

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ДНІПРОВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»



І.П. Гаркуша, В.П. Курінний, М.О. Журавльов

ЛАБОРАТОРНІ РОБОТИ З ФІЗИКИ

КОЛИВАННЯ І ХВИЛІ

Навчальний посібник

Дніпро
НТУ «ДП»
2023

УДК 53(07)
Г 55

*Рекомендовано до видання
вченою радою як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра
технічних спеціальностей університету
(протокол № 7 від 29.06.2023)*

Рецензенти:

Е.П. Штапенко – д-р фіз.-мат. наук, професор кафедри гідравліки, водопостачання та фізики Українського державного університету науки і технологій;

С.І. Скіпочка – д-р техн. наук, професор, завідувач лабораторією фізики і гідромеханічного моніторингу масиву гірських порід Інституту геотехнічної механіки ім. М.С. Полякова НАН України.

Гаркуша І.П.

Г55 Лабораторні роботи з фізики. Розділ 4. Коливання і хвилі : навч. посіб. / І.П. Гаркуша, В.П. Курінний, М.О. Журавльов ; М-во освіти і науки України, Нац. техн. ун-т «Дніпровська політехніка». – Дніпро : НТУ «ДП», 2023. – 121 с.

Наведено описання лабораторних робіт, виконання яких передбачено робочими програмами з фізики спеціальностей 104, 121, 125, 126, 132, 141, 172, 184, 185 та всіх інших технічних спеціальностей.

Належна увага приділяється питанням сучасної експериментальної техніки та виробленню навичок правильного вимірювання фізичних величин.

Кожна інструкція до лабораторної роботи містить опис лабораторної установки, теоретичні відомості, порядок виконання робіт і контрольні питання для самоперевірки.

Призначено для студентів та викладачів усіх технічних спеціальностей університету.

УДК 53(07)

© І.П. Гаркуша, В.П. Курінний, М.О. Журавльов, 2023

© НТУ «Дніпровська політехніка», 2023

Зміст

Передмова	4
Теоретичне введення. Розділ «Коливання і хвилі»	5
1. Механічні коливання	5
2. Математичний маятник	6
3. Фізичний маятник	8
4. Додавання коливань	10
5 Згасаючі коливання	12
6. Вимушені механічні коливання	14
7. Електричний коливальний контур	16
8. Поняття про фазові траєкторії у фазовому просторі	19
9. Механічні хвилі	20
10. Поздовжні хвилі в твердому тілі. Швидкість пружних хвиль	22
11. Стоячі хвилі	23

Лабораторні роботи

Вступ. Правила статистичної обробки експериментальних результатів	26
4.1. Вивчення вільних коливань математичного маятника	33
4.2. Вивчення коливань оборотного маятника та визначення прискорення вільного падіння	37
4.3. Вивчення додавання коливань за допомогою осцилографа	41
4.4. Вивчення додавання взаємно перпендикулярних коливань та визначення частоти гармонічного коливання за допомогою фігур Ліссажу	48
4.5. Вивчення хвильових явищ на поверхні води	52
4.6. Вивчення стоячих хвиль і визначення власних частот коливань струни.....	58
4.7. Вивчення власних коливань струни методом резонансу	62
4.8. Визначення швидкості звуку в твердих тілах резонансним методом	67
4.9. Визначення швидкості звуку в повітрі	73
4.10. Вивчення релаксаційних коливань	78
4.11. Дослідження згасаючих коливань у коливальному контурі методом порівняння амплітуд	84
4.12. Дослідження згасаючих коливань за допомогою фазових кривих	90
4.13. Дослідження процесів зарядки і розрядки конденсатора	94
4.14. Вивчення вимушених електричних коливань у коливальному контурі ...	100
4.15. Дослідження обміну енергією коливань у зв'язаних контурах	106
4.16. Вивчення електричних властивостей сегнетоелектриків за допомогою осцилографа	110
4.17. Дослідження гістерезису феромагнітних матеріалів	116

Передмова

Пропонована книга є посібником з лабораторного практикуму в курсі загальної фізики (розділ «Коливання і хвилі»). Навчальний посібник містить опис лабораторних робіт, які студенти виконують індивідуально.

Лабораторний практикум, який пропонується в навчальному посібнику, дає можливість студенту спостерігати і відтворювати приклади коливальних процесів, що вивчаються в курсі фізики, перевірити на досліді фізичні закономірності.

У вищій школі, на жаль, майже завжди викладання матеріалу на лекціях і паралельне виконання лабораторних робіт з цих розділів здійснити неможливо.

Тому спостерігається «забігання» лабораторних занять у порівнянні з теорією, що викладають на лекціях (замітимо, що такого «забігання» можна уникнути під час фронтального проведення лабораторних робіт в умовах, на жаль, вимушеної дистанційної освіти).

Щоб свідомо виконувати лабораторну роботу, студент повинен попередньо самостійно ознайомитися з теорією досліду. Тому у даному посібнику методичні вказівки до кожної лабораторної роботи містять крім опису досліду також короткі теоретичні відомості. З цією ж метою в посібнику введено розділ «Теоретичне введення», який, звичайно, не замінює роботи студента зі стабільними підручниками.

Якщо виклад теоретичних питань можна знайти у більшості поширених підручників, то в цьому посібнику опис теорії лабораторної роботи не наводиться. Опис кожної лабораторної роботи у посібнику містить короткий виклад сутності явища, що вивчається, з посиланнями на літературу, в якій це явище докладно описано. Студент посилається до підручників, список рекомендованих підручників наведено у посібнику.

Виконуючи лабораторну роботу, студент удосконалює навички грамотного виміру фізичних величин та обробки експериментальних даних. З цією метою у посібнику (свідомо повторно) наводяться відомості про правила обробки експериментальних результатів. За обсягом лабораторні роботи здебільшого розраховані одне двогодинне заняття.

Навчальний посібник «Лабораторний практикум із фізики. Розділ «Коливання та хвилі» є результатом багаторічної роботи співробітників кафедри фізики НТУ «Дніпровська політехніка» по створенню лабораторних робіт, які задовольняють робочим програмам більшості технічних спеціальностей. Роботи поставлені у фізичному практикумі кафедри. При цьому авторами використано також досвід найкращих навчальних фізичних лабораторій вишів України.

В останні роки у навчальних планах вузів на фізику відводиться два, а часті і один семестр. За цей час студент повинен отримати знання з усіх розділів загальної фізики. Зрозуміло, що в таких умовах лабораторні роботи мають бути ретельно відібрані, глибоко продумані та кваліфіковано здійснені. Завданням викладача є докладний підбір тих чи інших лабораторних робіт з урахуванням майбутньої спеціальності бакалавра.

Теоретичне введення. Розділ «Коливання і хвилі»

1. Механічні коливання

Коливаннями називаються рухи або процеси, які повторюються через рівні проміжки часу. У механічних коливаннях, наприклад, повторюється положення рівноваги системи при підході до нього з одного та іншого боку.

Позначимо через літеру x будь-яку величину, яка змінюється під час коливань. Це може бути кут φ відхилення маятника годинника, зміщення x вантажу на пружині від положення рівноваги, заряд q на пластині конденсатора коливального контура і т.д. Ці величини залежать від часу: $x = x(t)$.

Найпростіша функція, яка описує періодичний процес у випадку **гармонічних** (або синусоїдних) коливань має вигляд:

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0),$$

або

$$x = A \sin(\omega t + \varphi_1).$$

Тут x - миттєве значення коливної величини.

Аргументи косинуса і синуса $(\omega t + \varphi_0)$ та $(\omega t + \varphi_1)$ визначають значення x в даний момент часу і називаються **фазою** коливання. В момент початку відліку часу ($t = 0$) фаза дорівнює початковій фазі φ_0 (або φ_1).

Періодом T називають тривалість одного повного коливання, тобто найменший проміжок часу, через який повторюється довільно вибраний стан коливної системи.

Величина, обернена періоду T , яка дорівнює числу коливань в секунду, називається **частотою** коливань ν .

$$\nu = \frac{1}{T}$$

Величина A , що дорівнює максимальному відхиленню величини x від рівноважного значення, називається **амплітудою** коливання.

Оскільки синус та косинус – періодичні функції, то через проміжок часу T фаза коливань отримує приріст 2π :

$$\omega(t + T) + \varphi_0 = \omega t + \varphi_0 + 2\pi,$$

звідки

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Тепер можна встановити фізичний зміст величини ω :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu,$$

яка називається **коловою (циклічною) частотою** коливань. Вона, очевидно, дорівнює числу повних коливань за 2π одиниць часу.

Частота ν і циклічна частота ω вимірюються в секундах в мінус першому степені ($1/c$), для яких введено назву – **герц** ($1 \text{ Гц} = 1/c$). Наприклад $\nu = 50 \text{ c}^{-1}$ – коливання з частотою 50 Гц.

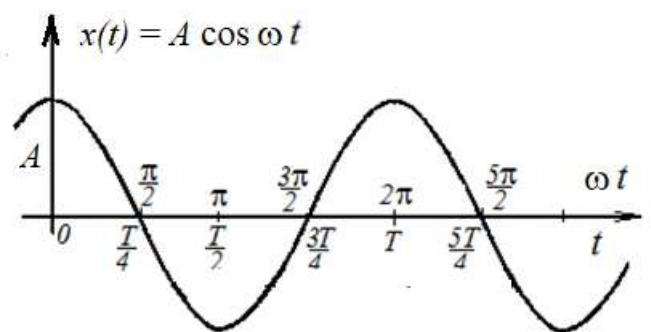


Рис. 1.1.

Графік гармонічних коливань зображений на рис. 1.1. Для спрощення початкова фаза коливань у рівнянні коливань покладена рівною нулю, $\varphi_0 = 0$.

На графіку по осі абсцис відкладено час t (в частках періоду T - нижня шкала) або фазу ωt (в кутових одиницях – радіанах – верхня шкала). По осі ординат відкладено значення коливної величини x (наприклад, відхилення математичного маятника від положення рівноваги) як функції часу t . За початок коливань прийняте положення найбільшого відхилення.

Тоді гармонічні коливання набувають вигляду

$$x(t) = A \cos(2\pi vt + \varphi_0) = A \cos\left(\frac{2\pi}{T} t + \varphi_0\right).$$

Якщо $x(t)$ – координата точкового тіла, яке здійснює гармонічні коливання, то його **швидкість** визначається як перша похідна за часом від зміщення $x(t)$:

$$v_x(t) = dx/dt = x' = -A\omega \sin(\omega t + \varphi_0),$$

і **прискорення** як друга похідна

$$a_x(t) = x''(t) = \frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi_0).$$

Ці рівняння призводять до такої форми запису

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0.$$

Цей вираз називають диференціальним **рівнянням гармонічних коливань**, розв'язок якого має вигляд синуса або косинуса.

Якщо фізичну систему вивести зі стану сталої рівноваги та надати самій собі, то коливання поблизу сталої рівноваги називаються **власними** або **вільними**. Систему, яка здатна здійснювати власні коливання, називають **осцилятором**.

Приклади осциляторів: пружинний маятник, математичний маятник, фізичний маятник, коливальний контур та ін.

Кінетична W_k , потенціальна W_p та повна W енергія точки масою m , що здійснює гармонічні коливання

$$W_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \varphi),$$

$$W_p = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \varphi),$$

$$W = \frac{1}{2} m\omega_0^2 A^2 = \text{const}.$$

2. Математичний маятник

Математичний маятник – ідеалізована коливальна система – матеріальна точка маси m , підвішена на нерозтяжній невагомій нитці довжини l . Виведений із положення рівноваги

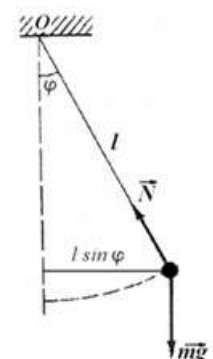


Рис. 2.1.

маятник починає гойдатися, здійснювати коливальний рух. На рис. 2 показані сили, які діють на матеріальну точку.

Будемо характеризувати відхилення маятника від положення рівноваги кутом φ , який утворює нитка з вертикаллю.

Відповідно до другого закону Ньютона для обертального руху сумарний момент зовнішніх сил, що діють на тіло, дорівнює добутку моменту інерції тіла на кутове прискорення

$$\Sigma M^{\text{зовн}} = I \varepsilon.$$

На маятник діють дві сили - сила тяжіння mg і сила натягу нитки N . При відхиленні маятника від положення рівноваги виникає крутний момент, який створюється тільки силою тяжіння. Момент же другої сили - натягу - відносно точки O дорівнює нулю, тому що напрям сили проходить через точку підвісу O .

Обертальний момент M (момент сили тяжіння) дорівнює за модулем добутку модуля сили mg на плече $l \sin \varphi$ (див. рис)

$$M = -mg l \sin \varphi.$$

Мінус поставлений в зв'язку з тим, що момент сили і кутове відхилення φ мають протилежні знаки. Кут φ відраховується проти годинникової стрілки, а сила обертає за годинниковою стрілкою.

Підставимо в рівняння другого закону Ньютона момент інерції матеріальної точки $I = ml^2$ і кутове прискорення як другу похідну від кута за часом

••

$\varepsilon = \ddot{\varphi}$ (похідну за часом зображують точкою над літерою):

$$ml^2 \ddot{\varphi} = -mgl \sin \varphi.$$

Скористаємося розкладанням синуса в степеневий ряд (або ряд Тейлора - розкладання функції в нескінченну суму степеневих функцій.)

$$\sin \varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \dots$$

(тут φ задається в радіанах; точками після третього доданку позначені інші члени ряду).

Звідси видно, що для досить малих φ можна знехтувати в розкладанні всіма членами ряду, крім першого. Тому у випадку малих коливань можна покласти синус φ приблизно рівним самому куту φ (вираженому в радіанах):

$$\sin \varphi \approx \varphi.$$

Наприклад, для $\varphi = 0,10 \text{ рад}$ ($5,73^\circ$) за таблицями $\sin \varphi = 0,0998$, тобто рівняння $\sin \varphi \approx \varphi$ добре виконується:

$$0,0988 \approx 0,1.$$

Для наступного малого кута $\varphi = 0,20 \text{ рад}$ ($11,46^\circ$) за таблицями $\sin \varphi = 0,1987$, отже приближене рівняння $\sin \varphi \approx \varphi$ теж має місце:

$$0,1987 \approx 0,2.$$

Але вже для досить великих кутів, наприклад $\varphi = 1,0 \text{ рад}$ ($57,3^\circ$) маємо $\sin \varphi = 0,841$ і рівність $\sin \varphi \approx \varphi$ вже не має місця

$$0,841 \neq 1,0.$$

Які ж кути відповідають «малим» відхиленням? Це залежить від точності вимірювань. Якщо рахувати до двох знаків після коми, то кут φ не повинен перевищувати приблизно $10^\circ - 15^\circ$.

У зв'язку з викладеним, другий закон Ньютона набуває вигляду

$$\ddot{\varphi} + \left(\frac{g}{l}\right)\varphi = 0.$$

Оскільки коефіцієнт $\frac{g}{l}$ є додатним, його можна позначити як квадрат деякої величини

$$\omega^2 = \frac{g}{l}$$

В результаті отримуємо *рівняння малих коливань математичного маятника*

$$\ddot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0.$$

Це рівняння називається диференціальним, оскільки в нього входить крім невідомої величини φ і її похідна $\ddot{\varphi}$ (друга). Загальний метод вирішення таких рівнянь розглядається в курсі вищої математики. Рішення має вигляд):

$$\varphi = A \cos(\omega t + \alpha_0) \quad \text{або} \quad \varphi = A \sin(\omega t + \alpha_1).$$

Можна безпосередньою підстановкою в диференціальне рівняння переконатися в тому, що це рішення задовольняє йому, тобто звертає його в тотожність.

Отже, при малих коливаннях кутове відхилення математичного маятника змінюється з часом за *гармонічним* (синусоїдальним або косинусоїдальним) законом.

З урахуванням співвідношення $\omega^2 = g/l$ отримаємо формулу періоду коливань математичного маятника (у випадку малих коливань)

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

3. Фізичний маятник

Фізичним маятником називають будь-яке тверде тіло, яке здійснює коливання навколо нерухомої осі, що не проходить через центр мас.

Другий закон Ньютона для обертального руху $I \varepsilon = M$, записаний для такого маятника, має вигляд

$$I \ddot{\varphi} = -mgl \sin \varphi,$$

де I – момент інерції тіла відносно горизонтальної осі, яка проходить через точку підвісу O (на рис. 3.1 вісь O перпендикулярна до площини рисунка), m – маса маятника, а l – відстань OC від точки підвісу O до центра мас C маятника.

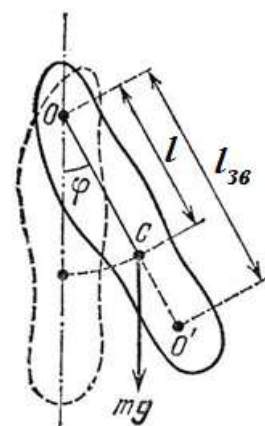


Рис. 3.1.

Знак «мінус» пояснюється тим, що момент M сили тяжіння повертає маятник до положення рівноваги, а кут відхилення φ відраховується у протилежному напрямі.

Для малих кутів $\sin\varphi \approx \varphi$ і рівняння другого закону Ньютона перетворюється у

$$\ddot{\varphi} + (mgl/I) \varphi = 0$$

або, якщо позначити

$$mgl/I = \omega_0^2,$$

набуває вигляду

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0.$$

Цей вираз, як вказувалось раніше, являється *рівнянням гармонічних коливань*.

Тоді період коливань фізичного маятника при малих відхиленнях від положення рівноваги

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgl}}$$

Тут I – момент інерції маятника відносно осі підвісу O (рис. 3.1), m – маса маятника, g – прискорення вільного падіння, l – відстань від точки підвісу O до центра мас C маятника.

Із зіставлення періодів математичного $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ і фізичного

$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgl}}$ маятників випливає, що період коливань фізичного маятника співпадає з періодом коливань такого математичного маятника, який має довжину

$$l_{зв} = I/(ml)$$

Величину $l_{зв}$ називають *зведеною довжиною* фізичного маятника.

Окремо доказується, що при підвішуванні маятника в центрі коливань зведена довжина, а отже, і період коливань будуть тими ж, що й до того.

Кажуть, що **точка підвісу й центр коливань** мають властивості **взаємності**: під час переносу точки підвісу в центр коливань колишня точка підвісу стає центром коливань.

Доведення властивості взаємності точки підвісу й центра коливань.

Момент інерції I маятника відносно осі, що проходить через точку підвісу O (рис.3.1) за теоремою про моменти інерції (теоремою Штейнера про паралельні осі) може бути представлений у вигляді

$$I = I_C + ml^2, \quad (4)$$

де I_C – момент інерції відносно осі, яка є паралельною осі підвісу й проходить через центр мас маятника. Підставивши цей вираз в (3), одержимо, що

$$l_{зв} = \frac{I_C}{ml} + l \quad (5)$$

Підвісимо тепер маятник у центрі коливань O' . Зведена довжина в цьому випадку буде дорівнювати

$$l'_{зв} = \frac{I_C}{ml'} + l' \quad (6)$$

де l' – відстань від початкового центра коливань (від точки O') до центра мас маятника. З огляду на те, що $l' = l_{зв} - l$, і виконавши алгебраїчні перетворення, вираз (6) перетворимо в такий спосіб

$$l'_{зв} = \frac{I_C}{m(l_{зв} - l)} + (l_{зв} - l) = l_{зв} + \frac{1}{m(l_{зв} - l)} [(I_C + ml^2) - ml l_{зв}]. \quad (7)$$

Вираз у квадратних дужках дорівнює нулю. Дійсно, з (3) і (4) випливає

$$I_C + ml^2 = I = ml l_{зв}.$$

Отже, $l'_{зв} = l_{зв}$, тобто при підвішуванні маятника в центрі коливань зведена довжина, а отже, і період коливань будуть тими ж, що й до того. Говорять, що *точка підвісу й центр коливань мають властивість взаємності*: під час переносу точки підвісу в центр коливань колишня точка підвісу стає центром коливань.

4. Додавання коливань

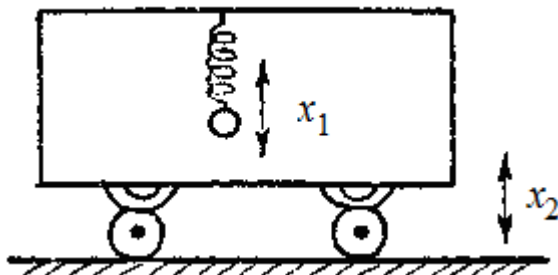


Рис. 4.1.

Можливі випадки, коли тіло бере участь одночасно в декількох коливаннях, що відбуваються вздовж **одного і того ж напрямку**.

Якщо, наприклад, підвісити кульку на пружині до стелі вагона, що хитається на ресорах (рис. 4.1), то рух кульки відносно поверхні Землі буде складатися з коливань вагону відносно Землі і коливань

кульки відносно вагона.

$$x = x_1 + x_2$$

Нехай додаються два однаково напрямлених коливання **однакової частоти ω** .

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \alpha_1),$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \alpha_2).$$

Шляхом тригонометричних перетворень можна показати, що сумарне зміщення має вигляд

$$x = A \cos(\omega t + \alpha),$$

де результуюча амплітуда

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1)},$$

а початкова фаза α визначається зі співвідношення

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2}{A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2}.$$

Отже, результуюче коливання являє собою гармонічне коливання з тією самою частотою, але з іншою амплітудою і початковою фазою.

Нехай тепер додаються два **взаємно перпендикулярних гармонічних** коливання, які відбуваються з однаковою частотою (наприклад, кулька, яка підвішена на пружинах, як вказано на рис. 4.2), але зсунуті за фазою на кут α .

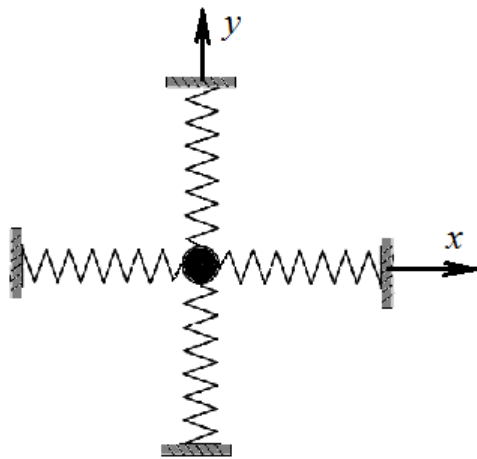


Рис. 4.2.

Оберемо початок відліку часу таким чином, щоб початкова фаза коливань вздовж осі X дорівнювала нулю. Тоді зміщення запишуться:

$$x = A \sin \omega t,$$

$$y = B \sin (\omega t + \alpha).$$

Ця система рівнянь являє собою рівняння траєкторії коливної точки в параметричній формі. Якщо виключити час (параметр t), отримаємо

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - 2 \frac{xy}{AB} \cos \alpha = \sin^2 \alpha$$

Якщо різниця фаз $\alpha = 0$, то

$$\left(\frac{y}{B} - \frac{x}{A} \right)^2 = 0$$

або

$$y = \frac{B}{A} x$$

Траєкторія кульки в цьому випадку являє собою **пряму лінію**, що проходить через початок координат.

Якщо різниця фаз $\alpha = \pi/2$, то отримаємо

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1.$$

У цьому випадку траєкторія являє собою **еліпс**, півосі якого орієнтовані вздовж координатних осей..

Вигляд еліпса (рис. 4.3) залежить від різниці фаз коливань; в окремих випадках **еліпс** може виродитися в **пряму лінію** (рис. 4.3).

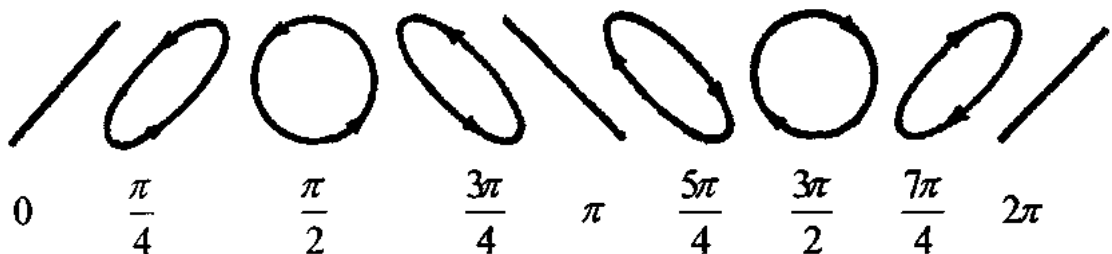


Рис. 4.3.

Я

кщо різниця фаз дорівнює $\frac{\pi}{2}$ або $\frac{3\pi}{2}$, причому амплітуди коливань є рівними ($A_1 = A_2 = A$), то точка описує **коло** (рис. 4.3)

Якщо частоти взаємно перпендикулярних коливань не є однаковими, то траєкторія результуючого руху має вигляд складних кривих, які називаються *фігурами Ліссажу*. Форма фігур Ліссажу залежить від співвідношення частот коливань і від різниці фаз між ними. Приклад фігур Ліссажу при відношенні частот 3: 4 і 1: 2 показаний на рис. 4.4.

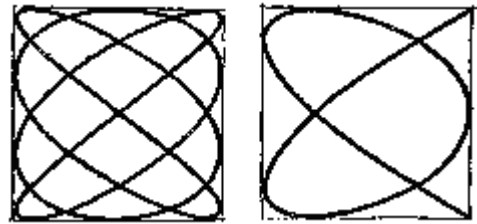


Рис. 4.4.

5. Згасаючі коливання

Гармонічні коливання, які відбуваються з постійною амплітудою і продовжуються нескінченно довго, є фізичної абстракцією.

У реальних фізичних системах, які здійснюють коливальний рух, завжди діють сили тертя. Наприклад, при коливанні пружинного маятника у в'язкому середовищі (рис. 5.1). Тому реальні коливальні рухи відбуваються з поступовими втратами енергії коливань на роботу проти сил опору. Відбувається дисипація (розсіювання, перетворення в тепло) механічної (або електромагнітної) енергії.

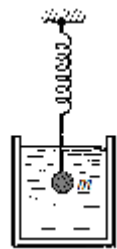


Рис. 5.1.

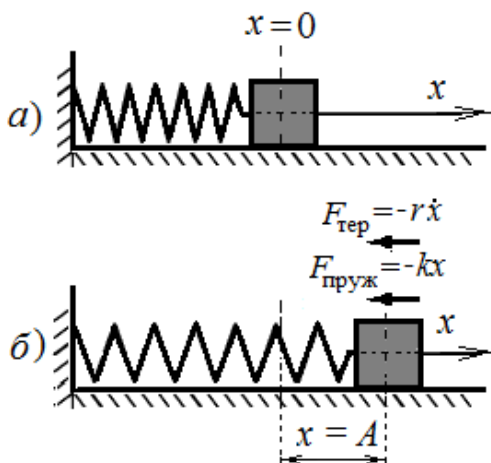


Рис. 5.2.

Зменшення енергії проявляється в тому, що з часом зменшується амплітуда коливань.

Можна показати, що повна енергія E системи, яка здійснює гармонічні коливання, прямо пропорційна квадрату амплітуди A

$E = kA^2/2$, де k – коефіцієнт пружної (або, в загальному випадку, квазіпружної) сили.

Коливання, які відбуваються з поступовою втратою початкової енергії, називаються *згасаючими*.

При невеликій швидкості руху сила опору пропорційна швидкості:

$$F_{\text{опор}} = -rv,$$

де r - коефіцієнт опору; знак «мінус» вказує на те, що вектори $F_{\text{опор}}$ і v мають протилежний напрямок.

Запишемо другий закон Ньютона для згасаючих коливань, наприклад, **пружинного маятника** уздовж осі Ox (рис. 5.2)

$$ma = F + F_{\text{тер}} = -kx - rv,$$

або

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + r \frac{dx}{dt} + kx = 0,$$

де m - маса тіла, $a = \frac{d^2x}{dt^2}$ - його прискорення, $F = -kx$ - пружна сила, $F_{\text{тер}} = -$ сила тертя (опору).

Якщо ввести позначення

$$\frac{r}{m} = 2\beta; \quad \frac{k}{m} = \omega_0^2,$$

де $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ – так звана власна частота коливань, з якою відбуваються коливання у відсутності тертя, β - **коефіцієнт загасання**, то рівняння згасаючих коливань набуває вигляду:

$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (*)$$

Це так зване лінійне однорідне диференціальне рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами

Строгий розв'язок рівняння (*) наводиться в курсі диференціальних рівнянь. Існують також інші засоби пошуку розв'язку. Його можна шукати [3] у вигляді

$$x = u e^{-\beta t} = u \exp(-\beta t), \quad (**)$$

де u - деяка функція часу.

Отримуємо першу та другу похідні за часом від x :

$$\dot{x} = \dot{u} \exp(-\beta t) - u\beta \exp(-\beta t) = (\dot{u} - \beta u) \exp(-\beta t)$$

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= (\ddot{u} - \beta \dot{u}) \exp(-\beta t) - (\dot{u} - \beta u) \beta \exp(-\beta t) = \\ &= (\ddot{u} - 2\beta \dot{u} + \beta^2 u) \exp(-\beta t) \end{aligned}$$

Після підстановки виразів для x , \dot{x} , \ddot{x} у рівняння (*) та скорочення на множник $\exp(-\beta t)$ отримуємо

$$\ddot{u} + (\omega_0^2 - \beta^2)u = 0$$

Якщо тертя мале, тобто $\beta^2 \ll \omega_0^2$, можна позначити

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}.$$

Тоді отримаємо диференціальне рівняння гармонічних коливань

$$\ddot{u} + \omega^2 u = 0,$$

розв'язком якого є відома функція

$$u = A_0 \cos(\omega t + \alpha).$$

Підставивши цю функцію у вихідне рівняння (*), робимо висновок, що у випадку малого тертя розв'язком рівняння (*) буде функція

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha)$$

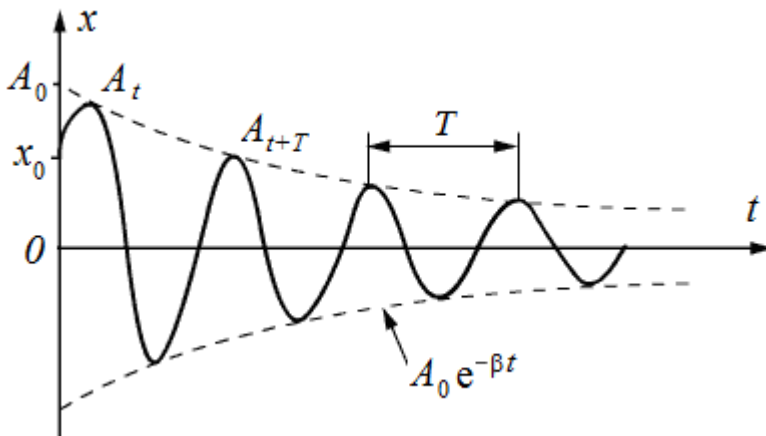


Рис. 5.3.

