

Лабораторна робота № 1.10

ВИЗНАЧЕННЯ ШВИДКОСТІ ПОЛЬОТУ «КУЛІ» ЗА ДОПОМОГОЮ КРУТИЛЬНОГО БАЛІСТИЧНОГО МАЯТНИКА

Мета роботи: Застосування законів збереження (моменту імпульсу і енергії) для визначення швидкості польоту « кулі » за допомогою крутильного балістичного маятника.

Прилади: лабораторна установка - крутильний балістичний маятник.

Опис установки

Схема експерименту зображена на рис. 1. «Куля» масою m , випущена з пружинного пістолета, потрапляє в мішень C , укріплену на горизонтальному стрижні, яка разом з дротом A утворює крутильний маятник.

Вздовж стрижня можуть переміщатися два однакових металевих циліндра B .

На кінцях стрижня закріплюються металеві чашки (мішені) C , заповнені пластиліном.

Стрижень підвішений на сталевому дроті. Фото установки приведено на рис. 2 і рис. 3.

При попаданні «кулі» в мішень відбувається непружний удар, і маятник отримує деяку кінетичну енергію. Закручуючи дріт підвісу, маятник повертається на деякий кут. Кут повороту можна виміряти за шкалою на прозорому кожусі приладу. При відхиленні маятника від положення рівноваги кінетична енергія маятника починає поступово переходити в потенціальну енергію пружної деформації сталевого дроту, що закручується. Потім починається процес переходу потенціальної енергії в кінетичну у зворотному напрямі і т.д. Маятник здійснює гармонічні коливання, період яких значно більше часу зіткнення.

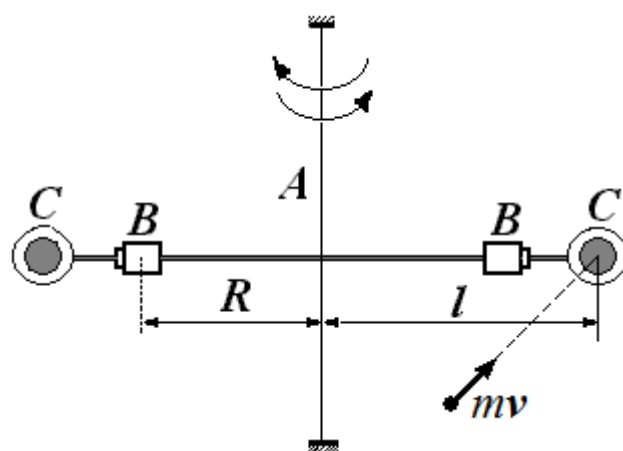


Рис.1.



Рис. 2.

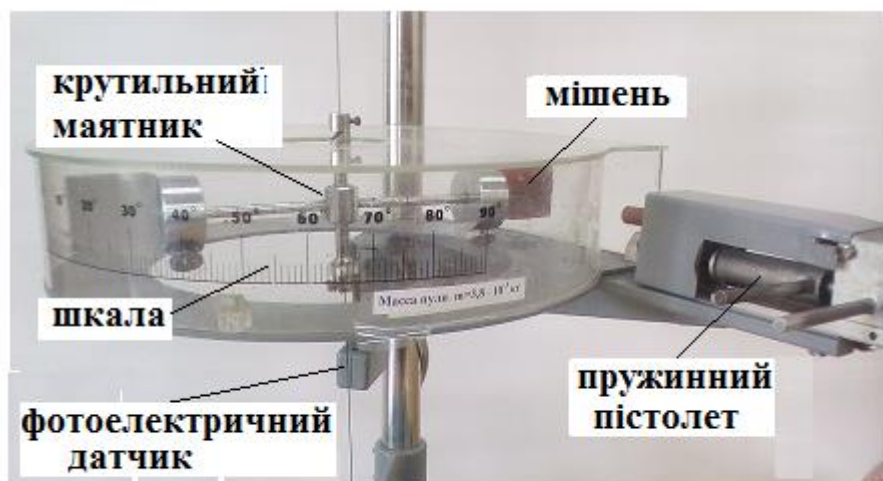


Рис.3.

Теоретичний вступ

При *поступальному* русі тіла, мірою *інертності* є його маса. Тіло з більшою масою є більш інертним, сильніше «чинить опір» спробам змінити його швидкість. Наприклад, тілу з великою масою, що покоїться, важче надати швидкість, або, навпаки, масивне тіло, що рухається важче зупинити.

