свою очередь, действует на тело. Эта сила называется ***реакцией опоры R***, и она приложена к телу. По третьему закону Ньютона

$$\boldsymbol{P} = -\boldsymbol{R}.$$

Тело покоится относительно Земли, следовательно, приложенные к нему силы тяжести $m\boldsymbol{g}$ и реакция опоры $\boldsymbol{R}$ уравновешивают друг друга:

$$m\boldsymbol{g} = -\boldsymbol{R}.$$

Сравнивая оба соотношения, получаем

$$\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{g}, \tag{11.3}$$

то есть вес $\boldsymbol{P}$ равен силе тяжести $m\boldsymbol{g}$ (для покоящегося тела). Важно отметить, что эти силы приложены к разным телам – вес к опоре, сила тяжести – к самому телу.

Действующие на тело сила тяжести $m\boldsymbol{g}$ и реакция опоры $\boldsymbol{R}$ создают давление частиц тела друг на друга. Человеческий организм ощущает это давление как «весомость».

Рассмотрим теперь тело, лежащее на полу лифта (рис. 11.3), который движется с ускорением вверх или вниз. С таким же ускорением движется и тело. Следовательно, теперь силы тяжести $m\boldsymbol{g}$ и реакции опоры $\boldsymbol{R}$, приложенные к телу, не уравновешиваются, а сумма этих сил сообщает телу необходимое ускорение

$$m\boldsymbol{a} = m\boldsymbol{g} + \boldsymbol{R}.$$

Учитывая, что $\boldsymbol{R} = -\boldsymbol{P}$, получим

$$m\boldsymbol{a} = m\boldsymbol{g} - \boldsymbol{P},$$

откуда вес тела $\boldsymbol{P}$ в лифте, движущемся с ускорением $\boldsymbol{a}$,

$$\boldsymbol{P} = m\,(\boldsymbol{g} - \boldsymbol{a}). \qquad (11.4)$$

Вес $\boldsymbol{P}$ уже не равен силе тяжести, а в зависимости от направления ускорения может быть либо меньше, либо больше силы тяжести. При движении лифта вверх с ускорением $\boldsymbol{a}$ в проекциях на ось z вес равен:

$P = m\,(g + a)$.

При движении вниз:

$P = m\,(g - a)$.

Если бы лифт свободно падал с ускорением $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{g}$, то вес тела $\boldsymbol{P}$ стал бы равным нулю. Тело перестало бы действовать на опору, вес исчез, исчезла бы и реакция опоры, которая вызывала вместе с силой тяжести давление частиц друг на друга. Наступает *состояние невесомости*.

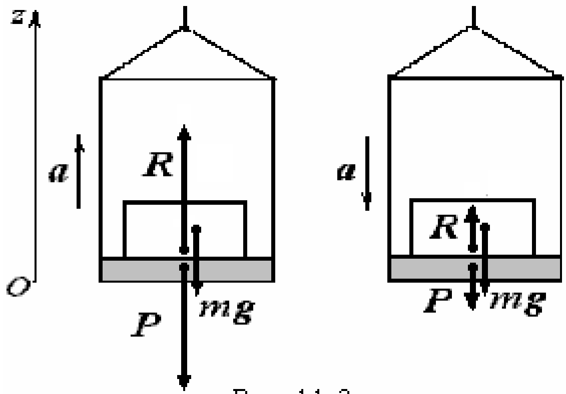


Рис.11.3

Подобное состояние наблюдается для тел, находящихся в космическом корабле на орбите Земли. Космический корабль на околоземной орбите, получив соответствующую начальную скорость, движется под действием сил тяготения с неработающими двигателями. Можно считать, что корабль непрерывно «свободно падает» (рис 11.4) и вместо того, чтобы продолжать движение по инерции по касательным к орбите, он продолжает двигаться вдоль орбиты.

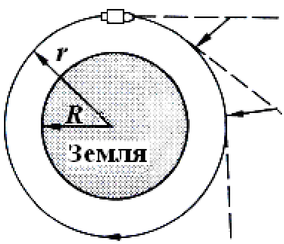


Рис. 11.4

Вообще любое тело, размеры которого очень малы по сравнению с Земным радиусом, совершая свободное поступательное движение в поле тяготения Земли, будет, при отсутствии других внешних сил, находиться в состоянии невесомости.

Пример. Через неподвижный блок перекинута невесомая нить, к концам которой подвешены грузы массами m_1 = 0,5 кг и m_2 = 0,6 кг (рис.11.5). На левый груз положен перегрузок массой m_3 = 0,15 кг. Определить вес перегрузка, ускорение системы и силу давления на ось блока при движении грузов. Масса блока пренебрежимо мала. Трением в оси пренебречь.

Определим силы, действующие на каждое из тел. На груз массой m_1 действуют сила тяжести $m_1\boldsymbol{g}$, сила натяжения нити $\boldsymbol{T}_1$, вес перегрузка $\boldsymbol{P}_3$; на груз массой m_2 – сила тяжести $m_2\boldsymbol{g}$ и сила натяжения нити $\boldsymbol{T}_2$; на перегрузок – сила тяжести $m_3\boldsymbol{g}$ и сила реакции $\boldsymbol{R}$ со стороны левого груза; на блок – сила реакции оси $\boldsymbol{N}$ и силы натяжения нити $\boldsymbol{T}_1'$ и $\boldsymbol{T}_2'$.

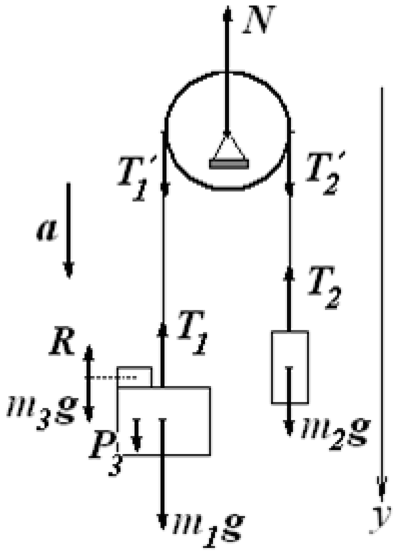


Рис. 11.5

Запишем для каждого из тел уравнение второго закона Ньютона.

$m_1\boldsymbol{a} = m_1\boldsymbol{g} + \boldsymbol{T}_1 + \boldsymbol{P}_3$; (для тела *1*)

$m_2\boldsymbol{a} = m_2\boldsymbol{g} + \boldsymbol{T}_2$; (для тела *2*)

$m_3\boldsymbol{a} = m_3\boldsymbol{g} + \boldsymbol{R}$. (для тела *3*)

Если масса блока равна нулю, то

$0 = \boldsymbol{N} + \boldsymbol{T}_1' + \boldsymbol{T}_2'$.

Заменим векторные уравнения скалярными равенствами проекций:

$$m_1a = m_1g - T_1 + P_3;$$
$$-m_2a = m_2g - T_2;$$
$$m_3a = m_3g - R.$$
$$0 = -N + T_1' + T_2'.$$

Поскольку массой блока пренебрегают, то сила натяжения остается неизменной по модулю при переходе через блок, а по третьему закону Ньютона $T_1 = T_2 = T_1' = T_2' = T$; $R = P_3$. Тогда

$$m_1a = m_1g - T + P_3;$$
$$-m_2a = m_2g - T;$$
$$m_3a = m_3g - P_3;$$
$$0 = -N + T + T.$$

Решая систему уравнений, получим

$$P_3 = \frac{2m_2m_3}{m_1+m_2+m_3}g = 1{,}41H, a = \frac{m_1-m_2+m_3}{m_1+m_2+m_3}g = 0{,}39м/с^2,$$

$$N = \frac{4(m_1+m_3)m_2}{m_1+m_2+m_3}g = 12{,}25H.$$

§ 12. Силы упругости

При деформации тела возникают силы упругости, препятствующие этой деформации. Природа этих сил – электромагнитное взаимодействие. Под влиянием внешних сил частицы твердого тела смещаются из положения равновесия. Этому смещению частиц противодействуют силы электрического взаимодействия между зарядами внутри атомов и молекул.

Если после прекращения действия внешних сил восстанавливаются прежние форма и размеры тела, то деформация называется *упругой.* Деформации, не исчезающие после прекращения действия сил, называются *пластическими.*

Упругие силы возникают при непосредственном соприкосновении тел. Упругой силой будет, например, та сила, с которой действует растянутая или сжатая пружина на соприкасающиеся с ней тела. Следовательно, чтобы создать в теле упругую силу, его надо предварительно деформировать.

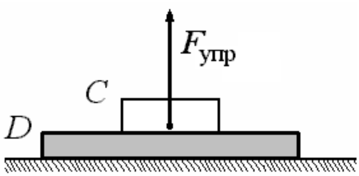


Рис.12.1

Рассмотрим, например, брусок *C*, лежащий на доске *D* (рис.12.1). Со стороны упруго деформированной доски на брусок, лежащий на ней, действует сила упругости $\boldsymbol{F}_{упр}$. В этом случае сила упругости называется *силой реакции опоры.*

Р. Гук опытным путем установил закон, по которому ***при упругой деформации пружины удлинение пружины пропорционально внешней силе.***

$$\Delta x = \frac{1}{k}F_{внеш}\,. \tag{12.1}$$

Величина k называется *жесткостью* пружины.

Если, например, растягивать пружину рукой, то по третьему закону Ньютона в растянутой (или сжатой) пружине возникает противодействующая сила – *упругая сила,* уравновешивающая внешнюю силу (рис. 12.2). Упругая сила отличается от внешней только знаком. Внешняя сила приложена к пружине, упругая – к руке.

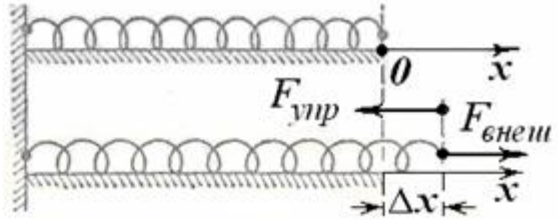


Рис. 12.2

Поэтому, заменяя внешнюю силу упругой, для закона Гука можно записать

$$F_x = -k\Delta x, \quad (12.2)$$

то есть ***упругая сила пропорциональна величине деформации и направлена к положению равновесия***. Здесь F_x – проекция упругой силы на ось x, k – жесткость пружины, Δx – величина растяжения (сжатия) пружины.

Жесткость k пружины зависит от материала, размеров витка и длины пружины. Жесткость численно равна силе, которая нужна для растяжения пружины на единицу длины. Единицей жесткости в СИ является Н/м.

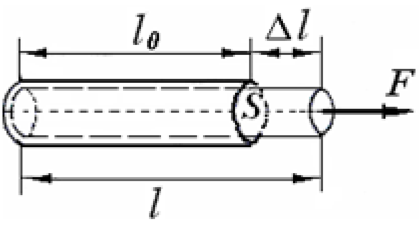


Рис. 12.3

Сила, приложенная к **стержню** (рис.12.3), приводит к возникновению в стержне упругих сил и вызывает изменение его длины. Деформация растяжения (сжатия) стержня характеризуется *абсолютным* удлинением $\Delta l = l - l_0$ и *относительным* удлинением $\varepsilon = \Delta l/l_0$, где l_0 и l – начальная и конечная длина стержня. Упругие силы принято характеризовать *напряжением* σ, которое определяется как модуль силы F, приходящийся на единицу площади S поперечного сечения стержня

$$\sigma = F/S\,. \quad (12.3)$$

Единица напряжения, равная ньютону на квадратный метр, называется паскалем (1 Н/м^2 = 1 Па).

Закон Гука для стержня: *относительное удлинение стержня прямо пропорционально напряжению и обратно пропорционально модулю Юнга.*

$$\varepsilon = \frac{1}{E}\sigma . \tag{12.4}$$

Модулем Юнга E (модулем продольной упругости) называют величину, характеризующую сопротивление материала растяжению или сжатию при упругой деформации.

Например, для резины модуль Юнга равен 10 МПа, дерева E = 10 ГПа, свинца E = 18 ГПа, меди E = 110 ГПа, стали E = 220 ГПа и т.д.

Пример. Две пружины с коэффициентами жесткости k_1 *и* k_2 соединяют один раз последовательно, второй – параллельно. Какой жесткости $k_{экв}$ необходимо взять пружины, чтобы ими можно было заменить в каждом случае эти системы из двух пружин?

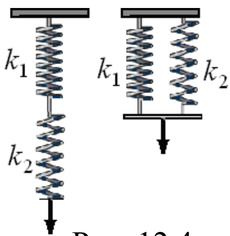


Рис. 12.4

В случае *последовательного* соединения пружин силы, которые растягивают каждую из них, по третьему закону Ньютона одинаковы и равны силе F, с которой растягивают систему пружин. При этом удлинение системы равно сумме удлинений пружин $\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2$.

Если $F = k_{1экв}\,\Delta x$, то $\Delta x = F/\,k_{1экв}$. Аналогично $\Delta x_1 = F/\,k_1$, $\Delta x_2 = F/\,k_2$. Тогда $F/\,k_{1экв} = F/\,k_1 + F/\,k_2$.

Таким образом $\dfrac{1}{k_{1экв}} = \dfrac{1}{k_1} + \dfrac{1}{k_2}$ и $k_{1экв} = \dfrac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$.

В случае *параллельного* соединения пружин удлинение каждой из них одно и то же $\Delta x = \Delta x_1 = \Delta x_2$, а растягивающая сила F равна сумме сил упругости, возникающих при растяжении каждой пружины $F = F_1 + F_2$. Тогда $k_{2экв}\,\Delta x = k_1\,\Delta x + k_2\,\Delta x$, т.е. $k_{2экв} = k_1 + k_2$.

§ 13. Силы трения

Силы трения по своей природе также являются электромагнитными. При соприкосновении шероховатых поверхностей нарушается равновесное распределение зарядов внутри молекул и атомов, из которых состоят тела. Это приводит к появлению электрических сил взаимодействия между этими зарядами.

Различают три вида трения при соприкосновении тел: *трение покоя, трение скольжения и трение качения.*

Подействуем на брусок, лежащий на горизонтальном столе, внешней силой $\boldsymbol{F}_{\text{внеш}}$, непрерывно увеличивая ее (рис.13.1). При изменении $\boldsymbol{F}_{\text{внеш}}$ от нуля до некоторого значения движения бруска не возникает.

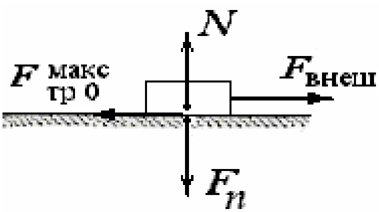


Рис.13.1

Отсюда следует вывод, что на брусок со стороны стола действует равная и противоположно направленная сила $\boldsymbol{F}_{\text{тр}0}$, уравновешивающая силу $\boldsymbol{F}_{\text{внеш}}$. Силу $\boldsymbol{F}_{\text{тр}0}$ называют *силой трения покоя.* Она направлена по касательной к трущимся поверхностям и существует между телами, не движущимися друг относительно друга.

Сила трения покоя «автоматически» принимает значение, равное значению внешней силы $\boldsymbol{F}_{\text{внеш}}$ от нуля до некоторого максимального $\boldsymbol{F}_{\text{тр}0}^{\text{макс}}$, при котором брусок начинает скользить. При условии $\boldsymbol{F}_{\text{внеш}} > \boldsymbol{F}_{\text{тр}0}^{\text{макс}}$ возникает относительное движение бруска.

Когда брусок начнет скользить, трение покоя сменяется трением скольжения. Модуль силы трения скольжения равен, таким образом, максимальному значению силы трения покоя. Сила трения скольжения направлена вдоль поверхности соприкосновения тел так, чтобы препятствовать относительному проскальзыванию соприкасающихся тел (противоположно относительной скорости).

Силу $\boldsymbol{N}$, действующую на брусок со стороны опоры перпендикулярно к его поверхности, называют *силой нормальной реакции*, а силу $\boldsymbol{F}_{\text{n}}$, действующую со стороны бруска на опору – *силой нормального давления.*

Опытным путем установлено, что *сила трения скольжения* не зависит от площади соприкосновения тел и пропорциональна *силе нормального давления*, прижимающей трущиеся поверхности друг к другу

$$F_{\text{тр}} = \mu\, F_{\text{n}}. \qquad (13.1)$$

Здесь μ – безразмерный коэффициент трения скольжения.

По третьему закону Ньютона модуль прижимающей силы равен модулю силы нормальной реакции $\boldsymbol{N}$. Поэтому чаще записывают

$$F_{тр} = \mu N. \tag{13.2}$$

Пример. Приведем некоторые значения коэффициента трения покоя (коэффициент трения скольжения как правило меньше коэффициента трения покоя, $\mu < \mu_0$): дерево по дереву $\mu_0 = 0{,}65$, резина по асфальту $\mu_0 = 0{,}55$, сталь по пластмассе $\mu_0 = 0{,}3$, сталь по стали $\mu_0 = 0{,}15$, сталь по льду $\mu_0 = 0{,}015$.

Сила трения $\boldsymbol{F}_{тр}$ и нормальная сила реакции $\boldsymbol{N}$ являются составляющими одной силы реакции $\boldsymbol{R}$, с которой поверхность действует на тело (рис.13.2).

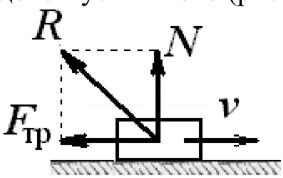


Рис.13.2

Трение качения возникает из-за деформации материала перед катящимся телом и из-за разрыва молекулярных связей в месте контакта. Сила трения качения обратно пропорциональна радиусу катящегося тела. Эта сила гораздо меньше сил трения покоя или скольжения.

Пример. Чтобы пройти во время гонок поворот на большой скорости мотоциклист наклоняется в сторону поворота. С какой максимальной скоростью может ехать мотоциклист по горизонтальной трассе, описывая дугу радиусом $R = 100$ м, если коэффициент трения колес об асфальт $\mu = 0{,}6$? На какой угол φ от вертикали он при этом отклоняется (рис.13.3)?

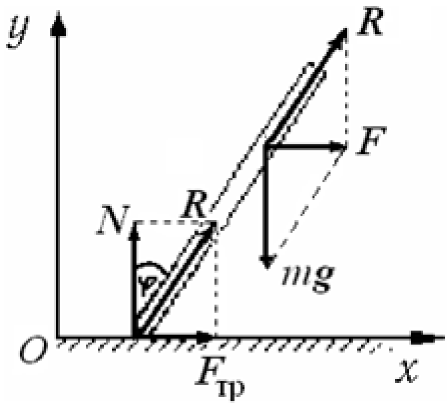


Рис.13.3

Мотоциклист взаимодействует с Землей (сила тяжести $m\boldsymbol{g}$) и с дорогой (сила реакции со стороны дороги $\boldsymbol{R}$). Силу реакции $\boldsymbol{R}$ целесообразно разложить на две составляющих – силу нормальной реакции $\boldsymbol{N}$ и силу трения $\boldsymbol{F}_{тр}$. Мотоциклист наклоняет мотоцикл до тех пор, пока сила реакции $\boldsymbol{R}$, сложенная с силой тяжести $m\boldsymbol{g}$**,** не будет сообщать ему необходимого нормального (центростремительного) ускорения для прохождения с нужной скоростью дуги поворота.

Силой, которая непрерывно изменяет импульс мотоциклиста, т.е. изменяет направление его скорости, здесь является сила трения.

Второй закон Ньютона в векторном виде запишется так:

$$m\boldsymbol{a} = m\boldsymbol{g} + \boldsymbol{R}$$

или

$$m\boldsymbol{a} = m\boldsymbol{g} + \boldsymbol{N} + \boldsymbol{F}_{\text{тр}}.$$

В проекциях на координатные оси:

$$ma_{\text{цстр}} = F_{\text{тр}},$$

$$-mg + N = 0.$$

Учитывая, что $F_{\text{тр}} = \mu N$, $a_{\text{цстр}} = v^2/r$, получим

$$v = \sqrt{\mu g r}\ .$$

Для определения угла наклона φ мотоциклиста из прямоугольного треугольника имеем

$$\operatorname{tg}\varphi = F_{\text{тр}}/N = \mu\ ;$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\mu.$$

Подставляя числа, найдем: v = 24,3 м/с = 87,3 км/ч, φ = 31°.

§ 14. Основная задача динамики

В динамике рассматриваются два типа задач, которые решаются с помощью уравнения $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$.

Прямая задача состоит в том, чтобы, зная движение тела, *определить действующие на него силы.* В технике такие задачи возникают, например, при определении сил давления колес на рельсы, нахождения внутренних усилий в деталях механизмов и т.д., если законы движения этих механизмов известны.

Обратная задача является в динамике *основной* и состоит в том, чтобы по действующим на тело силам и начальному состоянию тела *определить закон его движения*.

Например, по действующим на ракету при ее движении силам тяги двигателя, тяготения со стороны Земли и сопротивления воздуха найти закон движения ракеты, в частности, ее траекторию.

Основная задача динамики материальной точки формулируется так: *найти закон движения частицы (материальной точки), т. е. выразить ее координаты в виде определенных функций времени, если известны масса частицы, действующие на нее силы и начальные* *условия - скорость и положение частицы в начальный момент времени.*

Для решения этой задачи с помощью второго закона Ньютона ($\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$) находят ускорение, с которым движется материальная точка. Затем с помощью интегрирования (или, в простых случаях, известных формул кинематики) находят выражение для скоростей и координат.

Примеры. 1. Небольшой брусок массой m соскальзывает без начальной скорости вниз по наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом. Коэффициент трения равен μ, длина наклонной плоскости l. Определить ускорение бруска относительно плоскости и скорость его у основания наклонной плоскости. (рис. 14. 1)

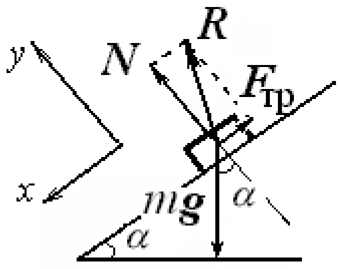


Рис.14.1

На первом этапе решения следует установить все силы, действующие на брусок, т.е действие каких других тел на данное тело следует учитывать.

Для бруска, скользящего по наклонной плоскости, существенно воздействие со стороны Земли (оно характеризуется силой тяжести $m\boldsymbol{g}$) и воздействие со стороны плоскости (оно характеризуется силой реакции $\boldsymbol{R}$). Силу реакции $\boldsymbol{R}$ обычно раскладывают на две составляющие – нормальную силу реакции $\boldsymbol{N}$ со стороны плоскости и силу трения $\boldsymbol{F}_{тр}$ (рис. 14. 1), направленную в сторону, противоположную движению бруска.

Определив силы, действующие на тело, составляют уравнение второго закона Ньютона в векторном виде:

$$m\boldsymbol{a} = m\boldsymbol{g} + \boldsymbol{N} + \boldsymbol{F}_{тр}.$$

Чтобы осуществить вычисления, нужно перейти от векторов к их проекциям. Выбор системы координат произволен, удобно ось Ox расположить так, чтобы она совпадала с направлением движения.