Вираз

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t}$$

можна розглядати як амплітуду коливань, яка повільно змінюється з часом.

Графік згасаючих коливань показаний на рис. 5.3. Штриховими лініями показаний закон зменшення амплітуди з часом.

Кількісна характеристика швидкості загасання ко-

ливань - **логарифмічний декремент згасання δ** . Він дорівнює натуральному логарифму відношення амплітуд коливань на початку і в кінці періоду

$$\delta = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \ln \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = \ln(e^{\beta T}) = \beta T$$

Позначимо через τ проміжок часу, за який амплітуда коливань зменшується в e разів (час релаксації). Тоді

$$\frac{A(t)}{A(t+\tau)} = e^{-\beta\tau} = \frac{1}{e},$$

звідки

$$\beta = \frac{1}{\tau}$$

і

$$\delta = \beta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N_e}.$$

Отже, логарифмічний декремент згасання δ є фізична величина, яка обернена числу коливань N_e , по закінченню яких амплітуда убуває в e разів. Наприклад, якщо $\delta = 0,01$, то амплітуда зменшиться в e разів після 100 коливань.

Для характеристики коливальної системи вживається також величина

$$Q = \frac{\pi}{\delta} = \pi N_e,$$

яку називають **добротністю** коливальної системи. Вона пропорційна числу коливань N_e , що здійснюються системою за той час, за який амплітуда убуває в e разів.

При збільшенні тертя частота коливань $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ прямує до нуля, а період коливань зростає. Коли коефіцієнт згасання стає рівним критичному, тобто $\beta = \omega_0$, то, як видно з формули $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$ період коливань перетворюється в нескінченність. Отже, система, виведена з положення рівноваги, повертається в положення рівноваги **аперіодично** (відсутність коливань, рис. 5.4).

Наприклад, аперіодично буде підходити до стану рівноваги вантаж малої маси, підвішений на м'якій пружині (рис.5.1), якщо його помістити в дуже в'язке середовище (наприклад, в гліцерин).

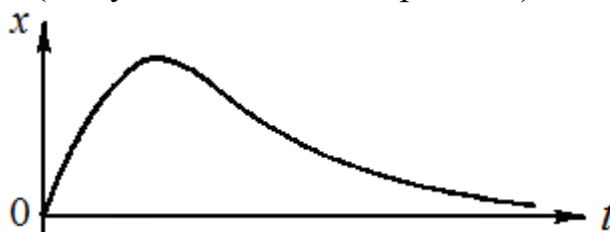


Рис. 5.4.

6. Вимушені механічні коливання

Нехай на осцилятор діє зовнішня сила, яка має гармонічний характер:

$$F = F_0 \cos \omega t,$$

де F_0 - амплітуда зовнішньої сили, ω - циклічна частота змушуючого впливу.

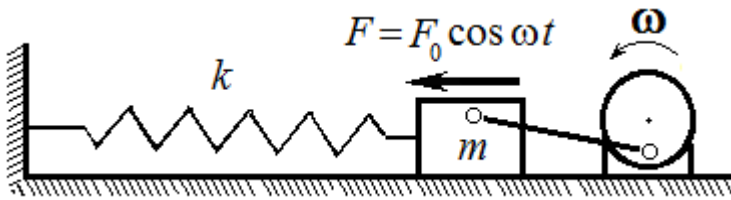


Рис. 6.1.

Для визначеності це може бути брусок, який прив'язаний до стіни пружиною і лежить на горизонтальній поверхні.

Брусок з'єднаний з ексцентриком, який рівномірно обертається та підштовхує брусок, за допомогою тяги (рис. 6.1).

Через деякий час після початку зовнішньої дії коливання бруска з власної частотою ω_0 згасають, і він буде коливатися з тією ж частотою ω , з якою змінюється зовнішня сила.

Отже, зовнішній вплив нав'язує системі свою частоту і закон коливань.

Незгасаючі коливання системи, які відбуваються внаслідок дії зовнішньої періодичної сили, називають *вимушеними коливаннями*, а силу F – *змушуючою силою*.

Рівняння другого закону Ньютона для такого випадку має вигляд

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - r \frac{dx}{dt} + F_0 \cos \omega t$$

Розділимо це рівняння на масу m коливальної системи та введемо такі позначення

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2, \quad \frac{r}{m} = 2\beta, \quad \frac{F_0}{m} = f_0.$$

Тоді рівняння динаміки вимушених коливань набуває вигляду

$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t,$$

де ω_0 – циклічна частота власних коливань системи, β - коефіцієнт згасання коливань, f_0 - амплітуда змушуючої сили, яка віднесена до одиниці маси.

З курсу вищої математики відомо, що розв'язок цього диференціального рівняння має вигляд

$$x = A \cos(\omega t + \varphi),$$

де A - амплітуда усталених коливань. ω – частота зовнішньої змушуючої сили, φ – зсув фаз між зміщенням і змушуючою силою.

Амплітуда вимушеного коливання дорівнює

$$A = \frac{F_0 / m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}. \quad (*)$$

Як видно з цієї формули, амплітуда вимушених коливань пропорційна амплітуді зовнішньої сили F_0 і залежить від співвідношення вимушеної і власної частот.

Коли частота змушуючої сили наближається до нуля, $\omega \rightarrow 0$ (статичний випадок $\omega = 0$, або дуже повільні коливання, $\omega \ll \omega_0$), амплітуда вимушених коливань прямує до величини $A(0) = \frac{F_0 / m}{\omega_0^2}$.

При збільшенні частоти ω амплітуда A спочатку збільшується, оскільки зменшується знаменник у формулі (*) (зменшується величина різниці $(\omega_0^2 - \omega^2)$) до тих пір, поки ω не стане рівною ω_0 .

При $\omega = \omega_0$ амплітуда A досягає максимального значення.

При подальшому збільшенні ω знаменник у формулі (*) почне збільшуватися, а амплітуда A зменшуватися.

При $\omega \rightarrow \infty$ амплітуда $A \rightarrow 0$: $A \sim f_0/\omega^2$, $\omega \gg \omega_0$.

На графіку залежність амплітуди вимушених коливань від частоти змушуючої сили зобразиться кривою, що має максимум поблизу $\omega = \omega_0$ (рис. 6.2).

Явище, різкого збільшення амплітуди вимушених коливань, коли частота змушуючої сили наближається до власної частоти системи, називається **резонансом**.

Графік залежності амплітуди від частоти змушуючої сили називають **резонансною кривою**.

Частота змушуючої сили $\omega_{рез}$, за якої амплітуда коливань досягає найбільшого значення $A_{рез}$, називається **резонансною частотою**.

Резонансне значення частоти

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}.$$

В резонансі швидкість і сила коливаються в одній фазі, тобто сила весь час збігається за напрямком зі швидкістю. Тому робота зовнішньої сили досягає максимального значення. Під час резонансу умови для передачі енергії від джерела зовнішньої сили до осцилятора є найбільш сприятливими. Тіло отримує поштовхи в належні моменти часу і в належних положеннях.

На відміну від вимушених коливань, де частота і амплітуда визначаються періодичною зовнішньою дією, у випадку **автоколивань** частота і амплітуда визначаються властивостями самої системи.

Автоколивання - це незгасаючі коливання системи, яка отримує енергію зовні і сама регулює амплітуду і період таких коливань. Найпоширеніший приклад - коливання маятника настінного годинника з грузиком: поповнення енергії для таких коливань відбувається за рахунок потенціальної енергії грузика, а коливання задається самим годинником - довжиною маятника.

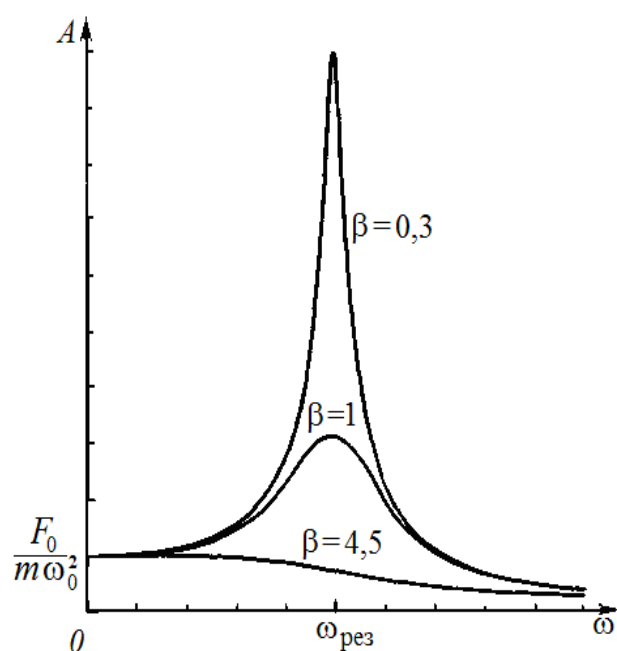


Рис. 6.2.

7. Електричний коливальний контур

Електричне коло, яке складається з послідовно з'єднаних конденсатора ємністю C , котушки індуктивності L і провідника з омичним опором R , називають *коливальним контуром* (рис. 7.1).

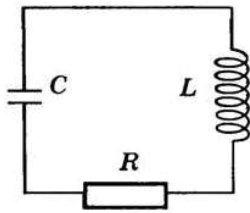


Рис. 7.1.

Опишемо спочатку ідеалізований контур без опору ($R = 0$, рис. 7.2).

Нехай у початковий час $t = 0$ від стороннього джерела на обкладки конденсатора поміщений заряд $\pm q_0$. Тоді між обкладками конденсатора виникає напруга

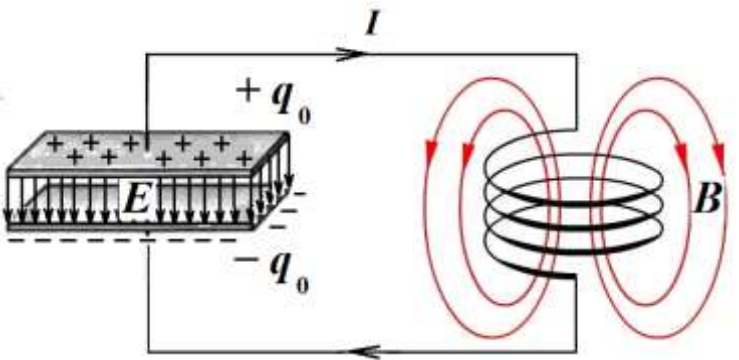


Рис. 7.2.

$$U = q_0/C$$

та електричне поле, енергія якого

$$W_e = q_0^2/2C.$$

Якщо обкладки зарядженого конденсатора з'єднати провідниками з котушкою L , то в колі виникає розрядний струм I (рис. 7.2).

Оскільки струм у контурі починає зростати, то індукується електрорушійна сила (самоіндукції), яка дорівнює

$$E_{si} = -L \frac{dI}{dt},$$

а напрям якої завжди такий, щоб перешкоджати зміні струму. Отже, струм самоіндукції на цьому етапі спрямований проти наростаючого розрядного струму.

Повна енергія, що складається з енергій електричного та магнітного полів, не витрачається на нагрівання дротів ($R = 0$) і за законом збереження енергії залишається постійною

$$W = \frac{q^2}{2C} + \frac{LI^2}{2} = const$$

Тому через чверть періода $t = 1/4 T$, коли конденсатор розрядиться, енергія електричного поля перетворюється на нуль, а енергія магнітного поля і струм досягають максимального значення. Отже, енергія електричного поля перетвориться на енергію магнітного поля.

В подальші моменти часу магнітне поле буде зникати, тому що немає струмів, що його підтримують. Це зникаюче поле викличе струм самоіндукції, який відповідно до закону Ленца прагне підтримати струм розряду конденсатора і буде, отже, спрямований у той самий бік, як і струм розряду.

Магнітне поле котушки повністю перетворюється на електричне поле конденсатора, напруженість якого набуває протилежного напрямку порівняно з початковим станом при $t = 0$.

Далі конденсатор знову розряджається. Виникає розрядний струм протилежного напрямку. Процеси в коливальному контурі повторюються у зворотному напрямку.

Час T , протягом якого конденсатор заряджається та розряджається, називається *періодом власних коливань*. У результаті перезарядки конденсатора періодично змінюється (тобто. коливається) ряд величин – заряд на обкладках q , напруга на конденсаторі U_C , сила струму I .

Колівання в коливальному контурі, які супроводжуються взаємними перетвореннями енергії електричного та магнітного полів, називаються **електромагнітними**. Закон зміни заряду конденсатора, сили струму та напруги на конденсаторі у коливальному контурі

$$\begin{aligned} q &= q_0 \cos(\omega_0 t + \varphi), \\ I &= I_0 \cos(\omega_0 t + \varphi + \pi/2), \\ U &= U_0 \cos(\omega t + \varphi), \end{aligned}$$

де q_0 – амплітуда коливань заряду, $I_0 = \omega_0 q_0$ – амплітуда коливань сили струму, $U_0 = q_0/C$ – амплітуда коливань напруги на конденсаторі, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ – власна частота контура.

Повна енергія коливального контура

$$W = \frac{CU_0^2}{2} = \frac{LI_0^2}{2} = \frac{q_0^2}{2C}.$$

У **реальному колі**, де не можна знехтувати втратами енергії на нагрівання провідників (джоулеве тепло), повна енергія буде спадати за законом:

$$dW = -I^2 R dt$$

Продиференціюємо за часом вираз повної енергії:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{q}{C} \frac{dq}{dt} + L \frac{dI}{dt} = 0.$$

Підстановка у це рівняння виразу dW дає

$$-I^2 R = \frac{1}{C} q \frac{dq}{dt} + LI \frac{dI}{dt}.$$

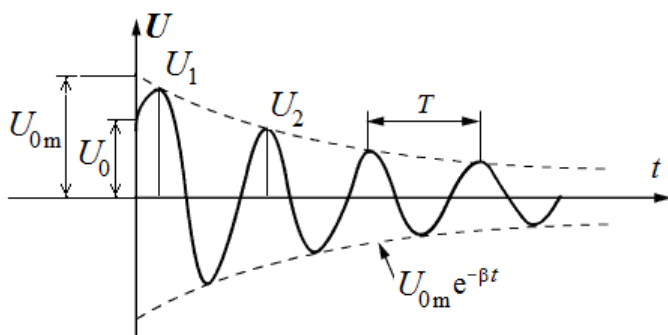
Використовуючи співвідношення між зарядом та струмом $I = dq/dt$, отримаємо

$$\ddot{q} + \frac{R}{L} \dot{q} + \frac{1}{LC} q = 0.$$

Це рівняння є лінійним диференціальним рівнянням другого порядку. Методи отримання рішення вивчаються в курсі диференціальних рівнянь. Рішення залежить від двох довільних констант, які визначаються початковими умовами. Рішенням такого рівняння є функція

$$q(t) = q_{m0} e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha),$$

де



$$\beta = \frac{R}{2L}$$

називається *коефіцієнтом загасання контура*, а

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

Рис.7.3.

частотою загасаючих коливань, q_{m0} та α - постійні, що визначаються з початкових умов. При цьому період згасаючих коливань у контурі становить

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}.$$

Розділивши заряд $q(t)$ на ємність C , отримаємо напругу на конденсаторі

$$U = \frac{1}{C} q_{m0} e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha) = U_{m0} e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha).$$

Таким чином, можна розглядати зміну напруги на конденсаторі як гармонічні коливання з амплітудою $U_{m0} e^{-\beta t}$, яка зменшується з часом за експоненціальним законом.

Графік напруги показаний на рис. 7.3. Штриховими лініями показано закон зменшення амплітуди з часом.

Логарифмічний декремент згасання δ за визначенням дорівнює

$$\delta = \ln \frac{U(t)}{U(t+T)} = \ln \frac{U_{0m} e^{-\beta t}}{U_{0m} e^{-\beta(t+T)}} = \ln(e^{\beta T}) = \beta T$$

Якщо коливальний контур є ідеальним (без опору), то з формули періоду згасаючих коливань при $R = 0$ отримаємо період вільних незгасаючих коливань (формулу Томсона)

$$T = 2\pi\sqrt{LC}$$

З формули періоду згасаючих коливань випливає, що в контурі можливі згасаючі коливання тільки в тому випадку, якщо $\omega > 0$, тобто $\frac{1}{LC} > \frac{R^2}{4L^2}$ (частота і період - дійсні величини) або $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$.

При досить великому опорі R або мінімальній індуктивності L , тобто $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ коливання в контурі взагалі не виникають, а відбувається так званий аперіодичний розряд конденсатора. **Онір**, при якому частота ω обертається в нуль, називається **критичним**:

$$R_{кр} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

8. Поняття про фазові траєкторії у фазовому просторі

Розглянемо прямокутну систему координат, по осі абсцис якої будемо відкладати деяку змінну x , а по осі ординат - швидкість зміни цієї величини - першу похідну за часом цієї змінної $v = \dot{x}$ (точкою над літерою прийнято в фізиці позначати похідну за часом).

Стан коливальної системи, який характеризується величинами x і v в деякий момент часу, зобразиться точкою в цій системі координат – так званою зображувальною точкою. Наприклад, для маятника стан визначається кутом φ відхилення і похідною за часом від кута - кутовою швидкістю $\dot{\varphi} = d\varphi/dt$.

Інший приклад. У коливальному контурі R, L, C координатою x може бути заряд q на обкладці конденсатора (або напруга U на конденсаторі, яка пропорційна заряду $U = q/C$), а роль першої похідної dq/dt виконує сила струму I в колі.

Якщо в системі протікає певний процес, стан змінюється і точка, яка зображує стан, описує деяку криву - **фазову траєкторію**.

Таким чином утворюється геометричний образ багатьох можливих станів системи.

Площина змінних (x, \dot{x}) наз **фазовою площиною осцилятора**.

Розглянемо вільні гармонічні коливання осцилятора. Нехай у цьому випадку

$$x = A \sin(\omega_0 t + \alpha),$$

$$\frac{\dot{x}}{\omega_0} = A \cos(\omega_0 t + \alpha),$$

і, отже,

$$x^2 + \left(\frac{\dot{x}}{\omega_0}\right)^2 = A^2.$$

Ми отримали рівняння кола. При вільних коливаннях осцилятора траєкторія зображувальної точки на фазовій площині являє собою **коло** з радіусом, що дорівнює амплітуді коливань. Час, за який зображувальна точка описує коло на фазовій площині (напрямок руху зображувальної точки показаний стрілками), дорівнює періоду коливань.

Коливанням з різними амплітудами будуть, очевидно, відповідати концентричні кола на фазовій площині (рис. 8.1).

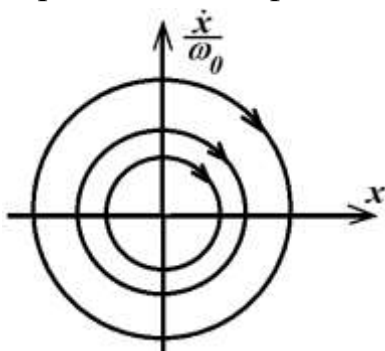


Рис. 8.1.

Можна бачити, що **згасаючі коливання** осцилятора будуть зображатися на фазовій площині **спіраллю**, яка скручується. (рис. 8.2), причому крок спіралі буде визначатися логарифмічним декрементом згасання, оскільки саме він показує, наскільки амплітуда згасаючих коливань убиває за один період.

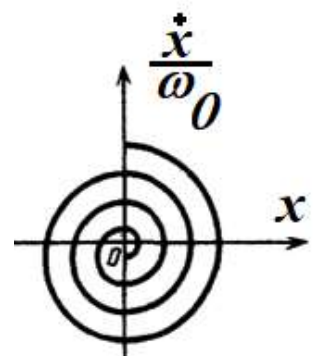


Рис. 8.2.

9. Механічні хвилі

Процес поширення у просторі коливань, які виникли внаслідок деякого збурення, називається *хвилею*. Механізм поширення хвиль у пружному середовищі полягає в тому, що коливання однієї частинки середовища спричиняють коливання сусідніх частинок, пружно пов'язаних з першою.

Процес виникнення хвиль можна розглянути на прикладі пружного шнура, котрий струшують за один кінець (рис. 9.1). Якесь частинка цього шнура, змістившись від положення рівноваги, діє на сусідні частинки, зміщує в свою чергу їх (стрілками на рисунку показані напрями зміщення точок шнура).

Коливання, які виникли на початку шнура від руки експериментатора, поширюються все далі і далі - утворюється хвиля.

Під час проходження хвилі частинки середовища здійснюють коливання навколо своїх рівноважних положень, а не переміщуються з хвилею у напрямі її поширення, як іноді помилково вважають.

Хвиля називається *поздовжньою*, якщо напрям коливань співпадає з напрямом поширення хвилі, та *поперечною*, якщо коливання відбуваються перпендикулярно такому напрямку.

Якщо середовище газове або рідинне, то в ньому можуть бути тільки поздовжні хвилі які являють собою чергування розтягувань і стискувань. Якщо середовище тверде, то пружна хвиля може бути як поперечною, так і поздовжньою.

Основна властивість всіх хвиль, незалежно від їх природи, полягає в тому, що у хвилях здійснюється перенос енергії без переносу речовини.

Хвиля характеризується довжиною λ , швидкістю u , інтенсивністю I .

Швидкість пружної хвилі залежить від пружних властивостей середовища. Так, поздовжні хвилі, наприклад, хвилі стиску та розтягу в стержні, з торця якого стукають молоточком (рис. 9.2), мають швидкість (виведення див. п.10) у твердих тілах

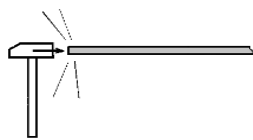


Рис. 9.2.

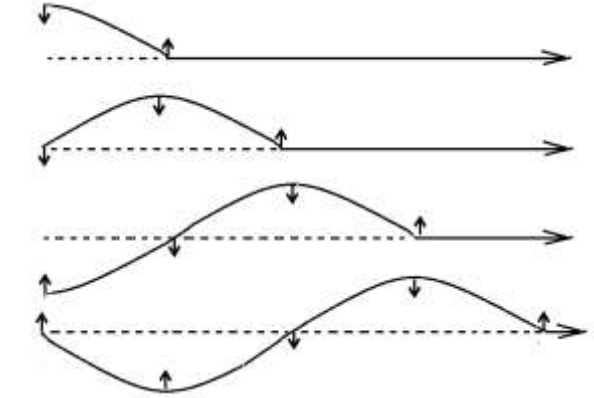


Рис. 9.1.

$$u = \sqrt{\frac{E}{\rho}},$$

де E - модуль Юнга, що характеризує поздовжню пружність середовища, ρ - густина середовища.

Швидкість хвилі в газі

$$u = \sqrt{\gamma \frac{P}{\rho}},$$

де γ – показник адиабати, який залежить від роду газу, ρ – густина газу, p – тиск газу в стаціонарному стані.

Зокрема, швидкість звуку у повітрі (при 0 °C) становить 332 м/с, у воді \approx 1500 м/с, у сталі \approx 550 м/с.

Нехай зміщення S від положення рівноваги точки середовища в точці координатою $z = 0$ (тобто джерело хвилі розміщено на початку координат, а хвиля поширюється вздовж осі z) змінюється з часом за гармонічним (синусоїдним) законом

$$S(t) = A \cos \omega t$$

Якщо деяка інша точка відстоїть від джерела хвиль на відстань z вздовж напрямку поширення, то коливання в цій точці відбуваються по такому само закону, але з запізненням в часі на $t = z/u$

$$S(z, t) = A \cos \omega \left(t - \frac{z}{u} \right) = A \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda} \right).$$

Цей вираз називають **рівнянням хвилі**, яка поширюється вздовж осі Oz .

Якщо в рівнянні хвилі зафіксувати час t , то залежність $S(z, t)$ дасть миттєву картину розподілу зміщень вздовж напрямку поширення – «миттєве фото» хвилі (рис. 9.3). Це «фото» мотузки, яку трясуть за один кінець. На «фото» видно, що різні точки мотузки застигли в різних положеннях. У наступний момент часу ці положення

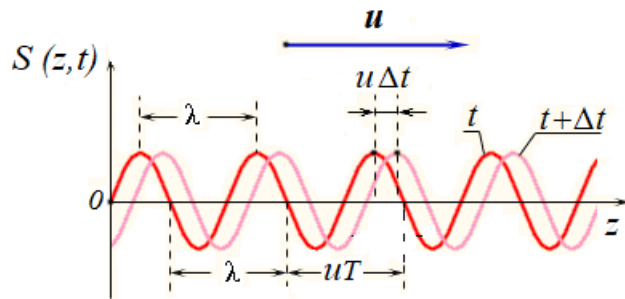


Рис. 9.3.

кожної частинки відповідним чином зміняться. Картину поширення хвилі можна уявити собі, якщо цю синусоїду привести в рух зі швидкістю u вздовж осі z .

Відстань між найближчими точками, коливання в яких відбуваються в однаковій фазі, наприклад, між сусідніми горбами або западинами, називається **довжиною хвилі** λ .

Інтенсивністю хвилі називається кількість енергії, яка переноситься хвилею за одиницю часу крізь одиницю площі поверхні, перпендикулярної до напрямку поширення хвилі. Для плоскої і сферичної синусоїдних хвиль

$$I = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 u,$$

де A – амплітуда, ρ – густина середовища, u – швидкість хвилі.

10. Поздовжні хвилі в твердому тілі. Швидкість пружних хвиль

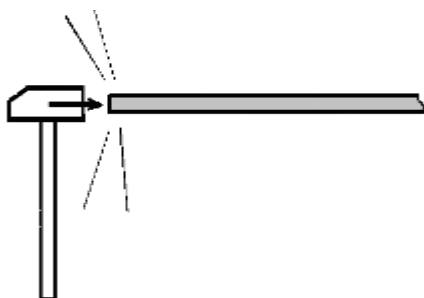


Рис. 10.1.

Розглянемо поширення поздовжніх хвиль в пружному тонкому однорідному стержні.

Якщо вдарити молотком з торця стержня (рис.10.1), то на цьому кінці стержня виникає деформація стиску, яка почне поширюватися уздовж стержня з великою швидкістю.

Визначимо швидкість поширення пружної хвилі..

Густина недеформованого середовища

$$\rho = \frac{\Delta m}{\Delta S l},$$

де ΔS – площа поперечного перерізу стержня, яка не змінюється під час поширення поздовжньої хвилі

Стиску відповідає збільшення густини, так що густина в місці стиску (рис. 10.2) дорівнює

$$\rho + \Delta\rho = \frac{\Delta m}{\Delta S(l - \Delta l)}$$

Помножимо чисельник і знаменник цього дробу на одну й ту саму величину $(l + \Delta l)$. В отриманому виразі можна знехтувати квадратом малої величини Δl у порівнянні з квадратом великої величини l :

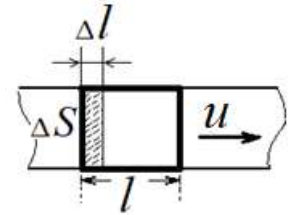


Рис. 10.2.

$$\rho + \Delta\rho = \frac{\Delta m(l + \Delta l)}{\Delta S(l - \Delta l)(l + \Delta l)} = \frac{\Delta m(l + \Delta l)}{\Delta S(l^2 - \Delta l^2)} \approx \frac{\Delta m(l + \Delta l)}{\Delta S l^2} = \frac{\Delta m l}{\Delta S l^2} + \frac{\Delta m \Delta l}{\Delta S l^2} = \rho + \rho \frac{\Delta l}{l}.$$

Звідси

$$\Delta\rho = \rho \varepsilon,$$

де $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ - відносна деформація, яка дорівнює відношенню абсолютної деформації Δl до початкової довжини l тіла і яка теж поширюється зі швидкістю v .

Пружна хвиля являє собою рух області стиску зі швидкістю u вздовж зрадку. За проміжок часу dt через переріз пройде ділянка стиску довжиною

$$dx = u dt.$$

Маса цієї ділянки

$$dm = \Delta S dx \Delta\rho = \Delta S u dt \rho \varepsilon.$$

Вона рухається зі швидкістю u і має імпульс

$$dm u = \Delta S u^2 dt \rho \varepsilon.$$

Оскільки до проходження імпульсу ця маса покоїлася, то вираз $dm u$ означає зміну імпульсу маси Δm : $dm u = d(mu)$.

За другим законом Ньютона зміна імпульсу тіла дорівнює добутку діючої на нього сили (у даному випадку сили пружності) на час її дії.

$$F = ma = m \frac{du}{dt} = \frac{d(mu)}{dt}. \quad \text{або} \quad d(mu) = F dt.$$

Дослідним шляхом встановлено (закон **Гука**), що для незначних пружних деформацій механічне напруження прямо пропорційне відносній деформації:

$$\sigma = E \varepsilon,$$

де механічне напруження $\sigma = F/S$, а E - константа, яка називається *модулем Юнга*.

Тоді отримуємо

$$F dt = \sigma \Delta S dt = E \varepsilon \Delta S dt.$$

Отже

$$E \varepsilon \Delta S dt = \Delta S u^2 dt \rho \varepsilon.$$

Звідси

$$u^2 = \frac{E}{\rho}$$

і швидкість поширення поздовжньої пружної хвилі в стержні дорівнює

$$u = \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

11. Стоячі хвилі

Якщо натягнуту між двома точками струну вивести з положення рівноваги, то хвиля, поширюючись по струні, відбивається від її кінців. Внаслідок накладання падаючої і відбитої хвиль в струні встановлюються особливі коливання (рис. 11.1).