При *обертальному* русі твердого тіла *інертність* (тобто здатність зберігати кутову швидкість обертання) визначається не тільки величиною його маси, а й тим, як розподіляється ця маса відносно осі обертання.

Моментом інерції матеріальної точки масою m , що міститься на відстані r від осі обертання, називається величина, що дорівнює добутку маси цієї точки на квадрат відстані її від осі обертання, тобто

$$I = mr^2.$$

Момент інерції тіла відносно деякої осі z дорівнює сумі моментів інерції матеріальних точок, з яких складається тіло, тобто сумі добутків елементарних мас m_i , на які подумки розбиваємо тіло, на квадрати відстаней r_i кожної елементарної маси від осі обертання (див. рис. 4)

$$I_z = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \dots + m_n r_n^2 = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2.$$

Тут Σ - прийнятий в математиці для короткого запису знак додавання величин тих змінних, які знаходяться праворуч від цього знака. Одиниця вимірювання моменту інерції в СІ $\text{кг} \cdot \text{м}^2$.

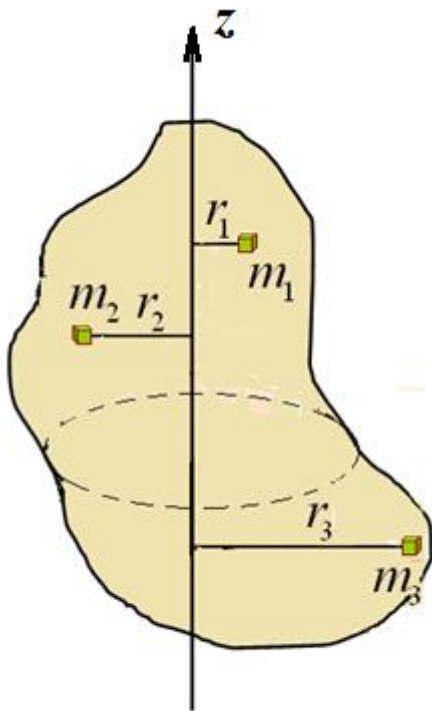


Рис. 4.

З формули для моменту інерції видно, що точки, які лежать далі від осі обертання, вносять в суму значно більший внесок, ніж близькі точки.

Таким чином, момент інерції - міра інертності тіла при обертальному русі - залежить не тільки від маси тіла, а й того, як ця маса розподілена за об'ємом тіла.

У разі безперервного розподілу мас за об'ємом тіла ця сума зводиться до інтеграла

$$I = \int r^2 dm = \int r^2 \rho dV,$$

де інтегрування проводиться по всьому об'єму тіла, ρ - густина матеріалу; dV - елементарний об'єм; $dm = \rho dV$ - елементарна маса; $r = r(x, y, z)$ - функція положення точки з координатами x, y, z .

Якщо знехтувати дією сил тертя, то для опису руху крутильного маятника можна скористатися двома законами збереження - моменту імпульсу і енергії.

1. Застосуємо закон збереження моменту імпульсу.

В даному випадку маємо крутильний маятник (симетричне тіло) і «кулю», що летить (частинка).

Момент імпульсу L симетричного тіла, що обертається навколо осі симетрії, дорівнює добутку його моменту інерції I_z відносно цієї осі на кутову швидкість ω :

$$L = I_z \omega.$$

У проекціях на вісь обертання (вісь z)

$$L_z = I_z \omega.$$

Момент імпульсу відносно деякої осі z **частинки («кулі»)**, що рухається уздовж прямолінійної траєкторії, дорівнює добутку модуля вектора імпульсу p на плече імпульсу частинки l

$$L_z = pl = mvl.$$

Тут m - маса «кулі», v - її швидкість.

Плечем імпульсу l є найкоротша відстань від осі до прямої, уздовж якої спрямований імпульс частинки (див. рис.1).

До попадання «кулі» в мішень маятник покоїться, тобто момент імпульсу його дорівнює нулю. Момент імпульсу має тільки «куля», що летить по прямій.

При попаданні «кулі» в мішень маятник повертається навколо вертикальної осі і закручує дріт на деякий кут φ . При цьому виникає момент сил M , який прагне повернути маятник в положення рівноваги. Дослід показує, що момент сил M пропорційний куту φ , тобто

$$M = - D\varphi,$$

де D - модуль кручення дроту.