Проекции векторов на направление Ox равны:

$$a_x = a, \quad g_x = g \sin\alpha, \quad N_x = 0, \quad F_{тр\,x} = -F_{тр}.$$

Тогда

$$ma_x = mg \sin\alpha - F_{тр}.$$

Так как тело движется только вдоль оси Ox, прилегая к наклонной плоскости, то это значит, согласно второму закону Ньютона, что сумма проекций всех сил в направлении, перпендикулярном к плоскости (на ось Oy), должна быть равна нулю

$$N - mg\cos\alpha = 0.$$

С учетом закона, связывающего силу трения и нормальной реакции, получим

$$F_{тр} = \mu N = \mu\, mg\cos\alpha.$$

В итоге

$$a_x = g\,(\sin\alpha - \mu\cos\alpha).$$

Для движения по прямой с постоянным ускорением воспользуемся формулой (5.11) кинематики: $v^2 = 2\,al$. Откуда

$$v = \sqrt{2gl(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}\,.$$

2. Электровоз массой m тянет состав из двух вагонов массами m_1 и m_2 с постоянной силой $\boldsymbol{F}$ на горизонтальном участке пути (рис.14.2). Определить ускорение, с которым движется состав, и силы натяжения жестких сцепок. Трением пренебречь.

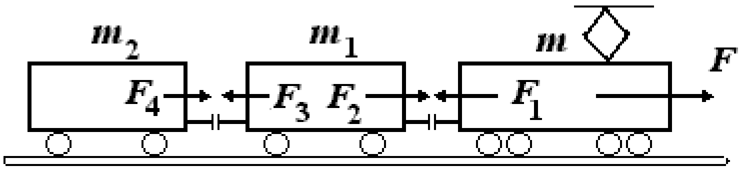


Рис.14.2.

При составлении уравнений движения для каждого вагона учтем, что по третьему закону Ньютона:

$$\boldsymbol{F}_1 = -\boldsymbol{F}_2, \quad \boldsymbol{F}_3 = -\boldsymbol{F}_4.$$

Уравнение движения для электровоза:

$$\boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_1 = m\boldsymbol{a},$$

для первого вагона:

$$\boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_3 = m_1\boldsymbol{a},$$

для второго вагона:

$$\boldsymbol{F}_4 = m_2\boldsymbol{a}.$$

В проекциях

$$F - F_1 = ma,$$
$$F_2 - F_3 = m_1 a,$$
$$F_4 = m_2 a$$

или

$$F - F_1 = ma,$$
$$F_1 - F_3 = m_1 a,$$
$$F_3 = m_2 a.$$

Решая систему, найдем

$$a = \frac{F}{m + m_1 + m_2}, F_1 = \frac{m_1 + m_2}{m + m_1 + m_2} F, F_3 = \frac{m_2}{m + m_1 + m_2} F.$$

3. Существует известный способ, помогающий велосипедисту пройти скоростной поворот, не наклоняя корпуса. Для этого на вираже велосипедного трека внешнюю сторону полотна дороги на повороте поднимают на некоторый угол. (рис. 14.3)

С какой скоростью должен проходить вираж радиусом 20 м велосипедист, держась перпендикулярно к полотну дороги, чтобы не упасть? Полотно образует угол 30º с горизонтом.

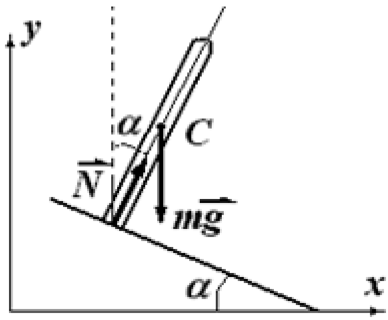


Рис. 14.3

Поскольку велосипед перпендикулярен к полотну трека по условию, сила реакции полотна ***N*** также перпендикулярна к полотну, а сила бокового трения отсутствует. Перенесем силу ***N*** вдоль линии ее действия в точку *C*. Тогда уравнение второго закона Ньютона в векторном виде запишется:

$$\mathbf{N} + m\mathbf{g} = m\mathbf{a}_{\text{цстр}}.$$

В проекциях на координатные оси:

$$Ox: \; N \sin\alpha = m\frac{v^2}{R}, \quad Oy: \; N\cos\alpha - mg = 0.$$

После преобразований получим

$$v = \sqrt{gR\,\mathrm{tg}\,\alpha}\,.\; v \approx 38{,}3 \text{ км/ч}.$$

Контрольные вопросы.

1. Какая физическая абстракция привела Галилея и Ньютона к установлению закона инерции?
2. Почему на практике тело, предоставленное самому себе, не сохраняет сколь угодно долго свою скорость?
3. Почему пассажир при резком торможении автобуса отклоняется вперед по движению, а при резком ускорении – назад, против движения?
4. Правильно ли считать, что 1-й закон Ньютона вытекает из 2-го закона

(если сила $\boldsymbol{F} = 0$, то ускорение $\boldsymbol{a} = 0$, т.е. тело движется равномерно и прямолинейно)?

5. В каких системах отсчета и для каких тел выполняются законы Ньютона?

6. Что является причиной изменения состояния равномерного и прямолинейного движения тела в инерциальной системе отсчета?

7. Что нужно учитывать, чтобы правильно определить силы, действующие на данное тело? К каким точкам прикладываются силы тяжести, веса, реакции опоры, трения?

8. Материальная точка движется по окружности с постоянной по модулю скоростью. Как направлена сила, действующая на точку? Как будет направлена эта сила, если точка движется по окружности ускоренно?

9. Материальная точка движется по криволинейной траектории. Как направлен при этом вектор $d\boldsymbol{p}/dt$?

10. Два тела массами M и m ($M > m$) , соединенные невесомой нерастяжимой нитью, лежат на гладкой горизонтальной поверхности. Зависит ли натяжение нити от того, к какому из тел приложена сила?

11. Почему на виражах скоростных мотогонок спортсмен сильно наклоняет свой корпус?

12. Почему у гоночных автомобилей «Формула-1» сильно изнашиваются покрышки?

13. Являются ли упругие силы и силы трения фундаментальными? Какова природа этих сил?

14. Зависит ли сила трения скольжения от площади соприкосновения тел?

15. Брусок лежит неподвижно на наклонной плоскости. Чему равна и как направлена сила реакции?

16. На тонкой нерастяжимой нити подвешен шарик (материальная точка) массой m, который совершает движение в горизонтальной плоскости. Нить образует угол α с вертикалью. Какова сила упругости нити $\boldsymbol{T}$ (другое название – сила натяжения нити)?

17. Чему равна сила тяжести космонавта, который находится в кабине космического корабля на круговой орбите вокруг Земли?

18. Для каких тел справедлив закон всемирного тяготения в виде
$F = Gm_1m_2/r^2$?

19. Как направлены силы гравитационного взаимодействия?

20 Как изменится жесткость пружины, если ее длину уменьшить в n раз?

Глава 3. **ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА**

§ 15. Закон сохранения импульса

Рассмотрим систему N тел (материальных точек), импульсы которых равны $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$, …$\boldsymbol{p}_N$, соответственно (рис.15.1). Будем различать *внутренние силы* между телами, входящими в систему, и *внешние* силы, действующие на систему со стороны внешних тел. Внутренние силы будем обозначать буквой с двойными индексами $\boldsymbol{F}_{i,j}$, где индексы показывают, что данная сила действует на тело с номером i со стороны тела с номером j. Символом $\boldsymbol{F}_i$ с одинарным индексом обозначим внешнюю силу, действующую на i -ю частицу.

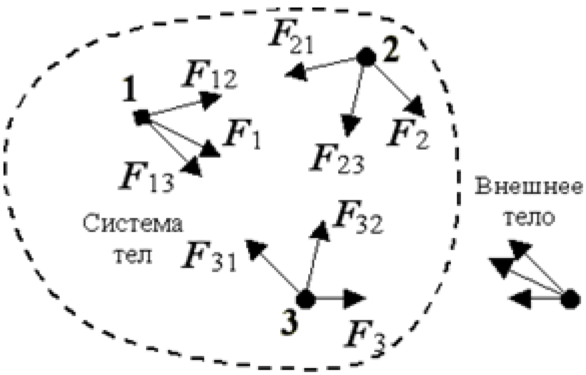


Рис. 15.1.

Напишем уравнения второго закона Ньютона (скорость изменения импульса тела равна сумме всех действующих на тело сил) для всех N тел.

$$\frac{d\boldsymbol{p}_1}{dt} = \boldsymbol{F}_{1,2} + \boldsymbol{F}_{1,3} + \ldots + \boldsymbol{F}_{1,N} + \boldsymbol{F}_1$$

$$\frac{d\boldsymbol{p}_2}{dt} = \boldsymbol{F}_{2,1} + \boldsymbol{F}_{2,3} + \ldots + \boldsymbol{F}_{2,N} + \boldsymbol{F}_2 \qquad (15.1)$$

....

$$\frac{d\boldsymbol{p}_N}{dt} = \boldsymbol{F}_{N,1} + \boldsymbol{F}_{N,2} + \ldots + \boldsymbol{F}_{N,N-1} + \boldsymbol{F}_N$$

Сложим вместе все эти уравнения. Слева получится производная по времени от суммарного импульса $\boldsymbol{p}$ системы

$$\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 + ... + \boldsymbol{p}_N\right) = \frac{d}{dt}\boldsymbol{p}\,.$$

Справа не равной нулю будет только сумма внешних сил $\Sigma\, \boldsymbol{F}_i$. Сумма же внутренних сил получится равной нулю. Действительно, она состоит из парных слагаемых

$$\left(\boldsymbol{F}_{1,2} + \boldsymbol{F}_{2,1}\right) + \left(\boldsymbol{F}_{1,3} + \boldsymbol{F}_{3,1}\right) + ...$$

Согласно третьему закону Ньютона $\boldsymbol{F}_{1,2} = -\,\boldsymbol{F}_{2,1}$ и т.д., поэтому каждая из скобок равна нулю. С учетом этого получим

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{p} = \sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{F}_i\,. \qquad (15.2)$$

Таким образом, *производная по времени от суммарного импульса системы равна сумме **внешних** сил, действующих на тела системы.*

Из уравнения (15.2) можно сделать важный вывод – *импульс системы может изменяться под действием только внешних сил*.

Внутренние силы не могут изменить импульс системы. Поэтому, например, невозможно поднять самого себя за волосы, как это делал веселый литературный герой барон Мюнхгаузен. Бесплодными будут также попытки привести в движение автомобиль, находясь внутри него и оказывая давление на его стенки.

Система, на которую не действуют внешние силы, называется *замкнутой* или *изолированной*. Если внешние силы отсутствуют, то правая часть уравнения (15.2) равна нулю. Если производная некоторой величины равна нулю ($\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = 0$), то эта величина постоянна ($\boldsymbol{p}$ = const) . Этот вывод называется ***законом сохранения импульса***:

- ***в инерциальной системе отсчета импульс замкнутой системы частиц остается постоянным, т. е. не меняется со временем***:

$$\boldsymbol{p} = \sum_i \boldsymbol{p}_i(t) = const\,. \qquad (15.3)$$

При этом импульсы отдельных тел системы могут изменяться при их взаимодействии. Например, при столкновениях тел импульс может передаваться от одного тела к другому. Однако эти изменения всегда происходят так, что приращение импульса одного тела равно убыли импульса другого тела, а полный импульс системы остается постоянным.

Важнейшим примером применения закона сохранения импульса является *принцип реактивного движения*. При сгорании топлива двигатель ракеты выбрасывает с большой скоростью газы в одну сторону, а ракета получает такой же импульс в противоположную сторону так, что сумма импульсов ракеты и газов остается постоянной величиной.

Другим примером может служить *отдача* орудия при выстреле – если его не закрепить, оно откатится назад. В автомате за счет отдачи затвора выбрасывается стреляная гильза и происходит перезарядка оружия. Явление отдачи объясняет ходьбу, движение всех видов транспорта. Так, при вращении ведущих колес автомобиля за счет силы трения автомобиль движется в одну сторону, Земля – в противоположную (естественно, с ничтожно малой скоростью). Точно так же движется судно: его винт захватывает воду и отбрасывает ее за корму, благодаря чему судно движется вперед.

Применение закона сохранения импульса помогает решить задачу об упругих и неупругих *столкновениях* тел, распадах элементарных частиц и т.п.

Пример. Два пластилиновых шара с импульсами $\boldsymbol{p_1}$ и $\boldsymbol{p_2}$, угол между которыми равен θ, сталкиваются абсолютно неупруго и дальше летят как одно тело (рис.15.2). Полагая систему замкнутой, определить модуль импульса образовавшегося тела.

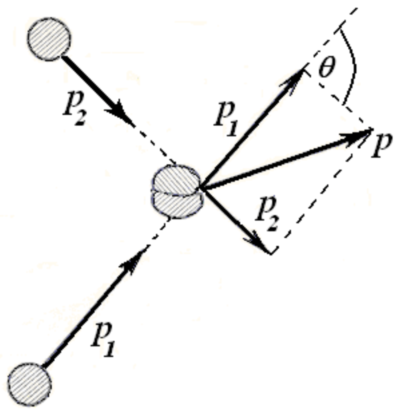


Рис. 15.2

Согласно закону сохранения импульса $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p_1} + \boldsymbol{p_2}$. По правилу сложения векторов строим параллелограмм импульсов. Воспользовавшись теоремой косинусов, получим:

$$p = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 - 2p_1p_2\cos(180 - \theta)} = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2\cos\theta}.$$

Закон сохранения импульса *выполняется и в незамкнутой системе* в случае, когда сумма всех внешних сил равна нулю. В этом случае проекция суммы всех внешних сил на какую-либо координатную ось также равна нулю. Спроектировав все векторы, фигурирующие в уравнении (15.2) на некоторое направление *x*, получим

$$\frac{d}{dt}p_x = \sum_{i=1}^{N} F_{ix} . \qquad (15.4)$$

При $\Sigma\, F_{ix} = 0$ имеем $p_x = \text{const}$, т.е. проекция на ось Ox вектора импульса системы не изменяется со временем.

Примеры. 1. При движении тела, брошенного под углом к горизонту, (рис.15.3) на него не действуют никакие внешние силы, кроме силы тяжести, направленной вертикально (сопротивлением воздуха пренебрегаем). Проекция силы тяжести на горизонтальное направление равна нулю. Поэтому горизонтальная составляющая импульса тела, а следовательно и скорости, остается постоянной на протяжении всего полета.

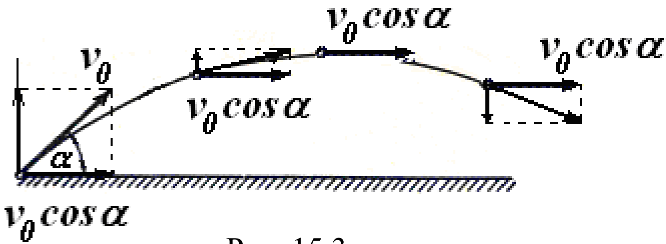


Рис. 15.3.

2. После выстрела из орудия, находящегося на платформе, платформа откатывается (рис. 15.4). Проекции всех вертикальных сил (сил тяжести орудия, платформы, снаряда и реакции опоры) на горизонтальное направление равны нулю. Поэтому сохраняется проекция суммарного импульса системы на горизонтальное направление, что бы в системе не происходило. Скорость отката

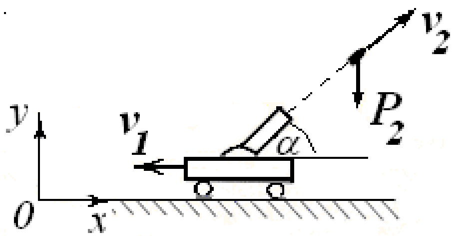


Рис. 15.4.

платформы может быть найдена из закона сохранения проекции суммарного импульса на горизонталь координатную ось *Ox:*

$$m_1 \; v_{1\,x} + m_2 \; v_{2\,x} = 0;$$
$$-\,m_1 \; v_1 + m_2 \; v_2 \cos\alpha = 0;$$
$$v_1 = (m_2 / m_1)\, v_2 \cos\alpha\,.$$

Закон сохранения импульса является фундаментальным законом природы и связан с общим свойством пространства – его *однородностью.* Это означает, что параллельный перенос замкнутой физической системы из одного места в другое без изменения взаимного расположения тел и их скоростей не изменяет механических свойств системы.

Поэтому этот закон для материальных точек универсален, т.е. выполняется при любых взаимодействиях и не знает никаких исключений.

§ 16. Центр масс

Если тело состоит из N материальных точек с массами m_i и радиус-векторами $\boldsymbol{r}_i$ (рис. 16.1), то *центром масс системы* материальных точек называют такую точку C, радиус-вектор которой определяется выражением

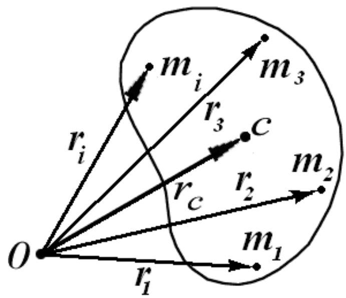


Рис. 16.1

$$\boldsymbol{r}_C = \frac{m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2 + \ldots + m_N\boldsymbol{r}_N}{m_1 + m_2 + \ldots + m_N} =$$

$$= \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} m_i\boldsymbol{r}_i \qquad (16.1)$$

Здесь m – суммарная масса системы.

Центр масс (или *центр инерции*) – это геометрическая точка, положение которой характеризует распределение масс в теле или системе частиц.

Пример. Центр масс двух одинаковых частиц находится в середине соединяющего их отрезка. Для разных частиц центр масс делит этот отрезок в отношении, обратно пропорциональном массам частиц. Если однородное тело обладает центром симметрии, то центр масс находится в центре симметрии.

В однородном поле тяготения центр масс тела совпадает с его центром тяжести, т.е. с точкой приложения равнодействующей сил тяжести, действующих на отдельные элементы тела.

Продифференцировав $\boldsymbol{r}_C$ по времени, найдем скорость центра масс:

$$\boldsymbol{V_C} = \frac{d\boldsymbol{r}_C}{dt} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{v}_i = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{p}_i = \frac{\boldsymbol{p}}{m}. \qquad (16.2)$$

($\boldsymbol{v}_i$ – скорость, $\boldsymbol{p}_i$ – импульс $\boldsymbol{i}$-й частицы, $\boldsymbol{p}$ – импульс системы).

Из (16.2) следует, что суммарный импульс системы равен произведению массы системы на скорость ее центра масс:

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{V}_C. \qquad (16.3)$$

Производная по времени от суммарного импульса системы равна сумме внешних сил:

$$\frac{d}{dt}\left(m\boldsymbol{V}_C\right) = m\boldsymbol{a}_C = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i , \qquad (16.4)$$

где $\boldsymbol{a}_C$ – ускорение центра масс. *Центр масс движется так, как если бы вся масса системы была сосредоточена в нем под действием результирующей всех внешних сил, приложенных к телам системы.*

В замкнутой системе $\Sigma \boldsymbol{F_i} = 0$ и $\boldsymbol{a}_C = 0$. Это означает, что *центр масс замкнутой системы либо остается неподвижным, либо движется равномерно и прямолинейно* независимо от того, как движутся отдельные тела, из которых состоит система.

Примеры. 1. Действие далеких звезд на Солнечную систему пренебрежимо мало и ее можно считать замкнутой. Наблюдения показывают, что Солнечная система движется прямолинейно с постоянной скоростью 18 км/с в направлении созвездия Геркулес.

2. Центр масс системы Земля - Луна находится в точке, расположенной примерно в 4600 км от центра Земли. Земля и Луна вращаются относительно этой точки. Центр масс движется по эллипсу вокруг Солнца, совершая один оборот за год.

3. Человек массой m_1 = 60 кг находится на корме лодки. Лодка стоит на спокойной воде озера. Длина лодки l = 3 м, масса m_2 = 120 кг. Какое расстояние проплывет лодка, если человек медленно перейдет на нос лодки? Вес лодки равномерно распределен по ее длине. Трением о воду и воздух пренебречь.

Все силы, действующие в этом примере – силы тяжести, архимедова сила – направлены вертикально. Их проекции на горизонтальное направление равны нулю. Следовательно, согласно закону движения центра масс системы (16.4) равна нулю и горизонтальная проекция ускорения центра масс, и в данном случае центр масс системы человек-лодка при переходе человека останется неподвижным относительно берега.

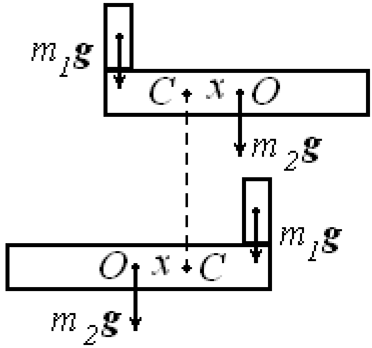


Рис. 16.2.

Пусть центр масс C системы находится на расстоянии x от центра масс лодки (рис. 16.2). Для определения величины x воспользуемся тем, что моменты силы тяжести человека m_1g и лодки m_2g относительно центра масс должны быть равны:

$$m_1 g\left(\frac{l}{2} - x\right) = m_2 g x\,.$$

Отсюда
$$x = \frac{m_1}{(m_1 + m_2)}\frac{l}{2}\,.$$

При переходе человека лодка смещается на расстояние $2x$ относительно берега. Тогда перемещение лодки относительно берега равно

$$s = \frac{m_1}{(m_1 + m_2)}\,l = 1\textit{м}.$$

Контрольные вопросы.

1. Какая система тел называется замкнутой? Является ли обязательным требование замкнутости системы для выполнения закона сохранения импульса?
2. Как доказать, что сумма внутренних сил замкнутой системы равна нулю?
3. Материальная точка равномерно вращается по окружности. Изменяется ли при этом импульс материальной точки?
4. В чем состоит принцип реактивного движения?
5. Сформулируйте закон сохранения для проекции импульса системы на некоторое направление.
6. Как объяснить движение всех видов транспорта?

Глава 4. **ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ**

§ 17. Работа и мощность

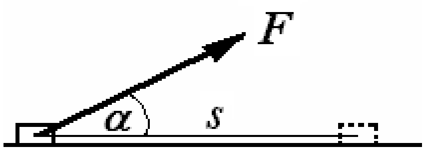


Рис. 17.1

Если сила, действующая на тело постоянна (**F** = const), а траектория прямолинейна (рис. 17.1), то *работой силы F* на пути s называют скалярную величину

$$A = F\, s \cos\alpha = F_s\, s, \qquad (17.1)$$

где F – модуль силы, s – путь, пройденный точкой приложения силы, α – угол между направлением силы и перемещения, $F_s = F\cos\alpha$ – проекция силы на направление перемещения.