Коливаються не всі точки струни. Частина з них залишаються нерухомими і називаються **вузлами** стоячої хвилі. На кінцях струни в точках закріплення обов'язково виходять вузли, а між ними одна або кілька **пучностей** - областей, що коливаються з максимальною амплітудою.

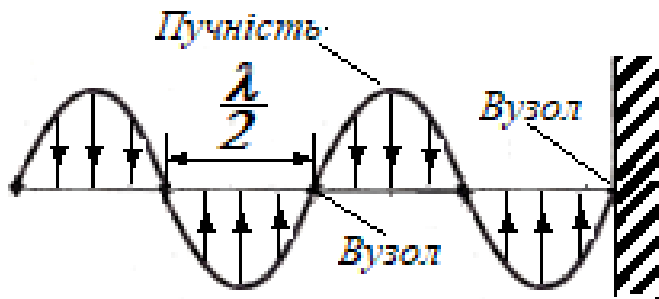


Рис. 11.1.

має назву **стоячої хвилі**.

Відстань між двома сусідніми вузлами дорівнює половині довжини хвилі $\frac{\lambda}{2}$.

Всі точки, що знаходяться між сусідніми вузлами, одночасно досягають максимального відхилення і одночасно проходять через положення рівноваги. На рис. 11.2 наведені «моментальні фотографії» відхилень точок від положення рівноваги в два близьких моментів часу t_1 і t_2 . Стрілками вказані напрямки руху точок струни.

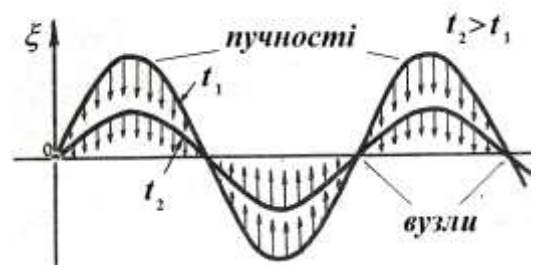


Рис. 11.2.

На рис. 11.3 показані положення струни через кожну восьму частину періоду. Будемо дивитися на послідовні рисунки стоячої хвилі у зростаючому часі згори донизу. (рис. 11.3) Спочатку всі точки струни лежать на прямій лінії (див. рис. 11.3 верхній ряд). Потім між нерухомими вузлами відбувається спучування струни, яке досягає максимуму через чверть періоду. Після цього спучування спадає, і струна знову стає прямою через півперіоду. Далі спучування відбувається в інший бік.

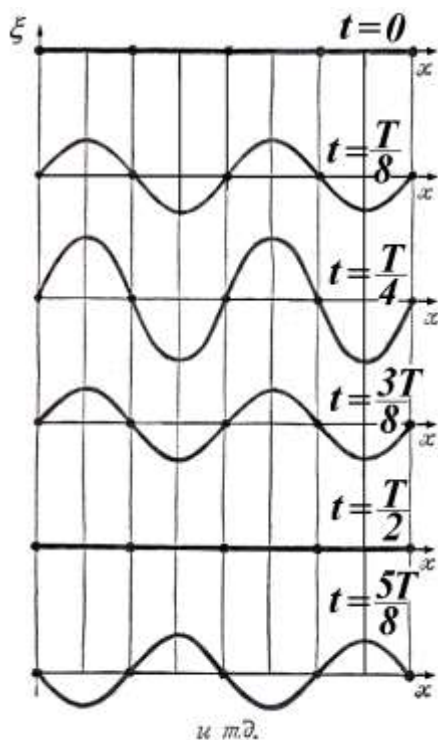


Рис. 11.3.

У кожну мить видно хвилю, при цьому хвиля стоїть на місці - звідси назва цього типу коливань - **стояча хвиля**.

На відміну від біжучої хвилі, яка може рухатися вправо або вліво, у стоячій хвилі немає напрямку поширення. Ця відмінність є видною на двох знімках, що відносяться до близьких моментів часу (рис. 11.4).

Для біжучої хвилі максимуми і мінімуми хвилі в кожну наступну мить переходять на нове місце, а в стоячій хвилі залишаються на одному і тому ж місці.

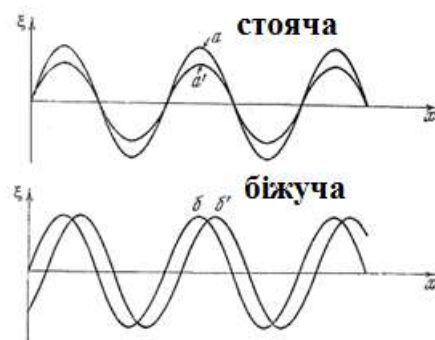


Рис. 11.4.

У стоячій хвилі на відміну від біжучої не відбувається перенесення енергії. Це пояснюється тим, що падаюча і відбита хвилі мають однакову амплітуду і тому переносять однакову енергію в протилежних напрямках. Оскільки вузлові точки є нерухомими, через них енергія не переноситься.

Енергія стоячої хвилі є величина стала. В той момент часу, коли всі частинки струни проходять через положення рівноваги, вся енергія частинок є кінетичною. Навпаки, в положенні максимального відхилення від положення рівноваги, енергія всіх частинок є потенціальною. Відбувається перетворення кінетичної енергії в потенціальну і навпаки.

Строго кажучи, стояча хвиля не є хвилею, оскільки вона не переміщується в просторі і не переносить енергію.

Стоячі хвилі утворюються в результаті накладання двох зустрічних хвиль, що біжать з однаковою амплітудою і частотою.

Розглянемо гнучку однорідну нитку (струну), натягнуту між двома точками. Припустимо, що в стані рівноваги струна розтягнута вздовж осі X . Будемо піддавати струну вимушеним коливанням. Тоді по ній в обидва боки - вправо і вліво - побіжать пружні поперечні хвилі.

Коли біжуча хвиля досягне закріпленого кінця струни, то на цьому кінці станеться відбивання хвилі. Відбита хвиля буде поширюватися назустріч падаючій.

Напишемо рівняння двох хвиль, що поширюються уздовж осі X , вправо (в бік зростання x)

$$\xi_1 = A \cos(\omega t - kx). \quad (11.1)$$

і вліво (у бік зменшення x)

$$\xi_2 = A \cos(\omega t + kx), \quad (11.2)$$

тут ξ - поперечне зміщення точки струни з координатою x в момент часу t , ω - кругова частота, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ - хвильове число, λ - довжина біжучої хвилі. Для простоти початок відліку x і t вибрано так, щоб початкова фаза хвиль дорівнювала нулю.

Рух кожної точки струни, що коливається, можна розглядати як результат додавання падаючої і відбитої хвиль. Падаюча на перешкоду хвиля і біжуча їй назустріч відбита хвиля, накладаючись одна на одну, дають в кожній точці струни зміщення

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = A \cos(\omega t - kx) + A \cos(\omega t + kx).$$

Перетворимо цю суму за формулою для суми косинусів

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Тоді рівняння набуде вигляду

$$\xi = (2A \cos 2\pi \frac{x}{\lambda}) \cos \omega t. \quad (11.3)$$

З останньої формули (11.3) випливає, що всі точки струни здійснюють гармонічні коливання з однаковою частотою ω , тією ж, що і у біжучих хвиль. Але оскільки змінна x входить у вираз для амплітуди, амплітуда коливань є періодичною функцією координати x і не залежить від часу

$$\text{амплітуда} = 2A \left| \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \right|.$$

У точках, координати яких задовольняють умову

$$2\pi \frac{x}{\lambda} = \pm n\pi \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

амплітуда коливань є максимальною. Ці точки називаються **пучностями** стоячої хвилі.

Координати пучностей

$$x_{\text{пучн}} = \pm n \frac{\lambda}{2} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Коліваються не всі точки струни. У точках, координати яких задовольняють умову

$$2\pi \frac{x}{\lambda} = \pm (n + \frac{1}{2})\pi \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

амплітуда коливань дорівнює нулю. Ці точки називаються **вузлами** стоячої хвилі.

Координати вузлів

$$x_{\text{вузл}} = \pm (n + \frac{1}{2}) \frac{\lambda}{2} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

З наведених формул і випливає, що відстань між сусідніми пучностями або сусідніми вузлами (так називають довжину стоячої хвилі) дорівнює половині довжини біжучої хвилі $\frac{\lambda}{2}$.

Лабораторні роботи

Правила статистичної обробки експериментальних результатів

Приклад. Нехай студенту доручили виміряти період коливань маятника. Для вимірювання періоду коливань студент користувався секундоміром. Він включав його, коли маятник досягав максимального відхилення, і зупиняв після одного повного коливання.

Він отримав такі результати 7-ми вимірювань періоду (в секундах):

3,43; 3,41; 3,50; 3,40; 3,45; 3,44; 3,42.

Якщо тепер спитати в аудиторії студентів, як представити результат цих вимірювань, то більшість студентів абсолютно вірно пропонуватимуть визначити *середнє значення*.

Як доказується в теорії вимірювань, середнє арифметичне є найкращим наближенням до істинного значення вимірюваної величини.

Середнє арифметичне значення періоду:

$$\langle T \rangle = \frac{3,43 + 3,41 + 3,50 + 3,40 + 3,45 + 3,44 + 3,42}{7} \approx 3,44 \text{ (с)}.$$

Отже, перший крок зроблено. Але як врахувати точність вимірювання? Як вказати граничні значення, між якими перебуває істинне значення вимірюваної величини?

Тут ми наведемо деякі відомості з теорії похибок вимірювань.

Внаслідок недосконалості вимірювальних приладів, методів вимірювання і наших органів чуттів та інших причин під час вимірів неминуче виникають *похибки*.

Абсолютною похибкою Δx вимірювання називається різниця між знайденим на досліді та істинним значенням фізичної величини:

$$\Delta x = x_{\text{вимір}} - x_{\text{іст}}. \quad (1)$$

Істинне значення фізичної величини одержати не можна, а повністю уникнути похибок вимірювання принципово неможливо. Однак за допомогою серії вимірювань і обробки їх результатів можна знайти **приблизне значення вимірюваної величини і вказати граничні значення, між якими вона знаходиться**. В цьому і полягає зміст обробки результатів експерименту.

Випадкові похибки підпорядковуються статистичним закономірностям, які вивчаються теорією ймовірності. Наведемо без доведення деякі висновки цієї теорії.

Багаторазово повторюючи одні і ті ж вимірювання, можна помітити, що їх результати розкидані навколо деякого середнього.

Нехай в результаті n вимірювань фізичної величини x отримані значення $x_1, x_2, x_3, \dots, x_i, \dots, x_n$. В якості найкращого значення для вимірюваної величини приймають **середнє арифметичне** з усіх отриманих результатів (відношення суми всіх значень даних до числа доданків):

$$\langle x \rangle = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (2)$$

Тут Σ - прийнятий в математиці знак підсумовування величин тих змінних, які знаходяться праворуч від цього знака.

Для оцінки точності результату вимірювання вводиться величина $S_{\langle x \rangle}$, що характеризує можливе відхилення знайденого середнього арифметичного від істинного значення.

Вона називається **середнім квадратичним відхиленням середнього арифметичного** і дорівнює

$$S_{\langle x \rangle} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \langle x \rangle)^2}{n(n-1)}} \quad (3)$$

Тут x_i - результат i -го вимірювання; $\langle x \rangle$ - середнє арифметичне отриманих значень; n - число вимірювань.

Вираз в чисельнику під коренем означає, що для всіх x_i від першого до останнього необхідно обчислити різницю між i - ми і середніми значеннями, звести ці різниці в квадрат і підсумувати;

Результат вимірювань записують у вигляді

$$x = \langle x \rangle \pm S_{\langle x \rangle} \quad (4)$$

Такий запис зі знаком \pm рівнозначний нерівності

$$\langle x \rangle - S_{\langle x \rangle} \leq x \leq \langle x \rangle + S_{\langle x \rangle} \quad (5)$$

і означає, що вимірювана величина x знаходиться всередині проміжку (інтервалу) шириною $2 S_{\langle x \rangle}$.

Інтервал $(\langle x \rangle - S_{\langle x \rangle}, \langle x \rangle + S_{\langle x \rangle})$ показаний на рис. 1.а .



Рис.1,а

Його називають **довірчим інтервалом**.

Наприклад, якщо для ЕРС елемента отримано $E = (1,4 \pm 0,1)$ В, то це означає, що істинне значення вимірюваної ЕРС міститься в довірчому інтервалі від 1,3 до 1,5 В.

Довірчий інтервал містить істинне значення вимірюваної величини з певною ймовірністю. Використання середнього квадратичного відхилення $S_{\langle x \rangle}$ є зручним тому, що в інтервал $(\langle x \rangle - S_{\langle x \rangle}, \langle x \rangle + S_{\langle x \rangle})$ істинне значення $x_{\text{іст}}$ потрапляє в $\alpha = 68\%$ випадків. При цьому α називається коефіцієнтом довіри або **довірчою ймовірністю**.

Таким чином, довірчий інтервал це - інтервал значень вимірюваної величини, який із заданою надійністю (довірчою ймовірністю) накріє справжнє значення цієї величини.

Якщо потрібно мати більшу впевненість у тому, що $x_{\text{ист}}$ знаходиться всередині довірчого інтервалу, останній необхідно розширити. Якщо розширити довірчий інтервал, наприклад, в 2 рази (рис.1, б),



Рис. 1, б

то ймовірність того, що невідоме значення виявиться всередині цього інтервалу, зростає до $\alpha = 95\%$. Отже, якщо довірчий інтервал збільшується, то зростає ймовірність того, що істинне значення величини потрапляє в даний інтервал. Однак, з розширенням довірчого інтервалу зростає абсолютна і відносна похибка вимірювання.

Ми розглянули варіанти довірчих інтервалів, напівширина яких становила $S_{\langle x \rangle}$ і $2 S_{\langle x \rangle}$. Побудуємо тепер довірчий інтервал, напівширина якого дорівнює $t S_{\langle x \rangle}$. (рис. 1, в).



Рис. 1, в

Тут стандартне відхилення $S_{\langle x \rangle}$ множиться на деяке число t . Це число (воно називається коефіцієнтом Стьюдента, Стьюдент - псевдонім англійського математика У. Госсета) залежить від обраної експериментатором довірчої ймовірності α і кількості n проведених ним дослідів. Коефіцієнти Стьюдента $t_{\alpha,n}$ розраховані в теорії ймовірностей і зведені в таблицю 1.

Таблиця 1.

$n \backslash \alpha$	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0,8	3,08	1,89	1,64	1,53	1,48	1,44	1,42	1,40	1,38
0,9	6,31	2,92	2,35	2,13	2,02	1,94	1,89	1,86	1,83
0,95	12,7	4,30	3,18	2,78	2,57	2,45	2,36	2,31	2,26
0,98	31,8	6,96	4,54	3,75	3,36	3,14	3,00	2,90	2,82
0,99	63,7	9,92	5,84	4,60	4,03	3,71	3,50	3,36	3,25

Так, наприклад, при довірчій ймовірності $\alpha = 0,9$ (або 90%) і числі дослідів $n = 5$ коефіцієнт Стьюдента становить $t_{\alpha,n} = 2,13$.

Напівширина такого довірчого інтервалу (або абсолютна похибка $\Delta \langle x \rangle$ середнього значення вимірюваної величини) дорівнює

$$\Delta \langle x \rangle = t_{\alpha,n} S_{\langle x \rangle}. \quad (6)$$

Відносною похибкою вимірювання E називається відношення напівширини довірчого інтервалу до середнього значення вимірюваної величини

$$E = \frac{\Delta \langle x \rangle}{\langle x \rangle} \cdot 100\% . \quad (7)$$

У підсумку **остаточний результат** записують у вигляді

$$x = (\langle x \rangle \pm \Delta \langle x \rangle) \text{ одиниць вимірювання, при } \alpha = \dots \quad (8)$$

Цей запис означає, що в результаті вимірів знайдено середнє значення $\langle x \rangle$ з граничною похибкою $\Delta \langle x \rangle$, тобто що з імовірністю $\alpha = \dots$ істинне значення вимірюваної величини буде лежати в межах від $\langle x \rangle - \Delta \langle x \rangle$ до $\langle x \rangle + \Delta \langle x \rangle$.

У всіх лабораторних роботах, які містяться в фізичному практикумі, необхідно дотримуватися **єдиної методики обробки результатів вимірювань**, а саме:

(дані кожного кроку заносять в таблицю)

1. Проводять n незалежних дослідів і визначають n значень шуканої величини $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$.

2. Розраховують середнє арифметичне значення шуканої величини:

$$\langle x \rangle = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i .$$

3. Розраховують відхилення кожного результату від середнього значення:

$$\Delta x_i = x_i - \langle x \rangle .$$

4. Визначають середнє квадратичне відхилення середнього

$$S_{\langle x \rangle} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \langle x \rangle)^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \Delta x_3^2 + \dots}{n(n-1)}} .$$

5. Задають довірчу ймовірність α . Зазвичай довірчу ймовірність вважають рівною 0,90; 0,95; 0,98; 0,99. За обраним значенням довірчої ймовірності α і для виконаної кількості вимірювань n за таблицею визначають коефіцієнт Стюдента $t_{\alpha, n}$.

6. Обчислюють напівширину довірчого інтервалу (абсолютну похибку середнього)

$$\Delta \langle x \rangle = t_{\alpha, n} S_{\langle x \rangle} .$$

7. Визначають відносну похибку

$$E = \frac{\Delta \langle x \rangle}{\langle x \rangle} \cdot 100\% .$$

8. Остаточний результат вимірювання записують у вигляді:

$$x = (\langle x \rangle \pm \Delta \langle x \rangle) \text{ одиниць виміру, при } \alpha = \dots$$

Приклад (закінчення). Як бачимо, отримані результати вимірювань відрізняються один від одного на кілька сотих чи десятих часток секунди, тобто містять випадкову похибку.

Розкид результатів вимірювань може бути викликаний натисканням кнопки секундоміра чи трохи раніше, то чи пізніше, ніж потрібно. На рух маятника можуть впливати: сили тертя в місці закріплення підвісу, сила опору повітря, випадкові повітряні потоки і т.п.

Користуючись наведеним алгоритмом обробки результатів вимірювань, визначаємо (далі все в секундах):

1. Середнє арифметичне значення періоду:

$$\langle T \rangle = \frac{3,43 + 3,41 + 3,50 + 3,40 + 3,45 + 3,44 + 3,42}{7} \approx 3,44.$$

Поширеною помилкою обчислення, особливо при користуванні калькулятором, є надмірно велика кількість значущих цифр, наприклад, в наведеному випадку $\langle T \rangle = 3,435714$. Це створює хибне враження про велику точність вимірювань.

Оскільки вихідними даними для розрахунку є значення всього з двома значущими цифрами, внаслідок цього і в остаточному значенні мають бути залишені тільки перші дві значущі цифри. (Всі цифри числа, починаючи з першої зліва, відмінної від нуля, називаються значущими цифрами.)

Слід користуватися такими правилами округлення результату вимірювань:

- 1) похибка представляється з однією або двома значущими цифрами;
- 2) результат вимірювань округляється так, щоб він закінчувався цифрою того ж розряду, що і значення похибки.

Наприклад, числове значення результату вимірювання складає 25,458. При похибці результату, вираженій межами $\pm 0,02$; округлення результату буде 25,46.

2. Відхилення кожного результату від середнього значення ΔT_i :

$$\Delta T_1 = 3,43 - 3,44 = -0,01;$$

$$\Delta T_2 = 3,41 - 3,44 = -0,03;$$

$$\Delta T_3 = 3,50 - 3,44 = +0,06;$$

$$\Delta T_4 = 3,40 - 3,44 = -0,04;$$

$$\Delta T_5 = 3,45 - 3,44 = +0,01;$$

$$\Delta T_6 = 3,44 - 3,44 = 0;$$

$$\Delta T_7 = 3,42 - 3,44 = -0,02.$$

3. Середнє квадратичне відхилення середнього:

$$\begin{aligned}
S_{\langle T \rangle} &= \sqrt{\frac{\Delta T_1^2 + \Delta T_2^2 + \Delta T_3^2 + \dots}{n(n-1)}} = \\
&= \sqrt{\frac{(-0,01)^2 + (-0,03)^2 + (0,06)^2 + (-0,04)^2 + (0,01)^2 + (-0,02)^2}{7 \cdot 6}} = \\
&= \sqrt{\frac{0,0001 + 0,0009 + 0,0036 + 0,0016 + 0,0001 + 0,0004}{42}} = \\
&= \sqrt{\frac{0,0067}{42}} \approx 0,01.
\end{aligned}$$

4. Задамо довірчу ймовірність, наприклад, $\alpha = 0,9$ (віримо своїм вимірам на 90%) і для 7-ми вимірювань за таблицею знаходимо коефіцієнт Стьюдента:

$$t_{\alpha, n} = 1,94.$$

5. Обчислимо абсолютну похибку середнього

$$\Delta \langle T \rangle = t_{\alpha, n} S_{\langle T \rangle} = 1,94 \cdot 0,01 \approx 0,02.$$

6. Знаходимо відносну похибку

$$E = \frac{\Delta \langle T \rangle}{\langle T \rangle} \cdot 100\% = \frac{0,02}{3,44} \cdot 100\% = 0,6\%.$$

7. Записуємо остаточний результат вимірювання:

$$T = (3,44 \pm 0,02) \text{ с при } \alpha = 0,9.$$

У лабораторних роботах найчастіше шукана величина не вимірюється безпосередньо, а виходить побічно, розрахунком, з використанням результатів прямих вимірювань інших величин.

Наприклад, якщо довжину вимірюють лінійкою, температуру – термометром, електричний опір R – омметром, то це так звані **прямі вимірювання**.

Але можна знаходити значення електричного опору R за допомогою двох вимірів - напруги U і сили струму I і подальшого розрахунку на підставі закону Ома: $R = U / I$.

Якщо значення фізичної величини не вимірюється безпосередньо яким-небудь приладом, а розраховується на основі відомої залежності між цією величиною та величинами, знайденими прямим вимірюванням, такі **вимірювання** називаються **непрямими**.

Аналіз похибок непрямих вимірювань є досить складний математично, тому ми будемо використовувати **спрощений порядок розрахунку** похибок.

Якщо один або декілька параметрів під час непрямих вимірювань систематично змінюються, то **шукане значення** посередньо вимірюваних величин **обчислюється для кожного окремого вимірювання**.

Контрольні питання

1. У чому полягає зміст обробки даних експерименту? Що називається абсолютною і відносною похибкою?
2. Який зміст довірчої ймовірності і довірчого інтервалу?
3. Як змінюється похибка вимірювання зі збільшенням коефіцієнта довіри?
4. Проаналізуйте таблицю коефіцієнтів Стьюдента. Як змінюються коефіцієнти Стьюдента зі збільшенням числа дослідів? Яким чином збільшення числа дослідів впливає на точність вимірювань?
5. Який зміст запису $\rho = \langle \rho \rangle \pm \Delta \langle \rho \rangle$, при $\alpha = 0,95$?

Лабораторна робота № 4.1. Вивчення вільних коливань математичного маятника

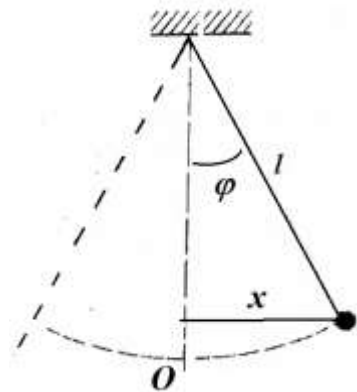
Прилади: 1) математичний маятник; 2) секундомір.

Мета роботи: ознайомитися зі властивостями математичного маятника, визначити прискорення вільного падіння за допомогою маятника.

Теоретичні відомості

Перш, ніж приступати до виконання роботи, ознайомтеся з теорією математичного маятника, наведеною в даному навчальному посібнику в розділі «Теоретичне введення»

Математичний маятник являє собою ідеалізовану систему, що складається з невагомої і нерозтяжної нитки, на якій підвішена матеріальна точка. Хорошим наближенням може служити невелика важка куля, підвішена на довгій тонкій нитці.



Під дією сили тяжіння маятник здійснює коливання у вертикальній площині. Закон руху маятника:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (1)$$

Тут x – зміщення коливної точки від положення рівноваги, A – амплітуда, ω – циклічна частота, φ_0 – початкова фаза коливань.

Період коливань математичного маятника у випадку малих коливань (формула виведена у теоретичному вступі цього посібника) має вигляд

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (2)$$

З формули періоду коливань випливають такі закономірності коливань математичного маятника:

- 1) період коливань маятника не залежить від амплітуди коливань (для малих значень кута відхилення);
- 2) період коливань маятника не залежить від маси маятника;
- 3) період коливань маятника прямо пропорційний квадратному кореню з довжини маятника і обернено пропорційний квадратному кореню з прискорення вільного падіння.

Математичний маятник використовують для вимірювання прискорення вільного падіння g . З формули (2) слід

$$g = \frac{4\pi^2}{T^2} l. \quad (3)$$

Отже, вимірюючи період коливань T і знаючи довжину маятника l , можна обчислити прискорення вільного падіння (або прискорення сили тяжіння) g .

Як і сила тяжіння, прискорення вільного падіння g залежить від широти місцевості. З переміщенням від полюса до екватора Землі прискорення вільного падіння внаслідок обертання Землі зменшується від значень $g = 9,83 \text{ м/с}^2$ на полюсі до значень $g = 9,78 \text{ м/с}^2$ на екваторі. Ці зміни найкраще виявляються за допомогою математичного маятника.

Крім того, Земна кора в різних місцях має неоднаковий склад, тому в місцях, де кора має велику густину, прискорення вільного падіння збільшується. За зміною g на певній площі, вимірюючи його математичним маятником, геологи судять про зміни густини поверхні Земної кори і на підставі цих даних виводять висновок про наявність корисних копалин. Це є так звана гравітаційна розвідка корисних копалин.

Вимірювання

Робота складається з двох частин.

1. **Встановлення ізохронності коливань**, тобто незалежності періоду коливань математичного маятника від амплітуди.

Кут φ відхилення x від положення рівноваги O маятника при цьому, відповідно до теорії, повинен бути невеликим. У таблиці 1 наведені різні значення відхилень x для довжини нитки підвісу в даній роботі $l = 2,95$ м., відповідні їм кути в градусах і радіанах, і синуси цих малих кутів

Таблиця 1

x	Кут φ , градуси	$\sin \varphi$	Кут φ , радіани
20 см	5,73	0,10	0,10
30 см	8,63	0,15	0,15
40 см	11,54	0,20	0,20

Як видно з таблиці 1, вимога рівності синуса кута φ самому куту φ , вираженому в радіанах, при цих відхиленнях виконується (з точністю до двох знаків) добре, отже, кути можна вважати малими за даної довжини нитки $l = 2,95$ м.

Користуючись секундоміром, визначають період коливань маятника для різних початкових відхилень маятника від положення рівноваги. Дослід виконують по черзі для $x = 20, 30$ і 40 см. Кожен раз визначають сумарний час великого числа коливань (30 - 50 повних, тобто туди і назад коливань) і обчислюють період коливань маятника. Період визначається по три рази для кожного початкового значення відхилення. Дані дослідів заносять в таблицю 2.

Таблиця 2.

$x, \text{ см}$	$l, \text{ м}$	T_i	$\langle T \rangle$	ΔT_i	$S_{\langle T \rangle}$	ΔT	$E, \%$	g_i	$\langle g \rangle$	Δg_i	$S_{\langle g \rangle}$	$\langle \Delta g \rangle$	$E, \%$	
20	2,95													
30														
40														

Переконуються в тому, що період коливань не залежить від амплітуди коливань (початкового відхилення маятника).

2. Обчислення прискорення вільного падіння g .

За даними вимірів періодів, занесеними в таблицю, за формулою (3) визначають прискорення вільного падіння для даної місцевості.

Результат записують у вигляді

$$g = \langle g \rangle \pm \Delta g$$

Потім, користуючись наближеною формулою залежності прискорення вільного падіння від географічної широти $\varphi_{\text{ш}}$ місцевості і висоти його H над рівнем моря

$g = 9,78049 (1 + 0,0052884 \sin \varphi_{\text{ш}} - 0,000006 \sin^2 2\varphi_{\text{ш}}) - 0,03 H$, (м/с²), розраховують за допомогою калькулятора теоретичне значення g для широти міста Дніпро ($\varphi_{\text{ш}} = 48^\circ 27'$ північної широти) і порівнюють зі значенням, отриманим на досліді.

Контрольні питання

1. В яких одиницях вимірюється циклічна частота? Кутова швидкість маятника?
2. Наведіть властивості гармонічного коливання маятника.
3. У яких точках траєкторії мат маят величина прискорення, з яким він рухається, є максимальною?
4. За яких кутів відхилення коливання маятника можна вважати гармонічними і чому?
5. Який математичний вигляд - синуса чи косинуса - мають коливання маятника у наступних випадках:

- Маятник відхиляють від положення рівноваги на величину A і відпускають без початкового поштовху.
- В положенні рівноваги маятнику надають поштовхом початкову швидкість v_0 .

Вказівка. Врахувати залежність від часу тригонометричних функцій синуса і косинуса

6. Чи може реальний процес описуватися функцією виду (1)?

Приклад розв'язання типової задачі

Приклад. Матеріальна точка масою $m = 5$ г здійснює гармонічні коливання з частотою $\nu = 0,5$ Гц. Амплітуда коливань $A = 3$ см. Визначити:

1) швидкість v точки в момент часу, коли зміщення $x = 1,5$ см; 2) максимальну силу F_{max} , що діє на точку; 3) повну енергію E точки.