Цим моментом пружних сил в момент удару кулі в мішень можна нехтувати, оскільки за дуже малий час зіткнення маятник встигає повернутися на дуже малий кут φ і, відповідно, виникає малий момент сил M .

Далі, моменти сили тяжіння маятника і сили натягу дроту відносно вертикальної осі дорівнюють нулю, оскільки плечі цих сил дорівнюють нулю.

Таким чином, **сумарний момент зовнішніх сил, що діють на маятник і «кулю», дорівнює нулю**, систему "маятник-куля" можна вважати замкненою і при зіткненні **виконується закон збереження моменту імпульсу: момент імпульсу замкненої системи тіл залишається постійним.**

Після прилипання «кулі» до чашки з пластиліном, маятник разом з «кулею» набуває початкової кутової швидкості обертання ω_0 . Момент імпульсу системи можна записати як суму:

- момента імпульсу маятника $I_z^{\text{маятн}} \omega_0$, де ω_0 - початкова кутова швидкість обертання маятника,

- і момента імпульсу застряглої в ньому «кулі»: $I_z^{\text{«кулі»}} \omega_0$. (На відміну від першої стадії руху «кулі» по прямій, тепер «куля» обертається разом з маятником і формула момента імпульсу «кулі» буде іншою).

Момент інерції «кулі» (як матеріальної точки) відносно осі z дорівнює

$$I_z^{\text{«кулі»}} = ml^2.$$

Отже, за законом збереження моменту імпульсу (момент імпульсу до удару дорівнює моменту імпульсу після удару)

$$mvl = (I_z^{\text{маятн}} + I_z^{\text{«кулі»}}) \omega_0,$$

або

$$mvl = (I_z^{\text{маятн}} + ml^2) \omega_0. \quad (1)$$

2. Застосуємо тепер **закон збереження механічної енергії** (для системи після непружного удару «кулі» в мішень).

Маятник з кутовою швидкістю ω_0 і відповідно кінетичною енергію

$$\frac{(I_1 + ml^2)\omega_0^2}{2}$$

починає повертатися. При цьому відбувається закручування пружного дроту і виникає гальмуючий момент. Поворот маятника припиняється, коли його кінетична енергія обертання повністю перейде в потенціальну енергію

закрученого дроту $\frac{D\varphi^2}{2}$.

Закон збереження енергії дає

$$\frac{1}{2}(I_1 + ml^2)\omega_0^2 = \frac{1}{2}D\varphi^2, \quad (2)$$

де позначено $I_z^{\text{маятн}} = I_1$, φ - максимальний кут повороту маятника, D - модуль кручення дроту.

З рівнянь (1), (2) і з урахуванням формули $v = \omega_0 l$, що зв'язує кутову і лінійну швидкості, отримуємо

$$v^2 = \frac{D\varphi^2}{m^2 l^2} (I_1 + ml^2). \quad (3)$$

Оскільки крутильний балістичний маятник являє собою масивне тіло (за рахунок вантажів В), то момент інерції маятника I_1 у багато разів більше моменту інерції кулі ml^2 відносно осі обертання маятника, $I_1 \gg ml^2$. Тоді рівняння (3) спрощується і може бути записано у вигляді

$$v^2 = \frac{D\varphi^2 I_1}{m^2 l^2}. \quad (4)$$

В теорії коливань доводиться, що період коливань крутильного маятника

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{I_1}{D}}. \quad (5)$$

Для виключення з формул невідомої величини модуля кручення D поводяться наступним чином. Змінюють відстань між вантажами, тоді змінюється і момент інерції маятника. Його нове значення дорівнює I_2 , а період коливань, відповідно, T_2 .