В общем случае сила может изменяться как по модулю, так и по направлению. Для того, чтобы подсчитать работу такой переменной силы, надо разбить весь путь на отдельные малые перемещения $d\mathbf{s}$, на каждом из которых силу можно считать постоянной. Тогда элементарная работа dA силы $\mathbf{F}$ на бесконечно малом перемещении $d\mathbf{s}$ тела равна

$$dA = F\, ds \cos\alpha = F_s\, ds. \qquad (17.2)$$

Эту формулу работы можно записать также в виде *скалярного произведения векторов силы* $\mathbf{F}$ *и элементарного перемещения* $d\mathbf{s}$:

$$dA = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}. \qquad (17.3)$$

Работа силы $\mathbf{F}$ на конечном перемещении определяется как сумма элементарных работ на отдельных бесконечно малых участках пути и выражается криволинейным интегралом от силы вдоль данного участка траектории

$$A = \int_0^s (F\cos\alpha)\,ds = \int_0^s F_s\,ds. \qquad (17.4)$$

Работа – алгебраическая величина, ее знак зависит от значения cos α.

Работа положительна, если угол α острый (cos α > 0), отрицательна, если тупой (cos α < 0), и равна нулю, если сила перпендикулярна перемещению (cos π/2 = 0).

Важно подчеркнуть, что в физике работает сила. Поэтому всегда необходимо указывать, работа какой именно силы имеется в виду.

Примеры. 1. Определить *работу силы тяжести* при подъеме груза на высоту h над поверхностью Земли.

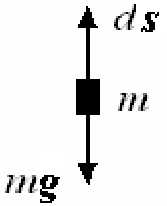


Рис. 17.2.

Т.к. сила тяжести направлена вертикально вниз, а перемещение вверх (рис. 17.2), то угол $\alpha = 180º$, $\cos 180º = -1$ и работа силы тяжести отрицательна:

$$A = -\,mgh,$$

где h – высота, на которую подняли груз над поверхностью Земли. Положительна здесь работа внешней силы (например, руки), поднимающей груз на высоту h. Внешняя сила работает против силы тяжести.

Работа силы тяжести при горизонтальном перемещении тела равна нулю ($\alpha = \pi/2$), а при свободном падении тела – положительна. Всегда отрицательна работа силы трения, направленной, как известно, противоположно скорости тела.

2. Определить *работу упругой силы* при растяжении пружины (рис. 17.3).

При растяжении пружины возникает упругая сила, проекция которой на ось x согласно закону Гука равна

$$F_x = -\,kx.$$

Подсчитаем работу этой переменной силы при удлинении пружины от 0 до x_0.

Здесь, как и в предыдущем примере, направление силы и перемещения противоположны. Элементарная работа упругой силы при растяжении пружины на dx:

$$dA = F\,dx\cos 180º = F_x\,dx = -\,kx\,dx.$$

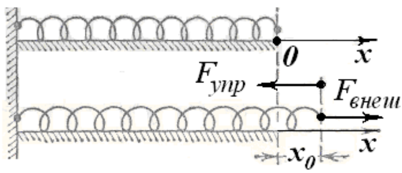


Рис. 17.3.

Следовательно, полная работа упругой силы при удлинении пружины от $x = 0$ до $x = x_0$ будет равна

$$A = -\int_0^{x_0} kxdx = -k\int_0^{x_0} xdx = -\frac{1}{2}kx_0^2.$$

Упругая сила стремится сжать пружину при ее растяжении, работа такой силы при растяжении пружины отрицательна. Но положительной является работа внешней силы, растягивающей пружину.

Единицей работы в СИ является *джоуль* (Дж). Один джоуль равен работе постоянной силы в один ньютон на перемещении в один метр при условии, что направление силы совпадает с направлением перемещения:

$$1 \text{ Дж} = 1 \text{ Н}\cdot\text{м} = 1 \text{ кг}\cdot\text{м}^2/\text{с}^2.$$

Работа, совершаемая силой в единицу времени, называется ***мощностью.*** Мгновенная мощность P определяется соотношением

$$P = \frac{dA}{dt}. \tag{17.5}$$

Подставляя вместо работы выражение $dA = \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s}$. и, учитывая, что производная $d\boldsymbol{s}/dt$ есть скорость $\boldsymbol{v}$, получим

$$P = \boldsymbol{F}\frac{d\boldsymbol{s}}{dt} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{v}. \tag{17.6}$$

Таким образом, *мгновенная мощность равна скалярному произведению вектора силы на вектор скорости точки приложения силы.*

Единицей мощности в СИ является ватт (Вт), равный джоулю в секунду (Дж/с). В технике иногда применяется единица мощности, называемая лошадиной силой (л.с.) и равная 736 Вт.

§ 18. Консервативные и неконсервативные силы

Силы, встречающиеся в механике, можно разделить на два класса.

К одному классу относят силы, работа которых не зависит от пути, по которому произошло перемещение частицы, а зависит только от начального и конечного положения частицы. Эти силы называются *консервативными* (*потенциальными*).

Для сил другого класса работа перемещения между двумя точками зависит от пути, по которому произошло это перемещение. Эти силы называются *неконсервативными.*

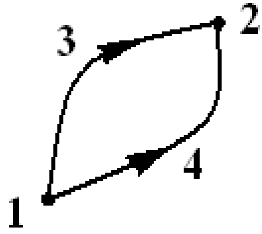


Рис. 18.1

Покажем, что работа консервативных сил по замкнутой траектории равняется нулю. Рассмотрим две произвольные точки *1* и *2* и два произвольных пути *132* и *142* (рис. 18.1). При перемещении частицы из начального положения *1* в конечное *2* величина работы одинакова вне зависимости от формы траектории:

$$A_{132} = A_{142}.$$

При обратном движении работа меняет знак на противоположный, так как все элементарные перемещения $d\mathbf{s}$ в формуле работы заменяются на $-d\mathbf{s}$: $A_{241} = -A_{142}$.

Следовательно, работа консервативных сил по замкнутому пути равняется нулю:

$$A_{132} + A_{241} = 0.$$

Работа неконсервативных сил по замкнутой траектории не равна нулю.

Приведем примеры консервативных и неконсервативных сил.

1. Известно, что вблизи поверхности Земли все тела падают с постоянным ускорением $\mathbf{g}$, направленным к центру Земли. Если рассматривать движение в области, линейные размеры которой гораздо меньше радиуса Земли, земную поверхность можно считать плоской. Тогда силы, действующие на тело массой m в любой точке, имеют одинаковое направление и величину $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$. Их называют однородными.

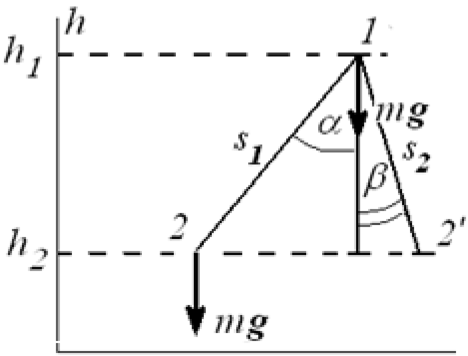


Рис. 18.2.

Покажем, что однородные силы тяжести консервативны. Обозначим через h высоту от поверхности Земли (рис. 18.2). Вычислим работу, которую совершает сила тяжести $m\mathbf{g}$ при переходе материальной точки из положения *1* в положение *2* вдоль прямолинейного отрезка *12* (например, материальная точка соскальзывает с наклонной плоскости без трения).

$$A_{12} = mgs_1 \cos \alpha = mg(h_1 - h_2) = mgh_1 - mgh_2. \qquad (18.1)$$

Очевидно, что работа силы тяжести по пути *12* и *12′* (рис. 18.2) одинакова.

$$A_{12'} = mgs_2 \cos \beta = mgh_1 - mgh_2.$$

Таким образом, работа силы тяжести не зависит от пути, по которому движется тело, а определяется только начальным и конечным положением тела в пространстве. Следовательно, однородная сила тяжести консервативна.

Формула (18.1) справедлива и при перемещении вдоль произвольной кривой. При криволинейном движении траекторию можно представить как совокупность бесконечно малых прямолинейных перемещений. Работа на каждом из этих участков равна $A_i = m \cdot g \cdot s_i \cos \alpha_i$ и, следовательно, суммарная работа, по-прежнему, рассчитывается согласно уравнению (18.1).

2. В качестве примера неконсервативной силы приведем силу трения, которая возникает при скольжении одного тела по поверхности другого. Для нее на любом участке траектории вектор силы направлен против вектора скорости, который в свою очередь параллелен элементарному перемещению и, следовательно, на каждом участке траектории и на всем перемещении работа отрицательна. Ясно также, что работа силы трения пропорциональна длине траектории и поэтому зависит от траектории, по которой происходит перемещение.

К неконсервативным силам относятся также силы сопротивления, которые действуют на тело при движении в жидкостях и газах.

Сила трения скольжения и сила сопротивления называются *диссипативными* силами. Суммарная работа таких сил при любых перемещениях всегда отрицательна. В системах, где действуют такие силы, полная механическая энергия при движении убывает, переходя в теплоту.

Существуют также неконсервативные *гироскопические* силы (в механике – сила Кориолиса, в электромагнетизме – сила Лоренца), которые зависят от скорости материальной точки и направлены перпендикулярно к ней.

§ 19, *а.* Потенциальная энергия

Для системы тел, в которой действуют только внутренние консервативные силы, можно ввести понятие потенциальной энергии. Для этого воспользуемся рассмотренным выше примером.

Чтобы поднять тело, например, камень, на некоторую высоту, нужно затратить работу внешних сил, равную $mg(h_1 - h_2)$. Эта работа может быть возвращена обратно и выполнена силой тяжести, если дать камню возможность падать.

Значит, поднятый камень обладает определенным *запасом работы*, которую он может совершить.

Такой запас работы определяется положением тел в данной системе, или, как говорят, конфигурацией тел. В случае сил тяготения запас работы определяется высотой подъема тела.

Способность тела совершать работу называется *энергией.*

З*апас работы, обусловленный взаимным расположением взаимодействующих материальных точек, составляющих систему, называется* ***потенциальной энергией системы.***

Понятие потенциальной энергии можно ввести *только для консервативных сил,* работа которых не зависит от траектории движения и определяется только начальным и конечным положениями тела**.** Таким образом, потенциальная энергия является *функцией состояния* системы *и зависит только от координат*.

Из уравнения (18.1) следует, что работа силы тяжести равна убыли функции mgh:

$$A_{12} = mgh_1 - mgh_2.$$

Обозначим эту функцию E_p и назовем ее потенциальной энергией.

$$A_{12} = E_{p1} - E_{p2}. \qquad (19.1)$$

Подчеркнем, что работа A_{12} силы тяжести равна *убыли* потенциальной энергии, т. е. разности значений потенциальной энергии тела в начальной и конечной точках пути.

Тогда потенциальную энергию E_p тела, поднятого над Землей, на любую высоту h ($h << R_З$, где $R_З$ – радиус Земли) можно записать так

$$E_p = mgh + C. \tag{19.2}$$

Здесь C – некоторая постоянная величина, имеющая размерность энергии. Таким образом, потенциальная энергия может быть определена с точностью до некоторой аддитивной постоянной.

Эта постоянная имеет смысл потенциальной энергии на нулевом уровне ($h = 0$). Обычно принимают, что на уровне $h = 0$ потенциальная энергия тела равна нулю, тогда из (19.2) следует, что $C = 0$.

При таком условии, формула потенциальной энергии тела массой m вблизи поверхности Земли будет

$$E_p = mgh. \tag{19.3}$$

В некоторых задачах для удобства решения высота отсчитывается от других уровней. Выбор уровня для отсчета высот, а следовательно и потенциальных энергий, несущественен, поскольку важна не потенциальная энергия, а ее изменения, которыми определяется совершаемая работа. Изменения же потенциальной энергии будут одинаковыми, какой бы ни выбрали уровень для отсчета энергии, лишь бы он был одинаков во всех расчетах, касающихся данной задачи.

Формула (19.3) непригодна для двух притягивающихся материальных точек. В этом случае необходимо рассчитать *работу сил гравитационного притяжения.*

Эти силы являются центральными. Сила называется *центральной,* если она направлена к одной и той же точке (или от одной и той же точки) и зависит только от расстояния до этой точки, называемой *центром сил.*

Сила притяжения двух материальных точек с массами M и m (рис. 19.1):

$$F(r) = G\frac{Mm}{r^2}, \tag{19.4}$$

где $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н·м^2/кг^2 – гравитационная постоянная.

Для простоты будем считать, что масса M покоится, а масса m притягивается к ней с силой $\boldsymbol{F}$ и перемещается.

Найдем элементарную работу силы $\boldsymbol{F}$ на перемещении $d\boldsymbol{s}$. Представим работу как скалярное произведение

$$dA = \boldsymbol{F}\, d\boldsymbol{s} = F(r)\, ds \cos\alpha = F(r)\, ds_F, \qquad (19.5)$$

где $F(r)$– модуль силы, ds_F – проекция перемещения на направление силы. Из рис. 19.1 следует, что $ds_F = -\,dr$.

Минус поставлен из тех соображений, что проекция ds_F отрицательна, $ds_F<0$, а dr – приращение модуля $\boldsymbol{r}$ – положительно.

(Нетрудно убедиться, что при $ds_F >0$, $dr<0$).

Таким образом, элементарная работа силы гравитационного притяжения определяется только перемещением вдоль радиус-вектора и не зависит от формы траектории.

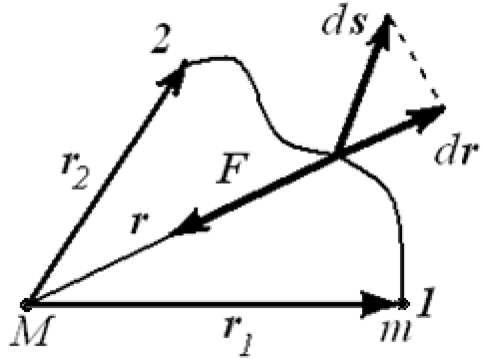


Рис. 19.1

Это означает, что сила тяготения консервативна. Поэтому работа такой силы при перемещении частицы из произвольной точки, находящейся на расстоянии r_1 в точку на расстоянии r_2 сводится к интегрированию.

$$A_{12} = -GMm\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2} = -G\frac{Mm}{r_1} - \left(-G\frac{Mm}{r_2}\right). \qquad (19.6)$$

Мы приходим к выводу, что работа силы тяготения равна *убыли* одной и той же функции, которую мы обозначим как $E_p\,(r)$:

$$A = E_p(r_1) - E_p(r_2)\,. \qquad (19.7)$$

Здесь

$$E_p(r) = -G\frac{Mm}{r} + C\,. \qquad (19.8)$$

Введенная нами функция $E_p\ (r)$ называется *потенциальной энергией гравитационного взаимодействия* двух частиц. Таким образом, работа сил тяготения на пути *1→2* равна убыли потенциальной энергии системы двух частиц.

Кроме обозначения $E_p(r)$ используют и другие обозначения потенциальной энергии – $U(r)$, $\Pi(r)$.

Из формулы (19.8) видно, что потенциальная энергия определяется с точностью до неизвестной аддитивной постоянной C. Однако, во все физические соотношения входит либо разность потенциальных энергий в двух точках, необходимая для определения работы, либо производная функции $E_p\,(r)$: по координатам, служащая для определения силы. Поэтому произвольная постоянная выпадает.

Если сила на большом расстоянии достаточно быстро стремится к нулю, то потенциальную энергию взаимодействия на бесконечности обычно принимают равной нулю

$$E_p\,(\infty) = 0. \qquad (19.9)$$

Из этого следует, что в (19.8) постоянная $C = 0$ и тогда потенциальная энергия двух частиц, находящихся на расстоянии r друг от друга, выражается формулой

$$E_p(r) = -G\frac{Mm}{r}\,. \qquad (19.10)$$

В данном случае потенциальная энергия отрицательна. Это согласуется с тем, что при сближении частиц сила притяжения между ними совершает положительную работу, равную убыли потенциальной энергии. При отрицательной E_p убыль ее тоже будет положительной.

Модуль выражения (19.10) дает запас работы, которую выполнят силы тяготения при сближении частиц от бесконечного расстояния между ними до расстояния r.

Чтобы развести эти два тела на бесконечность, внешние силы должны совершить положительную работу, также равную модулю этого выражения.

Введенное таким образом понятие потенциальной энергии обладает одним общим свойством: E_p – это функция конфигурации системы (взаимного расположения тел).

Потенциальная энергия – некоторая функция, зависящая от взаимного расположения тел входящих в систему, убыль которой равна работе внутренних консервативных сил, совершаемой при переходе системы из одного состояния в другое.

$$A = -\,\Delta E_p.$$

Формула для расчета потенциальной энергии для каждого типа взаимодействия разная и зависит от характера взаимодействия тел;

Пример. Можно установить соотношение между общей формулой для потенциальной энергии тяготения $E_p(r) = -G\dfrac{Mm}{r}$ и ее частным случаем $E_p = mgh$.

Заменим r на $R + h$, где R – радиус Земли. Получим

$$E_p = -G\frac{Mm}{R+h} = -G\frac{\frac{1}{R}Mm}{1+\frac{h}{R}}. \tag{19.11}$$

Здесь M – масса Земли. Отношение $\dfrac{h}{R}$ – малая величина. Тогда по формуле приближенных вычислений для $x \to 0$ справедливо $\dfrac{1}{1+x} \approx 1 - x$, или

$$\frac{1}{1+\frac{h}{R}} \approx 1 - \frac{h}{R}. \tag{19.12}$$

Сила притяжения тела массой m, находящегося на высоте h над поверхностью Земли, по закону всемирного тяготения запишется в виде

$$F = G\frac{Mm}{(R+h)^2}.$$

Для точек, близких к поверхности Земли, h настолько мало по сравнению с радиусом Земли, что $R+h$ можно заменить на R.

Тогда $F = G\dfrac{M}{R^2}m$. Сравнивая эту формулу с выражением для силы тяжести $F = mg$, видим, что ускорение силы тяжести может быть выражено через гравитационную постоянную, массу Земли и радиус Земли формулой

$$g = G\frac{M}{R^2}. \tag{19.13}$$

Подставим выражение (19.12) в формулу (19.11). С учетом (19.13) получим

$$E_p = -G\frac{Mm}{R} + mgh\,.$$

Приняв за нуль потенциальной энергии энергию тела, находящегося на поверхности Земли, приходим к формуле $E_p = mgh$.

Приведем другие примеры потенциальной энергии.

Потенциальная энергия растянутой пружины. Пусть пружина деформируется (например, растягивается) под действием внешней силы $F = kx$, где x – удлинение пружины под действием этой силы. Внешняя сила совершает работу $A_{внеш} = \frac{1}{2}kx^2$ (см. § 17). Такая работа является мерой энергии, перешедшей к растягиваемой пружине. Работа идет на увеличение запаса энергии растянутой пружины. Если предоставить пружине возможность сжиматься, то она передаст энергию деформации тому телу, которое его растягивает. Таким образом, потенциальная энергия **пружины**, растянутой (сжатой) на x, равна

$$E_\mathrm{p} = ½\, k\, x^{\,2}, \tag{19.14}$$

где x – удлинение (сжатие) пружины, k –ее жесткость. Потенциальная энергия недеформированной пружины принимается равной нулю ($E_\mathrm{p} = 0$ при $x = 0$). Подобно пружине всякое упругое тело, находящееся в деформированном состоянии, обладает некоторой потенциальной энергией, называемой энергией упругой деформации.

Потенциальная энергия кулоновского взаимодействия двух точечных зарядов

$$E_n = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r}\,. \tag{19.15}$$

Знак потенциальной энергии зависит от знаков зарядов. В случае отталкивания зарядов ($q_1q_2 > 0$) потенциальная энергия положительна, в случае притяжения ($q_1q_2 < 0$) – отрицательна.

§19, *б*. Понятие о физическом поле

Пусть два тела *A* и *B* находятся на некотором расстоянии друг от друга и взаимодействуют, например, притягиваются по закону всемирного тяготения.

Как осуществляется взаимодействие? Современная физика считает, что тело *A* не непосредственно действует на тело *B*. Оно создает вокруг себя гравитационное поле. Это поле и воздействует на другое тело *B* и проявляется в виде силы, действующей на него.

Естественно, что тело *B* создает вокруг себя свое поле, которое в свою очередь действует на тело *A*.

Таким образом, каждое тело создает в окружающем его пространстве особое состояние, называемое ***полем сил.*** Оно проявляет себя в силовом воздействии тел на другие тела, помещаемые в какую-либо точку этого пространства.

Физические поля не только осуществляют взаимодействие между телами; они могут существовать свободно, независимо от создавших их тел (например, электромагнитные волны). Поэтому их следует рассматривать как особую форму материи.

Каждому типу взаимодействия в природе отвечают определенные физические поля. Примерами физических полей могут служить электромагнитное и гравитационное поля, поле ядерных сил.

На примере гравитационного поля познакомимся с количественной характеристикой поля – напряженностью поля.

. *Напряженность поля* $\boldsymbol{G}$ численно равна отношению силы тяготения, действующей на пробное тело, к массе этого тела:

$$\boldsymbol{G} = \frac{\boldsymbol{F}}{m}. \tag{19.16}$$

Согласно закону тяготения на тело массой m, находящееся в гравитационном поле Земли (массой M) на расстоянии r от ее центра, действует сила, равная по модулю $F = G\dfrac{mM}{r^2}$.

Разделив эту силу на массу m, получим модуль напряженности гравитационного поля Земли в точке, отстоящей от центра Земли на расстоянии r.

$$g = G\frac{M}{r^2}. \qquad (19.17)$$

По своему физическому смыслу напряженность гравитационного поля совпадает с ускорением свободного падения тела m. Поскольку напряженность не зависит от массы тела, то все тела, независимо от их массы, движутся в данной точке гравитационного поля с одинаковым ускорением. Именно поэтому все тела падают в поле тяжести с одинаковым ускорением g.

Напряженность поля является вектором, направленным в ту же сторону, что и сила тяготения.

Разделим величину взаимной потенциальной энергии двух тяготеющих масс M и m $E_p = -G\frac{Mm}{r}$ на массу m. Тогда получим величину

$$\varphi = \frac{E_p}{m} = -G\frac{M}{r}, \qquad (19.18)$$

которая определяется только массой M и расстоянием от материальной точки M до данной точки поля. Эту величину называют *потенциалом* гравитационного поля. Очевидно, что потенциал – это потенциальная энергия единичной массы, помещенной в данную точку поля.

§19, *в*. Связь консервативной силы и потенциальной энергии

Если известна потенциальная энергия частицы в силовом поле, то можно найти консервативную силу, действующую на частицу в каждой точке такого поля.

Пусть частица совершила произвольное бесконечно малое перемещение

$$d\mathbf{r} = dx\,\boldsymbol{i} + dy\,\boldsymbol{j} + dz\,\boldsymbol{k}.$$

Элементарная работа силы $\boldsymbol{F}$, действующей на нее, при таком перемещении будет равна убыли потенциальной энергии:

$$dA = \boldsymbol{F}d\mathbf{r} = E_{p1} - E_{p21} = -\Delta E_p.$$

При достаточно малых приращениях аргументов полное приращение функции можно заменить ее полным дифференциалом

$$\Delta E_p \approx dE_p.$$

Тогда в проекциях это уравнение запишется так:

$$F_x\, dx + F_y dy + F_z dz = -\, dE_p. \qquad (19.19)$$

Из теории функций нескольких переменных известно, что выражение

$$dE_p = \frac{\partial E_p}{\partial x} dx + \frac{\partial E_p}{\partial y} dy \frac{\partial E_p}{\partial z} dz \qquad (19.20)$$

называется полным дифференциалом функции $E_p(x, y, z)$ и с точностью до малых второго порядка малости выражает приращение функции при изменении аргументов x на dx, y на dy, z на dz. Символом ∂ здесь обозначается так называемая *частная производная* функции E_p. в отличие от символа d, который применяется при дифференцировании функции одного переменного. Частная производная получается, если при дифференцировании $E_p(x,y,z)$ рассматривать как функцию одного аргумента x, а остальные два аргумента y,z считать при этом постоянными.