Розв'язання. 1. Рівняння гармонічного коливання має вигляд

$$x = A \cos(\omega t + \varphi), \quad (1)$$

а формулу швидкості одержимо, взявши першу похідну за часом від зміщення:

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \varphi). \quad (2)$$

Щоб виразити швидкість через зміщення, треба виключити з формул (1) і (2) час t . Для цього виразимо з рівнянь (1) і (2):

$$\cos(\omega t + \varphi) = \frac{x}{A}, \quad \sin(\omega t + \varphi) = -\frac{v}{A\omega}. \quad (3)$$

Враховуючи, що $\sin^2(\omega t + \varphi) + \cos^2(\omega t + \varphi) = 1$, одержимо

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{A^2\omega^2} = 1, \quad \text{або} \quad \frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{4\pi^2\nu^2 A^2} = 1.$$

Розв'язуючи останнє рівняння відносно v , знайдемо

$$v = \pm 2\pi\nu\sqrt{A^2 - x^2}. \quad (4)$$

Виконавши обчислення за цією формулою, дістанемо $v = \pm 8,2$ см/с.

Знак плюс відповідає випадкові, коли напрям швидкості збігається з додатним напрямом осі Ox , знак мінус – коли напрям швидкості збігається з від'ємним напрямом осі Ox .

2. Силу, що діє на матеріальну точку, визначимо за другим законом Ньютона:

$$F = ma, \quad (5)$$

де a – прискорення точки, яке отримуємо, узявши похідну за часом від швидкості:

$$a = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi), \quad \text{або} \quad a = -4\pi^2\nu^2 A \cos(\omega t + \varphi). \quad (6)$$

Підставивши вираз для прискорення у формулу (5), одержимо

$$F = -4\pi^2\nu^2 mA \cos(\omega t + \varphi). \quad (7)$$

Сила є максимальною, коли $\cos(\omega t + \varphi) = 1$, тобто

$$F_{\max} = 4\pi^2\nu^2 mA. \quad (8)$$

Обчислення дають $F_{\max} = 1,49$ мН.

3. Повна енергія точки, що коливається, дорівнює сумі кінетичної і потенціальної енергій, обчислених для будь-якого моменту часу.

Найпростіше обчислити повну енергію в момент, коли кінетична енергія досягає максимального значення. У цей момент потенціальна енергія дорівнює нулю. Тому повна енергія E точки дорівнює максимальній кінетичній енергії T_{\max} :

$$E = T_{\max} = \frac{mv_{\max}^2}{2}. \quad (9)$$

Максимальну швидкість визначимо з формули (2), поклавши $\cos(\omega t + \varphi) = 1$:

$$v_{\max} = 2\pi\nu A. \quad (10)$$

Підставивши (10) у формулу (9), знайдемо

$$E = 2\pi^2 m\nu^2 A^2.$$

Обчислення дають

$$E = 2 \cdot 3,14^2 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 0,5^2 (3 \cdot 10^{-2})^2 = 22,1 \cdot 10^{-6} \text{ Дж} = 22,1 \text{ мкДж}$$

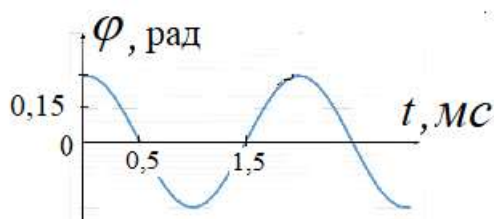
Контрольні задачі

Варіант 1.

Задача. Визначити період коливань та швидкість точки, яка здійснює гармонічні коливання за законом $x = 2 \cos\left(\frac{2\pi}{1,2} t\right)$ наприкінці дванадцятої секунди.

Варіант 2.

Задача За яким законом змінюється кут відхилення маятника, графік якого зображений на рисунку?



Варіант 3.

Задача. Математичний маятник з періодом коливань 1,5 с здійснює коливання з амплітудою 1,2 см. Визначити швидкість і прискорення маятника у крайньому положенні і в момент проходження його через положення рівноваги.

Лабораторна робота № 4. 2.

Вивчення коливань оборотного маятника та визначення прискорення вільного падіння

Приналежності: 1) оборотний маятник; 2) секундомір.

Ціль роботи: ознайомитися з будовою оборотного маятника, визначити за допомогою його прискорення вільного падіння g

Теоретичні відомості і опис оборотного маятника.

Перш, ніж приступати до виконання роботи, ознайомтеся з теорією коливань фізичного маятника, наведеною в даному навчальному посібнику в розділі «Теоретичне введення»

Тверде тіло, яке підвішене в точці, що лежить вище його центра мас, і може коливатися являє собою **фізичний маятник** (рис. 1).

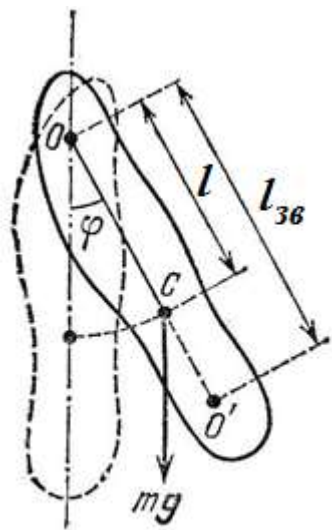


Рис. 1.

У положенні рівноваги фізичного маятника його центр мас C перебуває на одній вертикалі із точкою підвісу O , але нижче неї. При відхиленні маятника від положення рівноваги на кут φ виникає обертальний момент сили тяжіння mg , що прагне повернути маятник у положення рівноваги.

Окремо доказується (див. теоретичний вступ до цього навчального посібника), що період коливань фізичного маятника за малих кутів відхилення φ дорівнює

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgl}} \quad (1)$$

Тут I – момент інерції маятника відносно осі підвісу O (рис. 1), m – маса маятника, g – прискорення вільного падіння, l – відстань від точки підвісу O до центра мас C маятника.

Період коливань математичного маятника довжиною l

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (2)$$

Із зіставлення періодів математичного і фізичного маятників випливає, що період коливань фізичного маятника співпадає з періодом коливань такого математичного маятника, який має довжину

$$l_{zv} = I/(ml)$$

Величину l_{zv} називають *зведеною довжиною* фізичного маятника.

Точка O' на продовженні прямої OC , яка міститься на відстані l_{zv} називається *центром коливань* фізичного маятника.

Якщо фізичний маятник підвісити в цій точці, то його період не зміниться. (доведення цього наводиться у Додатку до інструкції даної лабораторної роботи).

Ця властивість називається властивістю *спряженості* або *взаємності* центра коливань і точки підвісу і використовується в оборотних маятниках.

Оборотним маятником називають прилад для експериментального визначення прискорення вільного падіння g . Він являє собою масивний металевий стрижень з двома закріпленими на ньому тригранними призмами (B на рис.2).

На ці паралельні одна одній і закріплені поблизу кінців маятника опорні призми маятник може по черзі підвішуватися.

Гострі ребра тригранних призм, які спираються на нерухому опору, слугують центрами коливань O і O' (рис. 1) оборотного маятника.

Уздовж маятника можуть переміщатися й закріплюватися на ньому важкі вантажі C , D .

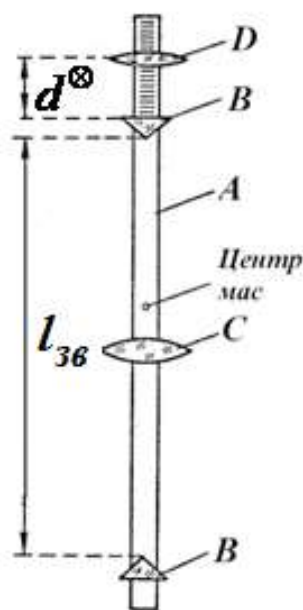


Рис. 2.

Переміщенням вантажів домагаються, щоб при підвішуванні маятника на кожен з призм період коливань був однаковий. Тоді відстань між опорними ребрами призм буде дорівнювати зведеної довжині $l_{зв}$. Вимірюючи у цьому випадку період коливань маятника T^* і зведену довжину $l_{зв}$, можна за формулою

$$T^* = 2\pi \sqrt{\frac{l_{зв}}{g}}$$

визначити прискорення вільного падіння g .

$$g = \frac{4\pi^2}{(T^*)^2} l_{зв}. \quad (3)$$

Оборотний маятник дозволяє обчислити величину g зі значно більш високим ступенем точності, ніж математичний маятник.

Опис приладу

Оборотний маятник складається з металевого стрижня A , на поверхні якого нанесені поділки шкали.

На стрижні жорстко закріплюються й не пересуваються дві опорні призми B . Відстань між призмами є сталою, її значення заздалегідь вважають зведеною довжиною оборотного маятника $l_{зв}$, яку можна визначити за допомогою нанесених на стрижень сантиметрових поділок.

Жорстко закріплюється також і вантаж C , що міститься між ними.

Змінювати положення опорних призм B і вантажу C забороняється.

Другий вантаж D міститься на кінці стрижня й може переміщатися по шкалі й закріплюватися в потрібному положенні.

Вимірювання.

Необхідно знайти таке положення рухливого вантажу D , за якого будуть однаковими періоди коливань у прямому й переверненому положеннях маятника.

Для цього:

1. Ставлять маятник на одну із призм. Вантаж D послідовно закріплюють на відстані 2, 2,5 й 3 поділок (сантиметрів) шкали, відрахованих від підстави найближчої до вантажу призми. Користуючись секундоміром, визначають періоди коливань маятника для різних положень вантажу D на шкалі. Кожен період визначається тричі з великої кількості коливань (20 - 30 коливань), щораз користуються середнім арифметичним значенням.

2. Потім будують графік залежності періоду коливань від положення вантажу на стрижні маятника, відкладаючи по осі абсцис поділку шкали, що вказує положення вантажу, а по осі ординат величину періоду коливань.

3. Після цього перевертають маятник і змушують його коливатися на іншій опорній призмі. Знову зовсім так само вимірюють періоди коливань із тим же числом вимірів. Результати вимірів представляють у вигляді другого графіка на тім же рисунку й тих же координатних осях.

4. Точка перетинання кривих визначає місце розміщення d^{\otimes} (рис.2) рухливого вантажу D , що дає найбільш близькі один до одного значення періодів.

5. Поставивши вантаж D у це знайдене за графіком положення, з найбільшою старанністю визначають періоди коливань у прямому й переверненому положенні.

6. Коли періоди коливань маятника на обох призмах збіжаться, за цим значенням періоду T^* , користуючись формулою (3), визначають величину прискорення сили тяжіння g .

Виконання роботи вимагає уваги й старанності. Неприпустимими є коливання маятника з кутом відхилення більшим, ніж 4° .

№	$l_{зв}$	Положення D	d	$\langle T \rangle$	d^{\otimes}	T^*	g
		Вантаж D угорі	2 см				
			2,5 см				
			3 см				
		Вантаж D унизу	2 см				
			2,5 см				
			3 см				

Контрольні питання.

1. Що називається зведеною довжиною фізичного маятника?
2. Що називається центром коливань маятника?
3. У чому полягає властивість взаємності точки підвісу й центра коливань? Доведіть цю властивість.
4. На чому заснований метод оборотного маятника?
5. Фізичний маятник здійснює коливання з частотою $\nu = 1$ Гц. Якою є його зведена довжина?
6. Як залежить період коливань оборотного маятника від маси?
7. Як залежить період коливань оборотного маятника від амплітуди коливань?
8. Як залежить період коливань оборотного маятника від прискорення вільного падіння?

Приклад розв'язання типової задачі

Приклад. Фізичний маятник являє собою тонкий однорідний стержень. Визначити довжину стержня l , якщо частота коливань маятника є максимальною, коли точка підвісу O віддалена від центра мас C на відстань $a = 20,2$ см.

Розв'язання. Циклічна частота коливань фізичного маятника

$$\omega = \sqrt{mga/J}, \quad (1)$$

де m – маса маятника, J – момент його інерції відносно осі коливань, a – відстань від центра мас до точки підвісу.

Згідно з теоремою Штейнера момент інерції стержня відносно точки підвісу дорівнює сумі моменту інерції відносно осі, що проходить через центр мас, і добутку маси стержня на квадрат відстані a .

$$J = \frac{ml^2}{12} + ma^2. \quad (2)$$

Підставивши (2) в (1), одержимо

$$\omega = \sqrt{\frac{12ga}{l^2 + 12a^2}}. \quad (3)$$

Як видно, частота коливань є функцією відстані a . Умовою максимуму функції $\omega(a)$, як відомо, є рівність нулю першої похідної від $\omega(a)$ за a .

$$\frac{d\omega}{da} = \frac{6g(l^2 - 12a^2)}{(12ga)^{1/2}(l^2 + 12a^2)^{3/2}} = 0$$

звідки

$$l^2 - 12a^2 = 0,$$

отже, довжина стержня $l = 2\sqrt{3}a$. Обчислюючи, одержимо $l = 70$ см.

Контрольні задачі

Варіант 1

На кінцях тонкого стержня довжиною $l = 0,3$ м і масою $m = 0,4$ кг, укріплені тягарці масою $m_1 = 0,2$ кг і $m_2 = 0,3$ кг. Стержень коливається навколо горизонтальної осі, що проходить через його середину. Визначити період коливань стержня.

Варіант 2.

Визначити зведену довжину і період коливань тонкого однорідного стержня довжиною 1 м відносно осі, що є перпендикулярною до стержня і проходить через його кінець.

Варіант 3

Математичний маятник завдовжки $l_0 = 40$ см і тонкий однорідний стержень, довжина якого $l = 60$ см, здійснюють малі синхронні коливання навколо горизонтальної осі. Визначити відстань x від центра мас стержня до цієї осі.

Лабораторна робота № 4.3.

Вивчення додавання коливань за допомогою осцилографа

Прилади: електронний осцилограф, генератор синусоїдальних електричних коливань звукової частоти.

Мета роботи: 1) ознайомлення з принципом роботи електронного осцилографа, 2) дослідження додавання гармонічних коливань одного напрямку та взаємно перпендикулярних коливань *з однаковими частотами* за допомогою осцилографа.

Опис приладу та теоретичні відомості

Перш, ніж приступати до виконання роботи, ознайомтеся з теорією коливань, наведеною в даному навчальному посібнику в розділі «Теоретичне введення»

Щоб простежити за закономірностями складного коливання, що є сумою коливань, користуються електронним осцилографом.

Осцилограф (від латинського «*oscillo*» – коливаюсь і грецького *grapho* – пишу) – вимірювальний прилад, який використовують для візуального спостереження електричних сигналів, дослідження їх форми, вимірювання параметрів сигналів: амплітуди, частоти, фазових зсувів та ін.

В даній роботі застосовується електронний осцилограф, який відноситься до аналогових засобів вимірювань. Останнім часом отримали поширення так звані цифрові люмінофорні осцилографи, які у цифровій формі імітують зміну інтенсивності зображення, яка властива аналоговим осцилографам.

В електронних осцилографах сигнал зображується за допомогою сфокусованого електронного променя, який збуджує світіння люмінофора електронно-променевої трубки.

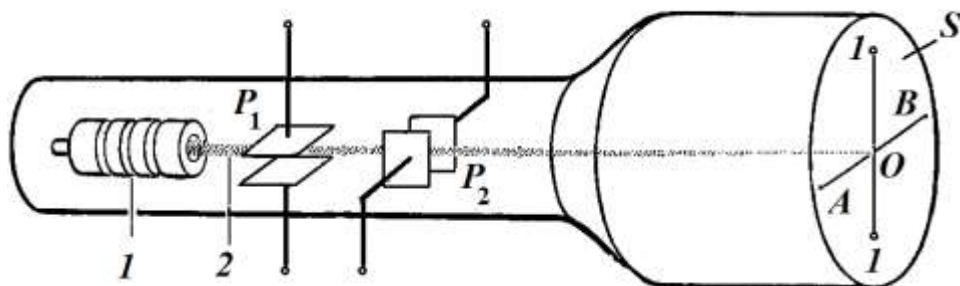


Рис. 1.

Електронно-променева трубка (рис. 1) являє собою відкачаний до високого вакууму скляний балон, всередині якого змонтована електронна гармата (I на рис. 1), дві пари взаємно перпендикулярних відхиляючих пластин P_1 і P_2 та екран S , який флюоросціює

Шлях пучка електронів з електронної гармати проходить між пластинами. Якщо на горизонтальну пару пластин P_1 подати змінну напругу, то в такт зі зміною поля електронний промінь почне коливатися у вертикальному напрямі,

а світна пляма на екрані, яку він утворює, буде здійснювати коливання вздовж прямої $I - I$ (рис.1).

При накладанні напруги на пластини P_2 пляма буде переміщуватись вздовж лінії AB .

Крім трубки осцилограф містить підсилювачі вхідних сигналів, генератор розгортки і блок живлення.

Генератор розгортки. Зміщення світної плями на екрані осцилографа прямо пропорційно прикладеній до відхиляючих пластин напруги. Завдяки практично безінерційній дії електронно-променевої трубки світна пляма при накладанні сталої напруги на горизонтально відхиляючі пластини зміститься від центру екрана на деяку відстань по горизонталі.

Якщо ж на горизонтально відхиляючі пластини подати напругу, яка лінійно зростає з часом, $U = kt$, то світна точка на екрані буде рухатися горизонтально зліва направо з постійною швидкістю та відхилитиметься пропорційно часу. Довжина прямої лінії відповідає певному проміжку часу. Таким чином, час розгортається у відрізок прямої вздовж осі OX .

Кажуть, що такий рух світної точки зображує час, який плине рівномірно. Тому вісь OX на екрані іноді називають віссю часу.

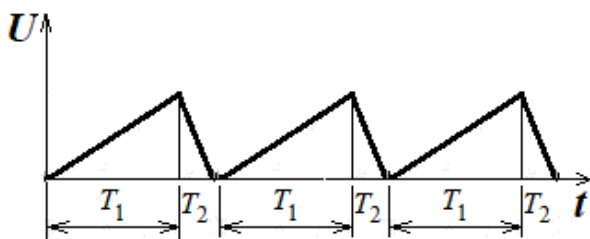


Рис. 2.

Генератор розгортки виробляє змінну напругу пилкоподібної форми (рис. 2). Напруга U лінійно зростає з часом t протягом часу T_1 , а потім спадає за час T_2 ($T_2 \ll T_1$)

Оскільки спад напруги відбувається дуже швидко, світна точка майже миттєво повертається у вихідне положення і починає знову плавно рухатися зліва направо.. Під час зворотного ходу промінь гаситься спеціальним пристроєм, зворотний хід променя на екрані не спостерігається і на екрані спостерігається тільки прямий хід.

Зміщення світної плями під дією цієї напруги на пластині P_2 називається **розгорткою в часі**.

Для того, щоб забезпечити нерухоме зображення досліджуваної напруги від часу треба забезпечити її синхронізацію з напругою генератора розгортки.

Якщо частоти досліджуваної напруги і пилкоподібної напруги кратні одна одній, то на екрані можна дістати певну криву досліджуваного сигналу і можна буде спостерігати, як залежать форма, частота і амплітуда сигналу від часу.

У лабораторній роботі:

- вимірюють: амплітуди і частоти гармонічних коливань (завдання 1);
- спостерігають за додаванням гармонічних коливань одного напрямку (завдання 2);
- спостерігають за складанням взаємно перпендикулярних коливань (завдання 3)

Завдання 1. Вимірювання амплітуди і частоти гармонічних коливань

Якщо до відхиляючих) пластин P_1 підключити змінну напругу з періодом $T_1^* = T_1 + T_2$ (рис. 2) наприклад, синусоїдальну напругу, а до пластин P_2 - пилкоподібну напругу з періодом T_2^* , то за умови

$$T_2^* = T_1^*$$

$$\text{або } T_2^* = n T_1^*,$$

де n – ціле число, на екрані можна побачити нерухому синусоїду - графік, який показує зміну напруги на протязі одного чи декількох періодів.

Порядок виконання завдання 1

1. Ознайомтеся з приладами та осцилографом, розберіться з призначенням рукояток управління, розміщених на його панелі.



Рис. 3.

2. **Під керівництвом викладача** увімкніть осцилограф в мережу змінної напруги. Через 2-3 хвилини світлу смугу встановіть в центрі екрану відповідними рукоятками. Зберіть схему, зображену на рис. 3
3. Подайте синусоїдальну напругу від ГЗ частотою 50 Гц на пластини P_2 . При цьому на екрані осцилографа отримується синусоїда. Відповідними рукоятками встановлюють амплітуду коливань з таким розрахунком, щоб уся крива була розміщена в межах сітки екрану.
4. Вздовж горизонтального напрямку відрахуйте число поділок, в межах яких розміщується одна ціла синусоїда.

Визначте період T і частоту $\nu = \frac{1}{T}$ декількох синусоїдних сигналів, виходячи

з того, що період сигналу є добутком трьох величин: розміру координати по осі X (см), тривалості розгортки та множника тривалості.

5. За визначеним періодом сигналу розрахуйте його частоту й порівняйте отриманий результат з частотою, що написана на шкалі частот звукового генератора.

Результати вимірювань занесіть у табл. 1.

Таблиця 1

№ з/п	Період коливань, поділка	Тривалість розгортки, поділка/см	Множник	Період коливань, с	Частота коливань (розрах), Гц	Частота коливань(зі шкали ЗГ), Гц
1						
2						
3						
4						
5						

6. Установіть за допомогою перемикача (V/см) і множника ?? синусоїду в межах робочої частини екрана.
7. Розрахуйте амплітуду сигналу у вольтах. Амплітуда у вольтах є добутком

трьох величин: розміру координати по осі Y (см), коефіцієнта підсилення по осі Y і множника (для зручності вимірювання амплітуди сигналу можна убрати розгортку).

8. Визначте діюче значення вихідного сигналу U_d звукового генератора за допомогою вольтметра, який розташований на його головній панелі, і розрахуйте амплітуду сигналу за формулою $U_a = U_d \sqrt{2}$. Порівняйте одержаний результат з результатом виміру амплітуди сигналу на екрані осцилографа.
9. Вимірювання, зазначені в пп. 5 – 7, треба повторити декілька разів і результати записати у табл. 2.

Таблиця 2

№ з/п	Амплітуда сигналу, поділлка	Коефіцієнт підсилення по осі Y, В/см	Множник	Амплітуда сигналу, В	Діюче значення напруги, В
1					
2					
3					
4					
5					

Завдання 2. Додавання гармонічних коливань одного напрямку

Якщо два коливання відбуваються **в одному напрямі**, наприклад осі x , і **з однаковими частотами ω** ,

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \alpha_1),$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \alpha_2).$$

то результуюче коливання буде відбуватися у тому самому напрямі і з тією ж частотою ω , але з іншою амплітудою та початковою фазою (див. «Теоретичний вступ» в даному навчальному посібнику).

При додаванні двох гармонічних коливань **одного напрямку, але з різними частотами ω_1 і ω_2**

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1),$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2).$$

виникає негармонічне коливання.

Якщо при цьому частоти коливань **одного напрямку мало відрізняються** одна від одної:

$$\omega_2 = \omega_1 + \Delta\omega, \text{ а } \Delta\omega \ll \omega_1,$$

то при складанні таких коливань отримують коливання з амплітудою, яка періодично змінюється. Такі коливання мають назву **биття** (рис. 3).

Період биття – це проміжок між сусідніми моментами часу, в які амплітуда дорівнює нулю. Період **биття** визначається за формулою :

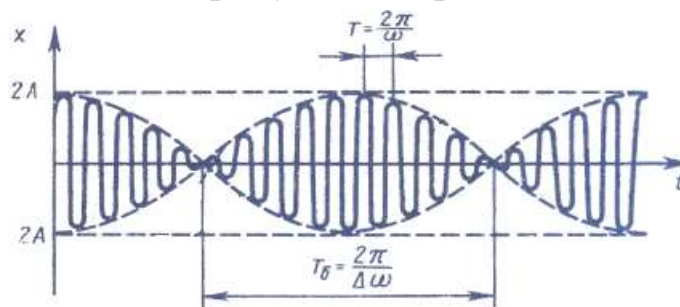


Рис. 3.

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2}.$$

Завдання 3. Додавання взаємно перпендикулярних коливань з однаковими частотами

Якщо точка здійснює гармонічні коливання з однаковими частотами ω , що відбуваються у двох взаємно перпендикулярних напрямках, наприклад, уздовж осей x і y ,

$$x = A_1 \cos \omega t \quad \text{і} \quad y = A_2 \cos \omega t,$$

то рівняння результуючого коливання можна отримати, якщо з цих рівнянь виключити час, тобто

$$\frac{x}{y} = \frac{A_1}{A_2}, \quad y = \frac{A_2}{A_1} x.$$

Звернемо увагу, що фази коливань однакові, зсув фаз між коливаннями вздовж x та y дорівнює нулю. Тоді світна точка буде коливатися вздовж прямої, яка лежить у I і III чвертях (рис. 4).

Якщо різниця фаз коливань дорівнює π , то траєкторія результуючого коливання буде прямою лінією, яка лежить у II і IV чвертях (рис. 4).

У випадку різниці фаз $\alpha = \frac{\pi}{2}$, траєкторія точки являється еліпсом, осі еліпса будуть збігатися з осями координат. Якщо при цьому амплітуди коливань є рівними, то за різниці фаз $\pi/2$ і $3\pi/2$ траєкторія перетворюється в коло.

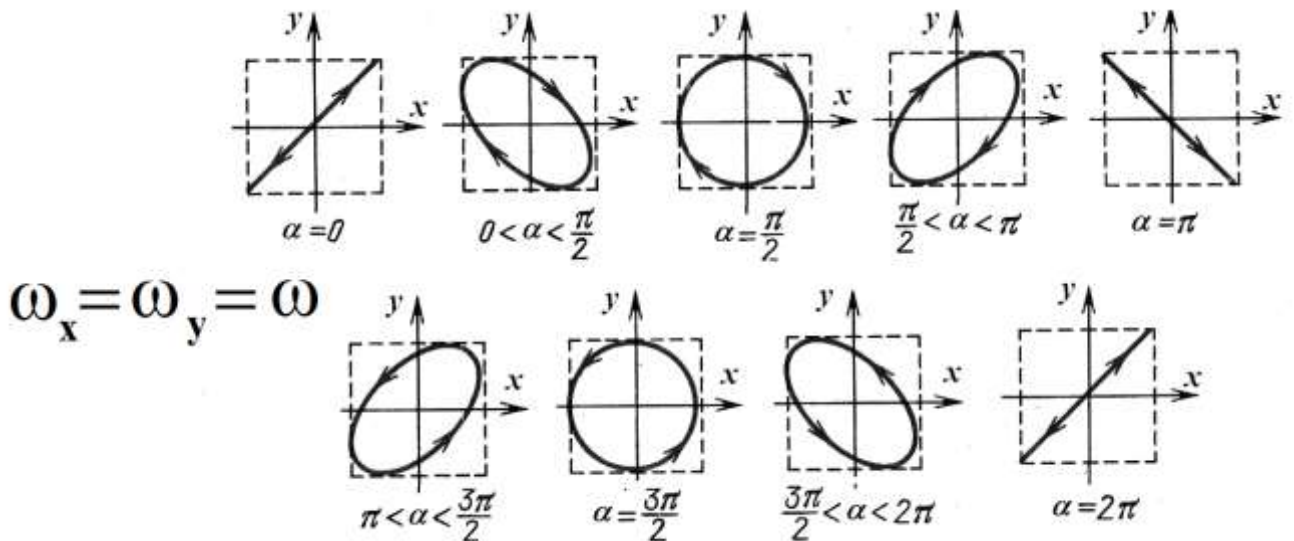


Рис. 4.

Щоб зробити частоти коливань, які додаються, однаковими, на одну пару відхиляючих пластин осцилографа подають частоту 50 Гц від освітлювальної мережі змінного струму, на іншу пару пластин - таку ж частоту 50 Гц від генератора звукової частоти ГЗ.

Спостерігаючи за картиною на екрані, можна помітити, що картина на екрані проходить всі стадії рис. 4.

Це відбувається тому, що частота струму 50 Гц в освітлювальній мережі не є строго фіксованою, а злегка «пливе». Це еквівалентно різниці фаз, яка безперервно змінюється

Послідовність вимірювань

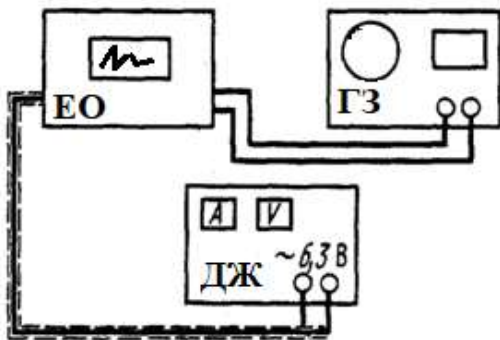


Рис. 6.

1. Зберіть схему, яка зображена на рис. 6. Тут позначено: ДЖ –джерело живлення, ЕО – електронний осцилограф, ГЗ –генератор електричних сигналів звукової частоти.

2. Перемикач "РАЗВЕРТКА"? встановить у положення "ВНЕШ". При цьому на вхід підсилювача горизонтального відхилення буде подана змінна напруга, частота якої 50 Гц ..

Контрольні питання

1. Яке призначення має осцилограф? З яких основних вузлів складається електронний осцилограф?
2. На який вхід осцилографа подають сигнал, що треба дослідити?
3. Як підготувити осцилограф до роботи?
4. Для чого призначений генератор розгортки осцилографа? Як вимірюють амплітуду та тривалість сигналу?
5. що таке фігури Ліссажу і як за їх допомогою визначити частоту одного сигналу, якщо відома частота іншого.

Приклад розв'язання типової задачі

Приклад. Матеріальна точка бере участь одночасно в двох взаємно перпендикулярних гармонічних коливаннях, рівняння яких $x = A_1 \sin \omega t$, $y = A_2 \cos \omega t$, де $A_1 = 2$ см, $A_2 = 4$ см.: Визначити рівняння траєкторії точки. Побудувати траєкторію з дотриманням масштабу і вказати напрям руху точки.

