Приложение к лабораторным работам № 4.1, 4.2

Стоячие волны образуются в результате наложения двух встречных бегущих волн одинаковой амплитуды и частоты.

Рассмотрим гибкую однородную струну, натянутую между двумя точками. Предположим, что в состоянии равновесия струна растянута вдоль оси *X*. Будем подвергать струну вынужденным колебаниям. Тогда по ней в обе стороны – вправо и влево – побегут упругие поперечные волны.

Когда бегущая волна достигнет закрепленного конца струны, то на этом конце произойдет отражение волны. Отраженная волна будет распространяться навстречу падающей.

Напишем уравнения двух волн, распространяющихся вдоль оси *X*, вправо (в сторону возрастания *x*)

$$\xi_1 = A\cos(\omega t - kx). \qquad (1)$$

и влево (в сторону убывания *x*)

$$\xi_2 = A\cos(\omega t + kx), \qquad (2)$$

здесь ξ – поперечное смещение точки струны с координатой *x* в момент времени *t*, ω – круговая частота, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ - волновое число, λ – длина бегущей волны. Для простоты начало отсчета *x* и *t* выбрано так, чтобы начальная фаза волн равнялась нулю.

Движение каждой точки колеблющейся струны можно рассматривать как результат сложения падающей и отраженной волн. Падающая вдоль оси *x* на преграду волна

$$\xi = A\cos(\omega t - kx)$$

и бегущая ей навстречу отраженная волна

$$\xi = A\cos(\omega t + kx),$$

накладываясь друг на друга, дают в каждой точке струны смещение

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = A\cos(\omega t - kx) + A\cos(\omega t + kx). \qquad (3)$$

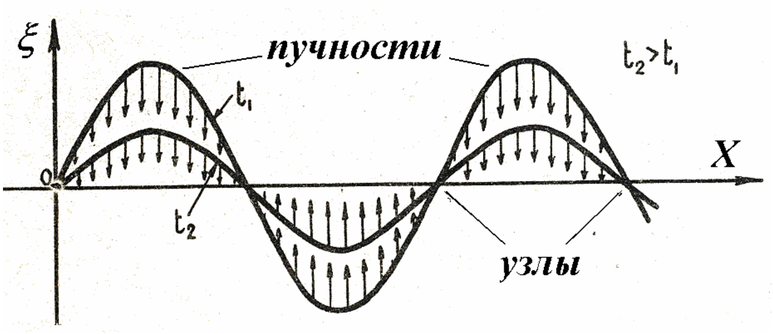
Преобразуем эту сумму по формуле для суммы косинусов

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}. \qquad (4)$$

Тогда уравнение примет вид

$$\xi = \left(2A\cos 2\pi\frac{x}{\lambda}\right)\cos\omega t. \qquad (5)$$

Из формулы (5) следует, что все точки струны совершают гармоническое колебание с одинаковой частотой ω, той же, что и у бегущих волн. Но так как переменная *x* входит в выражение для амплитуды, амплитуда колебаний различна для различных точек пространства – изменяется от точки к точке по закону косинуса.



Амплитуда стоячей волны $A_{\text{ст}}$ как величина заведомо положительная, определяется модулем величины, стоящей в скобках в формуле (5):

$$A_{\text{ст}} = \left|2A\cos 2\pi\frac{x}{\lambda}\right|. \qquad (6)$$

В точках, координаты которых удовлетворяют условию

$$2\pi\frac{x}{\lambda} = \pm n\pi \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ldots), \qquad (7)$$

амплитуда $A_{\text{ст}}$ колебаний максимальна. Эти точки называются **пучностями** стоячей волны.

Координаты пучностей получим из формулы (7):

$$x_{\text{пучн}} = \pm n\frac{\lambda}{2} \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ldots). \qquad (8)$$

Колеблются не все точки струны. В точках, координаты которых удовлетворяют условию

$$2\pi\frac{x}{\lambda} = \pm(n+\frac{1}{2})\pi \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ldots), \qquad (9)$$

амплитуда колебаний $A_{\text{ст}}$ равна нулю. Эти точки называются **узлами** стоячей волны.

Координаты узлов получим из формулы (9):

$$x_{\text{узлов}} = \pm(n+\frac{1}{2})\frac{\lambda}{2} \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ldots). \qquad (10)$$

Из формул (8) и (10) вытекает, что расстояние между соседними пучностями или соседними узлами равно $\frac{\lambda}{2}$.

Для бегущей волны максимумы и минимумы волны в каждое следующее мгновение переходят на новое место, а в стоячей волне остаются на одном и том же месте.