Сравнение выражений (19.19) и (19.20) показывает, что

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x}, \; F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y}, \; F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z}. \qquad (19.21)$$

Мы нашли проекции вектора силы $\boldsymbol{F}$ на координатные оси. Отсюда можно найти и сам вектор, для чего умножим эти формулы на единичные векторы координатных осей $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ и сложим.

$$\boldsymbol{F} = F_x \boldsymbol{i} + F_y \boldsymbol{j} + F_z \boldsymbol{k} = -\left((\frac{\partial E_p}{\partial x})\boldsymbol{i} + (\frac{\partial E_p}{\partial y})\boldsymbol{j} + (\frac{\partial E_p}{\partial z})\boldsymbol{k} \right). \qquad (19.22)$$

В математике вектор с компонентами $\frac{\partial E_p}{\partial x}, \frac{\partial E_p}{\partial y}, \frac{\partial E_p}{\partial z}$ называется градиентом функции E_p и обозначается либо символом grad E_p, либо символом ∇E_p:

$$\boldsymbol{F} = -\,\mathrm{grad}\, E_p, \text{ или } \boldsymbol{F} = -\nabla E_p \qquad (19.23)$$

Вектор градиента скалярной функции направлен в сторону быстрейшего возрастания функции, а модуль этого вектора равен скорости ее возрастания.

Таким образом, *консервативная сила равна градиенту потенциальной энергии частицы, взятому с обратным знаком.*

Пример. Как уже было показано, сила упругости является потенциальной. Потенциальная энергия растянутой пружины определяется выражением $E_p = \frac{1}{2}kx^2$, где x – удлинение пружины, k – жесткость. Направим ось Ox вдоль оси пружины, закрепив один ее конец, а другой будем растягивать рукой. Тогда E_p будет функцией только одной координаты x. Растянутая пружина действует на руку с силой

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x} = -\frac{dE_p}{dx} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}kx^2\right) = -kx.$$

Мы получили известный результат – проекция упру гой силы на ось Ox равна $F_x = -kx$.

§ 20. Кинетическая энергия

Тела могут обладать запасом работы, то есть обладать энергией не только потому, что они занимают определенное положение, но и потому, что они обладают некоторой скоростью.

Запас работы, которую может совершить движущееся тело до полной остановки, представляет собой *кинетическую энергию* тела.

Для вычисления кинетической энергии предположим, что материальная точка массой m движется со скоростью $\boldsymbol{v}$ по криволинейной траектории.

Согласно второму закону Ньютона,

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{F}\ , \qquad (20.1)$$

где $\boldsymbol{F}$ – равнодействующая всех сил, приложенная к точке. Умножим правую и левую части равенства (20.1) скалярно на $d\boldsymbol{s} = \boldsymbol{v}\,dt$.

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\boldsymbol{v}dt = \boldsymbol{F}d\boldsymbol{s}\ . \qquad (20.2)$$

Рассмотрим отдельно скалярное произведение $\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{v}$ вектора $\boldsymbol{v}$ на его элементарное приращение $d\boldsymbol{v}$ (рис. 20.1).

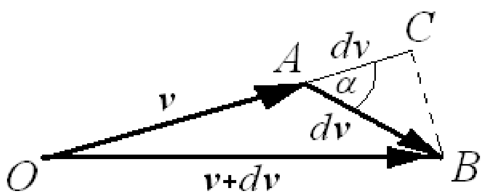


Рис.20.1

По определению скалярного

произведения

$$\mathbf{v}\, d\mathbf{v} = v \cdot AB \cdot \cos\alpha = v \cdot AC = v\, dv.$$

Здесь dv есть элементарное приращение модуля (длины) вектора **v.**

Теперь преобразуем левую часть уравнения (20.2) к виду полного дифференциала:

$$mvdv = \frac{m}{2} d(v^2) = d\left(\frac{mv^2}{2}\right).$$

В правой части (20.2) получилось выражение для элементарной работы dA. В итоге получим:

$$dA = \boldsymbol{F} d\boldsymbol{s} = d\left(\frac{mv^2}{2}\right), \qquad (20.3)$$

Из последней формулы следует, что элементарная работа, произведенная над материальной точкой силой $\boldsymbol{F}$, идет на приращению некоторой величины $\frac{mv^2}{2} + const$.

Функция, изменение которой равно работе всех сил, действующих на частицу, называется ***кинетической энергией.***

Работа является мерой изменения энергии. Обладая кинетической энергией, тело может совершить работу.

Кинетическая энергия является функцией состояния, то есть ее значение не зависит от предшествующих состояний системы и полностью определяется ее настоящим состоянием.

Как видим, кинетическая энергия определяется с точностью до произвольной постоянной. Обычно полагают, что покоящаяся частица кинетической энергией не обладает, так что произвольную постоянную полагают равной нулю:

Половина произведения массы частицы на квадрат ее скорости называется кинетической энергией этой частицы:

$$E_{кин} = \frac{mv^2}{2}. \qquad (20.4)$$

Аналогичное утверждение справедливо также для системы частиц – кинетическая энергия системы материальных точек равна сумме их кинетических энергий.

Кинетическую энергию материальной точки можно также выразить через ее импульс $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$:

$$E_{кин} = \frac{p^2}{2m}. \tag{20.5}$$

(Другие обозначения кинетической энергии T или W).

Подчеркнем практически важный вывод: ***приращение кинетической энергии*** *системы при ее перемещении из положения 1 в положение 2 , происходящее под действием приложенных к системе внешних и внутренних сил , равно* ***сумме работ всех сил*** *на данном перемещении*

$$\Delta E_k = E_{k2} - E_{k1} = \Sigma A^{внеш} + \Sigma A^{внутр}. \tag{20.6}$$

Пользуясь этим законом, можно решать многие задачи динамики, например, определить характер движения тел, не рассматривая силы и не решая системы уравнений, записанных на основе 2-го закона Ньютона.

Пример. Тело движется из состояния покоя сначала вниз по наклонной плоскости, а потом по горизонтальной поверхности до остановки. Длина наклонной плоскости s_1, угол ее наклона к горизонту $\alpha = 10°$. Определить коэффициент трения μ на всем пути, если тело проходит по горизонтальной поверхности такой же путь s_2, что и по наклонной плоскости.

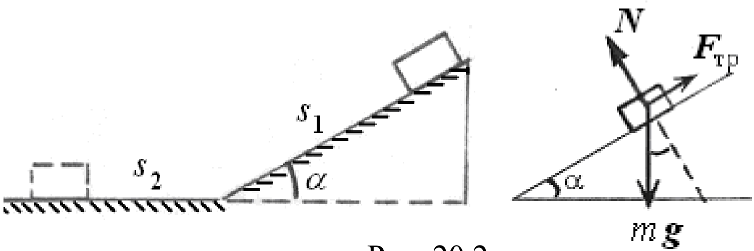


Рис. 20.2.

Работа всех сил, действующих на тело, расходуется на увеличение кинетической энергии тела:

$$A^{всех} = E_{k2} - E_{k1} = 0.$$

Приращение $\Delta E_k = 0$, поскольку на вершине наклонной плоскости тело находилось в состоянии покоя, а в конце горизонтального участка тело остановилось. На участке s_1 на тело действуют силы тяжести, нормальной реакции наклонной плоскости и трения, на участке s_2 – только сила трения. Суммарная работа всех сил равна:

$$A^{всех} = mg{\cdot}s_1{\cdot}\cos(90-\alpha) - \mu mgs_1 \cos\alpha - \mu mg\, s_2 = 0;$$

или

$$mg{\cdot}s_1{\cdot}(\sin\alpha - \mu\cos\alpha - \mu) = 0.$$

Откуда

$$\mu = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

Подставляя числа, найдем $\mu = 0{,}087$.

§ 21. Закон сохранения механической энергии

Полной механической энергией E частицы называется сумма ее кинетической $E_к$ и потенциальной $E_п$ энергии

$$E = E_к + E_п. \qquad (21.1)$$

Пусть частица движется в поле консервативных сил. При переходе из точки *1* в точку *2* совершается работа сил поля, равная убыли потенциальной энергии $A_{12} = E_{п1} - E_{п2}$. С другой стороны, эта работа равна приращению кинетической энергии частицы. Приравняв оба выражения для работы, получим соотношение $E_{п1} - E_{п2} = E_{к2} - E_{к1}$., из которого следует, что

$$E_{к1} + E_{п1} = E_{к2} + E_{п2}. \qquad (21.2)$$

Формула означает, **что *полная механическая энергия частицы, движущейся в стационарном поле консервативных сил, остается постоянной***. Это утверждение выражает *закон сохранения механической энергии* для системы, состоящей из *одной частицы* .

В случае однородного поля силы тяжести полная механическая энергия определяется выражением

$$E = \frac{mv^2}{2} + mgh. \qquad (21.3)$$

Кинетическая энергия и потенциальная энергии могут превращаться друг в друга. Однако если на частицу действуют только консервативные силы, полная энергия остается постоянной.

Справедливость закона сохранения механической энергии легко проверить на примере свободного падения тела на Землю.

Пусть тело свободно падает с высоты *H*. Первоначально его кинетическая энергия равна нулю, а потенциальная энергия равна

mgH. В конце падения скорость тела равна $v = \sqrt{2gH}$. Следовательно, кинетическая энергия тела равна

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{m(\sqrt{2gH})^2}{2} = mgH .$$

Потенциальная энергия в конце падения равна нулю. Сумма энергий в обоих положениях равна mgH. Таким образом, потенциальная энергия превратилась в эквивалентное количество кинетической энергии.

Аналогично формулируется *закон сохранения механической энергии* и для *системы тел*. ***Полная механическая энергия системы тел, находящихся под действием только консервативных сил, остается постоянной.***

$$E = E_к + E_п = \text{const}. \qquad (21.4)$$

Отметим, что закон справедлив как для замкнутой, так и незамкнутой систем. Важно только, чтобы система была консервативной, т.е. в ней действовали *только потенциальные (консервативные) силы.*

Сохранение энергии – фундаментальный закон природы. В основе этого закона лежит такое свойство пространства-времени как *однородность времени*, т.е. неизменность физических законов относительно изменения начала отсчета времени.

Например, при свободном падении тела изменение кинетической и потенциальной энергий, а также скорость падения и пройденный путь зависят только от начальной скорости и промежутка времени падения, но не зависят от выбора начального момента отсчета времени.

При наличии сил трения и сил сопротивления среды, работа которых отрицательна, полная механическая энергия системы уменьшается, переходя во внутреннюю энергию тел, что приводит к их нагреванию. Такой процесс называется *диссипацией* (рассеянием) *энергии*. Силы, приводящие к диссипации энергии, называются диссипативными.

Закон сохранения энергии – один из основных законов природы. Он имеет всеобщий характер и применим ко всем без исключения процессам, происходящим в природе. Полное количество энергии в изолированной системе тел и полей всегда остается постоянным;

энергия ни при каких процессах не исчезает и не создается вновь, она лишь может переходить из одной формы движения материи в другую.

Пример. С какой наименьшей высоты должен скатываться велосипедист, чтобы не упасть в верхней точке «мертвой петли» (рис. 21.1)? Трением пренебречь.

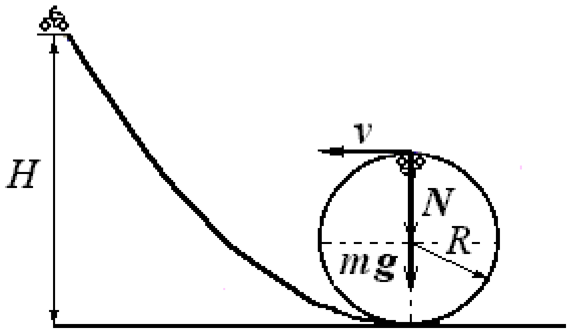


Рис. 21.1

Полная механическая энергия велосипедиста равна: на старте – его потенциальной энергии mgH; в верхней точке петли – сумме кинетической и потенциальной энергии $mg2R + mv^2/2$. По закону сохранения механической энергии:

$$mgH = mg2R + mv^2/2.$$

Рассмотрим предельный случай, когда сила, действующая на велосипедиста со стороны петли – сила реакции $\boldsymbol{N}$ – в верхней точке уменьшается до нуля (момент отрыва). В этом случае нормальное ускорение сообщается только силой тяжести $m\boldsymbol{g}$. Второй закон Ньютона тогда запишется так:

$$\frac{mv^2}{R} = mg\,.$$

Решая совместно оба уравнения, получим $H = (5/2)R$.

§ 22. Соударение тел

Рассмотрим два предельных вида соударения — *абсолютно упругий и абсолютно неупругий удар.*

Ударом тел называют совокупность явлений, которые возникают при кратковременном их взаимодействии вследствие столкновения.

Длительность удара для макротел обычно очень мала ($\sim 10^{-4}$ – 10^{-5} с), вследствие этого при ударах могут развиваться достаточно большие мощности Удар сопровождается изменением скоростей тел.

При соударении тела в большей либо меньшей мере деформируются. При этом кинетическая энергия тел частично или полностью переходит в потенциальную энергию упругой деформации и во внутреннюю энергию тел. Увеличение внутренней энергии сопровождается нагреванием тел.

При ударах возникают достаточно большие силы, по сравнению с которыми постоянно действующими силами (силами тяжести и др.) можно пренебречь и считать систему замкнутой. Это дает возможность применять закон сохранения импульса.

Абсолютно упругим называется такой удар, после которого в телах не остается никаких деформаций, а механическая энергия до и после столкновения не изменяется. Близким к такому удару является столкновение стальных или биллиардных шаров.

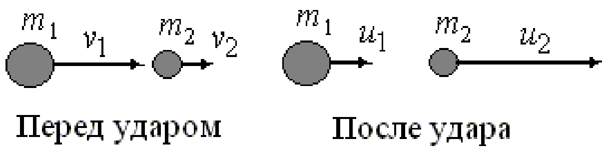


Рис.22.1

Пусть два абсолютно упругих шара с массами m_1 и m_2 до удара движутся поступательно со скоростями $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$, направленными в одну сторону вдоль линии их центров (*центральный* удар) (рис.22.1). Найдем скорости шаров $\boldsymbol{u}_1$ и $\boldsymbol{u}_2$ после соударения.

Для решения этой задачи воспользуемся двумя законами сохранения – импульса и энергии.

По закону сохранения импульса

$$m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2 = m_1\boldsymbol{u}_1 + m_2\boldsymbol{u}_2.$$

По закону сохранения механической энергии (шары движутся в горизонтальной плоскости, и их потенциальная энергия не изменяется)

$$\frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} = \frac{m_1u_1^2}{2} + \frac{m_2u_2^2}{2}.$$

Совместное решение этих уравнений дает формулы для скоростей шаров после удара:

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{2m_2\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_1(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2},$$
$$\boldsymbol{u}_2 = \frac{2m_1\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2}. \quad (22.1)$$

Проанализируем полученные соотношения. Рассмотрим частные случаи.

1). Массы шаров одинаковы ($m_1 = m_2 = m$). Тогда

$$\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{v}_2;\ \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{v}_1,$$

т.е. при ударе шары обмениваются скоростями.

2) Масса второго шара во много раз больше массы первого шара ($m_2 >> m_1$). При этом второй шар до удара неподвижен ($\boldsymbol{v}_2 = 0$). Тогда получим $\boldsymbol{u}_2 \approx 0$ (тяжелый шар остается неподвижным) и $\boldsymbol{u}_1 \approx -\boldsymbol{v}_1$(легкий шар отскакивает от неподвижного массивного шара и движется в обратную сторону с той же скоростью).

3) Масса налетающего шара намного превосходит массу покоящегося: $m_1 >> m_2$, $\boldsymbol{v}_2 = 0$. Тогда $\boldsymbol{u}_1 \approx \boldsymbol{v}_1$ (тяжелый шар не меняет своей скорости) и $\boldsymbol{u}_2 = 2\,\boldsymbol{v}_1$.

Абсолютно неупругим называют такой удар, после которого сохраняются деформации тел, кинетическая энергия тел частично или полностью превращается во внутреннюю энергию; а после удара тела соединяются вместе и движутся как одно целое (рис. 22.2).

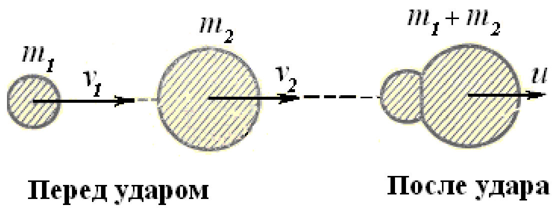


Рис. 22.2

Примерами являются столкновение пластилиновых шаров, захват свободного электрона положительно заряженным ионом и др.

В случае абсолютно неупругого удара закон сохранения механической энергии неприменим, так как часть механической энергии переходит в тепло. Для центрального удара закон сохранения импульса дает

$$m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2 = (m_1 + m_2)\boldsymbol{u},$$

откуда скорость $\boldsymbol{u}$ образовавшегося тела

$$\boldsymbol{u} = \frac{m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2}{m_1 + m_2}. \tag{22.2}$$

Вследствие неупругой деформации тел при ударе их кинетическая энергия частично превращается во внутреннюю энергию Q образовавшегося тела. Работу неупругой деформации тел найдем, если от суммарной кинетической энергии обоих тел отнимем кинетическую энергию образовавшегося тела

$$Q = A_{деф} = \left(\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}\right) - \frac{(m_1 + m_2)u^2}{2},$$

или с учетом (22.2) потеря кинетической энергии

$$A_{деф} = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}(v_1 - v_2)^2. \tag{22.3}$$

Если второе тело до удара неподвижно ($v_2 = 0$), то выражение упрощается

$$A_{деф} = \frac{m_1 v_1^2}{2}\frac{m_2}{m_1 + m_2} = E_{k1}\frac{m_2}{m_1 + m_2}. \tag{22.4}$$

Из формулы (22.4) следуют важные практические выводы.

1. При использовании удара *для изменения формы* неподвижного тела (например, для ковки металла, дробления хрупких тел) необходимо как можно большую часть кинетической энергии подвижного тела преобразовать в работу деформации. Для этого необходимо увеличить массу m_2 неподвижного тела (например, положив его на массивную наковальню). При $m_2 >> m_1$ дробь в формуле (22.4) $\dfrac{m_2}{m_1 + m_2} \to 1$ и почти вся энергия налетающего тела превращается в работу деформации: $A_{деф} \approx E_{k1}$.

2. Если удар применяется *для перемещения* неподвижного тела с целью преодоления сопротивления (забивание гвоздей, свай в землю и т.п.), то желательно уменьшить работу деформации и максимально

сохранить кинетическую энергию обоих тел после удара. Этого можно достичь, уменьшив массу m_2 неподвижного тела (например, гвоздя) и увеличив массу m_1 ударяющего тела (например, молотка). При $m_1 >> m_2$ дробь в формуле (22.4) $\dfrac{m_2}{m_1+m_2} \to 0$ и работа деформации $A_{деф} \to 0$.

Примеры. 1. Для осуществления цепной реакции деления ядер урана необходимо замедлять нейтроны деления, т.е. уменьшать их кинетическую энергию от 2 МэВ до 0,025 эВ. Особенно важно, чтобы уменьшение энергии нейтрона происходило крупными порциями, чтобы избежать значений энергии нейтронов 7 эВ, при которой они резонансно поглощаются, и цепная реакция обрывается.

Замедлителем нейтронов служит тяжелая вода. Нейтроны сталкиваются с ядрами тяжелого водорода – дейтерия, масса ядра которого всего в 2 раза больше массы нейтрона. Будем считать столкновение абсолютно упругим ударом. Определим отношение энергии, потерянной нейтроном при одном соударении, к его первоначальной энергии. Энергия, потерянная нейтроном $\Delta E_{к1}$ (массой m_1), равна энергии, которую получило ядро дейтерия (массой $2m_1$): $\Delta E_{k1} = E'_{k2} = \dfrac{(2m_1)u_2^2}{2}$ Воспользовавшись формулой (22.2) при $v_2 = 0$, получим $u_2 = \dfrac{2m_1}{m_1+2m_1}v_1 = \dfrac{2}{3}v_1$.

Тогда

$$\frac{\Delta E_{k1}}{E_{k1}} = \frac{(2m_1)u_2^2}{2}\,\frac{2}{m_1 v_1^2} = 2\left(\frac{u_2}{v_1}\right)^2 = 2\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}.$$

Таким образом, при одном центральном соударении с ядром дейтерия нейтрон теряет 8/9 своей энергии, т.е. замедление происходит очень эффективно и энергия нейтрона уменьшается крупными порциями. Можно показать, что для уменьшения энергии нейтрона от 2 МэВ до 0,025 эВ должно произойти всего 7 соударений.

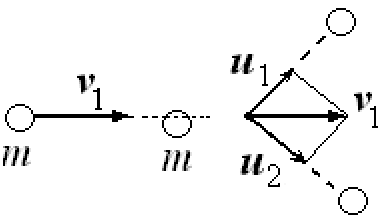


Рис. 22.3

2. При нецентральном (косом) упругом соударении шаров (рис. 22.3) одинаковой массы согласно закону сохранения импульса:

$$m\mathbf{v}_1 = m\mathbf{u}_1 + m\mathbf{u}_2.$$

По закону сохранения энергии

$$\frac{mv_1^2}{2} = \frac{mu_1^2}{2} + \frac{mu_2^2}{2}.$$

После сокращения масс в обоих уравнениях, получим

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2.$$

$$v_1^2 = u_1^2 + u_2^2.$$

Из последнего уравнения следует, что треугольник, в котором $\boldsymbol{v}_1$ – гипотенуза, должен быть по теореме Пифагора прямоугольным. Следовательно, скорости шаров после такого удара должны быть направлены под прямым углом друг к другу. Этот вывод можно проследить в биллиардной игре – при косом ударе шары всегда разлетаются под углом в 90º.

Контрольные вопросы.

1. Может ли сила трения выполнять положительную работу?
2. Тело массой m поднимается на высоту h равномерно по наклонной плоскости, которая образует с горизонтом угол α. Какую работу выполняют: внешняя сила (сила тяги), сила тяжести, сила трения и сила нормальной реакции? Коэффициент трения равен μ.
3. Какие силы называются консервативными? Приведите примеры консервативных сил. Является ли сила трения консервативной силой?
4. В системе действуют неконсервативные силы. Может ли выполняться в такой системе закон сохранения механической энергии?
5. Является ли обязательным требование замкнутости системы для выполнения закона сохранения механической энергии?
6. Чем объясняется произвольность выбора начального уровня отсчета потенциальной энергии?
7. Какова связь между кинетической энергией материальной точки и работой приложенных к точке сил?
8. Какова связь между потенциальной энергией материальной точки и работой консервативных сил?
9. При каком условии замедление нейтронов в ядерном реакторе при упругих столкновениях является наиболее эффективным?
10. При каком условии ударяющее тело отскакивает от ударяемого практически без потери кинетической энергии? Какой импульс при этом получает ударяемое тело?
11. Оцените мощность выделения тепла при торможении грузовика.
12. Между двумя телами разной массы помещена сжатая пружина. Потом пружину отпустили. Как относятся кинетические энергии, которые приобретут тела?