Розв'язання. Наведені в умові рівняння руху являють собою рівняння траєкторії, що задане в параметричній формі. Якщо виключити час t із заданих рівнянь, можна отримати рівняння траєкторії у звичайному вигляді. З першого рівняння випливає, що $\sin \omega t = x/2$ отже

$$\cos \omega t = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \omega t} = \sqrt{1 - (x^2 / 4)}.$$

Підставимо у друге рівняння замість $\cos \omega t$ його значення

$$y = \pm 4 \sqrt{1 - (x^2 / 4)}.$$

Підносимо до квадрату, одержимо

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1. \quad (1)$$

Це рівняння еліпсу, півосі якого дорівнюють відповідним амплітудам коливань (2 і 4 см). Для побудови траєкторії визначимо з рівняння (1) значення y , що відповідають певним значенням x , і складемо таблицю:

x , см	-2	-1	0	+1	+2
y , см	0	$\pm 3,46$	± 4	$\pm 3,46$	0

Накресливши координатні осі і вибравши масштаб, нанесемо на площину xOy знайдені точки (рис. 4.1). З'єднавши їх плавною кри-

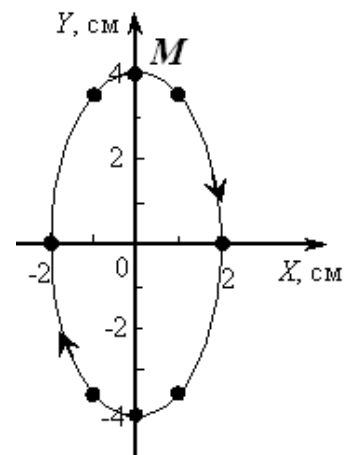


Рис. 4.1. 46

вою, одержимо траєкторію точки, що здійснює коливання відповідно до рівнянь руху.

Визначимо напрям обертання. У початковий момент часу $t = 0$ координати точки дорівнюють $x(0) = 0$ і $y(0) = 4$ см, точка знаходиться у положенні M .

У наступний момент часу координата x збільшується, а координата y зменшується. Отже, рух точки по траєкторії відбувається за годинниковою стрілкою.

Контрольні задачі

Варіант 1.

Матеріальна точка, маса якої $m = 10$ г, здійснює гармонічні коливання за законом косинуса з періодом $T = 2$ с і початковою фазою $\varphi = 0$. Повна механічна енергія точки $E = 0,1$ мДж. Визначити амплітуду коливань A та закон руху точки. Обчислити максимальне значення F_{\max} сили, що діє на точку.

Варіант 2.

Точка одночасно здійснює два взаємно перпендикулярних коливання, що виражаються рівняннями $x = A_1 \sin \omega t$ і $y = A_2 \cos \omega(t + \tau)$, де $A_1 = 2$ см, $A_2 = 1$ см, $\omega = \pi$ с⁻¹, $\tau = 0,5$ с. Визначити рівняння траєкторії точки у вигляді $f(x,y) = 0$.

Варіант 3.

На рисунку зображений графік, який є результатом додавання двох гармонічних коливань одного напрямку зх. Однаковими амплітудами й початковими фазами, що дорівнюють нулеві. Визначити амплітуди A_1 і A_2 та частоти ω_1 і ω_2 цих коливань.

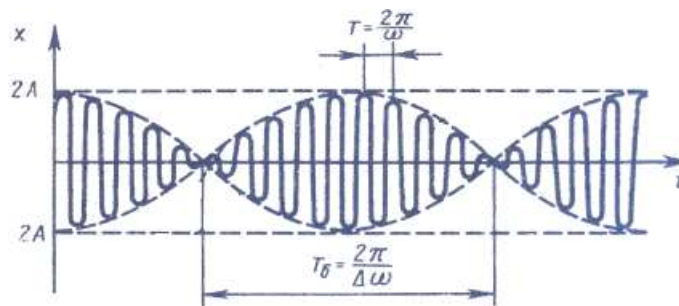
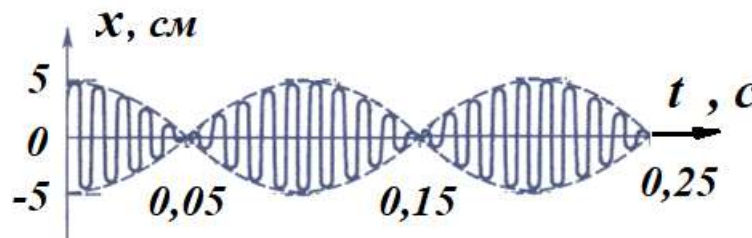


Рис. 3.



Лабораторна робота № 4. 4.

Вивчення додавання взаємно перпендикулярних коливань та визначення частоти гармонічного коливання за допомогою фігур Ліссажу

Прилади: 1) електронний осцилограф; 2) генератор гармонічних електромагнітних коливань звукової частоти.

Мета роботи: ознайомлення з методом визначення частоти гармонічних коливань та градування генератора коливань звукової частоти за допомогою фігур Ліссажу.

Теоретичні відомості

Перш, ніж приступати до виконання роботи, ознайомтеся з теорією коливань, наведеною в даному навчальному посібнику в розділі «Теоретичне введення»

Щоб простежити за закономірностями складного коливання, що є сумою двох взаємно перпендикулярних коливань, скористаємося електронним осцилографом.

Основною частиною осцилографа є електронно-променева трубка, що складається (рис. 1.) з електронної гармати 1, двох пар взаємно перпендикулярних пластин 4, які відхиляють електронний промінь 2, та люмінесцентного екрану 3.

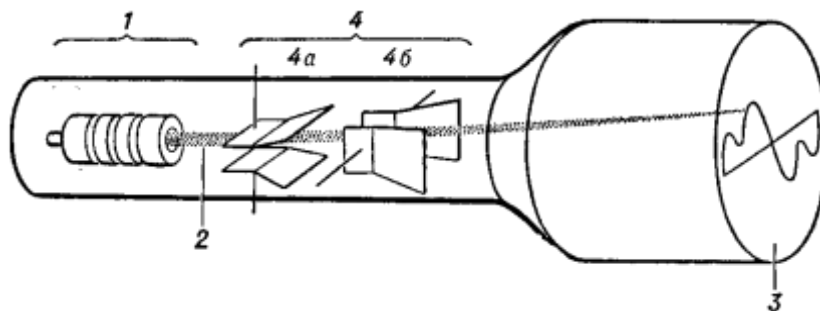


Рис.1

Осцилограф дозволяє здійснити коливання електронного променя в двох взаємно перпендикулярних напрямках. Слід електронного променя на світлому екрані 3 описує траєкторію, що виникає як результат участі світної точки в двох взаємно перпендикулярних коливальних рухах.

Відмітимо, що сучасні цифрові осцилографи мають значно більше можливостей.

Нехай зміщення, яке здійснює точка в горизонтальному напрямку, відбувається згідно із законом

$$x = a \sin \omega t$$

(для простоти початкову фазу коливань, що відбуваються уздовж осі Ox ми поклали рівною нулю), у вертикальному напрямку - відповідно формулі

$$y = b \sin (\omega t + \alpha)$$

Обидва коливання відбуваються з однаковою частотою ω , але зсунуті за фазою на кут α .

Як показано в теоретичному вступі даного посібника, у випадку додавання взаємно перпендикулярних коливань однакової частоти траєкторія світної точки на екрані являє собою еліпс, який може перетворюватися в коло, або пряму лінію в залежності від різниці фаз коливань, які додаються (рис. 2).

У випадку різних, але кратних частот траєкторія більш складна. Вона отримала назву фігури Ліссажу (рис. 3).

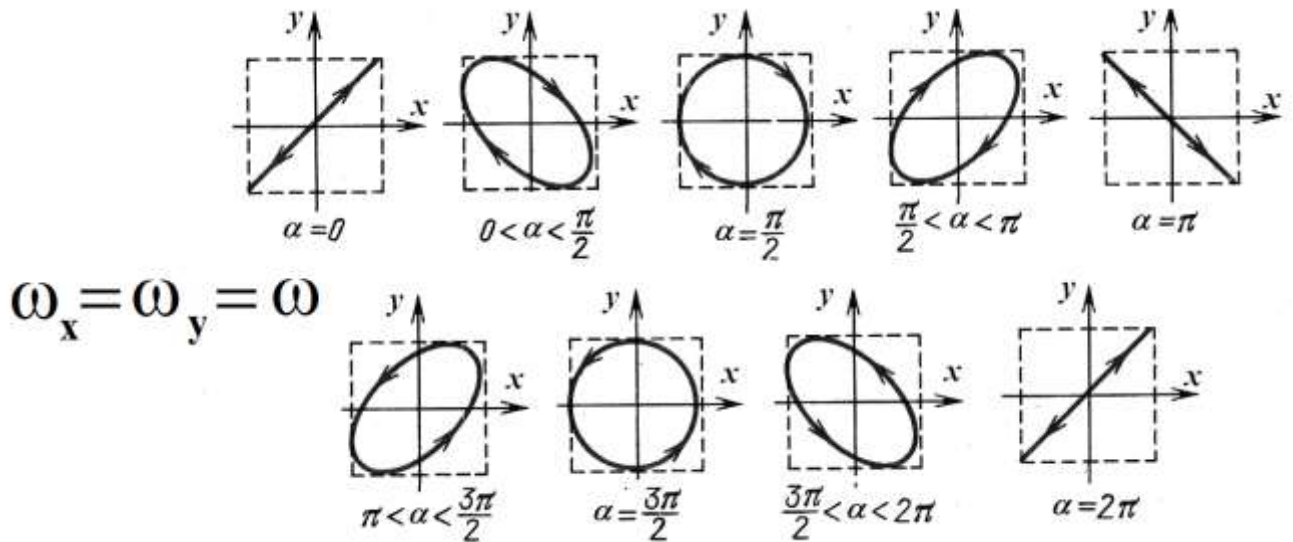


Рис. 2.

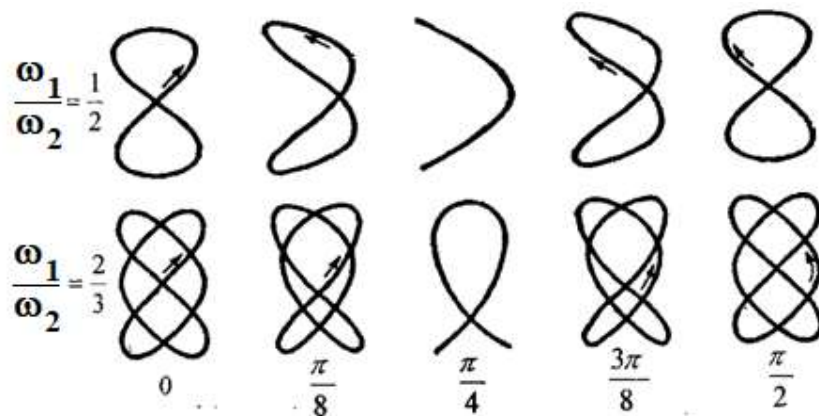


Рис. 3.

Вигляд д фігур залежить від співвідношення між частотами, фазами і амплітудами обох коливань.

Метод фігур Ліссажу широко використовується для порівняння частот і фаз двох джерел сигналів

Якщо частота одного з коливань відома, то по вигляду фігури Ліссажу визначають частоту іншого. Таке порівняння частот можна зробити, подаючи на горизонтально відхиляючі пластини напругу з відомою частотою ν_x , яка дорівнює, наприклад, 50 Гц, а на вертикально відхиляючі – напругу з невідомою частотою ν_y .

Існує таке **правило для визначення частот**. Проводять через задану фігуру дві довільні взаємно перпендикулярні прямі (осі x та y), як це зображено на рис. 4.

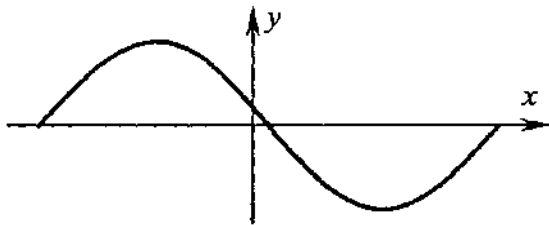


Рис. 4.

Підраховують число точок перетину фігури Ліссажу з віссю x (n_x) і з віссю y (n_y) (у зазначеному прикладі $n_x = 3$, $n_y = 1$). Тоді

$$v_y = \frac{n_x}{n_y} v_x. \quad (1)$$

У випадку, коли пряма проходить через точку перетину віток кривої, то при підрахунку число перетинів рахують двічі.

Частоту v_y досліджуваного сигналу можна також обчислити, знаючи число торкань фігурою Ліссажу сторін умовного прямокутника (n_x і n_y), у який вона вписана (рис. 5), що дає відношення частот обох коливань.

У наведеному прикладі $n_x = 3$, $n_y = 4$. Ці значення підставляють у робочу формулу (1).

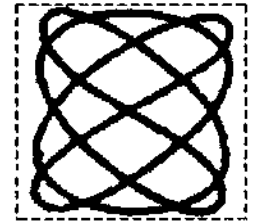


Рис.5.

Опис установки та вимірювання

Завдання полягає в градуюванні генератора гармонічних електромагнітних коливань звукової частоти за фігурами Ліссажу. У роботі використовується генератор з діапазоном частот 20 – 20 000 Гц.

1. Зібрати схему відповідно рис. 6. Напругу з генератора подати на вхід „Y” осцилографа, а коливання з частотою 50 Гц – на вхід „X”.

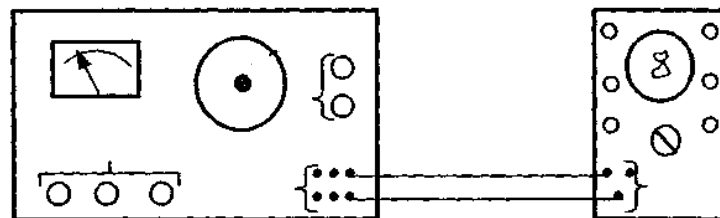


Рис. 6.

2. Включити в мережу осцилограф і генератор. Вимкнути генератор розгортки осцилографа.

3. Обертаючи регулятор частоти звукового генератора, домогтися появи стійкої фігури Ліссажу. Регуляторами вертикального і горизонтального підсилювачів осцилографа встановлюють відповідну величину зображення по вертикалі і горизонталі.

4. Визначити число точок перетинів або торкань n_x і n_y фігури та за формулою (1) обчислити частоту v_y , яка відповідає поділці шкали генератора.

5. Змінюючи частоту генератора, домогтися нової стійкої фігури і знайти v_{y2} . Зафіксувати поділку N_2 шкали. Вимірювання провести для восьми фігур Ліссажу.

6. За експериментальними даними побудувати графік $v_y = f(N)$.

Контрольні питання

1. Як можна визначити, аналізуючи фігури Ліссажу, співвідношення частот додаваних коливань?
2. Що собою являє траєкторія результуючого коливання, якщо частоти додаваних коливань рівні, а різниця фаз:
 - а) $\Delta\varphi=0$; б) $\Delta\varphi=\pi/2$; в) $\Delta\varphi=\pi$.
3. Як змінюється траєкторія результуючого коливання, якщо змінюється співвідношення амплітуд додаваних коливань.

Приклад розв'язання типової задачі

Приклад. Матеріальна точка бере участь одночасно в двох взаємно перпендикулярних гармонічних коливаннях, рівняння яких $x = A_1 \sin \omega t$, $y = A_2 \cos \omega t$, де $A_1 = 2$ см, $A_2 = 4$ см. Визначити рівняння траєкторії точки. Побудувати траєкторію з дотриманням масштабу і вказати напрям руху точки.

Розв'язання. Наведені в умові рівняння руху являють собою рівняння траєкторії, що задане в параметричній формі. Якщо виключити час t із заданих рівнянь, можна отримати рівняння траєкторії у звичайному вигляді. З першого рівняння випливає, що $\sin \omega t = x/2$ отже

$$\cos \omega t = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \omega t} = \sqrt{1 - (x^2/4)}.$$

Підставимо у друге рівняння замість $\cos \omega t$ його значення

$$y = \pm 4 \sqrt{1 - (x^2/4)}.$$

Підносимо до квадрату, одержимо

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1. \quad (1)$$

Це рівняння еліпсу, півосі якого дорівнюють відповідним амплітудам коливань (2 і 4 см). Для побудови траєкторії визначимо з рівняння (1) значення y , що відповідають певним значенням x , і складемо таблицю:

x , см	-2	-1	0	+1	+2
y , см	0	$\pm 3,46$	± 4	$\pm 3,46$	0

Накресливши координатні осі і вибравши масштаб, нанесемо на площину xOy знайдені точки (рис. 4.1). З'єднавши їх плавною кривою, одержимо траєкторію точки, що здійснює коливання відповідно до рівнянь руху.

Визначимо напрям обертання. У початковий момент часу $t = 0$ координати точки дорівнюють $x(0) = 0$ і $y(0) = 4$ см, точка знаходиться у положенні M .

У наступний момент часу координата x збільшується, а координата y зменшується. Отже, рух точки по траєкторії відбувається за годинниковою стрілкою.

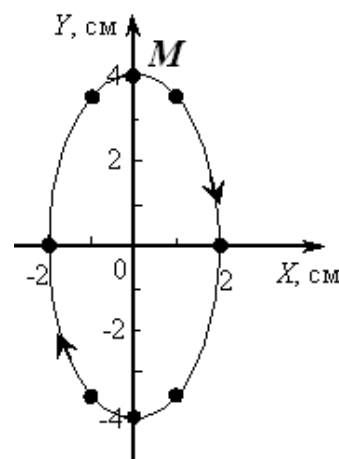


Рис. 4.1.

Варіант 1.

Записати рівняння результуючого коливання, яке виходить в результаті додавання двох взаємно перпендикулярних коливань з однаковою частотою $\nu_1 = \nu_2 = 5$ Гц і з однаковою початковою фазою $\varphi_1 = \varphi_2 = \pi/3$. Амплітуди коливань дорівнюють $A_1 = 0,10$ м і $A_2 = 0,05$ м.

Варіант 2.

На горизонтально і вертикально відхиляючі пластини осцилографа подані напруги $U_x = a \sin \omega t$ і $U_y = b \cos 2 \omega t$. Визначити траєкторію променя на екрані осцилографа.

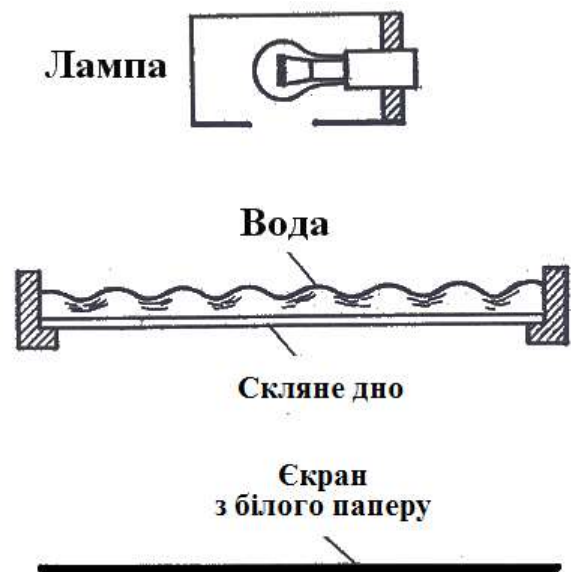
Лабораторна робота № 4.5. Вивчення хвильових явищ на поверхні води

Мета роботи: Експериментальне вивчення хвильових процесів, що виникають на поверхні води при її збуренні віброуючими тілами. Визначення довжини і швидкості біжучої хвилі.

Прилади. Дослідна установка.

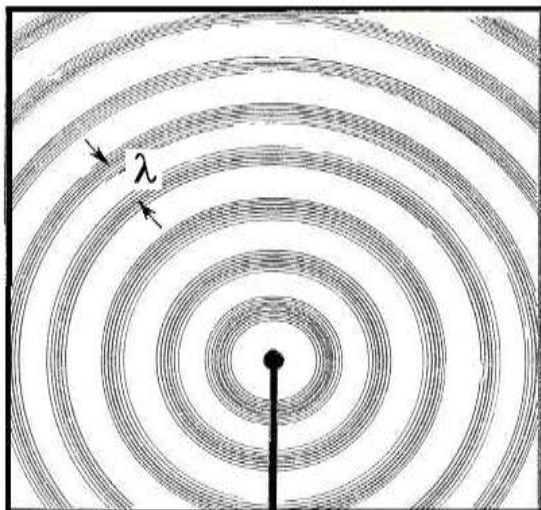
Опис досліду і коротка теорія.

Наллємо воду в плоску ванночку (кювету) з прозорим скляним дном.



Торкнемося паличкою поверхні води. Ми побачимо ряд кіл, що розходяться, як з центру, з точки дотику палички до води. Це кругові поверхневі хвилі - поширення на поверхні води збурення від палички.

Можна змусити невеликий металевий стержень здійснювати вертикальні гармонічні коливання за допомогою електромотора і періодично торкатися поверхні води (рис.1). Кожному торканню стержня відповідає поява нового кола. Кожне коло поступово розширюється, відстань між колами залишається постійною.



Будемо освітлювати ці кругові хвилі лампою, розміщеною зверху над кюветою. Світло, проходячи товщу води, потрапляє на екран, розташований знизу під кюветою. На екрані виникає тіньова рухома картина хвиль.

Рис. 1.

Нехай в деякому місці поверхні в певний момент часу проходить *гребінь* (або горб) кругової хвилі (рис.2).

Тут товщина шару води більше і гребінь діє як збиральна циліндрична лінза. Така лінза фокусує світло від лампи, тому гребені відображаються на екрані у вигляді яскравих смуг.



Рис.2.

Западини, навпаки, діють подібно розсіювальним лінзам, розсіюють світло і на екрані здаються темними. (В сонячний день на піщаному дні річки, на дрібному місці видно танцюючі тіні аналогічного походження).

Коли гребінь хвилі пройде деяке місце поверхні води, на його місце прийде западина, а потім знову гребінь хвилі і т.д.

Розглянемо тепер *два точкових джерела*, що збуджують кругові хвилі. Для цього закріпимо на наконечнику двигуна плоску пружину з двома стержнями, які одночасно ударають своїми кінцями по поверхні води.

Через кожну точку поверхні води проходять хвилі від двох джерел. У будь-якій точці буде відбуватися додавання коливань, принесених кожною хвилею.

Інтерференцією хвиль називається накладання хвиль, при якому в різних точках простору відбувається підсилення або послаблення коливань. Амплітуда результуючих коливань при цьому з часом не змінюється

Стійку картину інтерференції можна отримати при додаванні хвиль від *когерентних* (узгоджених) джерел, якщо коливання в джерелах відбуваються з однаковою частотою і в однаковій фазі.

В даному досліді обидва стержні збуджують хвильові імпульси з однаковою частотою - вони занурюються в воду одночасно і, отже, породжують гребені хвиль теж одночасно. Стержні можна вважати когерентними джерелами.

Хвилі, що породжуються такими джерелами, зображуються двома сім'ями концентричних кіл з центрами S_1 і S_2 (рис. 3).

Кожне коло зображує гребінь хвилі, що розходить від свого джерела. Оскільки джерела посилають періодичні хвилі, гребені всюди розміщені на однаковій відстані, що дорівнює довжині хвилі λ . Інтервали між гребенями однакові в обох сім'ях, так як обидва джерела дають хвилі однакової довжини. Радіуси відповідних гребенів в обох сім'ях є рівними, оскільки джерела збудження коливаються з однаковою фазою.

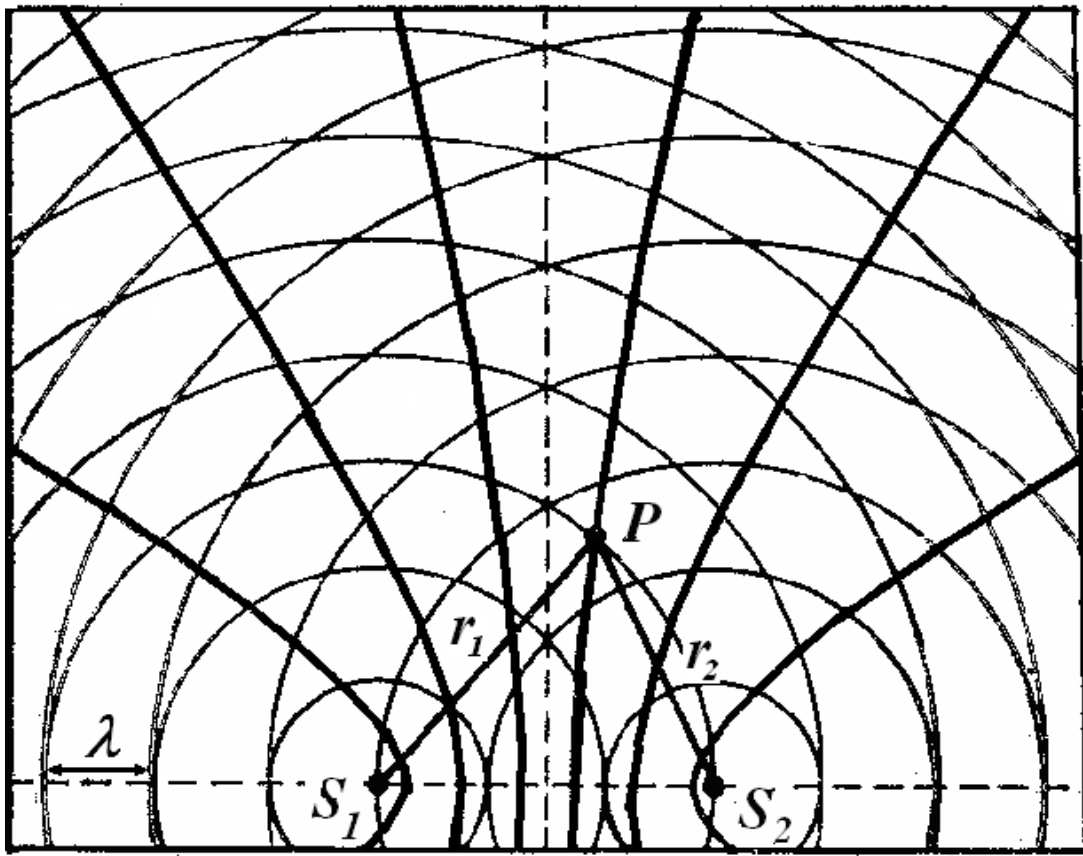


Рис.3.

Що відбувається, коли хвилі від двох джерел перекриваються?

Там, де перетинаються два гребені, повинен утворитися «подвоєний гребінь». На екрані хвильової кювети подібні «подвоєні гребені» повинні утворювати яскраві ділянки.

Там, де гребінь від одного джерела перетинає западину від іншого, вода залишається практично незбуреною і на екрані виходить сіре зображення.



Рис.4.

Нарешті, там, де перетинаються дві западини, на екрані утворюються найбільш темні місця (рис.4).

На сірих ділянках гребені весь час розміщуються над западинами і по-поверхня води тут є гладкою, не хвилястою. Ці лінії незбуреної води називають *вузловими лініями*. На рис. 3 вузлові лінії зображені жирними суцільними лініями.

На рис. 3 показана картина, яку можна отримати на основі описаних міркувань. Фотознімок хвиль, отриманих від двох точкових джерел, доводить правильність наших

міркувань (рис. 5).

Як переміщуються лінії на інтерференційній картині ?

По всій кюветі рух «подвоєних гребенів» і «подвоєних западин» походить від місця розташування джерел до периферії. Близько джерел виникають нові «подвоєні гребені» і «подвоєні западини».

Картину біжучих хвиль можна зробити **застиглою, нерухомою**. Для цього користуються імпульсною лампою. Так називається лампа, яка спалахує на короткий проміжок часу.

Нехай спалахи лампи слідуєть через проміжок часу, за який кожен гребінь переміститься саме в те положення, яке займав попередній гребінь в момент попередньої спалаху, тобто точно через період хвилі.

У такому випадку при кожному спалаху ми бачимо одну і ту ж картину - як би нерухома (*застигла*) хвильову картину.

Такий метод спостереження рухомих предметів називається *стробоскопічним*. Важливо, щоб частота спалахів світлового потоку точно дорівнювала частоті коливань вібратора, що порушує хвилі. Тільки тоді хвилі будуть здаватися застиглими. В розглянутій лабораторній установці це досягається автоматично.

Картина вузлових ліній є симетричною, тобто має однаковий вид праворуч і ліворуч від центральної переривчастої лінії. Будемо нумерувати вузлові лінії: першу праворуч від центральної (переривчастої) назвемо першою вузловою лінією, наступну - другою вузловою лінією і т.д.

Позначимо буквою P (рис. 3) довільно обрану точку на *першій вузловій лінії* і з'єднаємо її відрізками прямих $PS_1 (r_1)$ і $PS_2 (r_2)$ з джерелами. Кожний з цих відрізків є довжиною шляху від джерела до даної точки. Зрахувавши число гребенів на довжині кожного з двох розглянутих шляхів на рис. 3, ми переконаємося, що

$$r_1 = 3 \lambda, \quad r_2 = (5/2) \lambda.$$

Так що різниця ходу (тобто різниця довжин шляхів) дорівнює

$$\Delta = r_1 - r_2 = \lambda/2.$$

Вибравши будь-яку іншу точку на першій вузловій лінії, ми отримаємо та-кую же різниця ходу, тобто $\lambda / 2$.

Можна безпосередньо з рис.3 переконатися в тому, що якщо P є довільною точкою *другої вузлової лінії*, то різниця ходу $\Delta = 3 (\lambda / 2)$.

Для n -ої вузлової лінії різниця ходу хвиль складе:

$$\Delta = (2n - 1) (\lambda/2) \tag{1}$$

або непарне число півхвиль.

Точки вузлової лінії відповідають місцям, де хвилі гасять одна одну, тобто спостерігається мінімум інтенсивності хвиль. Отже, ми отримали так звану умову мінімуму при інтерференції хвиль.

Якщо різниця ходу $\Delta = r_1 - r_2$ дорівнює непарному числу півхвиль, хвилі при додаванні «гасять» одна одну.

Це співвідношення має наочний сенс - хвилі знищуються, якщо накладається горб на западину.

Ідея роботи: вимірюючи безпосередньо по картині вузлових ліній різницю ходів хвиль, визначити довжину хвилі λ .