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{I_2}{D}}. \quad (6)$$

Рівняння (5) і (6) дають

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{T_1^2}{T_2^2}. \quad (7)$$

Якщо позначити

$$I_1 - I_2 = \Delta I, \quad (8)$$

то з урахуванням (7) можна записати

$$I_1 = \frac{T_1^2}{T_1^2 - T_2^2} \Delta I. \quad (9)$$

З рівнянь (4) (5) і (9) випливає

$$v = \frac{2\pi\varphi}{ml} \frac{T_1}{T_1^2 - T_2^2} \Delta I. \quad (10)$$

Величину ΔI можна визначити, користуючись теоремою про паралельні осі (теоремою Штейнера). З цієї теореми випливає що

$$I_1 = I_0 + 2m_{\text{тяг.}} R_1^2, \quad (11)$$

$$I_2 = I_0 + 2m_{\text{тяг.}} R_2^2, \quad (12)$$

де I_0 - момент інерції маятника без тягарів (порожнього стрижня); I_1 - момент інерції, коли обидва тягаря містяться на відстанях R_1 від осі обертання; I_2 - момент інерції, коли обидва тягаря містяться на відстанях R_2 від осі обертання, $m_{\text{тяг.}}$ - маса кожного з тягарів.

Внеском в момент інерції маси "кулі" можна знехтувати через її малість. Нехай $R_1 > R_2$, тоді з рівнянь (10) і (11) отримуємо

$$I_1 - I_2 = \Delta I = 2m_{\text{тяг.}} (R_1^2 - R_2^2) \quad (13)$$

Рівняння (10) і (13) остаточно дають **робочу формулу** для визначення швидкості «кулі»

$$v = \frac{4\pi\varphi m_{\text{тяг.}}}{ml} \frac{T_1}{T_1^2 - T_2^2} (R_1^2 - R_2^2). \quad (14)$$

Порядок виконання роботи

1. Обидва циліндри максимально розсовують уздовж стрижня. Вимірюють величину R_1 , тобто відстань між віссю маятника і серединою одного з циліндрів. (На стрижні нанесені сантиметрові позначки).

2. Готують пружинний пістолет до пострілу, вісь ствола пістолета має бути перпендикулярною до осі горизонтального стрижня маятника. Включають прилад в мережу, потім натискають клавіші "СЕТЬ" і "СБРОС". Далі після перетинання важелем рамки променя фотоелектричного датчика, включаються лічильник коливань і секундомір. **Лічильник коливань** - світлове табло, на якому висвітлюється число n повних коливань; **секундомір** - світлове табло, на якому висвітлюється загальний час n коливань в секундах.

3. Вистрілюють з пістолета і відзначають максимальний кут φ відхилення маятника. Переводять значення кута з градусів в радіани: $1 \text{ рад} = 57,3^\circ$.

4. Для вимірювання періоду коливань T_1 , не зупиняючи маятника, відраховують за секундоміром час t десяти повних коливань ($n = 10$) і визначають значення величини періоду $T = \frac{t}{n}$. Дослід повторюють ще два рази.

5. Вимірюють відстань l від осі обертання маятника до місця попадання «пули» в мішень.

6. Зменшивши момент інерції маятника (максимально зближуючи циліндри), вимірюють R_2 - відстань між віссю маятника і серединою одного з циліндрів.

7. Для вимірювання нового періоду коливань T_2 маятник відхиляють вручну приблизно на такий самий кут, що і «куля», і відпускають. При цьому кут за шкалою вимірювати не слід. Визначення величини періоду T_2 проводиться так само, як і величини T_1 .

8. **За формулою (14) розраховують швидкість «кулі».**

Маса циліндричного тягара $m_{\text{тяг.}} = 0,2$ кг, маса «кулі» вказана на приладі.

9. Дослід повторюють ще два рази. Дані заносять в таблицю.

Таблиця

№ п/п	R_1 , м	R_2 , м	φ , рад	T_1 , с	T_2 , с	l , м	v_i , м/с	$\langle v \rangle$, м/с	Δv_i , м/с	Δv_i^2 , (м/с) ²	$S_{\langle v \rangle}$	Δv , м/с	E , %
1													
2													
3													

Відповідь записують у вигляді:

$$v = (\langle v \rangle \pm \Delta v) \text{ м/с при } \alpha = \dots$$

Контрольні питання

1. Що називається моментом інерції частинки і моментом інерції тіла відносно деякої осі?
2. Чому дорівнює момент імпульсу «кулі» до потрапляння в мішень? Після застрягання в мішені?
3. Чому дорівнює момент імпульсу симетричного тіла, що обертається навколо осі симетрії?
4. Чому дорівнює кінетична енергія тіла, що обертається навколо нерухомої осі?
5. Сформулюйте закон збереження моменту імпульсу. За яких умов він виконується?
6. Чому закон збереження механічної енергії застосовується тут до крутильного маятника після непружного удару «кулі» в мішень?