Глава 5. **ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МОМЕНТА ИМПУЛЬСА**

§ 23. Момент силы

Пусть отдельная частица (рис. 23.1) движется относительно точки *O* под действием некоторой силы ***F***. Положение частицы определяется радиус-вектором ***r***, проведенным из точки *O* в точку приложения силы.

Моментом силы ***относительно точки O*** называется **вектор** ***M***, равный векторному произведению радиус-вектора ***r*** точки приложения силы на силу ***F*:**

$$\boldsymbol{M} = [\boldsymbol{rF}]. \tag{23.1}$$

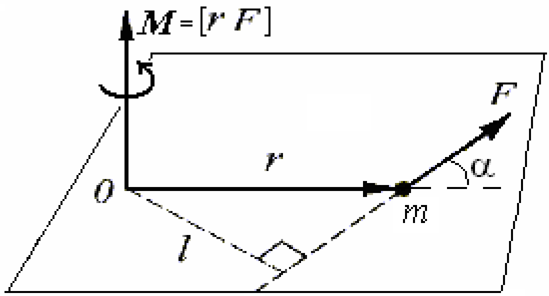


Рис. 23.1.

Направлен вектор момента силы ***M*** перпендикулярно к плоскости, в которой лежат сила и точка *O,* причем так, что направление вращения, обусловленного силой, и направление вектора ***M*** связаны правилом правого винта – поворот головки винта в направлении силы вызывает перемещение винта в направлении вектора ***M***.

Модуль момента силы

$$M = Fr \sin\alpha = Fl. \tag{23.2}$$

Плечом l силы называют длину перпендикуляра, опущенного из точки *O* на линию действия силы (рис. 23.1). Таким образом, модуль момента силы равен произведению модуля силы *F* на ее плечо *l*.

Поскольку направление вектора ***M*** определяется условно, его называют псевдовектором (аксиальным вектором).

Пусть произвольно направленная сила ***F*** приложена к одной из точек твердого тела, которое может вращаться вокруг закрепленной оси (рис 23.2).

Р*азложим силу* ***F*** *на три* взаимно перпендикулярных составляющих. Одна из составляющих $\boldsymbol{F}_{||}$, параллельная оси, вращать тело вокруг оси не может, она лишь изгибает ось вращения. Вторая составляющая $\boldsymbol{F}_\perp$, перпендикулярная оси, также не может вращать тело. Следовательно, не всякая сила может вызвать вращение. Мы должны учитывать действие только составляющей $\boldsymbol{F}_\tau$, лежащей в плоскости, перпендикулярной к оси вращения и направленной по касательной к окружности, которую описывает точка приложения силы. Сила F_τ называется *вращающей* силой.

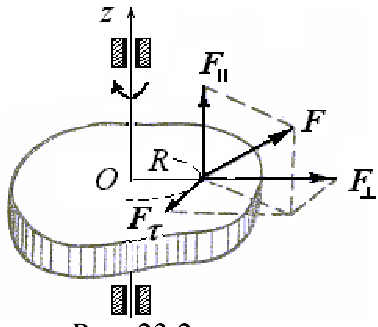


Рис. 23.2.

Вращающее действие силы определяется ее численным значением и расстоянием от оси до линии действия силы.

Рассмотрим вращение твердого тела вокруг оси z *под действием только вращающей силы* (рис. 23.3). Ее обозначим буквой $\boldsymbol{F}$, опуская индекс τ.

Момент силы ***относительно оси*** определяется как **скалярная** величина, равная *проекции* M_z *на ось* z вектора *момента силы* $\boldsymbol{M} = [\boldsymbol{rF}]$ *относительно некоторой точки O,* принадлежащей оси (рис. 23.3). Здесь $\boldsymbol{r}$ - радиус-век-тор, определяющий положение точки приложения силы $\boldsymbol{F}$ относи-тельно точки O.

Покажем, что выбор этой точки на оси значения не имеет. Поскольку радиус-вектор точки приложения силы $\boldsymbol{r}$ и сила $\boldsymbol{F}$ взаимно перпендикулярны (рис. 23.3), то модуль векторного произведения $[\boldsymbol{rF}]$ равен

$$M = rF \sin 90^\circ = rF\ .$$

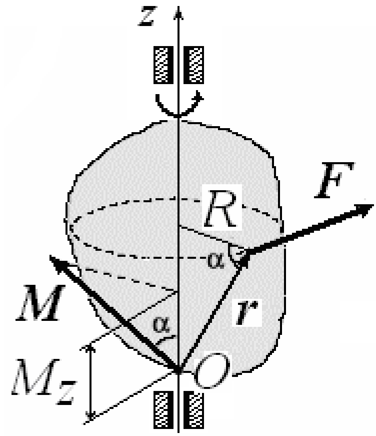


Рис. 23.3

Тогда проекция вектора $\boldsymbol{M}$ на ось z

$$M_z = M \cos \alpha = rF \cos \alpha. \qquad (23.3)$$

Как следует из рис. 23.3

$$r \cos \alpha = R.$$

Отрезок R называют плечом силы относительно оси.

Плечом R силы ***F*** относительно данной оси z называется кратчайшее расстояние между осью вращения тела и линией действия силы.

Таким образом, момент силы относительно оси определяется только модулем и плечом силы, а они не зависят от положения точки O:

$$M_z = F\,R. \qquad (23.4)$$

Момент силы измеряется в ньютон-метрах. (1 Н•м).

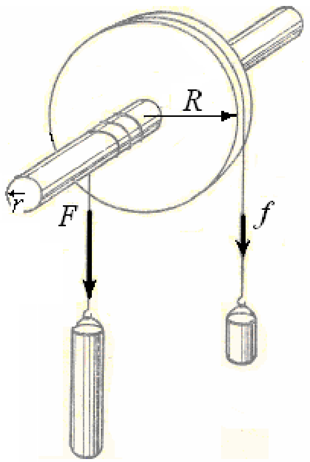


Рис. 23.4.

Пример. Пусть на вал с диском действуют две силы $\boldsymbol{f}$ и $\boldsymbol{F}$ (рис.23.4). Опыт показывает, что равновесие наступает при условии $fR = Fr$, т.е. когда моменты сил равны по величине и противоположны по направлению. Моменты сил, вращающих по часовой стрелке, считаются положительными, а против часовой стрелки – отрицательными.

§ 24. Момент импульса частицы

Пусть отдельная частица массой m движется со скоростью $\boldsymbol{v}$ (рис. 24.1). Импульс этой частицы $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$. Положение частицы относительно некоторой точки O определяется радиус-вектором $\boldsymbol{r}$.

Моментом импульса ***частицы относительно точки O*** называется **вектор** $\boldsymbol{L}$, равный векторному произведению радиус-вектора $\boldsymbol{r}$ и импульса $\boldsymbol{p}$:

$$\boldsymbol{L} = [\boldsymbol{rp}] = [\boldsymbol{r}, m\boldsymbol{v}]. \qquad (24.1)$$

Модуль момента импульса равен

$$L = rp \sin \alpha = lp, \qquad (24.2)$$

где α- угол между векторами $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{p}$, $l = r \sin \alpha$ – расстояние от точки O до прямой, вдоль которой направлен импульс частицы – *плечо импульса*.

Направление вектора $\boldsymbol{L}$ перпендикулярно к плоскости, в которой лежат векторы $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{p}$. Направление вращения вокруг точки O и направление вектора $\boldsymbol{L}$ образуют правовинтовую систему.

Из определения следует, что $\boldsymbol{L}$, как и $\boldsymbol{M}$, является псевдовектором (аксиальным вектором).

Частица обладает моментом импульса, независимо от формы траектории, по которой она движется. Рассмотрим два частных случая.

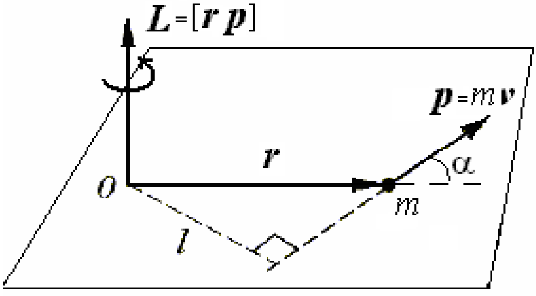


Рис. 24.1.

1. Частица движется вдоль прямолинейной траектории с постоянной скоростью (рис. 24.1). При таком движении плечо l остается постоянным. Модуль момента импульса относительно точки O

$$L = mvl \qquad (24.3)$$

и направление вектора $\boldsymbol{L}$ не изменяются.

2. Частица движется по окружности радиуса r с постоянной скоростью $\boldsymbol{v}$ (рис.24.2). Плечо импульса относительно центра окружности постоянно. Модуль момента импульса относительно центра окружности O равен

$$L = mvr \qquad (24.4)$$

и остается постоянным. Несмотря на непрерывное изменение направления вектора $\boldsymbol{p}$, направление вектора $\boldsymbol{L}$ остается постоянным.

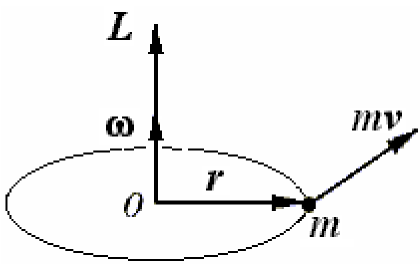


Рис. 24.2

Выясним, какая механическая величина ответственна за изменение вектора $\boldsymbol{L}$. Продифференцируем выражение (24.1) по времени:

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \frac{d}{dt}[\boldsymbol{rp}] = \left[\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\,\boldsymbol{p}\right] + \left[\boldsymbol{r}\,\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}\right].$$

Поскольку производная радиус-вектора по времени есть скорость частицы, $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{v}$, то первое слагаемое приобретает вид $[\boldsymbol{v}, m\boldsymbol{v}]$ и равно нулю, так как является векторным произведением коллинеарных векторов (вектора самого на себя).

Во втором слагаемом, согласно второму закону Ньютона, производную импульса можно заменить силой, действующей на тело, $\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{F}$. Тогда получится:

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = [\boldsymbol{rF}].$$

В правой части равенства стоит момент силы $\boldsymbol{F}$ относительно той же точки, относительно которой взят момент импульса $\boldsymbol{L}$. Следовательно, мы приходим к соотношению

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{M} \qquad (24.5)$$

согласно которому *производная по времени момента импульса* ***частицы относительно*** *некоторой* ***точки*** *равна моменту действующей силы относительно той же точки.*

Уравнение (24.5) называют *основным законом динамики вращательного движения материальной точки или уравнением моментов*. По форме это уравнение аналогично второму закону Ньютона $\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{F}$, только вместо импульса частицы $\boldsymbol{p}$ стоит момент импульса $\boldsymbol{L}$, а вместо силы $\boldsymbol{F}$ – момент силы $\boldsymbol{M}$.

Из уравнения моментов (24.5) следует, что если $\boldsymbol{M}$ = 0, то $\boldsymbol{L}$ = const, т.е. момент импульса частицы остается постоянным в отсутствие моментов сил, действующих на нее.

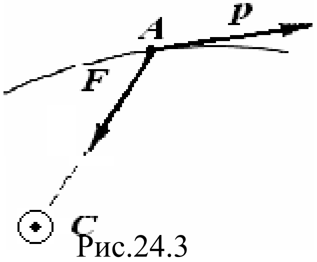


Рис.24.3

Примеры. 1 . Пусть некоторая планета *A* движется в поле тяготения Солнца *C* (рис. 24.3). На планету действует только сила тяготения $\boldsymbol{F}$ со стороны Солнца. Так как по закону всемирного тяготения направление этой силы все время проходит через центр Солнца, то момент $\boldsymbol{M}$ силы $\boldsymbol{F}$ относительно центра Солнца равен нулю, и, следовательно, момент импульса $\boldsymbol{L}$ планеты будет оставаться постоянным. Если вектор момента импульса $\boldsymbol{L}$ сохраняется, то сохраняется и его направление.

Момент импульса перпендикулярен плоскости, в которой лежат импульс планеты и радиус-вектор, проведенный из центра Солнца. Следовательно, эта плоскость не меняет своего положения со временем. Иными словами, орбита каждой планеты лежит в одной плоскости, проходящей через Солнце, т.е. является плоской кривой.

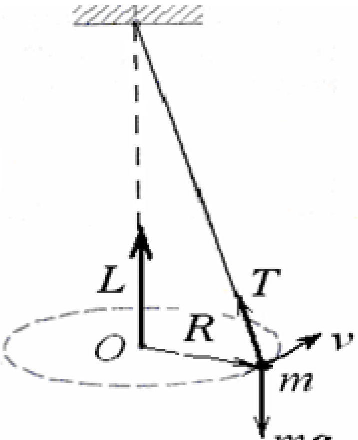


Рис. 24.4

2. Небольшое тело массой m, подвешенное на нити (рис. 24.4), равномерно движется со скоростью $\boldsymbol{v}$ по окружности радиуса R в горизонтальной плоскости под действием силы тяжести $m\boldsymbol{g}$ и силы натяжения нити $\boldsymbol{T}$. Определить модуль и направление момента импульса тела относительно точки O. Установить, сохраняется ли момент импульса тела относительно точки O.

По определению момент импульса частицы относительно точки O равен векторному произведению радиус-вектора частицы на ее импульс: $\boldsymbol{L} = [\boldsymbol{R}, m\boldsymbol{v}]$. Направлен вектор момента импульса перпендикулярно плоскости, в которой лежат векторы-сомножители по правилу правого винта, т.е. как показано на рисунке – по оси вращения вверх. Модуль вектора $\boldsymbol{L}$ равен

$$L = R\,mv \sin(\pi/2) = mvR.$$

Согласно уравнению моментов (24.5) производная по времени от момента импульса $\boldsymbol{L}$ частицы относительно некоторой точки O равна моменту равнодействующей силы относительно той же точки O:

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{M}\ .$$

Определим суммарный момент сил, действующих на частицу:

$$\boldsymbol{M} = [\boldsymbol{R}, m\boldsymbol{g}]. + [\boldsymbol{R}, \boldsymbol{T}]. = [\boldsymbol{R}, (m\boldsymbol{g} + \boldsymbol{T})] = [\boldsymbol{R}, \boldsymbol{F}] = 0$$

Здесь через $\boldsymbol{F}$ обозначен вектор, равный сумме векторов силы тяжести и натяжения нити, который, естественно, направлен по радиусу к центру окружности. Равенство нулю векторного произведения вытекает из того, что $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{F}$ – коллинеарные векторы.

Тогда имеем $\dfrac{d\boldsymbol{L}}{dt} = 0$, откуда $\boldsymbol{L}$ = const, т.е. момент импульса частицы относительно точки O сохраняется.

Рассмотрим частицу, которая движется по окружности. Выразим в формуле момента импульса частицы (24.1) вектор линейной скорости как векторное произведение угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ на радиус-вектор $\boldsymbol{r}$

$$\boldsymbol{v} = [\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{r}].$$

Тогда для момента импульса $\boldsymbol{L}$ получим двойное векторное произведение:

$$\boldsymbol{L} = [\boldsymbol{r}\boldsymbol{p}] = [\boldsymbol{r}, m[\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{r}]].$$

Воспользуемся формулой для двойного векторного произведения:

$$[\boldsymbol{a}[\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}]] = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}),$$

(ее запоминают по мнемоническому правилу *«бац минус цаб»*). Круглыми скобками обозначено здесь скалярное произведение векторов.

Момент импульса частицы относительно точки приобретает вид

$$\boldsymbol{L} = m(\boldsymbol{\omega}\,(\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{r}\,(\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{\omega})) = (mr^2)\boldsymbol{\omega}. \tag{24.6}$$

В первом слагаемом (24.6) стоит скалярное произведение вектора самого на себя, оно равно квадрату модуля вектора:

$$(\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{r}) = r^2.$$

Второе слагаемое равно нулю, так как $(\boldsymbol{r}\ \boldsymbol{\omega}) = 0$ (скалярное произведение двух взаимно перпендикулярных векторов равно нулю).

Произведение массы частицы на квадрат ее расстояния до оси вращения называют *моментом инерции частицы* и обозначают I.

$$I = mr^2. \tag{24.7}$$

Тогда момент импульса отдельной частицы запишется:

$$\boldsymbol{L} = I\boldsymbol{\omega}. \tag{24.8}$$

Если момент инерции I частицы остается постоянным, то, вычисляя производную от последнего выражения, получим

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(I\boldsymbol{\omega}\right) = I\,\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}. \tag{24.9}$$

Заменяя производную угловой скорости по времени через угловое ускорение, $d\boldsymbol{\omega}/dt = \boldsymbol{\varepsilon}$, с учетом уравнения (24.5) получим *основное уравнение динамики вращения отдельной частицы:*

$$\boldsymbol{M} = I\boldsymbol{\varepsilon}. \tag{24.10}$$

Угловое ускорение **ε**, приобретаемое частицей под действием данного вращающего момента силы $\boldsymbol{M}$, прямо пропорционально величине этого момента.

Определим теперь *момент импульса* ***частицы относительно оси***. Пусть момент импульса частицы относительно некоторой точки *O* в данной системе отсчета равен $\boldsymbol{L}$.

Проведем через выбранную точку *O* произвольную неподвижную ось *z* (рис.24.5).

С к а л я р н а я величина L_z, равная *проекции вектора* $\boldsymbol{L}$ на ось *z*, проходящую через точку *O*, называется *моментом импульса частицы* ***относительно оси.***

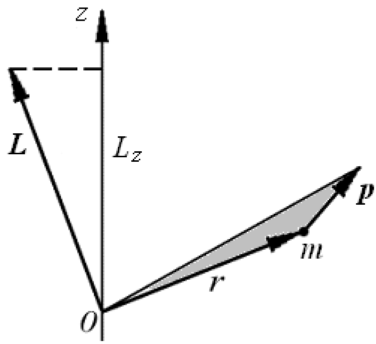


Рис. 24.5.

Спроектировав векторы, входящие в уравнение моментов (24.5) на произвольную ось, проходящую через точку *O*, получим соотношение для момента импульса частицы относительно оси:

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z . \tag{24.11}$$

Производная по времени от момента импульса частицы относительно оси равна моменту силы относительно этой оси.

§ 25. Закон сохранения момента импульса

Перейдем от одной частицы к произвольной *системе частиц.* Введем понятие *момента импульса* $\boldsymbol{L}$ *системы частиц* ***относительно точки O*** как векторной суммы моментов импульсов $\boldsymbol{L}_i$ ее отдельных частиц относительно той же точки:

$$\boldsymbol{L} = \sum \boldsymbol{L}_i . \tag{25.1}$$

Заметим, что момент импульса системы - величина *аддитивная*. Это означает, что момент импульса системы равен сумме моментов импульсов ее отдельных частей независимо от того, взаимодействуют они между собой или нет.

Дифференцирование (25.1) по времени дает:

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \sum \frac{d\boldsymbol{L}_i}{dt}. \qquad (25.2)$$

В соответствии с уравнением моментов (24.5) для каждой из частиц, на которые действуют как внутренние, так и внешние силы, можно написать равенство

$$\frac{d\boldsymbol{L}_i}{dt} = \boldsymbol{M}_{i,внутр} + \boldsymbol{M}_{i,внеш}, \qquad (25.3)$$

где $\boldsymbol{M}_{i\,внутр}$ — момент внутренних сил, а $\boldsymbol{M}_{i\,внеш}$ — момент внешних сил, действующих на i-ю частицу. Подстановка этих равенств в (25.2) приводит к соотношению

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \sum \boldsymbol{M}_{i,внутр} + \sum \boldsymbol{M}_{i,внеш}. \qquad (25.4)$$

Внутренние силы – это силы взаимодействия между частицами. По третьему закону Ньютона внутренние силы всегда существуют попарно. Это означает, что силе $\boldsymbol{F}_{ik}$, с которой k-я точка действует на i-ю, соответствует равная и противоположно направленная сила $\boldsymbol{F}_{ki}$, с которой i –я точка действует на k-ю. Эти две силы направлены вдоль одной прямой, т.е. имеют одинаковое плечо относительно любой точки. Моменты таких сил попарно равны по величине и противоположны по направлению. Поэтому сумма моментов всех внутренних сил равна нулю.

Тогда получаем окончательно, что

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \sum \boldsymbol{M}_{i,внеш}. \qquad (25.5)$$

Уравнение (25.5) утверждает, что *производная по времени от момента импульса* ***системы относительно точки*** *равна сумме моментов внешних сил относительно той же точки.*

Другими словами, момент импульса системы может изменяться только под действием суммарного момента всех внешних сил.

Если система замкнута (т. е. внешних сил нет), правая часть равенства (25.5) равна нулю и, следовательно, вектор момента импульса системы остается постоянным, т.е. не изменяется со временем. Отсюда непосредственно вытекает **закон сохранения момента импульса:**

Если система замкнута или суммарный момент внешних сил, действующих на нее, равен нулю, то суммарный момент

импульса системы относительно некоторой точки остается постоянным.

$$\boldsymbol{L} = \Sigma \boldsymbol{L}_i(t) = \text{const}. \qquad (25.6)$$

При этом моменты импульса отдельных частиц системы могут изменяться со временем. Например, при столкновениях частиц момент импульса может передаваться от одной частицы к другой. Однако эти изменения всегда происходят так, что приращение момента импульса одной частицы равно убыли момента импульса другой, а полный момент импульса системы относительно некоторой точки остается постоянным.

Примеры. 1. На рис.25.1 показана схема превращения нейтрона n в протон p при β-распаде внутри ядра . Из необходимости выполнения законов сохранения энергии, импульса и момента импульса швейцарским физиком В.Паули была выдвинута гипотеза о том, что при этом превращении наряду с электроном e образуется еще одна частица – электронное антинейтрино $\tilde{\nu}_e$, которая впоследствии была обнаружена экспериментально.

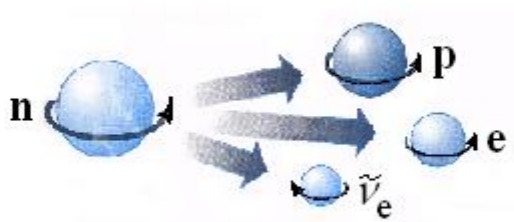


Рис. 25.1

2. При обтекании потоком воздуха крыла самолета вблизи острой задней кромки крыла возникают вихри, вращающиеся в случае, изображенном на рис. 25.1, против часовой стрелки. Вихри эти растут, отрываются от крыла и уносятся потоком. Остальная масса воздуха вблизи крыла получает при этом согласно закону сохранения момента импульса противоположное вращение (по часовой стрелке), образуя циркуляцию воздуха около крыла.