Порядок виконання роботи

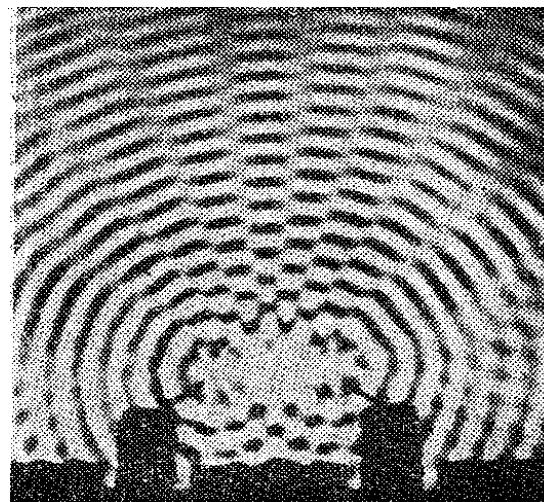


Рис. 5.

1. Увімкніть установку за допомогою вимикача «МЕРЕЖА», який розміщений на задній панелі вимірювального пристрою. При цьому включиться освітлювальна лампа діаскопу. На дисплеї буде відображатися поточний режим роботи установки: «STOP» і нульові показники частоти збудження. Прогрійте установку протягом 2 - 3 хвилин.
2. Покладіть на підставу штатива аркуш білого паперу, і закріпіть його за допомогою затискачів.
3. **Увімкніть електродвигун** установки, натиснувши кнопку «ПУСК - СТОП» на передній панелі вимірювального пристрою.
4. Кнопками «ЧАСТОТА +» і «ЧАСТОТА -» встановіть на вимірювальному пристрої частоту збудження хвилі за вказівкою викладача (близько $f = 50$ Гц.) Одне повторне натискання на кнопки «ЧАСТОТА +» і «ЧАСТОТА -» збільшує або зменшує частоту обертання електродвигуна на 1 Гц.
5. На аркуші паперу буде спостерігатися **картина хвильового поля**, яку необхідно замалювати. Слід зазначити **положення джерел хвиль і лінії спокійній поверхні води (вузлові лінії)**. Намагайтеся проводити вузлову лінію посередині хвильового поля спокійної води.
6. Вимкніть електродвигун, натиснувши кнопку «ПУСК - СТОП» на передній панелі. Вимкніть установку за допомогою вимикача «МЕРЕЖА».
7. Виконайте необхідні розрахунки.

Завдання 1. Визначення довжини хвилі по заданому рисунку

На отриманому на досліді рисунку відзначте місця перетину:

- горбів з горбами (подвійних горбів);
- западин зі западинами (подвійних западин);
- горбів зі западинами (спокійної води).

Позначення зробіть різними способами - наприклад, подвійних горбів - точками, спокійної води - хрестиками, різними кольорами і т.п.

Побудуйте на цьому рисунку **вузлові лінії**.

Виберіть довільну точку P на будь-якій вузловій лінії і визначте різницю ходу Δ хвиль за допомогою міліметрової лінійки. Знаючи номер вузлової лінії і різницю ходу хвиль, визначте за формулою (1) довжину хвилі λ .

Точку P виберіть довільно на різних вузлових лініях не менше 5 разів. Визначте середнє значення довжини хвилі.

Завдання 2. Визначення швидкості хвилі.

За формулою, що зв'язує довжину хвилі λ , частоту ν і швидкість хвилі u ,

$$u = \lambda \nu \quad (2)$$

визначте швидкість поширення поверхневих хвиль на воді.

Контрольні питання.

1. Що називається інтерференцією хвиль? Які хвилі дають стійку картину інтерференції? Як це досягається в даному досліді?
2. Сформулюйте умову мінімуму амплітуди при накладенні хвиль. У яких точках хвильової картини це спостерігається?
3. Як зробити хвильову картину інтерференції застиглою?

4. Як за картиною вузлових ліній визначити довжину хвилі?
 5. **Задача.** Частота коливань частинок середовища плоскої монохроматичної хвилі 10 Гц. Різниця фаз коливань у двох точках, які лежать на лінії поширення хвилі на відстані 100 см одна від одної, дорівнює $\pi/4$. Визначити швидкість поширення хвилі.

Приклад розв'язання типової задачі

Приклад. Плоска хвиля поширюється в напрямку осі Ox зі швидкістю $v = 20$ м/с. Дві точки, що розміщені на відстанях $x_1 = 12$ м і $x_2 = 15$ м від джерела хвиль, коливаються з різницею фаз $\Delta\varphi = 0,75\pi$. 1) Визначити довжину хвилі λ ; 2) написати рівняння хвилі; 3) визначити зміщення зазначених точок у момент часу $t = 1,2$ с, якщо амплітуда коливань $A = 0,1$ м.

Розв'язання. Відомо, що довжиною хвилі λ називається відстань між точками середовища, що коливаються з різницею фаз 2π . Нехай точки, що знаходяться одна від одної на будь-якій відстані Δx , коливаються з різницею фаз $\Delta\varphi$. Тоді з пропорції

$$\lambda - 2\pi, \Delta x - \Delta\varphi$$

випливає

$$\lambda = \frac{2\pi\Delta x}{\Delta\varphi} = \frac{2\pi(x_2 - x_1)}{\Delta\varphi}. \quad (1)$$

Після обчислень маємо

$$\lambda = \frac{2\pi(15 - 12)}{0,75\pi} = 8(\text{м}).$$

Рівняння плоскої хвилі, що поширюється в напрямку осі Ox має вигляд

$$\xi = A \cos \omega \left(t - \frac{x}{v} \right). \quad (2)$$

Це рівняння визначає зміщення ξ точок середовища, що здійснюють коливання, як функцію їхніх координат та часу.

Визначимо циклічну частоту ω . Оскільки $\omega = \frac{2\pi}{T}$ і $\lambda = vT$, то

$$\omega = \frac{2\pi v}{\lambda} = \frac{2\pi \cdot 20}{8} = 5\pi \text{ (с}^{-1}\text{)} \quad (3)$$

Рівняння плоскої хвилі для даного випадку набуває вигляду:

$$\xi = 0,1 \cos 5\pi \left(t - \frac{x}{20} \right), \text{ м.} \quad (4)$$

Щоб визначити зміщення ξ зазначених в умові точок, досить у рівняння (4) підставити відповідні значення t і x :

$$\xi_1 = 0,1 \cos 5\pi \left(1,2 - \frac{12}{20} \right) = 0,1 \cos 3\pi = -0,1(\text{м});$$

$$\xi_2 = 0,1 \cos 5\pi \left(1,2 - \frac{15}{20} \right) = 0,1 \cos 2,25\pi = 0,071(\text{м}).$$

Контрольні задачі

Варіант 1.

Плоска синусоїдна звукова хвиля має період $T = 3$ мс, амплітуду $A = 0,2$ мм і довжину хвилі $\lambda = 1,2$ м. Визначити швидкість точок середовища, віддалених від джерела коливань на відстань $x = 2$ м, у момент часу $t = 7$ мс від початку коливань. Початкова фаза хвилі дорівнює нулю.

Варіант 2.

Визначити різницю фаз коливань у двох точках, які містяться на відстанях відповідно 2 м і 5 м від джерела коливань. Період коливань дорівнює $T = 0,08$ с, а швидкість поширення гармонічної хвилі $u = 300$ м/с.

Лабораторна робота № 4.6. Вивчення стоячих хвиль і визначення власних частот коливань струни

Прилади: 1) генератор електричних коливань ГЗ; 2) струна на підставці; 3) постійний магніт; 4) набір тягарців.

Мета роботи: отримання на струні стоячих хвиль, спостереження картини розподілу амплітуд і кількісна перевірка формули власних частот коливань струни.

Теоретичний вступ

Перш ніж приступати до виконання роботи, ознайомтеся з теорією у вступі до цього навчального посібника.

Якщо натягнуту між двома точками струну вивести з положення рівноваги, вона буде коливатися. Хвиля, поширюючись по струні, відбивається від її кінців. Внаслідок накладення падаючої і відбитої хвиль в струні встановлюються особливі коливання.

Особливості полягають у тому, що коливаються не всі точки струни. Частина з них залишаються нерухомими і називаються **вузлами** стоячої хвилі. На кінцях струни в точках закріплення обов'язково виходять вузли, а між ними одна або кілька **пучностей** - областей, що коливаються з максимальною амплітудою.

Між двома сусідніми вузлами всі точки струни коливаються одночасно (в однаковій фазі, синфазно), але з різними амплітудами.

Такий тип синфазних коливань з характерним просторовим розподілом амплітуд - чергуванням вузлів (нулів) і пучностей (максимумів) - отримав назву **стоячої хвилі**. Відстань між двома сусідніми вузлами дорівнює половині довжини хвилі.

Підкреслимо, що стояча хвиля не є хвилею. Біжуча хвиля переносить енергію, максимуми і мінімуми біжучої хвилі в кожний наступний момент часу переходять у нові положення.

В стоячій хвилі (рис. 1) жодної передачі енергії від точки до точки немає. Така назва характеризує своєрідний коливальний стан середовища. (Теоретичний опис стоячих хвиль див. у «Теоретичному введенні» даного навчального посібника).

На довжині струни l буде укладатися завжди ціле число n півхвиль :

$$l = n \frac{\lambda}{2} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (1)$$

Або

$$\lambda_n = \frac{2l}{n}. \quad (2)$$

Цим довжинам хвиль відповідають частоти

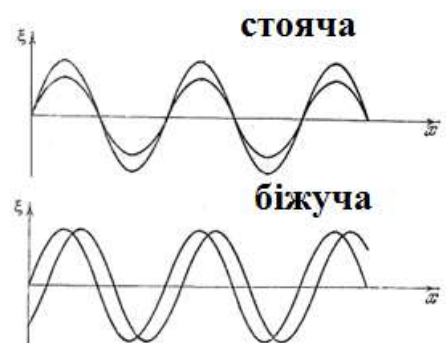


Рис.1.

$$v_n = \frac{u}{\lambda_n} = \frac{u}{2l} n \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (3)$$

Тут u – швидкість біжучої хвилі.

Струна, отже, може коливатися не з однією частотою, а з цілим спектром частот. Частоти v_n називаються **власними частотами** струни. Вони є кратними частоті

$$v_1 = \frac{u}{2l}, \quad (4)$$

яка називається **основною частотою**.

Розрахунок [1,2], показує що швидкість поширення u пружної хвилі вздовж струни визначається величиною натягу T струни і лінійною густиною $\rho_{\text{лін}}$ матеріалу струни (масою одиниці довжини струни)

$$u = \sqrt{\frac{T}{\rho_{\text{лін}}}}. \quad (5)$$

Підставляючи (5) в (3) з урахуванням того, що сила натягу струни дорівнює вазі тягарця $T = mg$, отримаємо формулу для розрахунку частот коливань струни

$$v_n = \frac{n}{2l} \sqrt{\frac{mg}{\rho_{\text{лін}}}}. \quad (6)$$

Опис приладу.

Прилад складається з металевої струни 1 (рис. 2), один кінець якої закріплений, а до другого кінця через нерухомий блок 2 прикріплений вантаж 3, що забезпечує натяг струни.

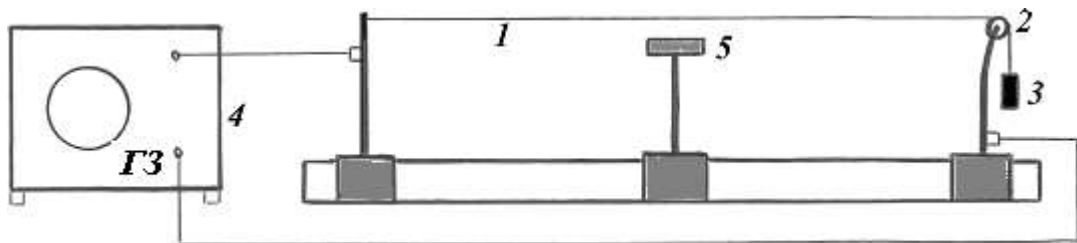


Рис. 2.

Вздовж струни пропускають змінний струм від генератора 4 електричних сигналів $\Gamma 3$. Обертаючи ручку настройки генератора, можна подавати на струну змінну напругу синусоїдальної форми в широкому діапазоні частот.

Струна розміщується над постійним магнітом 5. На струну з струмом діє магнітна сила, спрямована перпендикулярно струму. Оскільки струм змінний, то і сила змінюється з тією ж частотою і розгойдує струну. Частоту зміни сили можна змінювати за допомогою генератора. Коли частота магнітної сили стає близькою до частоти власних коливань струни, виникає резонанс, і коливання посилюються.

Вимірювання.

1. Зібрати установку за схемою рис. 2.
2. Створити натяг струни, навантаживши струну тягарцем маси m .
3. Переміщуючи магніт, встановити його так, щоб середина струни виявилася над ним.
4. Включити генератор. Після того, як генератор протягом 2-3 хв прогріється, повільно змінювати частоту змінного струму і домогтися стійких коливань при $n = 1$ (основна частота).
5. Записати показання генератора і замалювати розподіл амплітуд коливань точок струни.
6. Потім встановити магніт на відстані $1/4$ і $1/6$ довжини струни і домогтися стійких коливань струни при $n = 2$ і $n = 3$. Записати показання генератора і замалювати розподіл амплітуд коливань точок струни.
7. Повторити дослід при іншому значенні маси тягарця.
8. За такими даними: густина міді $\rho_{Cu} = 8,9 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, розрахувати лінійну густину (масу одиниці довжини) $\rho_{лін}$ мідної струни в даному експерименті.
9. За формулою (6) **розрахувати частоти власних коливань** для кожного випадку і занести дані в таблицю.

m , кг	n	l , м	$\rho_{лін}$, кг/м	ν генератора, Гц	ν розрахована, Гц
	1				
	2				
	3				
1					
2					
3					

Контрольні питання.

1. Як залежить швидкість поширення пружної хвилі від амплітуди і частоти хвилі?
2. Що називається стоячою хвилею? Запишіть формулу стоячої хвилі.
3. Що називається вузлом (пучністю) стоячої хвилі?
4. Чи відбувається в стоячій хвилі переміщення коливань в просторі (уздовж осі X)? Чи настає такий стан стоячої хвилі, коли всі точки струни лежать на одній прямій? Чи будуть при цьому точки нерухомими?
5. Чи відбувається перенесення енергії в стоячій хвилі вздовж осі X ?
6. У яких фазах коливаються точки струни між двома вузлами?
7. У яких фазах коливаються точки струни лежать по обидві сторони одного і того ж вузла?
8. Як змінюється амплітуда коливань між двома вузлами?
9. Чим відрізняється стояча хвиля від біжучої?
10. Які коливання струни називаються власними?

Приклад розв'язання типової задачі

Приклад . Стояча хвиля утворюється при накладанні біжучої хвилі і хвилі, відбитої від межі поділу середовищ, перпендикулярної напрямку поширення хвилі.

Знайти відстань вузлів і пучностей стоячої хвилі від межі поділу середовищ, якщо відбивання відбувається:

- 1) від середовища більш густого;
- 2) від середовища менш густого.

Швидкість поширення звукових коливань дорівнює 340 м/с і частота $\nu = 3,4$ кГц.

Розв'язання.

Випадок 1). Нехай хвиля поширюється вздовж гумового шнура, який прикріплено до стінки. Відбита хвиля буде подібна до падаючої, але з протилежним напрямком коливань. При відбитті фаза коливань частинок шнура змінюється на 180° . У місці закріплення шнура буде вузол стоячої хвилі.

Оскільки довжина λ біжучої хвилі пов'язана зі швидкістю поширення u і частотою ν співвідношенням

$$\lambda = u/\nu = 340/3400 = 0,1 \text{ (м)},$$

то положення вузлів, відрахованих від стінки, буде таким:

$$0, 5, 10, 15 \dots \text{ см,}$$

а положення пучностей:

$$2,5, 7,5, 12,5 \dots \text{ см.}$$

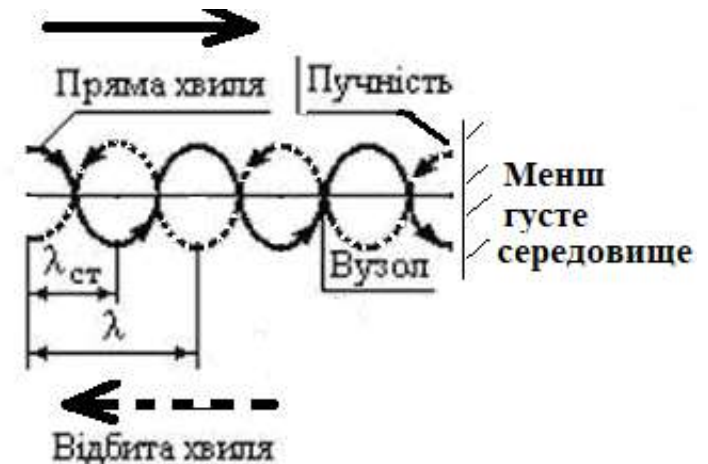
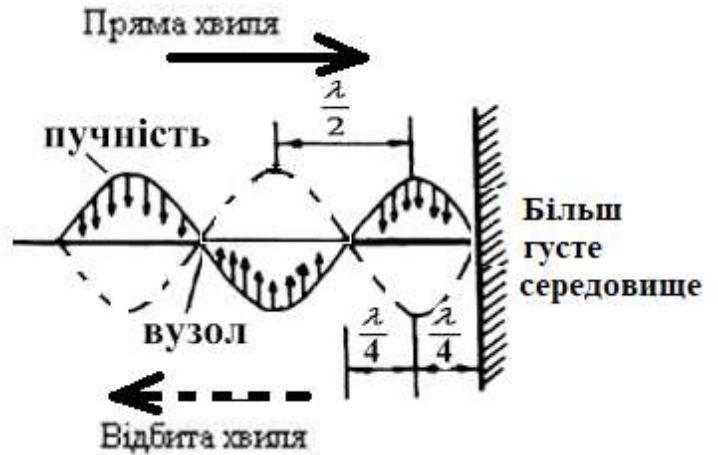
2) Якщо кінець гумового шнура не закріплений, то відбувається відбивання біжучої хвилі від менш густого середовища (повітря). На кінці шнура буде пучність

Відстані пучностей від кінця шнура будуть такими:

$$0, 5, 10 \dots \text{ см,}$$

а положення вузлів :

$$2,5, 7,5, 12,5 \dots \text{ см.}$$



Контрольні задачі

Варіант 1.

Визначити довжину хвилі λ , якщо відстань між першою та четвертою пучностями стоячої хвилі становить $l = 15$ см.

Варіант 2.

У середовищі утворилася стояча хвиля, причому найменша відстань між точками, в яких коливання відбуваються з максимальною амплітудою, становить 7 см. Знайти довжину біжучої хвилі.

Лабораторна робота № 4. 7.

Вивчення власних коливань струни методом резонансу

Прилади: 1) генератор електричних коливань (вимірювальний пристрій); 2) струна на підставці.

Мета роботи: отримання на струні стоячих хвиль, спостереження картини розподілу амплітуд і кількісна перевірка формули власних частот коливань струни.

Теоретичні відомості.

Якщо натягнуту між двома точками струну вивести з положення рівноваги, вона буде коливатися. Хвиля, поширюючись по струні, відбивається від її кінців. Внаслідок накладення падаючої і відбитої хвиль в струні встановлюються стоячі хвилі

Тепер коливаються не всі точки струни. Частина з них залишається нерухомою, вони називаються **вузлами** стоячої хвилі. На кінцях струни в точках закріплення утворюються вузли, а між ними одна або кілька **пучностей** - областей, що коливаються з максимальною амплітудою.

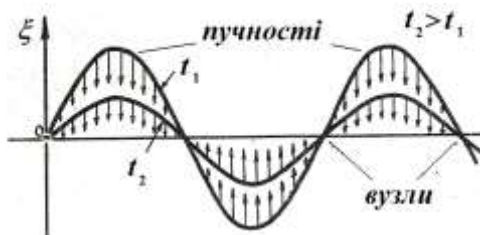


Рис.1.

ни.

На рис. 2 показані положення струни через кожну восьму частину періоду. Спочатку всі точки струни лежать на прямій лінії (див. рисунок). Потім між нерухомими вузлами відбувається спучування струни, яке досягає максимуму через чверть періоду. Після цього спучування спадає, і струна знову стає прямою через півперіоду. Далі спучування відбувається в інший бік.

У кожному мить видно хвилю, при цьому хвиля стоїть на місці - звідси назва цього типу коливань - **стояча хвиля**.

На відміну від біжучої хвилі, яка може рухатися вправо або вліво, у стоячій хвилі немає напрямку поширення. Ця відмінність є видною на двох знімках, що відносяться до близьких моментів часу (рис. 3).

Всі точки, які знаходяться між сусідніми вузлами, одночасно досягають максимального відхилення і одночасно проходять через положення рівноваги. На рис. 1 наведені «моментальні фотографії» відхилень точок від положення рівноваги в два близьких моментів часу t_1 і t_2 . Стрілками вказані напрямки руху точок струни.

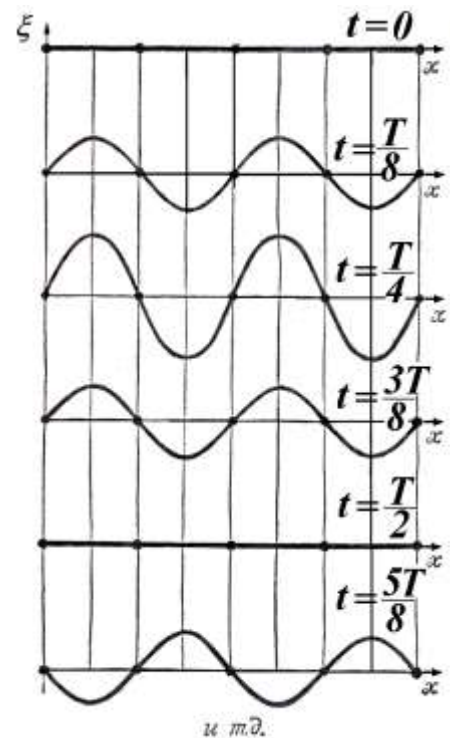


Рис. 2.



Рис. 3.

Для біжучої хвилі максимуми і мінімуми хвилі в кожен наступний мить переходять на нове місце, а в стоячій хвилі залишаються на одному і тому ж місці.

У стоячій хвилі на відміну від біжучої не відбувається перенесення енергії. Оскільки вузлові точки є нерухомими, через них енергія не переноситься.

Енергія стоячої хвилі є величиною сталою. В той момент часу, коли всі частинки струни проходять через положення рівноваги, вся енергія частинок є кінетичною. Навпаки, в положенні максимально-

го відхилення від положення рівноваги, енергія всіх частинок є потенціальною. Відбувається перетворення кінетичної енергії в потенціальну і навпаки.

Відстань між двома сусідніми вузлами дорівнює половині довжини хвилі. На довжині струни l буде укладатися завжди ціле число стоячих хвиль. Звідси випливає умова

$$l = n \frac{\lambda}{2} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (1)$$

Або

$$\lambda_n = \frac{2l}{n}. \quad (2)$$

Оскільки довжина хвилі λ пов'язана зі швидкістю поширення хвилі u і частотою коливання ν співвідношенням $\lambda = u/\nu$, то вказаним довжинам хвиль відповідають частоти

$$\nu_n = u/\lambda_n = u n / (2l) \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (3)$$

Струна, отже, може коливатися не з однією частотою, а з цілим спектром частот. Частоти ν_n називаються **власними частотами** струни. Вони є кратними частоті

$$\nu_1 = u/(2l) \quad (4)$$

яка називається **основною частотою**.

Розрахунок показує, що швидкість поширення пружної хвилі вздовж струни визначається величиною натягу T струни і лінійною густиною $\rho_{\text{лін}}$ матеріалу струни (масою одиниці довжини струни)

$$u = \sqrt{\frac{T}{\rho_{\text{лін}}}}. \quad (5)$$

Підставляючи (5) в (3) отримаємо робочу формулу для розрахунку частот коливань струни

$$\nu_n = \frac{n}{2l} \sqrt{\frac{T}{\rho_{\text{лін}}}}. \quad (6)$$

Опис приладу



Рис.4.

Прилад складається з жорсткої основи, на якій закріплені постійні магніти, між полюсами яких натягнута струна, і механізму натягу струни. Один кінець струни жорстко закріплений, а інший прикріплений до пружини. Другий кінець пружини механічно пов'язаний з гвинтовим механізмом, за допомогою якого можна змінювати натяг струни.

Сила натягу струни вимірюється за допомогою показника, який переміщається по шкалі при зміні натягу струни.

До складу вимірювального пристрою входить генератор синусоїдальних коливань і частотомір (рис.4).

На передній панелі пристрою розміщені:

- ручки «ЧАСТОТА ГРУБО» і «ЧАСТОТА ТОЧНО» - для установки частоти генератора;
- ручка «РІВЕНЬ» для установки необхідної амплітуди вихідної напруги генератора (амплітуда коливань струни);
- рідкокристалічний дисплей.

На струну з струмом діє магнітна сила, спрямована перпендикулярно струму. Оскільки струм змінний, то і сила змінюється з тією ж частотою і розгойдує струну. Частоту зміни сили можна змінювати за допомогою генератора. Коли частота магнітної сили стає близькою до частоти власних коливань струни, виникає резонанс, і коливання посилюються.

Вимірювання.

1. Підключити установку в мережу 220 В. Натиснути вимикач «МЕРЕЖА» пристрою живлення лампи підсвічування (світиться лампа). Натиснути вимикач «МЕРЕЖА» вимірювального пристрою (світиться підсвічування дисплея і на дисплеї відображається виставлена частота).
2. Дати установці прогрітися 3-5 хв.
3. Встановити натяг струни $T = 0,4$ Н. Ручку «РІВЕНЬ» встановити в середнє положення.
4. Змінюючи за допомогою ручок «ЧАСТОТА ГРУБО» і «ЧАСТОТА ТОЧНО» частоту в діапазоні 20-45 Гц, отримати одну добре помітну хвилю на всій довжині струни.
5. Збільшуючи частоту, отримати хвилі на інших частотах. Максимальне число їх не менше чотирьох.

6. Записати показання генератора і замалювати розподіл амплітуд коливань точок струни у всіх випадках.
7. Повторити дослід при іншому натягу струни $T = 0,3$ Н.
9. За формулою (6) розрахувати частоти власних коливань для кожного випадку і занести дані в таблицю. Порівняти отримані дані.

T , Н	n	l , м	ρ , кг/м	ν генератора, Гц	ν розрахована, за (6), Гц
0,4	1	0,62	$1,18 \cdot 10^{-4}$		
	2				
	3				
0,3	1				
	2				
	3				

Контрольні питання.

1. Що називається стоячою хвилею? Запишіть формулу стоячої хвилі.
2. Що називається вузлом (пучністю) стоячої хвилі?
3. Чи відбувається в стоячій хвилі переміщення коливань в просторі (уздовж осі X)?
4. Чи настає такий стан стоячої хвилі, коли всі точки струни лежать на одній прямій? Чи будуть при цьому точки нерухожими?
5. Чи відбувається перенесення енергії в стоячій хвилі вздовж осі X ?
6. У яких фазах коливаються точки струни між двома вузлами?
7. У яких фазах коливаються точки струни лежать по обидві сторони одного і того ж вузла?
8. Як змінюється амплітуда коливань між двома вузлами?
9. Чим відрізняється стояча хвиля від біжучої?
10. Які коливання струни називаються власними?

Приклад розв'язання типової задачі

Приклад. Стояча хвиля утворюється при накладанні біжучої хвилі і хвилі, відбитої від межі поділу середовищ, перпендикулярної напрямку поширення хвилі.

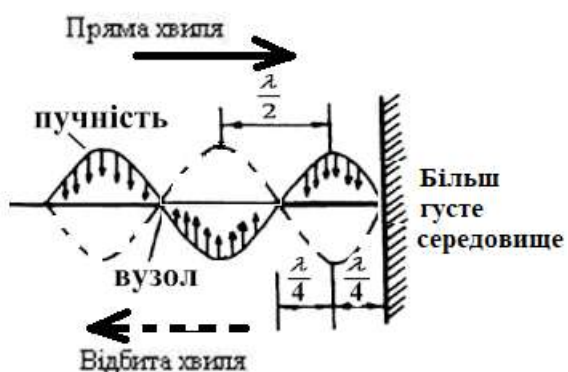
Знайти відстань вузлів і пучностей стоячої хвилі від межі поділу середовищ, якщо відбивання відбувається:

- 1) від середовища більшого густого;
- 2) від середовища меншого густого.

Швидкість поширення звукових коливань дорівнює 340 м/с і частота $\nu = 3,4$ кГц.

Розв'язання.

Випадок 1). Нехай хвиля поширюється вздовж гумового шнура, який прикріплено до стінки. Відбита хвиля буде подібна до падаючої, але з протилежним напрямком коливань. При відбитті фаза коливань частинок шнура змінюється на 180° . У місці закріплення шнура буде вузол стоячої хвилі.



Оскільки довжина λ біжучої хвилі пов'язана зі швидкістю поширення u і частотою ν співвідношенням

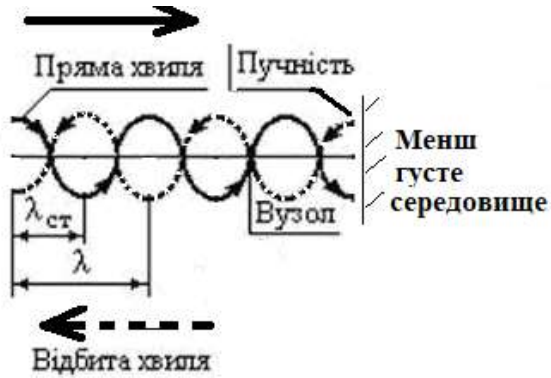
$$\lambda = u/\nu = 340/3400 = 0,1 \text{ (м)},$$

то положення вузлів, відрахованих від стінки, буде таким:

$$0, 5, 10, 15 \dots \text{ см,}$$

а положення пучностей:

2,5, 7,5, 12,5 ... см.