В стоячей волне в отличие от бегущей не происходит переноса энергии. Это объясняется тем, что падающая и отраженная волны имеют одинаковую амплитуду и поэтому переносят одинаковую энергию в противоположных направлениях. Т. к. узловые точки неподвижны, через них энергия не переносится.

Энергия стоячей волны есть величина постоянная. В тот момент времени, когда все частицы струны проходят через положение равновесия, вся энергия колеблющихся частиц является кинетической. Наоборот, в положении максимального отклонения от положения равновесия, энергия всех частиц является потенциальной (энергия упругой деформации струны).

Происходит превращение кинетической энергии в потенциальную и наоборот.

На длине струны l , закрепленной на обоих концах, будет укладываться всегда целое число стоячих волн. Отсюда вытекает условие

$$l = n\frac{\lambda}{2} \qquad (n = 1, 2, 3\ldots). \tag{11}$$

Или

$$\lambda_n = \frac{2l}{n}. \tag{12}$$

Так как длина волны λ связана со скоростью распространения волны υ и частотой колебания ν соотношением $\lambda = \frac{\upsilon}{\nu}$, то этим длинам волн соответствуют частоты

$$\nu_n = \frac{\upsilon}{\lambda_n} = \frac{\upsilon}{2l}n \qquad (n = 0, 1, 2,\ldots). \tag{13}$$

Струна, следовательно, может колебаться не с одной частотой, а с целым спектром частот. Частоты ν_n называются **собственными частотами** струны. Они являются кратными частоте

$$\nu_1 = \frac{\upsilon}{2l}, \tag{14}$$

которая называется **основной частотой**.

На опыте получена формула – скорость распространения упругой волны вдоль струны определяется величиной натяжения T струны и линейной плотности ρ материала струны (массой единицы длины струны):

$$\upsilon = \sqrt{\frac{T}{\rho}}. \tag{15}$$

Подставляя (15) в (13) с учетом того, что сила натяжения струны равна весу грузика $T = mg$, получим формулу для расчета **собственных частот колебаний струны:**

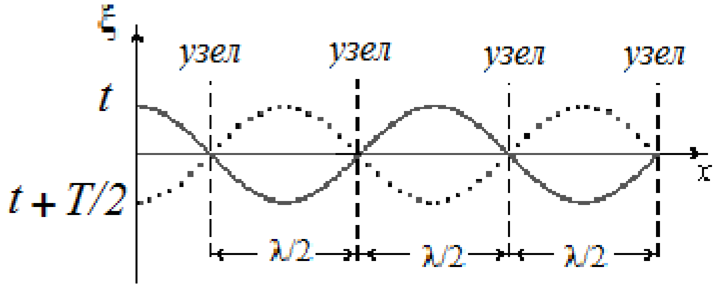
$$\nu_n = \frac{n}{2l}\sqrt{\frac{mg}{\rho}}. \tag{16}$$

Пример 1.

Определить длину волны λ, если расстояние Δ*l* между первым и четвертым узлами стоячей волны равно 30 см.

Решение.

В струне можно возбудить только тогда стоячие волны, когда на длине струны укладывается целое число половин длины волны λ/2.



$$\Delta l = 3\ (\lambda/2)$$

$$\lambda = \frac{2\Delta l}{3} = 20\,(\text{см}).$$

Пример 2.

Струна длиной l = 1 м туго натянута между двумя опорами. Скорость распространения волны в струне v = 20 м/с. Определите частоты первых трех стоячих волн, начиная с самой длинной, которые можно возбудить в струне. Какие из этих колебаний будут источниками слышимых звуков?

Решение.

Собственные колебания струны представляют собой стоячие волны, причем в точках крепления струны находятся узлы. На длине струны должно укладываться целое число полуволн λ/2. так как длина стоячей волны, а значит, расстояние между узлами (его также называют длиной стоячей волны), равна $\lambda_{ст}$ = λ/2. Следовательно,

$$l = n\,\lambda/2,$$

откуда длина волны

$$\lambda = 2\,l/n.$$

Длина волны λ связана с частотой ν

$$\lambda = \text{v}/\nu,$$

откуда частота

$$\nu = \text{v}/\lambda = \text{v}n/(2l),$$

где n = 1, 2, 3, …Для n = 1, $\nu_1 = 20 \times 1/(2 \times 1) = 10$ (Гц), n = 2, $\nu_2 = 20 \times 2/(2 \times 1) = 20$ (Гц), n = 3, $\nu_3 = 20 \times 3/(2 \times 1) = 30$ (Гц).

Колебания с частотой 20 и 30 Гц будут источниками слышимых звуков.