Циркуляционный поток вокруг контура крыла направлен на более выпуклой части поверхности в сторону течения воздуха, что приводит к увеличению скорости, а на менее выпуклой – против течения, что приводит к её уменьшению.

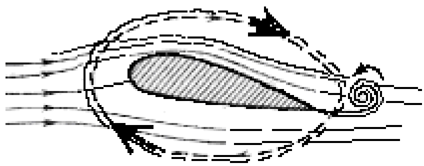


Рис. 25.2.

Согласно уравнению Бернулли там, где скорость частиц меньше, давление среды больше и наоборот. В результате давление воздуха на нижнюю поверхность крыла будет больше, чем на верхнюю. Это и приводит к появлению подъемной силы крыла самолета.

Если спроектировать векторы, входящие в формулу (25.5) на произвольную ось z, проходящую через точку O, то получим для *системы частиц уравнение моментов* ***относительно оси z***:

$$\frac{d}{dt}L_z = \sum M_{внеш,z} \tag{25.7}$$

В атомной физике понятие момента импульса элементарных частиц расширяется и обобщается, а закон его сохранения рассматривается как общефизический принцип.

Вместе с законами сохранения импульса и энергии закон сохранения момента импульса является фундаментальным законом природы.

В основе закона сохранения момента импульса лежит *изотропность* пространства, т. е. равноправие всех направлений. Все явления в замкнутой физической системе будут происходить точно так же, если всю систему как целое повернуть на некоторый угол. Движение частиц друг относительно друга после поворота будет таким же, каким оно было бы, если бы поворот не был осуществлен. В этом проявляются свойства симметрии законов природы.

Контрольные вопросы.

1. Какой величиной – скалярной или векторной – является момент импульса частицы относительно некоторой точки? Относительно оси?

1. Частица движется по окружности. Как направлен момент импульса частицы относительно центра окружности?

2. Обладает ли частица, движущаяся прямолинейно, моментом импульса относительно некоторого центра?

3. На тонкой нерастяжимой нити подвешен шарик (материальная точка) массой m, который совершает движение в горизонтальной плоскости. Нить образует угол α с вертикалью. Как направлен момент импульса шарика относительно точки подвеса? Остается ли он неизменным?

4. Центральными называются силы, линии действия которых в каждой точке пространства направлены в одну и ту же точку – силовой центр. Примером поля центральных сил может служить гравитационное поле, создаваемое шаром. Частица движется в поле центральных сил. Может ли центральная сила вызвать изменение момента импульса?

5. Можно ли применить закон сохранения момента импульса не к полному вектору $\boldsymbol{L}$, а только к его проекции на какое-либо направление?

Глава 6. **ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА, ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ**

Твердое тело можно рассматривать как систему частиц и применять к нему полученные для системы закономерности. Однако, в такой системе частиц как твердое тело есть особенности – расстояния между частицами системы остаются неизменными. Это приводит к появлению новой динамической характеристики движения – момента инерции твердого тела, а также упрощает уравнения движения рассмотрением проекций векторов полных моментов импульса системы $\boldsymbol{L}$ и внешних сил $\boldsymbol{M}$ на ось вращения.

Как уже отмечалось, любое движение твердого тела можно представить в виде наложения двух простых движений: *поступательного* движения тела, характеризуемого движением любой его точки, и *вращения* тела вокруг осей, проходящих через эту точку.

Поступательное движение тела – самое простое. При поступательном движении все точки тела движутся по одинаковым траекториям с одинаковыми скоростями. Поэтому все тело можно рассматривать как одну материальную точку и применять к ней законы динамики. Такой точкой, движение которой эквивалентно движению твердого тела, является центр масс тела. Центр масс твердого тела движется так, как двигалась бы материальная точка, масса которой равна массе тела, под действием результирующей внешних сил, действующих на тело.

Что же касается динамики вращательного движения твердого тела, то мы будем рассматривать простейший случай – вращение твердого тела вокруг неподвижной оси.

§ 26. Кинетическая энергия вращающегося твердого тела

Чтобы определить кинетическую энергию вращающегося твердого тела мысленно разобьем его на отдельные частицы (рис. 26.1).

При вращении вокруг неподвижной оси частицы тела с массами Δm_i описывают окружности различных радиусов r_i и имеют различные линейные скорости v_i .

Поэтому формула кинетической энергии $E_k = mv^2/2$ для всего тела целиком неприменима.

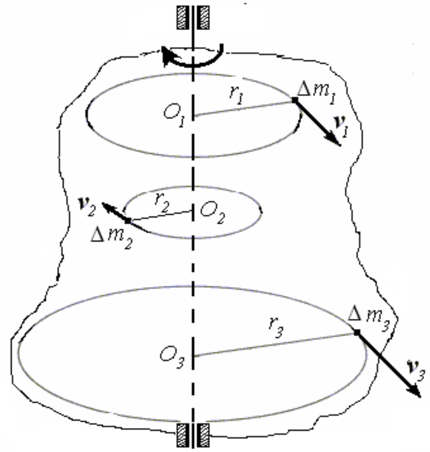


Рис.26.1.

Тогда представим кинетическую энергию вращающегося тела $E_k^{вр}$ как сумму кинетических энергий его составных частей:

$$E_k^{вр} = \frac{\Delta m_1 v_1^2}{2} + \frac{\Delta m_2 v_2^2}{2} + \ldots + \frac{\Delta m_N v_N^2}{2} =$$

$$\frac{\Delta m_1 r_1^2 \omega^2}{2} + \frac{\Delta m_2 r_2^2 \omega^2}{2} + \ldots + \frac{\Delta m_N r_N^2 \omega^2}{2} = \qquad (26.1)$$

$$\frac{\omega^2}{2}(\Delta m_1 r_1^2 + \Delta m_2 r_2^2 + \ldots + \Delta m_N r_N^2).$$

Здесь мы использовали тот факт, что угловая скорость ω вращения всех частиц тела одинакова, т.е. $v_1 = \omega\, r_1$, $v_2 = \omega\, r_2$, $v_3 = \omega\, r_3$ и т.д.

В формуле (26.1), выражение $\Delta m_1\, r_1^2 + \Delta m_2\, r_2^2 + \Delta m_3\, r_3^2 + \ldots + \Delta m_N\, r_N^2$ не зависит от скорости вращения и является некоторой характеристикой данного тела.

Сумма произведений масс элементарных частей тела на квадраты их расстояний до определенной оси называется ***моментом инерции тела*** *относительно этой оси:*

$$I = \Delta m_1 r_1^2 + \Delta m_2 r_2^2 + \ldots \Delta m_N r_N^2 = \sum_{i=1}^{N} \Delta m_i r_i^2. \qquad (26.2)$$

Единицы измерения момента инерции – кг·м^2.

Тогда кинетическая энергия вращающегося тела

$$E_k^{вр} = \frac{I\omega^2}{2} \qquad (26.3)$$

выражается так же, как и кинетическая энергия тела при поступательном движении $E_k = \dfrac{mv^2}{2}$, только вместо массы следует подставить *момент инерции* тела I, а вместо *линейной* скорости – *угловую* скорость ω.

§ 27. Момент инерции

Как следует из определения (26.2), для вычисления момента инерции тела необходимо мысленно разбить его на достаточно малые элементы, определить расстояние каждого элемента от оси, затем умножить массу каждого элемента на квадрат расстояния до оси, проделать это для всех элементов и результат сложить.

Если в выражении (26.2) для момента инерции заменить малые конечные элементы тела бесконечно малыми элементами, то в пределе сумма перейдет в интеграл

$$I = \int_V r^2 dm = \int_V r^2 \rho dV . \qquad (27.1)$$

Следовательно, вычисление моментов инерции тел сводится к вычислению объемных интегралов.

Как видно из формулы (26.2), момент инерции тела зависит не только от величины массы тела, но и от распределения массы рассматриваемого тела относительно заданной оси. Частицы, лежащие вдали от оси, вносят в сумму значительно больший вклад, чем близкие частицы. Удаляя частицы тела от оси или удаляя ось от тела, мы тем самым увеличиваем момент инерции тела относительно этой оси.

Если вычислять, например, момент инерции тонкой спицы относительно ее длинной оси OO (рис 27.1, *а*), то момент инерции будет очень мал – все точки лежат очень близко к оси, и, следовательно, все величины r_1^2, r_2^2,…, входящие в формулу для I, также малы. Момент инерции будет гораздо больше относительно оси, перпендикулярной к спице и проходящей через ее середину(рис 27.1, *б*), и еще больше, если ось проходит через край спицы (рис 27.1, *в*).

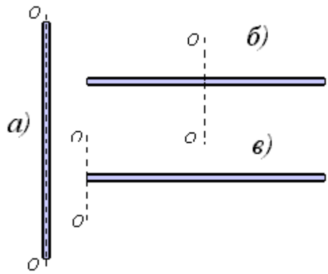
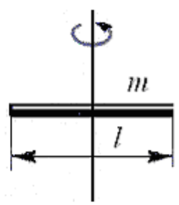
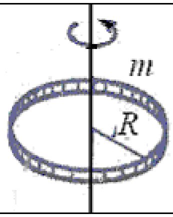


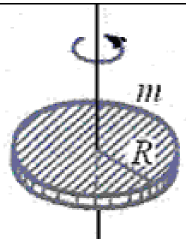
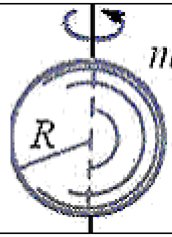
Рис. 27.1

Из формулы (27.2) очевидно также, что момент инерции одной материальной точки равен $I = mr^2$.

Для некоторых тел симметричной формы моменты инерции, вычисленные интегрированием, приведены в таблице.

Таблица 6.1

Тело		*Ось, относительно которой определяется момент инерции*	*Момент инерции*
Однородный тонкий стержень массой m и длиной l		Проходит через центр масс стержня перпендикулярно стержню	$\frac{1}{12}ml^2$
		Проходит через конец стержня перпендикулярно стержню	$\frac{1}{3}ml^2$
Тонкое кольцо, обруч, труба, маховик с массой, распределенной по ободу,		Ось симметрии	mR^2

радиусом R и массой m			
Круглый однородный диск, сплошной цилиндр радиусом R и массой m		Ось симметрии	$\frac{1}{2}mR^2$
Однородный шар радиусом R и массой m		Проходит через центр шара	$\frac{2}{5}mR^2$

В приведенных в таблице примерах оси проходят через центр масс тела. Момент инерции относительно других осей определяется согласно теореме Штейнера (приводится без доказательства): *если известен момент инерции I_C данного тела относительно оси, проходящей через центр масс этого тела, то момент инерции I относительно параллельной оси, отстоящей на расстояние a (рис.27.2), определяется формулой:*

$$I = I_C + ma^2. \qquad (27.2)$$

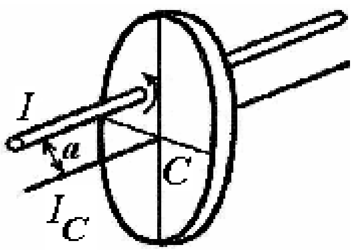


Рис. 27.2.

Пример. Момент инерции диска массой m и радиусом R относительно оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через середину радиуса, равен

$$I = \frac{1}{2}mR^2 + m\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}mR^2.$$

§ 28. Работа и мощность внешних сил при вращении твердого тела

При вращении твердого тела вокруг неподвижной оси траектории всех частиц являются окружностями, центры которых лежат на оси.

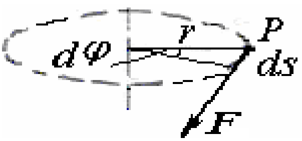


Рис. 28.1.

Определим величину работы dA, которую совершает вращающая сила $\boldsymbol{F}$, если точка P приложения ее смещается по окружности радиуса r на бесконечно малую величину $ds = rd\varphi$ (рис. 28.1). При этом модуль силы F будем считать постоянным. Тогда элементарная работа силы

$$dA = F\,ds = F\,r\,d\varphi. \qquad (28.1)$$

Произведение модуля вращающей силы F на плечо r дает момент M_z вращающей силы относительно оси вращения. Следовательно, *работа, совершаемая вращающим моментом, равна произведению этого момента на угол поворота тела:*

$$dA = M_z\,d\varphi. \qquad (28.2)$$

Работа силы при повороте тела на конечный угол φ_0 определится как интеграл

$$A = \int_{0}^{\varphi_0} M_z(\varphi)\,d\varphi\,. \qquad (28.3)$$

Чтобы определить мгновенную *мощность* N, развиваемую силой при вращении твердого тела, разделим работу (28.2) на элементарный промежуток времени dt, на протяжении которого выполнялась работа:

$$N = \frac{dA}{dt} = M_z\frac{d\varphi}{dt} = M_z\omega\,, \qquad (28.4)$$

где ω – численное значение угловой скорости тела.

§ 29. Момент импульса твердого тела относительно оси. Уравнение динамики вращения твердого тела относительно неподвижной оси

Для вычисления момента импульса твердого тела относительно оси разобьем тело, на отдельные частицы массой Δm_i (рис.29.1).

Каждая такая частица движется вокруг оси вращения по окружности со скоростью $\boldsymbol{v_i}$, касательной к этой окружности. Положение частицы относительно точки *O* характеризуется радиус-вектором $\boldsymbol{r_i}$.

Момент импульса отдельной *i*-й частицы *относительно точки O* по определению равен векторному произведению:

$$\boldsymbol{L_i} = [\boldsymbol{r_i}, \Delta m_i \boldsymbol{v_i}].$$

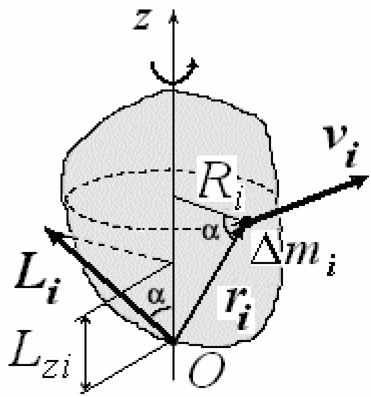


Рис.29.1.

Момент импульса этой частицы *относительно оси* равен проекции L_{zi} вектора $\boldsymbol{L_i}$ на ось, проходящую через точку *O*.

$$L_{zi} = L_i \cos \alpha = r_i \, \Delta m_i \, v_i \cos \alpha. \tag{29.1}$$

Из рисунка следует, что

$$r_\mathrm{i} \cos \alpha = R_\mathrm{i} . \tag{29.2}$$

С учетом формулы, связывающей модули линейной и угловой скорости, $v_i = \omega R_i$, получим

$$L_{zi} = \omega \, \Delta m_i \, R_i^2. \tag{29.3}$$

Суммируя по всем элементам тела, определим *момент импульса тела относительно оси* z*:*

$$L_\mathrm{z} = \Sigma L_{zi}{:}{=}\Sigma \, \omega \, \Delta m_i \, R_i^2.$$

Величину ω как одинаковую для всех частиц можно вынести из-под знака суммы. Тогда

$$L_z = \omega \, \Sigma \, \Delta m_i \, R_i^2 . \tag{29.4}$$

Выражение $\Sigma \, \Delta m_i \, R_i^2$ – сумма произведений элементарных масс на квадраты их расстояний от оси – представляет собой момент инерции тела относительно оси вращения z. Окончательно выражение для *момента импульса тела относительно оси z* запишется в виде

$$L_z = I_z\,\omega, \qquad (29.5)$$

т.е. *момент импульса тела относительно оси вращения равен произведению момента инерции тела относительно этой же оси на угловую скорость вращения вокруг этой оси.*

Момент импульса всего *тела относительно точки O* равен сумме моментов импульса элементарных масс

$$\boldsymbol{L} = \Sigma\,\boldsymbol{L}_i\,. \qquad (29.6)$$

В случае несимметричного тела этот суммарный вектор ***L*** направлен под произвольным углом к оси вращения.

В случае однородного тела, симметричного относительно оси вращения, и нахождения точки *O* на оси симметрии направление момента импульса тела ***L*** совпадает с направлением его угловой скорости **ω.** В этом случае всегда найдется пара симметричных точек, для которых составляющие вектора ***L*** в направлении перпендикулярном оси вращения, компенсируют друг друга.

Следовательно, для симметричного тела, вращающегося вокруг оси симметрии справедливо векторное равенство:

$$\boldsymbol{L} = I_z\,\boldsymbol{\omega}. \qquad (29.7)$$

Момент импульса ***симметричного тела****, вращающегося вокруг оси симметрии, равен произведению его момента инерции относительно этой оси на угловую скорость.*

Рассматривая твердое тело как систему материальных точек, применим к нему уравнение моментов для системы частиц (25.7) – производная по времени от момента импульса тела относительно оси равна сумме моментов внешних сил, которые действуют на тело, относительно этой оси.

$$\frac{dL_z}{dt} = \frac{d}{dt}(I_z\omega) = I_z\frac{d\omega}{dt} = \sum M_{z\,внеш}\,. \qquad (29.8)$$

Производная угловой скорости – это угловое ускорение

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}.$$

Мы пришли к *основному уравнению динамики вращательного движения твердого тела:*

$$I_z \varepsilon = \sum M_z^{внеш} \, . \qquad (29.9)$$

Суммарный момент внешних сил относительно оси, вращающих тело вокруг данной оси, равен моменту инерции тела относительно этой оси, умноженному на угловое ускорение тела.

Уравнение (29.9) аналогично уравнению второго закона Ньютона $ma_z = \Sigma F_z$. В нем роль массы играет момент инерции, роль линейного ускорения – угловое ускорение, роль результирующей силы – суммарный момент внешних сил.

Угловое ускорение, приобретаемое телом под действием данного вращающего момента M_z, прямо пропорционально величине этого момента и обратно пропорционально моменту инерции тела относительно оси вращения

$$\varepsilon = \frac{M_z}{I} \, . \qquad (29.10)$$

Из последней формулы видно, что момент инерции твердого тела относительно какой-либо неподвижной оси является *мерой инертности* этого тела во вращении вокруг данной оси: чем больше момент инерции тела, тем меньшее угловое ускорение оно приобретает под действием одного и того же момента внешних сил.

В векторном виде основной закон динамики вращательного движения твердого тела около неподвижной оси записывается в виде

$$\mathbf{M_z} = I_z \, \boldsymbol{\varepsilon}. \qquad (29.11)$$

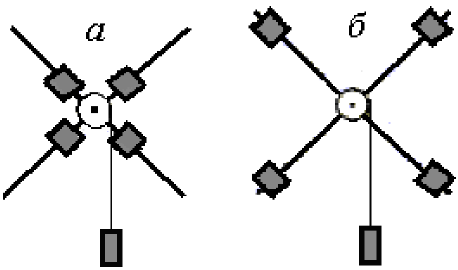


Рис. 29.2.

Примеры. 1. На рис 29.2, *а* и 29.2, *б* масса вращающейся крестовины с грузами одна и та же. Но она по-разному распределена в двух опытах. Чем дальше от оси вращения сосредоточена масса тела, тем труднее раскрутить крестовину при воздействии постоянной силой, имеющей одно и то же плечо– радиус шкива, на который намотана нить. Для раскручивания стержней с грузами до одной и той же угловой скорости в случае рис 29.2, *б* требуется большее время, чем в случае рис 29.2, *а*.

2. Два цилиндра – пустотелый металлический и сплошной деревянный – одинаковой массы и одного радиуса скатываются с одной и той же наклонной плоскости (рис. 29.3). При одинаковой массе цилиндров деревянный имеет меньший момент инерции, чем металлический. Его инертность при вращении меньше и он скатывается быстрее

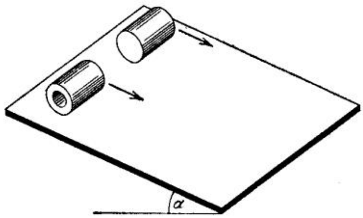


Рис.29.3

В случае, когда результирующий момент внешних сил относительно оси вращения равен нулю, момент импульса тела относительно оси вращения (его иногда называют *вращательным импульсом*) не изменяется с течением времени:

$$\frac{d}{dt}\left(I_z\omega\right)=0\ ,\ I_z\,\omega=\text{const}. \qquad (29.12)$$

Вращающееся тело может изменить свой момент инерции, при этом соответственно возрастет или уменьшится угловая скорость ω, но так, чтобы величина $I\omega$ оставалась постоянной:

$$I_1\,\omega_1 = I_2\,\omega_2. \qquad (29.13)$$

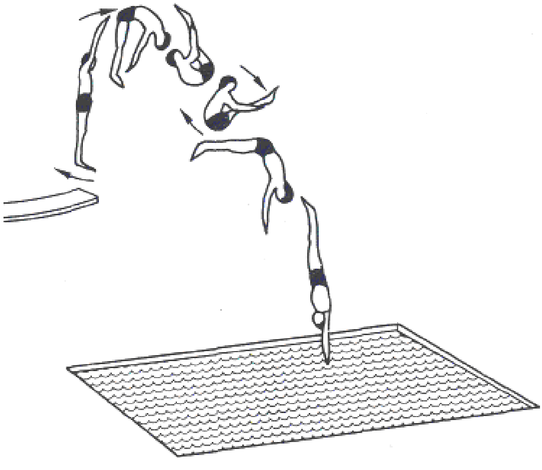


Рис. 29.4

***Примеры.* 1.** *Прыжки в воду с трамплина* (рис. 29.4). Спортсмен покидает трамплин с вытянутыми прямо руками и ногами, придавая своему телу вращение вокруг своего центра тяжести при отталкивании от края трамплина. Поскольку суммарный момент внешних сил равен нулю (на спортсмена действует только сила тяжести, момент этой силы относительно центра тяжести равен нулю), момент импульса $I\ \omega$ остается постоянным. «Группируя» свое тело вокруг центра тяжести, прыгун уменьшает тем самым момент инерции I. Соответственно увеличивается скорость вращения ω, прыгун делает несколько оборотов. Выпрямляя затем снова руки и ноги, прыгун уменьшает угловую скорость до прежнего значения.

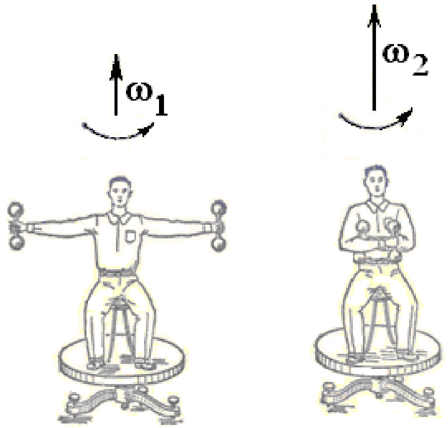


Рис. 29.5.

Подобные движения совершают фигуристы на льду, акробаты, танцоры и т.п.

2. *Скамья Жуковского* (рис. 29.5). Скамья Жуковского представляет собой платформу в форме диска, которая может свободно вращаться вокруг вертикальной оси на подшипниках. Во время опыта человек садится или становится на скамью. Моменты всех внешних сил можно считать равными нулю. Момент силы тяжести человека равен нулю, т.к. центр его тяжести расположен на оси вращения. Силами трения в подшипниках и силами сопротивления воздуха вследствие их малости можно пренебречь. Поэтому *вращательный импульс системы Iω должен оставаться постоянным.* Какие бы внутренние движения не совершались, внутренние силы не могут изменить вращательного импульса.