2) Якщо кінець гумового шнура не закріплений, то відбувається відбивання біжучої хвилі від менш густого середовища (повітря). При відбитті хвилі фаза хвилі, що падає, та хвилі, що відбивається, в місці відбиття збігаються. На кінці шнура буде пучність.

Відстані пучностей від кінця шнура будуть такими:

0, 5, 10.... см,

а положення вузлів :

2,5, 7,5, 12,5... см.

Контрольні задачі

Варіант 1.

У середовищі утворилася стояча хвиля, причому відстань між точками, в яких коливання відбуваються з амплітудою 3 мм, рівна 3 см і 7 см. Знайти довжину хвилі.

Варіант 2.

Кінці струни довжиною $L = 1$ м жорстко закріплені. Зобразіть стоячу хвилю з максимальною довжиною хвилі, яка можлива на цій струні. Зобразіть стоячі хвилі з довжиною хвилі в 2 і в 3 рази меншої максимальної. Вкажіть розташування вузлів і пучностей. Визначте довжини хвиль в цих трьох випадках.

Деякі відомості з математики

Сталі числа

$$\pi = 3,1416; \pi^2 = 9,8696; \sqrt{\pi} = 1,7725; e = 2,7183;$$

$$\ln 10 = 2,3026; \lg e = 0,4343; \ln x = 2,303 \lg x.$$

Відомості з геометрії

Теорема косинусів $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$.

Площа трикутника $S = (1/2) ah_a = (1/2) ab \sin C$.

Одиниці плоского кута:

1 рад $\approx 57,3^\circ$;

Довжина кола $l = 2\pi r$. Площа кола $S = \pi r^2$.

Площа поверхні сфери $S = 4\pi r^2$. Об'єм кулі $V = (4/3)\pi r^3$.

Рівняння прямої в площині з кутовим коефіцієнтом k : $y = kx + b$.

Лабораторна робота № 4. 8.

Визначення швидкості звуку в твердому тілі і модуля Юнга резонансним методом

Прилади: 1) металевий стержень; 2) резонатор, 3) генератор синусоїдальних електричних коливань; 3) електронний осцилограф.

Мета роботи: Визначення швидкості звуку в твердих тілах резонансним методом.

Теоретичні відомості та опис приладу

Коливальний рух частинок пружного середовища, який поширюється у вигляді хвиль, називають звуком. Звукові хвилі можуть поширюватися лише в пружному середовищі.

Пружна хвиля називається **поперечною**, якщо зміщення частинок середовища є перпендикулярним до напрямку поширення хвилі і **поздовжньою**, якщо таке зміщення паралельно до напрямку поширення хвилі. Види пружних хвиль залежать від властивостей середовища і відповідають видам деформації.

Поздовжні хвилі виникають у середовищах, в яких виникають пружні сили при деформації стиску і розтягу, тобто як у твердих тілах, так і в рідинах і газах.

Поперечні механічні хвилі можуть поширюватись у тих середовищах, в яких виникають пружні сили при деформації зсуву, тобто лише у твердих тілах. При поширенні коливань у **ізотропному нескінченно протяжному твердому середовищі можуть утворюватись як поздовжні, так і поперечні звукові хвилі**.

Розглянемо циліндричний стержень з деякого металу, який, як відомо, слабо поглинає звук. **Довжина** стержня має бути великою у порівнянні з лінійними розмірами його перерізу:

Для збудження поздовжніх коливань в стержні можна яким-небудь засобом діяти на один з кінців стержня періодичною, наприклад, синусоїдальною, силою, викликаючи почергове стиснення і розтягнення в напрямку довжини.

Цього можна досягти за допомогою генератора синусоїдальних коливань – приладу, в якому можна отримувати електричні коливання в області звукових частот (20 – 20 000 Гц)

Змінна електрична напруга від генератора підводиться до котушки - збудника коливань - електромагніта C . У результаті цього на правий кінець стержня буде діяти періодична сила з частотою, рівною частоті генератора

Тоді внаслідок взаємодії між частинками стержня поздовжні коливання будуть поширюватися уздовж стержня від частинки до частинки. Уздовж стержня побіжить пружна хвиля, частота якої дорівнює частоті зовнішньої сили.

Дійшовши до кінця стержня, пружна хвиля відіб'ється від межі поділу стержень - повітря і побіжить назад. При накладанні зустрічних хвиль однакової амплітуди і частоти в стержні виникнуть стоячі хвилі.

(Теорія стоячих хвиль описана в теоретичному введенні до даного посібника.)

Коливатися будуть не всі точки стержня. Частина з них залишиться нерухомими. Їх називають **вузлами**.

Між сусідніми вузлами точки здійснюють коливання в однаковій фазі, але з різними амплітудами, які залежать від координати точки. Точки, в яких амплітуда досягає максимального значення, називаються **пучностями**.

Такий тип коливань з характерним просторовим розподілом амплітуди - чергуванням вузлів (нулів) і пучностей (максимумів) - отримав назву **стоячої хвилі**.

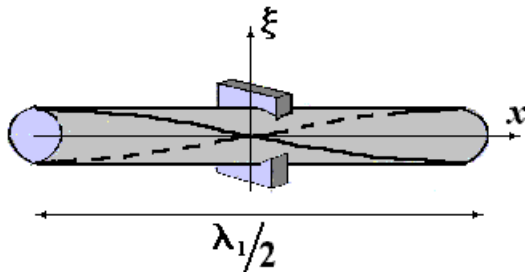


Рис. 1, а

пучень - пучності (рис.1, а, б).

На рисунках 1,а і 1,б по вертикалі відкладені величини поздовжнього зміщення ξ різних частинок зажатого посередині стержня - від нульового зміщення в центрі до максимального зміщення на кінцях стержні, по горизонталі - координата x .

Зміщення додатні при розтягуванні, від'ємні при стискуванні.

Суцільна крива показує зміщення частинок стержня у деякий момент часу, пунктирна - через пів періоду коливань.

Відстань між двома сусідніми пучностями дорівнює половині довжини хвилі. Тому в стержні збуджуються тільки такі коливання, половина довжини хвилі яких укладається на довжині стержня *непарне число разів* $n = 1, 3, 5,$

$$L = n \frac{\lambda}{2}. \quad (n = 1, 3, 5, \dots) \quad (1)$$

На рис.1, а показаний випадок $n = 1$, на рис 1, б - випадок $n = 3$.

Перепишемо формулу (1) інакше

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}.$$

Таким довжинах хвиль відповідають частоти

$$\nu_n = \frac{u}{\lambda} = \frac{u}{2L} n, \quad (n = 1, 3, 5, \dots) \quad (2)$$

де u - швидкість звуку в речовині.

Частоти ν_n називаються **власними частотами** стержня.

У разі $n = 1$ частота $\nu_1 = \frac{u}{\lambda_1} = \frac{u}{2L}$ називається **основною власною частотою**.

Саме ця частота використовується в даній роботі.

З останньої формули можна виразити швидкість звуку в стержні

$$u = 2 L \nu_1 \quad (3)$$

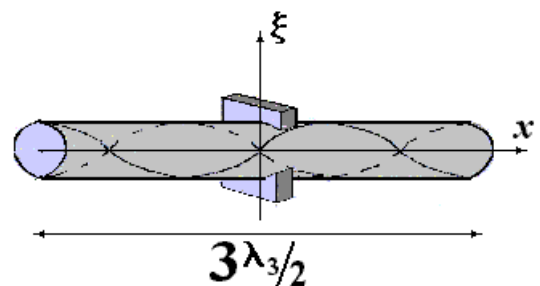


Рис. 1, б

Дослідним шляхом встановлено (закон Гука), що для незначних пружних деформацій механічне напруження $\sigma = F/S$ пропорційне відносній деформації $\varepsilon = \Delta l/l$:

$$\sigma = E \varepsilon,$$

Константа матеріалу E називається модулем Юнга або модулем поздовжньої пружності. Як показано у Теоретичному введенні (дивись також підручники [3][4][5]) швидкість u поширення поздовжньої пружної хвилі дорівнює

$$u = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (4)$$

де ρ – густина матеріалу стержня.

Отже, визначивши на досліді швидкість u поширення пружної хвилі в металевому стержні, можна обчислити модуль Юнга для цього матеріалу

Суть резонансного методу визначення швидкості звуку полягає в тому, що частоту зовнішньої сили, яка прагне поперемінно стиснути або розтягнути стержень, підбирають так, щоб вона дорівнювала власній частоті коливань стержня. В цьому випадку амплітуда вимушених коливань сильно зростає - спостерігається **резонанс**. Цього й добиваються в роботі. Зафіксувавши резонансну частоту, а, отже, і власну частоту, можна за формулою (3) визначити швидкість u поширення поздовжніх хвиль (швидкість звуку) в стержні.

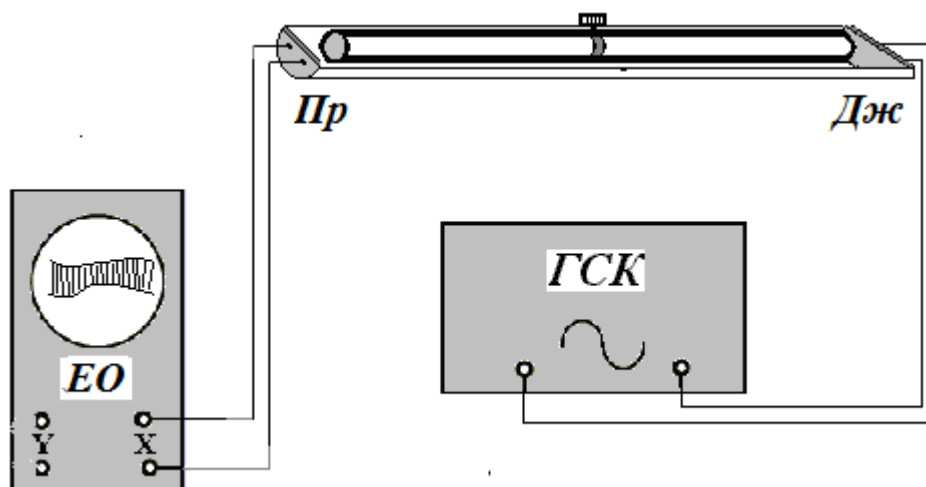


Рис. 2.

Опис приладу

Установка складається з об'єкта дослідження (металевого стержня) і вимірювального пристрою. До складу вимірювального пристрою входять генератор синусоїдальних коливань $ГСК$ і електронний осцилограф $ЕО$.

Досліджувальний стержень поміщається у жолоб-резонатор і закріплюється в ньому (схема рис. 2). На кінцях жолобу встановлені електромагніти для збудження і прийому поздовжніх коливань – датчик $ДЖ$ (збудник коливань) і приймач $Пр$.

Металевий циліндричний стержень жорстко закріплюється в центрі тя-
жіння всередині резонатора. Щоб збудити поздовжні коливання в стержні дже-
рело має викликати на правому кінці змінне стиснення і розтягування в напря-
мку довжини. Для цього від **генератора ГСК** до котушки збудження *C* джерела
підводиться змінна електрична напруга.

У котушці *C* виникає змінне магнітне поле, яке проходить через тонкий
повітряний зазор і діє на правий кінець феромагнітного (сталевого) стержня. У
поздовжньому магнітному полі в стержні виникають механічні сили, які змі-
нюють його довжину. Це явище деформації феромагнетиків при їх намагнічу-
ванні називається магніострикцією.

Звернений до джерела кінець стержня починає коліватися з частотою ге-
нератора, яку в досліді можна змінювати. Змінюючи частоту генератора, змі-
нюють частоту струму, який проходить через датчик.

Приймач *Pr* розміщений поблизу протилежного кінця стержня і відділе-
ний від нього також тонким повітряним зазором. Поздовжні коливання лівого
кінця стержня перетворюються електромагнітом приймача в електричний сиг-
нал, амплітуда якого пропорційна амплітуді поздовжніх коливань стержня. Ве-
личина сигналу вимірюється за допомогою осцилографа ЕО.

Очевидно, сигнал приймача буде максимальним при резонансі.

Якщо стержні виготовлені з слабомагнітних матеріалів (**алюміній, ла-
тунь**), то для збудження коливань на кінцях їх запресовуються шайби з феро-
магнітного матеріалу (м'якого заліза).

Вимірювання

Завдання 1.

1. Встановити в резонатор (жолоб) досліджуваний стержень.
2. Закріпити стержень затискачем на його середині. Неточне закріплення впли-
ває на результат вимірювань!
3. За допомогою щупа і відповідних регуляторів встановити повітряні зазори
між джерелом, приймачем коливань і торцями стержня близько 0,1 мм.
4. Включити тумблер «*Мережа*» на задній панелі генератора. На дисплеї висві-
чується режим роботи «*Metal*» і значення частоти, що підводиться від **гене-
ратора**.
5. Ручку «*Рівень*» встановити в крайнє праве положення.
6. Плавно змінюючи ручками «*Частота грубо*» і «*Частота точно*» частоту
збудження джерела спостерігати за поведінкою електронного променя на
екрані осцилографа до тих пір, доки не наступить стрімке зростання ампліту-
ди коливань.

Особливо сильне зростання амплітуди коливань спостерігається на осно-
вному резонансі. Зафіксувати частоту основного тону, при якій спостерігається
максимальна смуга розгортки електронного променя на екрані осцилографа. .
Записати значення резонансної (а, отже, і власної) частоти за лімбом генерато-
ра.

7. Дослід повторити три рази.

8. За формулою (3) обчислити швидкість звуку в стержні. Довжину стержня прийняти $L = 20$ см.

9. Зазначені вимірювання провести зі стержнями із **сталі, алюмінію і латуні**.

Завдання 2.

За формулою $u = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ розрахувати модулі Юнга E для матеріалів стержнів.

Прийняти густини ρ матеріалів стержнів, які вказані в таблиці.

Порівняти знайдене значення модуля Юнга з табличними значеннями. Сталь 200-220 ГПа, Алюміній 61-74 ГПа, Латунь 78-98 ГПа

Матеріал зразка	L , м	ν , Гц	u , м/с	$\langle u \rangle$, м/с	Δu , м/с	$\langle \Delta u \rangle$, м/с	E , ГПа
Сталь	0,2						
$\rho = 7,85 \times 10^3$ кг/м ³							
Алюміній	0,2						
$\rho = 2,69 \times 10^3$ кг/м ³							
Латунь	0,2						
$\rho = 8,5 \times 10^3$ кг/м ³							

Контрольні питання

1. Як утворюється стояча хвиля? Які умови виникнення стоячої хвилі? Що таке вузли і пучності стоячої хвилі?
2. Чим стояча хвиля відрізняється від біжучої?
3. Чому дорівнює відстань між двома сусідніми вузлами стоячої хвилі? двома сусідніми пучностями? сусідніми пучністю і вузлом?
4. Що називається власними частотами стержня? Який зі стержнів, що досліджується в роботі, має найбільшу частоту основного тону?
5. Сформулюйте закон Гука для деформації розтягу (стиску).

Контрольні задачі

Варіант 1.

Обидва кінці пружного стержня жорстко закріплені. Знайдіть координати вузлів і пучностей стоячої хвилі, що виникає в стержні, якщо довжина стержня L дорівнює $3\lambda/2$.

Варіант 2.

Задача. У латунному стержні довжиною $L = 20$ см, зажатому посередині, збуджується позовжня звукова хвиля. Модуль Юнга для латуні $E = 82$ ГПа, густина латуні $\rho = 8,5 \cdot 10^3$ кг/м³. Визначити третю власну частоту коливань стержня.

Лабораторна робота № 4. 9.

Визначення швидкості звуку в повітрі

Прилади: 1) хвилевід з динаміком і мікрофоном по краях; 2) генератор синусоїдальних електричних коливань; 3) електронний осцилограф.

Мета роботи: визначити швидкість звуку в повітрі фазовим методом.

Теоретичні відомості та опис установки

Між швидкістю звуку u , його частотою ν і довжиною звукової хвилі λ існує співвідношення

$$u = \lambda \nu. \quad (1)$$

Частоту звуку ν в лабораторних умовах визначають за частотою коливань джерела звуку. Тоді задача обчислення швидкості звуку u зводиться до визначення довжини звукової хвилі λ . Це досягається дослідним шляхом.

Схема досліду зображена на рис. 1.

На штативі укріплений акустичний хвилевід (1) - труба, уздовж осі якої в повітрі можуть поширюватися спрямовані звукові хвилі.

Джерелом звукових хвиль є електродинамічний гучномовець - **динамік (Д)**. Динамік живиться струмом від **генератора синусоїдальних коливань (2)**.

Під дією електричного струму, сила якого змінюється з деякою частотою ν , динамік випромінює звукові хвилі тієї ж частоти. Динамік нерухомо закріплений на лівому кінці труби.

З протилежного боку повітряного каналу знаходиться **приймач** звуку - **мікрофон (М)**, який може переміщатися уздовж труби. Для вимірювання відстані між динаміком і мікрофоном передбачена міліметрова шкала.

В акустичному хвилеводі встановлюється режим біжучої хвилі. Динамік збуджує коливання частинок повітря, породжуючи в повітрі згущення і розрідження частинок - «гребені» і «западини» хвилі, які біжать в напрямку поширення хвилі зі швидкістю u . Звукові хвилі досягають мікрофона M і породжують в його колі змінну напругу тієї частоти ν , яку випромінює динамік.

За час, що дорівнює періоду коливань, «гребінь» хвилі проходить відстань, яка називається довжиною хвилі λ

$$\lambda = u T,$$

де u - швидкість хвилі, T - період коливань.

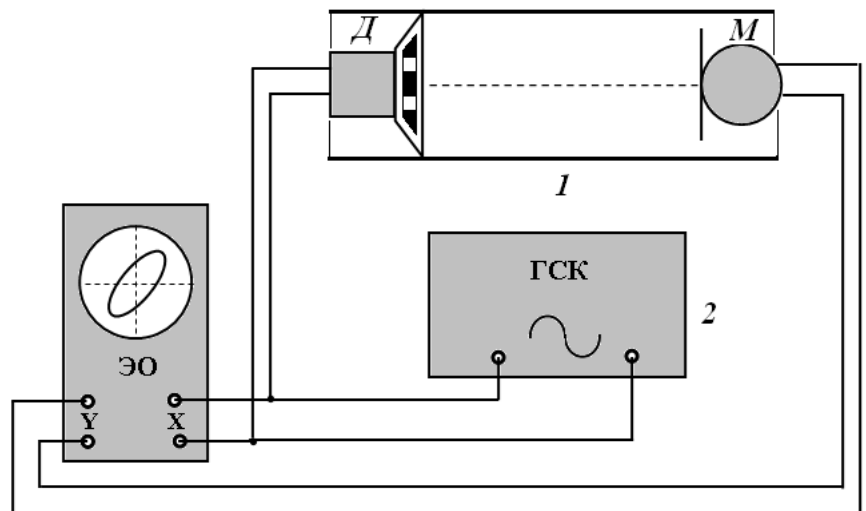


Рис.1.

Довжину хвилі можна визначити також як відстань між найближчими точками середовища, що коливаються з різницею фаз, що дорівнює 2π .

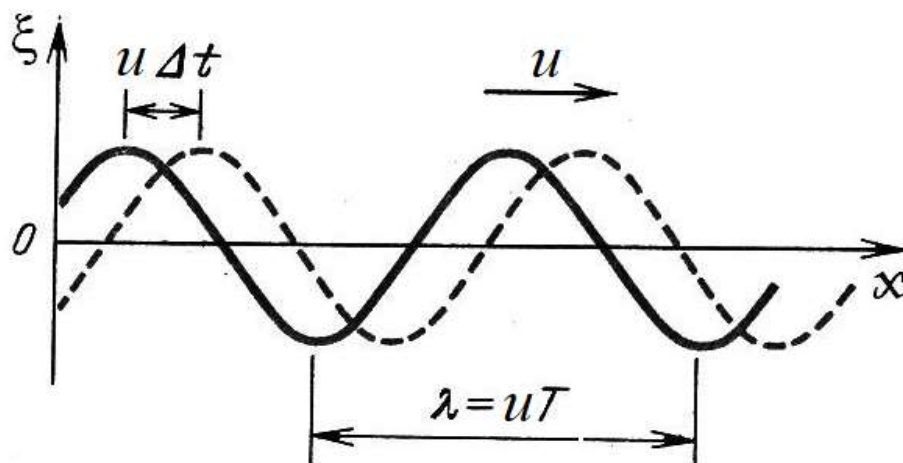


Рис.2.

На рис. 2 суцільна крива зображає зміщення ξ з положення рівноваги різних точок середовища в певний момент часу. В наступний момент часу розподіл зміщень зображується штриховою лінією. Картину поширення хвилі можна уявити собі, якщо синусоїду привести в рух зі швидкістю u уздовж осі Ox .

Якщо між динаміком і мікрофоном на довжині l вкладається ціле число $n = 1, 2, 3, \dots$ довжин хвиль λ

$$l = n\lambda,$$

то коливання в динаміці і мікрофоні відбуватимуться в однаковій фазі, тобто різниця фаз коливань буде дорівнює $0, 2\pi, 4\pi$ і т.д.

Завдання експерименту полягає в тому, щоб дослідним шляхом визначити положення точок середовища, які знаходяться на відстані $n\lambda$ від динаміка. Це завдання можна вирішити методом зсуву фаз.

Подамо електричні коливання від динаміка і мікрофона на електронний осцилограф (ЕО) наступним чином:

- від динаміка на вхід **горизонтально** відхиляючих пластин («Вхід Х»);
- від мікрофона на вхід **вертикально** відхиляючих пластин («Вхід Y»).

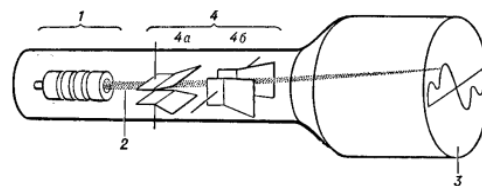


Рис.3.

Тоді **промінь** електронно-променевої трубки осцилографа **братиме участь в двох взаємно перпендикулярних коливаннях однакової частоти** (рис. 3).

В теорії коливань доказується, що при додаванні **двох взаємно перпендикулярних коливань однакової частоти** траєкторія сліду електронного променя на екрані осцилографа являє собою пряму лінію (див. теоретичний вступ у цьому навчальному посібнику).

Якщо різниця фаз коливань, які додаються, дорівнює $0, 2\pi, 4\pi$ і т.д., то пряма лінія проходить через початок координат і лежить в першому і третьому квадрантах (рис. 4). Пляма - слід електронного променя на екрані осцилографа - рухається уздовж цієї прямої.

Якщо змінити відстань між динаміком і мікрофоном на $\frac{\lambda}{2}$, то різниця фаз двох взаємно-перпендикулярних коливань, в яких бере участь електронний промінь, складе π , і на екрані осцилографа спостерігається пряма лінія, що проходить через початок координат у другому та четвертому квадрантах (рис. 4).

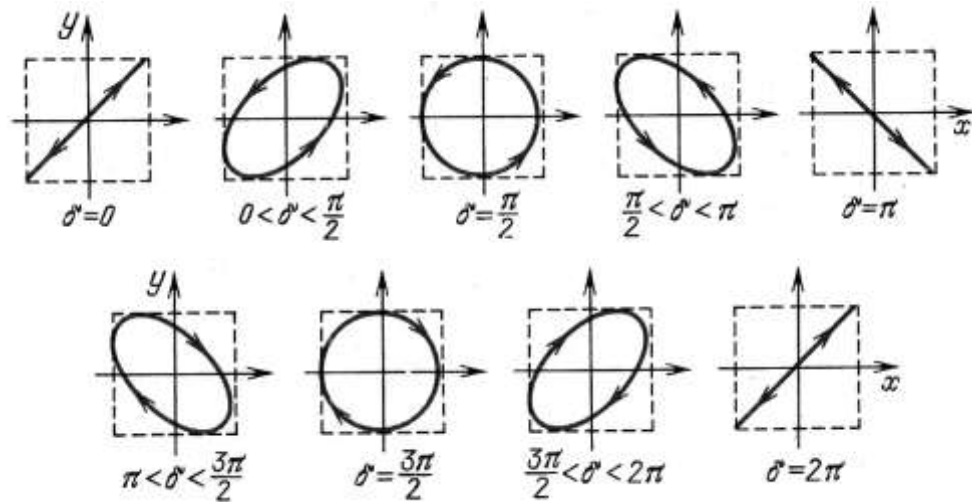


Рис. 4.

При плавному переміщенні мікрофона відбувається безперервна зміна різниці фаз, і форма еліпса також змінюється безперервно, вироджуючись по черзі то в одну, то в іншу пряму (рис. 4).

Картина на екрані повторюється при зміні різниці фаз на 2π радіан, тобто положень мікрофона, які відповідають умові. $l = n\lambda$. Звідси $\lambda = \frac{l}{n}$ і за формулою (1) швидкість звуку в повітрі в умовах експерименту

$$u = \frac{l}{n} \nu \quad (2)$$

Отже, задаючи частоту звуку ν , вимірюючи на досліді відстань l між джерелом звуку і мікрофоном, домагаються того, щоб на довжині l укладалося ціле число $n = 1, 2, 3, \dots$ довжин хвиль λ , за робочою формулою (2) визначають шукану швидкість звуку в повітрі.

Вимірювання

1. Натиснути кнопку «Метал-повітря». На дисплеї повинен відобразитися режим роботи «AIR».
2. Ручками «Частота грубо» і «Частота точно» встановити необхідну частоту коливань джерела звуку. Значення частоти відображається на дисплеї. (Значення частот задаються викладачем).
3. Регулюючи ручкою «Рівень» і ручками посилення каналу осцилографа, переконатися, в тому, що амплітуда сигналів на осцилографі, при пересуванні мікрофона вздовж хвилеводу, є достатньою для проведення вимірювань.

4. Отримати на екрані осцилографа стійке зображення еліпса.
5. Пересуваючи мікрофон M , отримати на екрані пряму, яка проходить через перший і третій квадранти ($\varphi = 0$). Записати положення l_0 мікрофона за шкалою.
6. Оскільки кожне наступне повторення початкової картини буде відповідати зміни різниці фаз на 2π радіан, то, повільно переміщаючи мікрофон відносно динаміка (починаючи з мінімальної відстані), виміряти положення l_n мікрофона, при якому на екрані осцилографа видно ту ж пряму лінію. Порахувати кількість n повторних появ такої прямої на екрані осцилографа. Очевидно

$$l = l_n - l_0.$$
7. Дослід повторити для трьох частот в діапазоні між 1 000 і 3 000 Гц (частота задається викладачем).
8. Провести обчислення швидкості звуку в повітрі за формулою (6).
9. Порівняти отримані результати з теоретичними, $u = u_0 \sqrt{1 + \alpha t}$, де t - температура повітря в градусах Цельсія, u_0 - швидкість звуку за нуля градусів Цельсія ($u_0 = 331$ м / с), $\alpha = 0,004$.

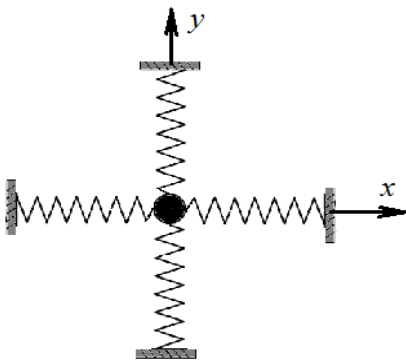
Таблиця 1.

№ п/п	ν , Гц	l_0 , м	l_n , м	l , м	n	ν , м/с	$\langle \nu \rangle$, м/с	$\Delta \nu$, м/с	E , %
1.									
2.									
3.									

Контрольні питання.

1. Який механізм поширення звукових хвиль в повітрі? Звукові хвилі в повітрі поздовжні або поперечні? Чому?
2. Що називається довжиною хвилі? Який зв'язок між довжиною хвилі, швидкістю і періодом?
3. Чи вплине на остаточний результат врахування наступних двох факторів:
 - а) хвилі, що випромінюються динаміком, не є плоскими;
 - б) при поширенні цих хвиль в повітрі відбувається поглинання енергії.

Приклад розв'язання типової задачі



Приклад. Написати рівняння результуючого коливання, яке отримується внаслідок додавання двох взаємно перпендикулярних коливань з однаковою частотою $\nu_1 = \nu_2 = 5$ Гц і з однаковою початковою фазою $\varphi_1 = \varphi_2 = \pi/3$. Амплітуди коливань дорівнюють $A_1 = 0,10$ м і $A_2 = 0,05$ м.

Розв'язання. Рівняння траєкторії руху точки, яка бере участь у двох взаємно перпендикулярних коливаннях однакової частоти вздовж осей x і y

$$x = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1), \quad y = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2):$$

має вигляд

$$\frac{x^2}{A_1^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + \frac{y^2}{A_2^2} = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1)$$

Оскільки за умовою $\varphi_2 - \varphi_1 = 0$, рівняння набуває вигляду

$$\frac{x^2}{A_1^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 0$$

$$\left(\frac{x}{A_1} - \frac{y}{A_2}\right)^2 = 0, \text{ або } y = \frac{A_2}{A_1} x.$$

Таким чином, результуюче коливання відбувається вздовж прямої лінії. Кут нахилу α прямої визначається формулою

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{A_2}{A_1} = 0,5.$$

і, отже, $\alpha = 26^\circ 34'$. Оскільки частота результуючого коливання дорівнює частоті коливань, що додаються, а амплітуда

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} = 11,2 \text{ см}$$

то рівняння результуючого коливання має вигляд

$$S = 11,2 \sin\left(10\pi t + \frac{\pi}{3}\right) (\text{см})$$

Контрольні задачі

Варіант 1.

Звукова хвиля поширюється зі швидкістю $u = 300$ м/с. Визначити частоту коливань, якщо мінімальна відстань між точками біжучої хвилі в середовищі, в яких коливання відбуваються в протилежних фазах, становить 2 м.

Варіант 2.

Звукові коливання, які мають частоту 600 Гц і амплітуду 0,2 мм, поширюються в повітрі. Довжина хвилі $\lambda = 50$ см. Визначити швидкість поширення хвилі і максимальну швидкість зміщення частинок повітря.