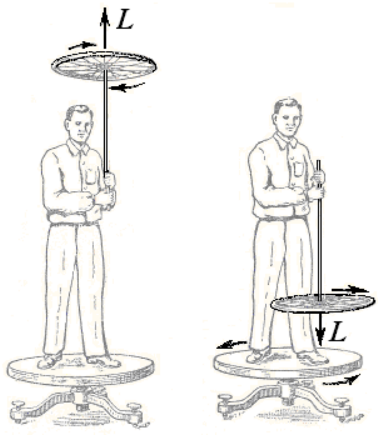


Рис. 29. 6.

А) Если человек на невращающейся скамье поворачивает вытянутые руки с гантелями влево, скамья поворачивается вправо.

Б) Скамья с человеком приводится во вращение. Если человек разведет руки с гантелями в стороны, то он увеличит момент инерции I системы, и потому угловая скорость вращения ω должна уменьшиться. Если человек сводит руки к оси вращения, то момент инерции уменьшается, а угловая скорость увеличивается.

В.) Для демонстрации векторного характера закона сохранения вращательного импульса в руки человека на невращающейся скамье Жуковского передается раскрученное колесо в определенном положении (рис. 29.6). Тем самым системе сообщается некоторый вращательный импульс $\boldsymbol{L}$ (направленный в данном примере вертикально вверх). Весь вращательный импульс сосредоточен в колесе. При повороте оси колеса на 180° направление вращения колеса относительно оси скамьи изменится на противоположное, и вращательный импульс колеса будет теперь направлен вниз. Тогда человек со скамьей начинает вращаться в противоположную вращению колеса сторону так, чтобы сумма векторов вращательного импульса человека со скамьей и вращательного импульса колеса давала прежний вектор вращательного импульса.

3. Однородный тонкий стержень массой m_1 = 500 г и длиной l = 1 м подвешен на расстоянии l /3 от его конца и может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку подвеса. В верхний конец стержня попадает пластилиновый шарик массой m_2 = 50 г, который летит горизонтально со скоростью v = 1 м/с. Определить угловую скорость ω стержня непосредственно после удара.

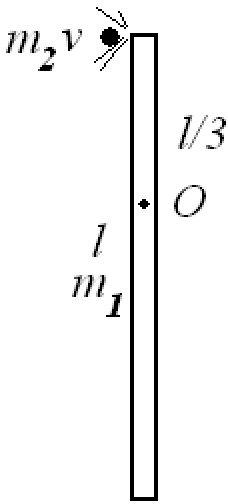


Рис. 29.7.

Рассмотрим систему тел стержень – шарик. Поскольку шарик прилипает к стержню, удар следует рассматривать как неупругий. Поэтому механическая энергия системы не сохраняется, часть ее переходит в тепло и энергию деформации.

По отношению к этой системе внешними силами являются силы тяжести стержня и шарика, а также вертикальная сила реакции оси. Через точку подвеса O проходят линии действия силы реакции оси, сил тяжести, как стержня, так и шарика (в момент удара). Поэтому моменты этих сил относительно оси вращения O равны нулю, и выполняется условие применимости закона сохранения момента импульса.

До удара моментом импульса обладал только шарик $L = m_2 v\, l/3$.

После прилипания шарика момент импульса системы равен

$\left[I + m_2\left(\dfrac{l}{3}\right)^2\right]\omega$, где I – найденный по теореме Штейнера момент

инерции стержня относительно точки подвеса O , $I = m_1 l^2/9$, а $m_2(l/3)^2$–

момент инерции шарика, который можно рассматривать как материальную точку. По закону сохранения

$$m_2 v \frac{l}{3} = \left(\frac{m_1 l^2}{9} + \frac{m_2 l^2}{9} \right) \omega .$$

Отсюда
$$\omega = \frac{3 m_2 v}{(m_1 + m_2) l} = 0{,}27\, рад/с .$$

§ 30. Гироскопы

Гироскопом *называется быстро вращающееся массивное симметричное тело, ось вращения которого (ось симметрии) может изменять свое направление в пространстве.*

У симметричного тела направления момента импульса $\mathbf{L}$ и угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ совпадают, поэтому $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$. Вследствие массивности гироскопа его момент инерции I очень велик, велика также угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$.

Простейшим гироскопом является детский волчок, быстро вращающийся вокруг своей оси. Гироскопические силы проявляются при вращении турбины самолета, велосипедных колес и т.п. Гироскопическими свойствами обладают также элементарные частицы, например, электроны в атоме.

Чтобы ось гироскопа могла свободно поворачиваться в пространстве, гироскоп обычно помещают в т.н. *кардановом подвесе.* Гироскоп закрепляют в рамках подвеса, позволяющего оси занять любое положение в пространстве.

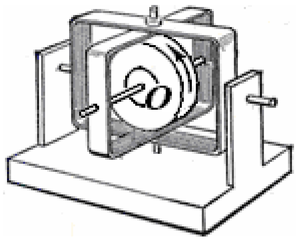


Рис. 30.1.

Все три оси пересекаются в одной точке, называемой центром карданова подвеса (рис. 30.1). Гироскоп в кардановом подвесе имеет три степени свободы и может совершать любые повороты вокруг одной неподвижной точки O – центра подвеса.

Если центр подвеса совпадает с центром масс гироскопа, то гироскоп называется *уравновешенным.* В этом случае момент силы тяжести относительно точки O равен нулю.

Ввиду симметрии гироскопа равен нулю также момент сил реакции подшипников.

Исходя из основного закона движения твердого тела, закрепленного в точке, $d\boldsymbol{L}/dt = \boldsymbol{M}$, получим, что при $\boldsymbol{M} = 0$ вектор момента импульса будет сохранять постоянное значение и неизменное направление в пространстве, $\boldsymbol{L} = \text{const}$. Так как его направление совпадает с осью вращения, то *положение оси с течением времени не изменяется*.

Первое свойство уравновешенного гироскопа состоит в том, что его ось стремится устойчиво *сохранять в пространстве приданное ей первоначальное направление.*

Уравновешенный гироскоп можно применять в качестве компаса. Ось такого гироскопа всегда будет показывать определенное направление, например, направление на Полярную звезду, независимо от вращения Земли и случайных толчков.

Свойство гироскопа сохранять неизменным направление оси используется также для автоматического управления движением самолетов (автопилот, авиагоризонт), судов, ракет, торпед и проч. Ось вращения гироскопа задает курс движения. При всяком отклонении от курса автоматически включаются двигатели, приводящие в действие рули управления, которые возвращают движение по заданному курсу.

Это же свойство гироскопа используется для стабилизации устойчивости ракет, успокоителя качки на кораблях, стабилизатора устойчивости космических кораблей и т.д.

Второе свойство гироскопа проявляется, когда на его ось начинает действовать сила, стремящаяся привести ось в движение.

Рассмотрим гироскоп в виде вращающегося диска, ось которого горизонтальна, уравновешена грузиком и закреплена в шарнире *O*, вокруг которого она может поворачиваться и принимать любое направление в пространстве.(рис. 30.2).

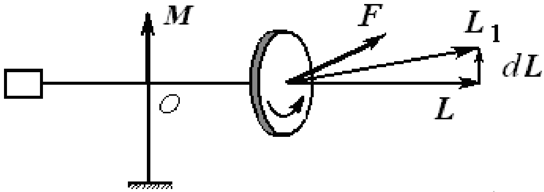


Рис. 30.2

Подействуем на ось некоторой

горизонтальной силой **F** (рис. 30.2). Казалось бы, ось гироскопа должна повернуться вправо. Так было бы, если бы гироскоп не вращался. Вращающийся же гироскоп повернет свою правую часть в перпендикулярном линии действия силы направлении – вверх в вертикальной плоскости.

Такое поведение гироскопа называется *гироскопическим эффектом*. Движение конца оси гироскопа происходит не в направлении силы **F**, а в направлении момента силы **M**.

Если теперь подействовать на ось гироскопа силой **F** в вертикальном направлении (рис. 30.3), то его ось будет поворачиваться в горизонтальной плоскости.

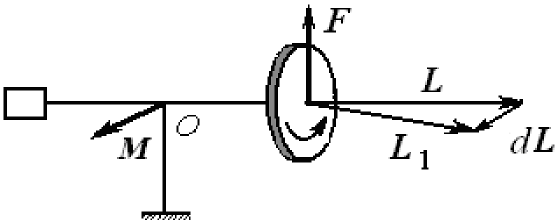


Рис.30.3.

Гироскопический эффект объясняется основным уравнением динамики вращательного движения твердого тела – уравнением моментов.

Согласно уравнению моментов относительно точки *O*

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{M}$$

В результате действия силы **F** в течение времени dt момент импульса **L** получит приращение $d\boldsymbol{L} = \boldsymbol{M}dt$, где **M** – момент силы относительно точки *O*. Новое значение момента импульса, равное

$$\boldsymbol{L}_1 = \boldsymbol{L} + d\boldsymbol{L},$$

окажется повернутым (рис. 30.2, 30.3, 30.4).

Поскольку вектор **L** направлен вдоль оси гироскопа, вместе с **L** повернется и ось, перейдя в новое положение.

Вращение оси гироскопа под действием силы называется *прецессией.*

Прецессию легко наблюдать у волчка. Раскрученный волчок не опрокидывается под действием силы тяжести.

На волчок действует опрокидывающий момент силы тяжести **M** (рис. 30.4).

За время dt вектор $\boldsymbol{L}$ получит приращение $d\boldsymbol{L} = \boldsymbol{M}dt$, направленное, как и вектор $\boldsymbol{M}$, перпендикулярно к оси волчка. В результате вектор $\boldsymbol{L}$, а с ним и ось вращения волчка, переходит в новое положение, поворачиваясь вокруг вертикальной оси. Ось совершает прецессионное движение – описывает конус вокруг вертикали.

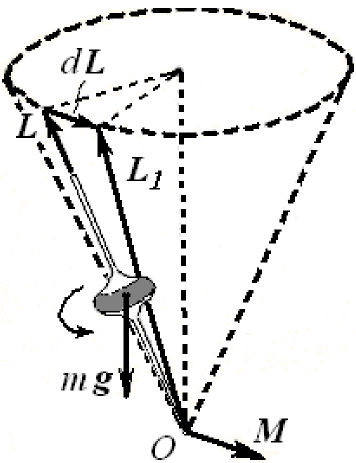


Рис. 30.4

Из опытов с прецессией гироскопа можно сделать вывод о том, что при попытках повернуть ось гироскопа вследствие гироскопического эффекта возникают так называемые *гироскопические силы*. Эти силы обусловливают дополнительное давление на подшипники осей быстро вращающихся частей машины при повороте самой машины.

Если, например, тяжелая турбина реактивного двигателя современного авиалайнера вращается с угловой скоростью вокруг *горизонтальной* оси, направленной вдоль курса самолета, то при развороте самолета в горизонтальной плоскости гироскопические силы будут стремиться повернуть ось турбины в *вертикальное* положение. Нос самолета либо «зарывается», либо поднимается кверху. Искусство пилота – вовремя поворачивать соответствующие рули.

§ 31. Аналогия между уравнениями поступательного и вращательного движений

При сопоставлении величин и формул, описывающих движение материальной точки (или поступательно движущегося тела) с такими же величинами и формулами, описывающими вращение тела вокруг неподвижной оси, обнаруживается аналогия между ними. Запишем эти величины и формулы в виде таблицы.

Из таблицы видно, что во вращательном движении роль линейной скорости играет угловая скорость, роль линейного ускорения – угловое ускорение, роль массы – момент инерции,

Таблица 6.2.

Поступательное движение	*Вращательное движение около неподвижной оси*
Перемещение $\Delta\boldsymbol{r}$	Угол поворота $\Delta\varphi$
Линейная скорость $\boldsymbol{v} = \dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}$	Угловая скорость $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt}$
Линейное ускорение $\boldsymbol{a} = \dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt}$	Угловое ускорение $\boldsymbol{\varepsilon} = \dfrac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}$
Масса m	Момент инерции I
Равнопеременное прямолинейное движение $v = v_0 + at,$ $s = v_0 t + \dfrac{at^2}{2},$ $v^2 - v_0^2 = 2\,as.$	Равнопеременное вращение $\omega = \omega_0 + \varepsilon t,$ $\varphi = \omega_0 t + \dfrac{\varepsilon t^2}{2},$ $\omega^2 - \omega_0^2 = 2\,\varepsilon s.$
Импульс $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$	Момент импульса (вращательный импульс) $\boldsymbol{L} = I\,\boldsymbol{\omega}$
Сила $\boldsymbol{F}$	Момент силы $\boldsymbol{M}$
Второй закон Ньютона $\dfrac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{F}$ или $m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$	Второй закон Ньютона для вращательного движения $\dfrac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{M}$ или $I\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{M}$
Закон сохранения импульса: если $\boldsymbol{F} = 0$, $\boldsymbol{p} = \text{const}$	Закон сохранения вращательного импульса: если $\boldsymbol{M} = 0$, $\boldsymbol{L} = \text{const}$
Кинетическая энергия $E_k = mv^2/2$	Кинетическая энергия $E_k = I\omega^2/2$
Элементарная работа силы $dA = F_s ds = F_v ds$	Элементарная работа момента силы $dA = M_\omega d\varphi$
Мощность $N = F_v v$	Мощность $N = M_\omega \omega$

роль импульса – момент импульса относительно оси вращения (вращательный импульс), роль силы – момент силы относительно оси вращения.

Подстановка аналогичных величин вращательного движения в формулы поступательного движения приводит к правильным формулам для вращательного движения.

§ 32. Плоское движение твердого тела. Кинетическая энергия при плоском движении твердого тела

Плоским называется такое движение, при котором все точки тела движутся в параллельных плоскостях. Примерами могут служить: вращение колеса автомобиля при его движении по прямой, качение цилиндра по плоской поверхности и т.п.

Плоское движение можно представить как сложение двух движений – поступательного движения, происходящего со скоростью центра масс v_C, и вращения вокруг оси, проходящей через этот центр, с угловой скоростью ω.

Можно показать, что в этом случае кинетическая энергия тела распадается на два независимых слагаемых. Одно из них определяется величинами, характеризующими поступательное движение, другое – только величинами, характеризующими вращение:

$$E_k = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{I_C\omega^2}{2}. \tag{32.1}$$

Здесь I_C – момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс.

Пример. Круглое однородное тело (обруч, сплошной цилиндр, шар) массой m и радиусом R скатывается без скольжения с наклонной плоскости с высоты h (рис. 32.1). Начальная скорость тела равна нулю. Определить скорость центра масс в конце спуска.

Используем закон сохранения полной механической энергии. В начале спуска тело обладало запасом потенциальной энергии $E_p = mgh$. В конце спуска за счет потенциальной энергии тело приобретает кинетическую энергию

$$E_k = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{I_C\omega^2}{2} = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{I_C v^2}{2R^2} = \frac{mv_C^2}{2}\left(1 + \frac{I_C}{mR^2}\right).$$

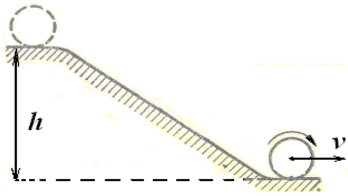


Рис. 32.1

По закону сохранения энергии

$$mgh = \frac{mv_C^2}{2}\left(1 + \frac{I_C}{mR^2}\right).$$

Отсюда находим скорость в конце спуска $v_C = \sqrt{\dfrac{2gh}{1 + I / mR^2}}$.

Подставляя в это уравнение моменты инерции обруча $I = mR^2$, цилиндра $I = 0{,}5\ mR^2$ и шара $I = 0{,}4\ mR^2$, получим:

$$v_{обр} = \sqrt{gh}, v_{цил} = \sqrt{\frac{4}{3}gh}, v_{шар} = \sqrt{\frac{10}{7}gh}.$$

Контрольные вопросы.

1. Что называется моментом инерции твердого тела относительно данной оси? Зависит ли эта величина от скорости вращения тела?
2. Является ли момент инерции тела суммой моментов инерции отдельных его частей?
3. Как направлен момент импульса вращающегося тела относительно точки, лежащей на оси вращения?
4. В каком случае справедливо векторное равенство для момента импульса тела $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$?
5. Чему равен момент импульса твердого тела относительно неподвижной оси вращения? Какой является эта величина – векторной или скалярной? Может ли она сохраняться? При каких условиях?
6. Зачем на хвосте вертолета устанавливается еще один винт? В какой плоскости вращаются его лопасти?
7. Почему некоторые типы вертолетов снабжаются двумя несущими винтами? В каких направлениях они вращаются?
8. Как будет вести себя подвешенный на одном тросе электродвигатель после его включения?
9. Как спортсмен, совершающий прыжок в воду с трамплина, успевает сделать полный оборот?
10. Почему вращающийся волчок не опрокидывается?
11. Как проявляется гироскопический эффект при езде на велосипеде?
12. Как остановить вращение космического корабля на орбите после выключения двигателей?
13. Один раз шар соскальзывает с наклонной плоскости, другой раз скатывается. В каком случае его скорость у основания наклонной плоскости больше? Почему?

Глава 7. **ЭЛЕМЕНТЫ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ**

§ 33. Представления классической физики. Преобразования Галилея

Согласно представлениям *классической физики,* сформировавшимся на основе наблюдений за движениями макроскопических тел со скоростями, гораздо меньшими скорости света ($v << c$):

– пространство трехмерно и подчиняется евклидовой геометрии;

– наряду с трехмерным пространством существует независимое от него время;

– промежутки времени между событиями и размеры твердых тел абсолютны, т.е. не зависят от системы отсчета. – справедлив принцип относительности Галилея, согласно которому все явления в замкнутой физической системе протекают одинаково независимо от того, покоится она в некоторой инерциальной системе отсчета или движется равномерно и прямолинейно. Из этих представлений вытекают формулы, связывающие координаты и время некоторого события в двух разных системах отсчета (преобразования Галилея). Чтобы вывести эти преобразования, рассмотрим две инерциальные системы отсчета *К* и *К′* (рис. 33.1).

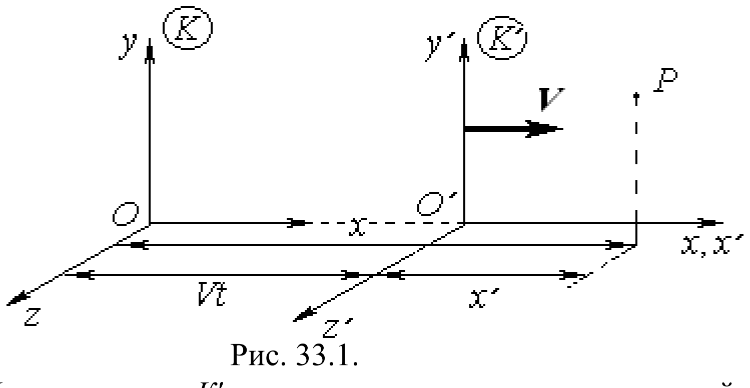


Рис. 33.1.

Пусть система *К′* движется равномерно и прямолинейно со скоростью ***V*** относительно системы *К,* которую условно будем считать неподвижной. Движение происходит вдоль оси x, т.е. оси x и x' совпадают, а оси y и y' , а также z и z' параллельны друг другу. При таком условии проекции вектора $\mathbf{V}$ на оси x и x' равны $V_x = V_{x'} = V$.

Отсчет времени начнем с момента, когда начала координат O и O' совпадают. Тогда координаты произвольной точки P будут связаны соотношениями:

$$\begin{aligned} x &= x' + Vt, & x' &= x - Vt, \\ y &= y', & y' &= y, \\ z &= z', & z' &= z, \\ t &= t', & t' &= t. \end{aligned} \tag{33.1}$$

Последнее равенство означает, что в механике Галилея-Ньютона время во всех системах отсчета течет одинаково.

Эти уравнения называются ***преобразованиями Галилея.*** Они позволяют перейти от координат и времени одной инерциальной системы отсчета к координатам и времени другой инерциальной системы отсчета.

Продифференцируем первое из уравнений по времени, учтя, что $t = t'$ и, следовательно, производная по t совпадает с производной по t':

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} + V = \frac{dx'}{dt'} + V.$$

Производная dx/dt есть проекция скорости частицы v в системе K на ось x этой системы, производная dx'/dt' есть проекция скорости частицы v' в системе K' на ось x' этой системы.

Следовательно,

$$v_x = v'_{x'} + V. \tag{33.2}$$

Дифференцирование второго и третьего из уравнений (33.1) дает, что

$$\begin{aligned} v_y &= v'_{y'}, \\ v_z &= v'_{z'}. \end{aligned} \tag{33.3}$$

Совокупность уравнений (33.2) и (33.3) можно представить одним векторным уравнением

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V}. \tag{33.4}$$

Это соотношение называется ***законом сложения скоростей классической механики***: *скорость* $\mathbf{v}$ *частицы относительно системы К равна векторной сумме ее скорости* $\mathbf{v}'$*относительно системы К' и скорости* $\mathbf{V}$ *системы К' относительно системы К.*

Дифференцируя по времени еще раз равенство (33.4), и учитывая, что $\boldsymbol{V}$ = const, получим соотношение для ускорения:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}'. \tag{33.5}$$

Ускорение какого-либо тела во всех системах отсчета, движущихся друг относительно друга прямолинейно и равномерно, оказывается одним и тем же.

Величины, численное значение которых не изменяется при преобразованиях координат, называются ***инвариантами*** преобразований. Ускорения *инвариантны* относительно таких систем отсчета.

В классической механике Ньютона силы, действующие на частицу в обеих системах, одинаковы, $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}'$. Это следует из того, что силы зависят от расстояний между телами, а эти расстояния полагаются одинаковыми во всех инерциальных системах отсчета. Опытным путем установлено, что и масса также одинакова во всех системах отсчета.

Тогда из справедливости второго закона Ньютона $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ в K-системе следует справедливость равенства $\boldsymbol{F}' = m\boldsymbol{a}'$ в K'- системе.

Полученный результат означает, что *законы механики одинаково формулируются для всех инерциальных систем отсчета*. Это утверждение называется ***принципом относительности Галилея.***

Иначе говоря, находясь внутри инерциальной системы отсчета, никакими механическими опытами нельзя определить, покоится данная система или движется равномерно и прямолинейно.

§ 34. Постулаты Эйнштейна. Преобразования Лоренца

В 1905 г. А.Эйнштейн создал специальную теорию относительности (СТО), которая представляет собой физическую теорию пространства и времени (для случая, когда можно пренебрегать действием тяготения).

Явления, описываемые теорией относительности, называются *релятивистскими* и проявляются при скоростях движения тел, близких к скорости света в вакууме $c = 2{,}99792458 \cdot 10^8$ м/с $\approx 3 \cdot 10^8$ м/с.

В основе СТО лежат два постулата: *принцип относительности Эйнштейна и принцип постоянства скорости света.*

1. Принцип относительности Эйнштейна: ***все законы природы имеют одинаковую форму во всех инерциальных системах отсчета.***

Здесь Эйнштейн распространил механический принцип относительности Галилея на все физические явления. Любой физический процесс протекает одинаково в изолированной системе, находящейся в состоянии покоя, и в такой же системе, находящейся в состоянии равномерного прямолинейного движения. Никакие опыты (механические, электрические, оптические и др.), проведенные внутри данной инерциальной системы отсчета, не дают возможности обнаружить – покоится эта система или движется равномерно и прямолинейно. Все инерциальные системы равноправны.

2. Принцип постоянства скорости света: ***скорость света в вакууме не зависит от скорости движения источника света или наблюдателя, и одинакова во всех инерциальных системах отсчета.***

Постоянство скорости света в вакууме констатируется как опытный факт. Опыты показывают, что скорость света в вакууме *(c)* является ***предельной возможной скоростью в природе*** – никакое взаимодействие или сигнал не могут распространяться со скоростью, большей c. Со скоростью света всегда движутся только частицы нулевой массы – фотоны, нейтрино. Скорость любых других частиц не может превосходить c.

Справедливость постоянства скорости света была доказана опытами американских физиков Майкельсона и Морли.

Из постулатов теории относительности следует, что преобразования Галилея должны быть заменены более общими *преобразованиями Лоренца,* по которым преобразуются не только пространственные координаты, но и время в двух системах отсчета K и K'.

Преобразования Лоренца для систем отсчета, изображенных на рис. 33.1, имеют вид:

$$x=\frac{x'+Vt'}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}},y=y',z=z',t=\frac{t'+\frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}}.$$

$$x'=\frac{x-Vt}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}},y'=y,z'=z,t'=\frac{t-\frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}}. \qquad (34.1)$$

При скоростях, много меньших скорости света, т.е. при $V << c$, преобразования Лоренца переходят в преобразования Галилея.

§ 35. Мысленный опыт Эйнштейна. Понятие одновременности событий в разных системах отсчета

Существование предельной скорости вызывает необходимость изменения наших представлений, основанных на повседневном опыте, об абсолютном характере времени.

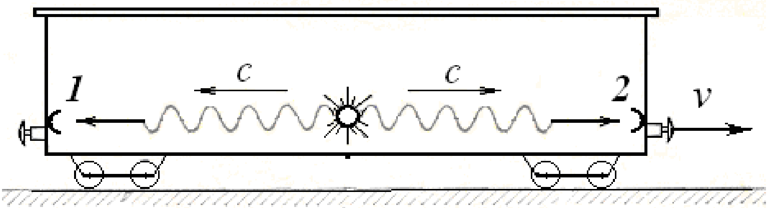


Рис. 35.1.

Рассмотрим следующий мысленный опыт. Пусть в середине равномерно и прямолинейно движущегося поезда происходит кратковременная вспышка света, так что в обоих направлениях – вперед и назад по ходу поезда – одновременно отправляются световые сигналы (рис.35.1), которые фиксируются фотоэлементами *1* и *2*, расположенными на одинаковом расстоянии от источника света.

В любой инерциальной системе отсчета свет распространяется во всех направлениях с одинаковой скоростью *c*. Поэтому едущий в поезде пассажир, для которого точки *1* и *2* неподвижны и равноудалены, отметит, что сигналы достигают фотоэлементов в голове и хвосте поезда одновременно.

Однако для наблюдателя, стоящего у железнодорожного полотна, левый фотоэлемент *1* движется навстречу сигналу, а правый 2 – уходит от него. Поскольку скорость света и для этого наблюдателя имеет то же значение, притом одинаковое в обе стороны, то он отметит, что сигнал достигнет фотоэлемента *1* в хвосте поезда раньше, чем фотоэлемента *2* в голове поезда.

Из этого примера следует, что события, одновременные в одной системе отсчета, не будут одновременными в другой системе отсчета. Иными словами, в разных системах отсчета время протекает различно и утверждение о промежутке времени между двумя событиями имеет смысл только при указании системы отсчета.

§ 36. Некоторые эффекты специальной теории относительности

1. ***Длина тел в разных системах отсчета. Сокращение продольных размеров движущихся тел***

Будем полагать, что система *K* неподвижна, а система *K* ′ движется относительно нее со скоростью **V** Пусть в системе *K*′ покоится стержень, расположенный вдоль оси *x*′.

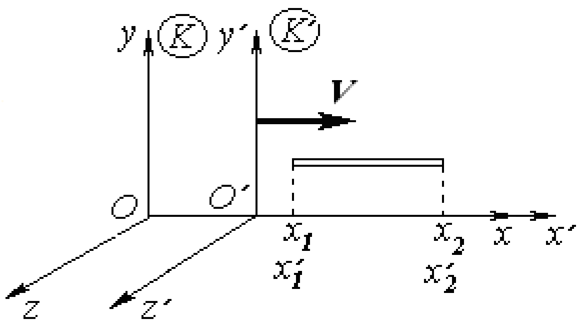


Рис. 36.1.

Длину стержня в *K*′ можно определить, измеряя координаты конца и начала стержня, который в этой системе лежит неподвижно.

Тогда длина покоящегося стержня (ее называют *собственной длиной*):

$$l_0 = x'_2 - x'_1. \tag{36.1}$$

Пусть теперь длину стержня измеряет наблюдатель в неподвижной системе *K*. Мимо него стержень движется со скоростью *V*. Поэтому нужно произвести одновременный отсчет координат его концов x_1 x_2 в один и тот же момент времени *t* по часам системы *K*.

Длина стержня в системе *K:*

$$l = x_2 - x_1. \tag{36.2}$$

Выберем из преобразований Лоренца ту из формул, которая содержит x', x и t.

$$x'_1 = \frac{x_1 - Vt}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}, x'_2 = \frac{x_2 - Vt}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}},$$

$$x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}. \tag{36.3}$$

Таким образом, длина движущегося стержня

$$l = l_0\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}. \tag{36.4}$$

сокращается в направлении движения ($l < l_0$).

2. *Длительность событий в разных системах отсчета. Замедление времени*

Будем полагать, что система *K* неподвижна, а система *K* ′ движется относительно нее со скоростью ***V*** Пусть в системе *K*′ в одной и той же точке с координатой x_1' (рис. 36.2,*а*, 36.2,*б*) происходит в моменты времени t'_1 и t'_2 два каких-то события. Например, в момент времени t'_1 – рождение элементарной частицы, а в момент времени t'_2 – ее распад. В системе *K*′ длительность жизни этой частицы:

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1. \tag{36.5}$$

Найдем время жизни этой частицы по часам неподвижной системы *K*

$$\Delta t = t_2 - t_1. \tag{36.6}$$

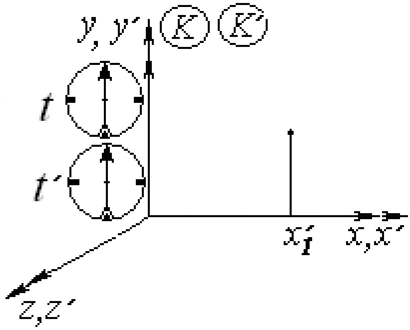


Рис. 36. 2, *а*

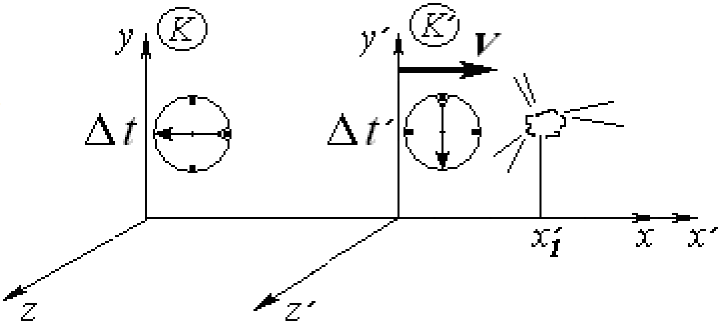


Рис. 36.2, *б*

Для этого используем ту из формул преобразования Лоренца, которая содержит *t, t*' и *x*'.

$$t_1 = \frac{t_1' + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}}, t_2 = \frac{t_2' + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}}, t_2 - t_1 = \frac{t_2' - t_1'}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}}. \tag{36.7}$$

Время, отсчитанное по часам той системы, где рассматриваемые события произошли в одном месте, называется *собственным временем* и обозначается буквой τ.

$$\Delta t' = \tau = \Delta t\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}. \tag{36.8}$$

Из полученной формулы следует, что собственное время τ меньше времени Δt, отсчитанного по часам любой другой системы отсчета

$$\Delta t = \frac{\tau}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}.$$

С точки зрения наблюдателя в системе *K,* Δt есть промежуток времени, измеренный по неподвижным часам, а τ – по часам, движущимся со скоростью v (скорости частиц и часов принято обозначать малой буквой v в отличие от скорости V системы *K').* Поскольку $\tau < \Delta t$, можно сказать, что *движущиеся часы идут медленнее, чем покоящиеся часы.*

В какой бы системе не рассматривалось движение частицы, промежуток τ собственного времени измеряется по часам системы, в которой частица покоится. Отсюда следует, что промежуток собственного времени является *инвариантом*, т.е. величиной, имеющей одно и то же значение во всех инерциальных системах отсчета.

Оба рассмотренных эффекта нашли прямое подтверждение на опыте. Так, явление замедления времени наблюдается при распадах элементарных частиц космических лучей или получаемых с помощью ускорителей. Такие частицы движутся со скоростями, близкими к c, и, с точки зрения земного наблюдателя, их времена жизни, а, следовательно, и проходимые ими от рождения до распада расстояния увеличиваются в десятки тысяч раз.

Пример. В верхних слоях атмосферы Земли под действием космического излучения рождаются мюоны (одна из элементарных частиц). Время жизни покоящегося мюона (собственное время) равно τ = 2,2 мкс. От точки рождения до регистрирующего детектора на поверхности Земли мюон пролетает расстояние l = 30 км. С какой скоростью v летел мюон?

В системе отсчета K', связанной с мюоном, его собственное время жизни равно τ. В лабораторной системе K, связанной с Землей, от рождения мюона до его распада пройдет время $\Delta t = \dfrac{\tau}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$. За это время мюон пройдет расстояние $l = v\Delta t = \dfrac{v\tau}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$. Отсюда находим

$$\frac{v}{c} = \frac{l}{\sqrt{l^2 + (c\tau)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+(\dfrac{c\tau}{l})^2}}.$$

Т.к. $\dfrac{c\tau}{l} = \dfrac{3\cdot 10^8 \cdot 2{,}2\cdot 10^{-6}}{3\cdot 10^4} = 2{,}2\cdot 10^{-2} << 1$, можно воспользо-ваться формулой приближенного вычисления: $\dfrac{v}{c} = 1 - \dfrac{c^2\tau^2}{2l^2} \approx 0{,}9998.$ Согласно классической механике мюон должен был пролететь всего $v\tau$ = $0{,}9998\cdot 3\cdot 10^{8}\cdot 2{,}2\cdot 10^{-6}$ = 660 м.

3. *Инвариантность интервала*

Пусть даны два события: од но произошло в момент времени t_1 в точке с координатами x_1, y_1, z_1, а второе – в момент времени t_2 в точке с координатами x_2, y_2, z_2 .

Интервалом между событиями называется величина

$$s_{12} = \sqrt{c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2}\,, \tag{36.9}$$

где $t_{12} = t_2 - t_1$ – промежуток времени между событиями, $l_{12} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ – расстояние между точками, в которых произошли события.

Поставив над координатами и временем штрихи, мы получим величину интервала s'_{12} между этими же событиями в другой системе отсчета.

В специальной теории относительности вводится воображаемое пространство четырех измерений (пространство Минковского), на осях которого откладываются три координаты *x, y, z.* и произведение *ct,* Интервал – это расстояние между двумя точками этого пространства..

Воспользовавшись преобразованиями Лоренца, можно показать, что

$$s_{12} = s'_{12}, \tag{36.10}$$

т.е. величина интервала является инвариантом относительно преобразований Лоренца. В классической механике таким свойством обладали по отдельности временной интервал t_{12} и расстояние между точками l_{12}. В релятивистской физике этим свойством обладает только интервал s_{12}. Пространственно-временной интервал обобщает понятия промежутка времени и пространственного расстояния.

Интервалы делятся на *времениподобные и пространственно-подобные.*

Если преобладает временная составляющая $c^2 t_{12}^2 > l_{12}^2$ (случай времениподобного интервала), то всегда можно указать систему отсчета K', в которой рассматриваемые события произошли в одном месте $(l'_{12} = 0)$ и интервал s_{12} совпадает с точностью до множителя c с собственным временем τ. Для таких событий понятия «раньше», «позже» имеют абсолютный характер, и между ними возможна причинно-следственная связь.

В случае пространственноподобного интервала преобладает пространственная составляющая $l_{12}^2 > c^2 t_{12}^2$. В этом случае всегда можно указать систему отсчета K'', в которой рассматриваемые события происходят одновременно $(t''_{12} = 0)$ и интервал равен собственному расстоянию l_0. Между такими событиями невозможна причинно-следственная связь, так как никакое взаимодействие не может распространяться со скоростью, большей *c,* и понятия «одновременно», «раньше», «позже» для них относительны, т.е. зависят от системы отсчета.

§ 37. Релятивистский закон сложения скоростей

Пусть частица для простоты рассуждений движется параллельно осям x и x' в направлении скорости $\boldsymbol{V}$. Тогда проекции скорости частицы на оси x и x' совпадают с модулями этих скоростей.

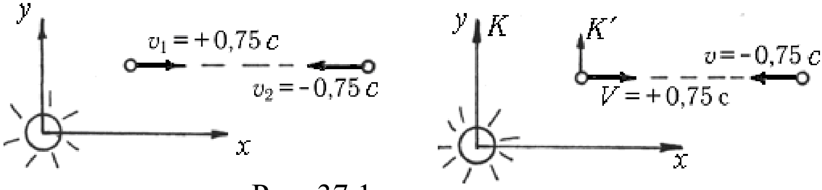


Рис. 37.1.

Скорость частицы относительно K – системы равна v, относительно K' – системы равна v'. Скорость штрихованной системы по-прежнему обозначим через V.

Из преобразований Лоренца можно получить выражение для скорости v частицы относительно системы K:

$$v = \frac{v' + V}{1 + \dfrac{v'V}{c^2}}. \qquad (37.1)$$

Эта формула представляет собой *закон сложения скоростей в релятивистской механике.* Релятивистский закон сложения скоростей при $V \ll c$ переходит в классический закон сложения скоростей классической механики (33.4):

$$v = v' + V.$$

Примеры. 1. Если световой импульс в K'- системе движется вдоль оси x' со скоростью $v' = c$, то в K- системе по формуле (37.1) его скорость

$$v = \frac{c + V}{1 + \dfrac{cV}{c^2}} = c$$

также равна c. Иначе быть не могло, т.к. в основе преобразований Лоренца и формулы преобразования скоростей лежит предположение о постоянстве скорости света в вакууме c во всех инерциальных системах отсчета.

2. Две космических частицы движутся навстречу друг другу со скоростями $v_1 = v_2 = 0{,}75\ c$ относительно Солнца. Определить скорость одной частицы относительно другой по классической и релятивистской формулам сложения скоростей.

На левом рис. 37.1 изображены две частицы, движущиеся со скоростями v_1 и v_2 относительно системы отсчета, связанной с Солнцем. Плюс и минус указывают, что проекция скорости на ось Ox является положительной или отрицательной.

Введем теперь условно подвижную систему отсчета K', соединив ее с одной из частиц, например, с левой и условно неподвижную систему K, связанную с Солнцем. Тогда скорость системы K' относительно K будет $V = + 0{,}75\ c$. Скорость правой частицы является ее скоростью относительно K и она будет теперь обозначаться v и равняться $- 0{,}75\ c$.

Следует определить скорость правой частицы относительно левой, или относительно системы K', эта скорость обозначается v'. Итак, задача формулируется таким образом: дано $V = + 0{,}75\ c$, $v = - 0{,}75\ c$, определить v'.

Согласно классическому закону сложения скоростей $v = V + v'$, или $v' = v - V = - 0{,}75 - 0{,}75\ c = - 1{,}5\ c$.

Минус указывает направление скорости. Итак, правая частица приближается к левой со скоростью 1,5 c. Но такой скорости частица иметь не может, поскольку скорость света является предельной. Классический закон сложения скоростей неприменим для больших скоростей.

По релятивистскому закону сложения скоростей

$$v = \frac{v' + V}{1 + \dfrac{v'V}{c^2}}$$, или после алгебраических преобразований $$v' = \frac{v - V}{1 - \dfrac{Vv}{c^2}}.$$

$$v' = \frac{-0{,}75c - 0{,}75c}{1 - \dfrac{0{,}75c(-0{,}75c)}{c^2}} = -0{,}96c.$$

Как и следовало ожидать, относительная скорость сближения частиц не превышает скорости света в вакууме c.

§ 38. Релятивистский импульс. Релятивистское выражение для энергии

В теории относительности, так же как в классической механике, для замкнутой системы сохраняется импульс и энергия. Т.к. законы природы должны иметь одинаковую форму во всех инерциальных системах отсчета, они должны сохранять свой вид при преобразованиях Лоренца. Это требование называется постулатом релятивистской инвариантности. Из требования инвариантности следует, что зависимость импульса от скорости имеет вид:

$$\boldsymbol{p} = \frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \tag{38.1}$$

Основное уравнение релятивистской механики имеет такой же вид, как и второй закон Ньютона, только для релятивистского импульса:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right) = \boldsymbol{F}. \tag{38.2}$$

Релятивистское выражение для кинетической энергии

$$E_k = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}-1\right) \tag{38.3}$$

при малых по сравнению со скоростью света ($v \ll c$) скоростях тел переходит в классическое выражение для кинетической энергии: $E_к = mv^2/2$, при этом импульс приобретает вид $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$.

Законы сохранения, как и другие законы природы, должны соблюдаться во всех инерциальных системах отсчета. Огромный экспериментальный материал, накопленный в физике, показывает, что это справедливо только в том случае, если свободной (т.е. не подверженной действию сил) частице приписывать, кроме кинетической энергии, дополнительную энергию, равную mc^2. Эта энергия называется *энергией покоя*.

$$E_0 = mc^2. \tag{38.4}$$

Ею обладает неподвижная частица. Она представляет собой внутреннюю энергию частицы. Формулу (38.4) называют ***формулой Эйнштейна.***

Полной энергией является сумма кинетической энергии и энергии покоя частицы

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \tag{38.5}$$

Из этой формулы видно, что полная энергия тела стремится к бесконечности при $v \to c$, поэтому, если $m \neq 0$, скорость тела всегда меньше c.

Релятивистское выражение , связывающее полную энергию и импульс частицы, имеет вид

$$E = c\sqrt{p^2 + m^2c^2}. \qquad (38.6)$$

Из формулы Эйнштейна (38.4) вытекает, что всякое изменение массы тела Δm сопровождается изменением энергии покоя ΔE_0:

$$\Delta E_0 = \Delta mc^2. \qquad (38.7)$$

И наоборот, если тело, оставаясь в покое, получает или отдает энергию, то пропорционально изменяется и его масса.

Это утверждение называют *законом взаимосвязи массы и энергии покоя.*

В основе работы атомных электростанций лежит цепная реакция деления ядер урана. Суммарная масса образовавшихся при делении осколков меньше массы исходного ядра урана. Поэтому процесс деления сопровождается уменьшением энергии покоя частиц. Разность энергий покоя превращается в кинетическую энергию осколков и энергию электромагнитного излучения.

Эта же формула объясняет происхождение энергии, излучаемой Солнцем.

§ 39. Границы применимости ньютоновской механики

Предметом изучения классической механики Ньютона-Галилея является движение макроскопических тел со скоростями, малыми по сравнению со скоростью света в вакууме ($v << c$).

Критерии применимости классической механики:

$$v << c, \text{ или } \ p << mc, \text{ или } \ E_\text{k} << mc^2. \qquad (39.1)$$

Скорости движений, с которыми мы имеем дело в повседневной жизни и в технике, настолько малы по сравнению со скоростью света в вакууме *c,* что применительно к этим движениям ньютоновскую механику можно считать практически строгой.

В мире элементарных частиц обычным явлением являются скорости, близкие к c. Поэтому к этим частицам ньютоновская механика неприменима, движение элементарных частиц изучается в квантовой механике..

Контрольные вопросы.

1. При каких условиях преобразования Лоренца пренебрежимо мало отличаются от преобразований Галилея?
2. Зависит ли работа силы от выбора системы отсчета?
3. Зависит ли значение кинетической энергии тела от выбора системы отсчета?
4. Зависит ли форма тела от выбора системы отсчета?
5. Являются ли сила и ускорение инвариантами относительно преобразований Галилея и Лоренца?
6. Будет ли инвариантным закон сохранения импульса по отношению к преобразованиям Галилея?
7. В чем состоит принципиальная разница в измерении продолжительности процесса, происходящего в одной точке пространства, и процесса, начинающегося в одной точке и заканчивающегося в другой?
8. Откуда следует, что если два события заведомо не могут быть связаны причинно в некоторой системе координат, то они не могут быть также связаны причинно ни в какой другой системе координат?
9. Приведите примеры выполнимости принципа относительности при измерении длин и промежутков времени.

Рекомендованная литература

1. Савельев И.В. Курс физики. В 3-х т. Т 1: Механика. Молекулярная физика. – М.: «Наука», 1989, – 352с.,

2. Кучерук І. М., Горбачук І.Т, Луцик П.П. Загальний курс фізики. У 3 т. Т.1: Механіка. Молекулярна фізика і термодинаміка. – К.; «Техніка», 1999, – 536 с

3. Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс физики. – М. «Высш. шк.», 1989, – 609 с.

4. Трофимова Т.И. Курс физики. – М., «Академия», 2005, – 560 с.

5. Иродов И.Е. Механика. Основные законы. – М. «Лаборатория базовых знаний».2005.– 309 с.

6. Сивухин Д.В. Общий курс физики. – М.: «Наука», 1977-1980.– Т. 1

7. Бушок Г.Ф., Левандовський В.В., Півень Г.Ф.. Курс фізики. У 2 кн.: Кн.1. Фізичні основи механіки. Електрика і магнетизм. – К.:«Либідь», 2001. – 448с.

8. Чертов А.Г. Воробьев А.А. Задачник по физике. – М.: «Физмат лит», 2005 – 640 с.

9. Гаркуша І.П., Горбачук І.Т., Курінний В.П. та ін. Загальний курс фізики: Збірник задач – К.: «Техніка», 2004,– 560 с.

Составители:

ГАРКУША	Игорь	Павлович
КУРИННОЙ	Владимир	Павлович

Физика. Ч. 1. Механика. Учебное пособие для бакалавров отрасли знаний «Разработка полезных ископаемых».

Літературний редактор:

Подп. до друку ____________ Формат А5 Папір печат.
Усл. печат. лист.______Усл. изд. лист.__________Тираж______
Замовлення №

РИО НГУ Цех оперативної печатки

ДВНЗ НГУ
49027, м. Дніпропетровськ 27, просп. К.Маркса, 19.