Тригонометричні функції

Зв'язок між тригонометричними функціями:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1; \quad \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x};$$

Парність тригонометричних функцій:

$$\sin(-x) = -\sin x; \quad \cos(-x) = \cos x; \quad \operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x.$$

Формули додавання:

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y;$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y;$$

Тригонометричні функції кратних аргументів:

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x; \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

Сума і різниця тригонометричних функцій:

$$\sin x \pm \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x \mp y}{2};$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2};$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}.$$

Лабораторна робота № 4. 10.

Вивчення релаксаційних коливань

Прилади. Стенд лабораторної установки ФПЕ-12,

Мета роботи. Зняття вольт-амперної характеристики неонові лампи, вимірювання та розрахунок періоду релаксаційних коливань у схемі з неонові лампою.

Теоретичний вступ

Слово «релаксація» у перекладі з латинської мови означає «ослаблення, зменшення». Релаксацією називається процес відновлення рівноваги системи після деякого збурення.

Якщо музикант веде скрипковим смичком по струні, смичок захоплює струну за собою. Коли зміщення струни досягає певної межі, струна відривається від смичка і повертається у вихідне положення. Смичок знову захоплює струну, і процес повторюється. Говорять, що струна здійснює *релаксаційні коливання*.



Рис. 1

Процес релаксаційних коливань складається із двох стадій:

- *повільного* накопичення енергії системи до певного критичного значення;
- подальшої віддачі енергії, що відбувається *майже миттєво, стрибкоподібно*.

З *механічними релаксаційними коливаннями* доводиться зустрічатися в механізмах, у яких величина тертя падає зі збільшенням відносної швидкості руху поверхонь, між якими виникають сили тертя. Цим пояснюються вібрації гальм трамвая та авто, скрип дверних петель, звук подряпини по склу, вереск автомобільних шин по асфальту тощо.

Прикладом *електричних релаксаційних коливань* є коливання, що виникають у схемі з неонові лампою.

Неонова лампа

Неонова лампа (на рис. 2 позначена L) є скляним балоном, в якому за низького тиску (10-15 мм рт.ст.) міститься інертний газ неон (рис. 1). У лампу введені металеві електроди – катод та анод, до них підводиться напруга ззовні.

Оскільки в газі, що заповнює лампу, майже немає вільних носіїв заряду (електронів або позитивних іонів), струм через лампу при малій напрузі на елект-

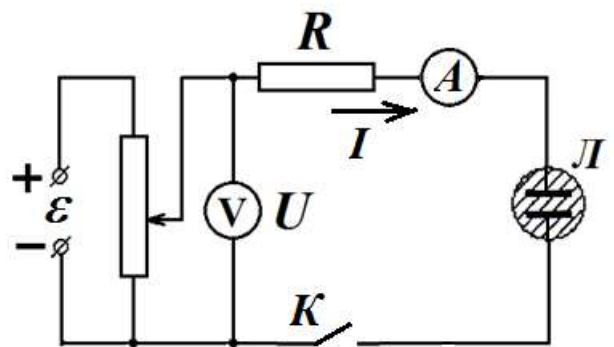


Рис.2.

родах практично не проходить.

З підвищенням напруги ті вільні електрони, які виникли, наприклад, під дією космічного випромінювання, прискорюються полем і набувають все більшої енергії. Низький тиск у лампі створюють для того, щоб електрони, рухаючись прискорено, відчували менше зіткнень з атомами і встигали набувати великої енергії.

При певній напрузі на електродах, яка називається **напругою запалювання** $U_{\text{зап}}$, енергії електронів стає достатньо для іонізації ударом атомів неону. При цьому виникають нові електрони та позитивні іони. Ці іони рухаються до катода і вибивають із нього вторинні електрони, які потім прискорюються полем і знову викликають іонізацію. Число носіїв струму лавиноподібно зростає. Кількість вторинних електронів та іонів у лампі стає настільки великою, що опір лампи різко зменшується, а струм через неї зростає і стрибком досягає значення $I_{\text{зап}}$. Вольт – амперна характеристика неоновой лампи наведена на рис. 3. При подальшому збільшенні напруги струм плавно збільшується за кривою ab (рис. 3).

Поряд із процесом іонізації атомів неону відбувається і зворотний процес – рекомбінація. При рекомбінації електрони та позитивні іони з'єднуються в нейтральні атоми, а енергія, яка при цьому вивільняється, виділяється у вигляді фотонів – газ у лампі світиться.

Після запалення неоніва лампа може горіти вже і при нижчій напрузі.

Якщо зменшувати напругу на лампі, що горить, то зміна струму відбувається по іншій кривій (bc на рис. 3). При напрузі, що дорівнює напрузі запалювання $U_{\text{зап}}$, лампа ще не гасне. Продовжуючи зменшувати напругу, можна побачити, що лише при деякій напрузі (напрузі гасіння $U_{\text{гас}}$), яка менша, ніж $U_{\text{зап}}$, лампа «гасне», і струм стрибком різко падає.

При такій напрузі в лампі зникнуть вільні носії заряду - електрони та іони, опір лампи знову зросте до нескінченності, а струм через лампу впаде до нуля.

Релаксаційний генератор

Розглянемо дію релаксаційного генератора (рис. 2), основною частиною якого є неоніва лампа L . Дія релаксаційного генератора заснована на процесах заряджання та розрядження конденсатора.

При замиканні ключа K конденсатор C , паралельно до якого приєднується неоніва лампа L , заряджається від джерела струму через великий опір R (рис. 2). Якби в колі не було неонові лампи, то напруга на конденсаторі U_C збільшувалася б з плином часу згідно з пунктирною кривою на рис 4 і асимптотично прагнуло б до ЕРС джерела ϵ за законом

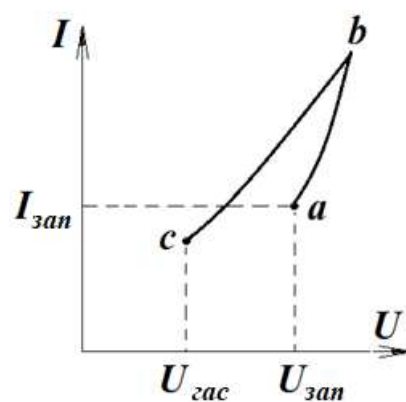


Рис. 3.

$$U_C = \varepsilon \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right). \quad (1)$$

Оскільки напруга на лампі дорівнює напрузі на конденсаторі, то напруга на лампі також зростатиме.

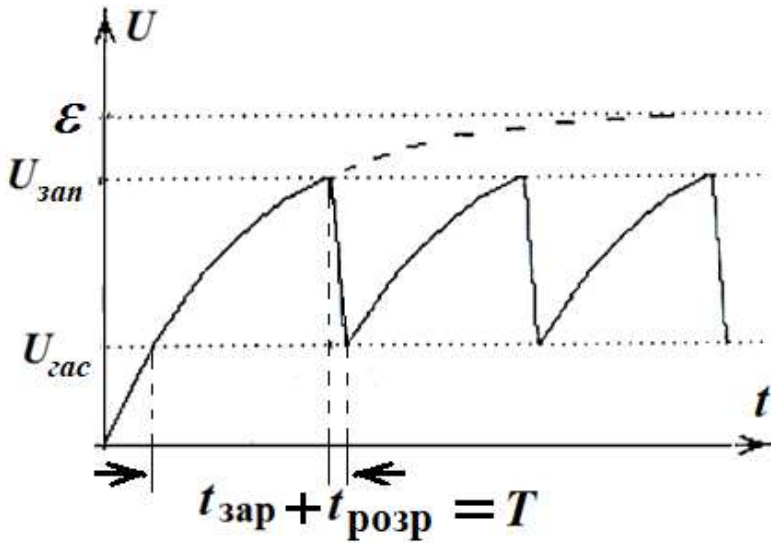


Рис. 4.

У момент, коли напруга на конденсаторі досягає значення $U_{\text{зап}}$, лампа запалюється, її електричний опір різко зменшується і через неї проходить струм. При цьому відбувається швидкий розряд конденсатора за законом спадаючої експоненти:

$$U_C = U_{\text{зап}} e^{-\frac{t}{RC}} \quad (2)$$

Коли різниця потенціалів на електродах лампи і, відповідно, на пластинах конденсатора впаде до значення $U_{\text{гас}}$, лампа згасне. Її опір буде дуже великим і конденсатор знову почне заряджатися від джерела струму. Процес цей періодично повторюватиметься, лампа періодично спалахуватиме через певні проміжки часу.

Окремо доводиться, що період коливань приблизно дорівнює

$$T = t_{\text{зар}} + t_{\text{розр}} = RC \ln \frac{\varepsilon - U_{\text{гас}}}{\varepsilon - U_{\text{зап}}}. \quad (3)$$

Опис установки

Електрична схема установки зібрана у модулі ФПЕ-14 (рис 5). Вона складається з магазинів опорів (МО) та ємностей (МЄ), касети ФПЕ-12 з вмонтованими в неї елементами схеми, джерела живлення (ДЖ) електронного осцилографа (РО), звукового генератора (РQ), та цифрового амперметра (РА).

При віджатій кнопці "режим" модуля ФПЕ-12 реалізується схема отримання вольт-амперної характеристики газорозрядної лампи (рис.1).

При натиснутій кнопці «режим» утворюється схема генератора релаксаційних коливань (див. рис. 3). Магазины ємностей (МЄ) і опорів (МО) виконують роль ємності C і опору R генератора.

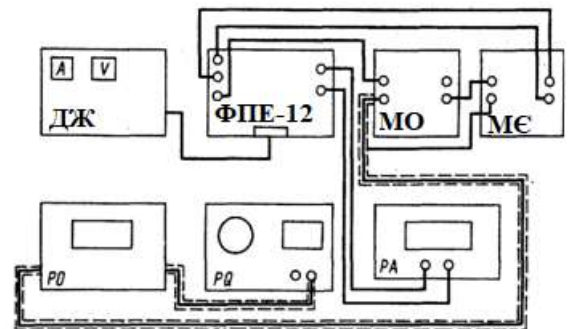


Рис. 5

Порядок виконання роботи

Завдання 1. Зняття вольт-амперної характеристики газорозрядної лампи.

1. Підготувати пристрій до роботи. Встановити опір $R = 1 \text{ МОм}$ магазину опорів МО і ємність $C = 3 \text{ мкФ}$ магазину ємностей МЄ.

Кнопку "режим" модуля ФПЕ-12 віджати. Ручку регулювання напруги 120 В джерела живлення ДЖ встановити в крайнє ліве положення. Вимірювальний прилад РА підготувати до роботи в режимі, який забезпечує вимірювання сили струму до 10 мА.

2. Включити лабораторний стенд, джерело живлення ДЖ та вимірювальний прилад РА.

3. Ручкою регулювання напруги джерела живлення змінювати напругу від 40 до 120 В з кроком 5 В і вимірювати силу струму $I_{\text{прям}}$. Записати в другий рядок таблиці 1 значення сили струму.

Таблиця 1.

U, В	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100	105	110	115	120
$I_{\text{пр}}$ mA																	
$I_{\text{об}}$ mA																	

4. Зменшуючи напругу від 120 до 40 В, виміряти силу струму I оберн. Результати занести на третій рядок таблиці 1.

5. Визначити **напругу запалення та гасіння** лампи. Для цього вибрати з таблиці 1 інтервал напруги, в якому лампа запалилася (погасла). У вибраному інтервалі, поступово збільшуючи (зменшуючи) напругу з кроком 1-2 В, зафіксувати таку напругу, за якої струм у лампі стрибком збільшиться від нуля до кінцевої величини (або зменшиться до нуля). Це і буде напруга запалення (гасіння).

6. Вимкніть вимірювальний прилад.

7. Побудуйте графік залежності струму I від напруги U .

Завдання 2. Вивчення роботи генератора релаксаційних коливань

1. Підготувати пристрій до роботи. Натиснути кнопку «режим» модуля ФПЕ-12. Ручку регулювання вихідної напруги 120 на джерелі живлення встановити в крайнє ліве положення. Осцилограф підготувати до роботи у режимі вимірювання тривалості сигналу.

2. Включити лабораторний стенд, джерело живлення та осцилограф. Встановити ручкою регулювання напруги джерела живлення $\varepsilon = 110 \text{ В}$, яка надалі підтримується незмінною. Посилення вздовж осі Y осцилографа встановити таким, щоб можна було спостерігати сигнал генератора релаксаційних коли-

вань. Включити генератор розгортки осцилографа і встановити таку частоту розгортки, щоб на екрані було видно одне-два релаксаційних коливань.

3. Виміряти період релаксаційних коливань з екрана осцилографа у режимі лінійної розгортки. Замалювати з екрану осцилографа вигляд кривих.

4. Визначити період при інших опорах R та ємностях C (див. Завдання 1, п.1).

5. Розрахувати період релаксаційних коливань за формулою (3) та порівняти з отриманим на досліді.

Контрольні питання

1. Що є характерною ознакою релаксаційних коливань?

2. Від чого залежить електропровідність газів? Поясніть вольт-амперну характеристику газонаповненої лампи.

3. Як визначити напругу запалення та гасіння?

4. Як працює генератор релаксаційних коливань?

5. Як змінюється напруга на конденсаторі генератора релаксаційних коливань?

6. Як визначається період релаксаційних коливань?

7. Як залежить період релаксаційних коливань від величини RC ?

Приклад розв'язання типової задачі

Нехай конденсатор ємністю C сполучений послідовно з резистором R і під'єднаний до джерела напруги.

Окремо доказується, що залежність від часу напруги на конденсаторі під час заряджання має вигляд

$$U = U_0(1 - e^{-t/\tau}),$$

де U_0 дорівнює ЕРС джерела.

Напруга на конденсаторі під час розрядження змінюється за законом

$$U = U_0 e^{-t/\tau} = U_0 e^{-t/(RC)},$$

тобто за законом спадаючої експоненти. Мірою процесу розрядження конденсатора є параметр τ , який називається **часом релаксації**, або **сталюю часу RC-ланцюжка** і визначається формулою $\tau = RC$.

На момент $t = \tau$ $U(\tau) = U_0/e$. Отже, час релаксації є проміжком часу, протягом якого напруга та струм під час розрядження конденсатора зменшується в $e \approx 2,7$ разів.

Приклад. Коливальний контур складається з котушки індуктивністю $L = 25$ мГн, конденсатора ємністю $C = 10$ мкФ і резистора. Визначити опір резистора, якщо відомо, що амплітуда сили струму в контурі зменшилася в e разів за $N_e = 16$ повних коливань.

Розв'язання. Позначимо час, за який амплітуда зменшиться в e разів (так званий час релаксації), через τ . За час τ у контурі здійсниться

$$N_e = \tau/T \tag{1}$$

коливань. Тут $T = 2\pi / \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ – умовний період згасаючих коливань ($\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ – власна частота контуру, $\beta = R/(2L)$ – коефіцієнт згасання).

Підставимо в закон убуття амплітуди $A = A_0 e^{-\beta t}$ час релаксації τ . Тоді за визначенням амплітуда зменшується в e разів

$$A_0 e^{-\beta\tau} = \frac{A_0}{e},$$

або

$$\beta\tau = 1, \tau = \frac{1}{\beta}.$$

Підставляючи вирази для T і τ в (1), одержимо

$$N_e = \left(\frac{1}{\beta T}\right) = \left(\frac{2L}{R}\right) \frac{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{4L}{R^2 C} - 1}.$$

Звідси шуканий опір:

$$R = 2 \sqrt{\frac{L}{C(1 + 4\pi^2 N_e^2)}}. \quad (2)$$

Після обчислень одержимо $R \approx 1$ Ом.

Приклад. Тіло здійснює коливання з частотою $\nu = 50$ Гц. Логарифмічний декремент згасання λ дорівнює $0,01$. Визначити: 1) час, за який амплітуда коливань тіла зменшиться в 20 разів; 2) кількість повних коливань тіла, щоб відбулося таке зменшення амплітуди.

Розв'язання. Амплітуда згасаючих коливань

$$A = A_0 e^{-\beta t}, \quad (1)$$

де A_0 – амплітуда коливань у момент $t = 0$, β – коефіцієнт згасання.

Логарифмічний декремент згасання $\lambda = \beta T$ ($T = 1/\nu$ – умовний період згасаючих коливань). Тоді $\beta = \lambda\nu$ і вираз (1) можна записати у вигляді

$$A = A_0 e^{-\lambda\nu t},$$

звідки шуканий час

$$t = \frac{1}{\lambda\nu} \ln\left(\frac{A_0}{A}\right). \quad (2)$$

Кількість шуканих повних коливань

$$N = t/T = t\nu. \quad (3)$$

Обчисливши, одержимо 1) $t = 6$ с; 2) $N = 300$.

Контрольні задачі

Варіант 1

Точка здійснює згасаючі коливання з частотою ω . Знайдіть час релаксації, якщо початкова швидкість точки дорівнює нулю, а початкове зміщення в n разів менше амплітуди.

Варіант 2

Ємність конденсатора коливального контуру $C = 1$ мкФ, індуктивність його котушки $L = 10$ мГн. Який активний опір R необхідно ввести в контур, щоб частота вільних коливань зменшилася на $0,01\%$?

Варіант 3.

Коливальний контур має ємність $C = 1$ нФ і індуктивність $L = 5$ мГн. Логарифмічний декремент згасання $\delta = 0,005$. За який час внаслідок згасання втратиться 99% енергії контура?

Лабораторна робота № 4. 11.

Дослідження згасаючих коливань у коливальному контурі методом порівняння амплітуд

Мета роботи: вивчення параметрів та характеристик коливального контура.

Прилади : касета ФПЕ-10, перетворювач імпульсів (касета ФПЕ-ПІ), електронний осцилограф, звуковий генератор, магазин опорів.

Теоретичне введення

Перш, ніж приступати до виконання роботи, ознайомтеся з теорією коливань, наведеною в даному навчальному посібнику в розділі «Теоретичне введення»

Систему, яка складається з послідовно з'єднаних конденсатора ємністю C , котушки індуктивності L і провідника з омичним опором R , називають коливальним контуром (рис. 1).

Як показано в теоретичному вступі до цього посібника, в електричному коливальному контурі за наявності омичного опору R період згасаючих коливань становить

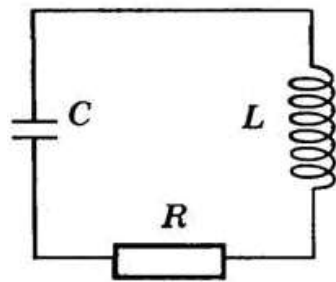


Рис.1.

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}} \dots\dots\dots(1)$$

а напруга на конденсаторі змінюється з часом за законом

$$U = \frac{1}{C} q_{m0} e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha) = U_{m0} e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha) \dots\dots\dots(2)$$

Величина

$$U_{m0} e^{-\beta t}$$

виражає амплітуду коливань напруги, яка зменшується з часом за експоненціальним законом.

Графік функції (2) показаний на рис. 2. Пунктирними лініями показаний закон зменшення амплітуди з часом.

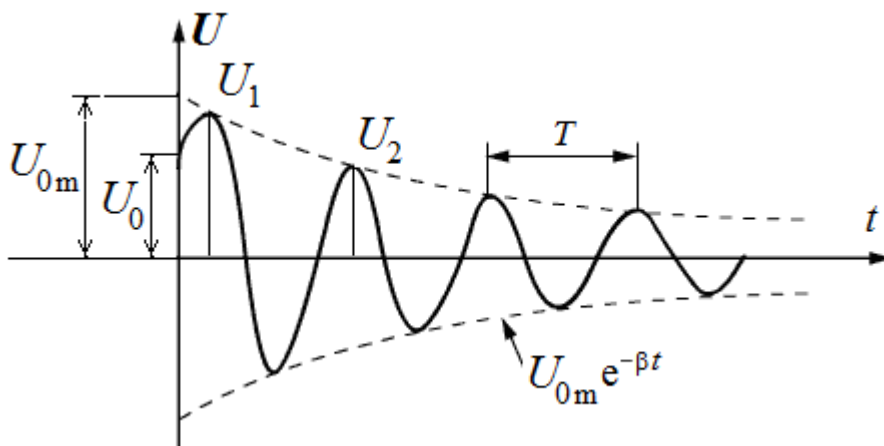


Рис. 2.

Вводиться кількісна характеристика швидкості згасання коливань – логарифмічний декремент згасання δ .

Він дорівнює натуральному логарифму відношення амплітуд напруг, що йдуть одна за одною через інтервал часу,

що дорівнює періоду коливань T (на рис. 2, наприклад, U_1 и U_2):

$$\delta = \ln \frac{U(t)}{U(t+T)} = \ln \frac{U_{0m} e^{-\beta t}}{U_{0m} e^{-\beta(t+T)}} = \ln(e^{\beta T}) = \beta T \quad (3)$$

З формули періоду (1) випливає, що в контурі можливі згасаючі коливання тільки в тому випадку, якщо $\omega > 0$, тобто $\frac{1}{LC} > \frac{R^2}{4L^2}$ (частота і період - дійсні величини) або $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$.

При досить великому опорі R або мінімальній індуктивності L , тобто $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ коливання в контурі взагалі не виникають, а відбувається так званий *аперіодичний розряд* конденсатора. Опір, при якому частота ω обертається в нуль, називається критичним:

$$R_{кр} = 2\sqrt{\frac{L}{C}} \quad (4)$$

Опис обладнання та підготовка до роботи

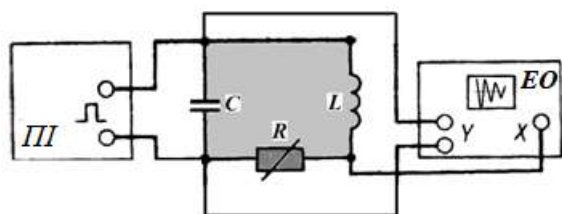


Рис. 3.

Для спостереження згасаючих коливань у коливальному контурі, тобто залежності $U(t)$, у роботі використовується електронний осцилограф (EO на схемі рис. 3). Напругу U з обкладок конденсатора коливального контура (показано сірим кольором) подають на вхід Y осцилографа.

З іншого боку коливальний контур підключений до генератора імпульсів напруги прямокутної форми (на схемі позначений III).

Протягом першої половини періоду генератора імпульсів напруга U на конденсаторі дорівнює ЕРС генератора імпульсів. Через половину періоду напруга генератора стає рівною нулю, і в коливальному контурі починаються вільні згасаючі коливання. Таким чином, згасаючі коливання відбуваються у проміжку між імпульсами.

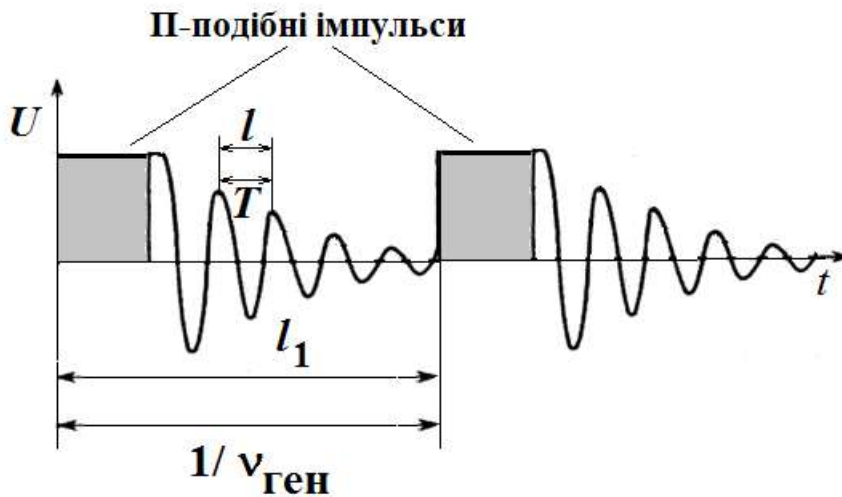


Рис.4.

цилографа йому відповідає відрізок l_1 поділів сітки. Це дозволяє визначити період T згасаючих коливань, якому на рис. 5 відповідає відрізок l . Складемо пропорцію:

$$\frac{1}{\nu_{ген}} (\text{секунд}) - l_1 (\text{поділок})$$

$$T (\text{секунд}) - l (\text{поділок})$$

З пропорції отримуємо період T загасаючих коливань

$$T = \frac{l}{\nu_{ген} l_1} (\text{с}) \quad (5)$$

Порядок виконання роботи

На стенді вже зібрано електричну схему (рис. 5), що складається з касети ФПЕ-10 з вмонтованими на ній елементами схеми, джерела живлення (ДЖ), перетворювача імпульсів (ПІ), магазину опорів (МО), осцилографа (ЕО) та звукового генератора (ГЗ).

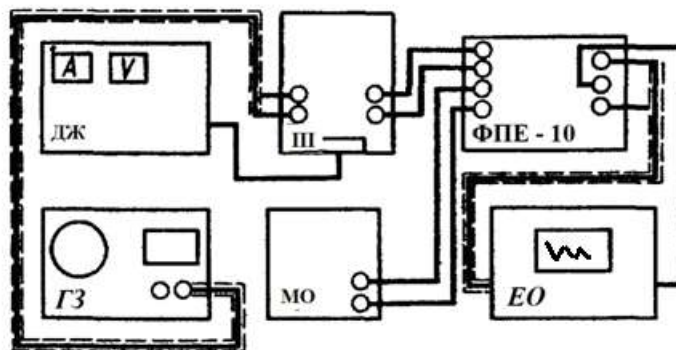


Рис. 5.

1. Увімкніть лабораторний стенд та прилади та встановіть наступні параметри вихідної напруги звукового генератора: частота 250 Гц, напруга 2–3 В.

2. На перетворювачі імпульсів натиснути клавішу «П» та праву клавішу «Скважність грубо».

3. Ручку магазину опорів поставити в положення "1" і натиснути клавішу "x10²". Тим самим встановлено значення $R_M = 100 \text{ Ом}$.

4. **Отримайте на екрані осцилографа РВ стійку картину 1 - 2 періодів загасаючих коливань (рис. 4).**

При необхідності змінюйте частоту проходження імпульсів плавною зміною частоти звукового генератора так, щоб згасання коливань було досить повним. Повертаючи ручку СКВАЖНІСТЬ перетворювача імпульсів, досягніть, щоб спад імпульсів не спотворював кривої першого періоду загасаючих коливань.

Після перевірки схеми викладачем приступіть до виконання завдань.

Вимірювання періоду T , логарифмічного декременту δ і параметрів R, L коливального контура

1. **Виміряйте** в поділах сітки осцилографа **період** загасаючих коливань l_1 та відстань між сусідніми імпульсами l (рис. 4). Розрахуйте період згасаючих коливань у секундах за формулою (5).

Запишіть дані у табл. 1.

Таблиця 1

R_M , Ом	T	U_1	U_2	U_3	δ	β	R_L	L	$R_{кр}$
100									
200									
300									

2. Виміряти в поділах сітки амплітуди коливань U_1, U_2, U_3 і, комбінуючи їх попарно, обчислити за формулою **логарифмічний декремент** згасання для кожної пари значень.

$$\delta_1 = \ln(U_1/U_2), \quad \delta_2 = \ln(U_2/U_3),$$

Знайдіть середнє значення $\delta = \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_2)$ та запишіть його в таблицю.

За формулою $\beta = \frac{\delta}{T}$ визначте коефіцієнт згасання β і також занесіть його в таблицю.

Знайдіть середнє значення $\delta = \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_2)$ та запишіть його в таблицю.

3. Повний омичний опір контура R складається з опору R_L котушки індуктивності та опору магазину R_M : $R = R_L + R_M$.

Побудуйте **графік** залежності логарифмічного декременту δ від опору магазину і продовжить графік до перетину з віссю абсцис (рис. 6).

Відрізок R_L дорівнює за модулем омичному опору котушки коливального контура.

Справді, оскільки

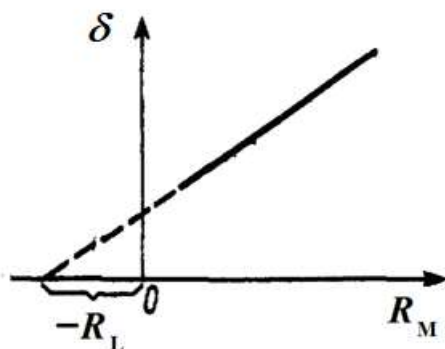


Рис. 6

$$\delta = \beta T = \frac{R}{2L} T,$$

то δ звертається в нуль при повному опорі контура, що дорівнює нулю:

$$R = R_M + R_L = 0,$$

звідки

$$R_M = -R_L,$$

що й випливає з графіка.

Використовуючи дані таблиці 1, розрахуйте індуктивність котушки L . Оскільки

$$\beta = \frac{R_M + R_L}{2L}, \quad \text{то} \quad L = \frac{R_M + R_L}{2\beta}$$

4. Критичний опір контура $R_{кр}$ знайдіть, поступово збільшуючи опір магазину опорів R_M . Ознакою виходу **на режим аперіодичного розряду** конденсатора є отримання на екрані осцилографа кривої $U(t)$, яка не містить коливань. **Запишіть значення** опору магазину $R_{кр}$, при якому починається аперіодичний розряд конденсатора.

5. Використовуючи значення ємності $C = 0,1$ мкФ конденсатора та індуктивності L з п. 3, обчисліть критичний опір $R_{кр}$ розрахунок контура за формулою:

$$R_{кр\text{ розрахунок}} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

6. Зіставте розраховане (п.5) і дослідне (п.4) значення критичного опору.

Контрольні питання

1. За яких умов вільні електромагнітні коливання в коливальному контурі будуть незгасаючими?
2. Які коливання називаються згасаючими? Запишіть диференціальне рівняння згасаючих коливань і його розв'язок.
3. Чи можна коливання, що згасають, розглядати як періодичні коливання?
4. Яким чином у цій роботі відбувається збудження коливань у коливальному контурі?
5. За якої умови коливальний процес у контурі переходить в аперіодичний?
6. **Задача.** Коливальний контур складається з котушки індуктивністю $L = 25$ мГн, конденсатора ємністю $C = 10$ мкФ і резистора. Визначити опір резистора, якщо відомо, що амплітуда сили струму в контурі зменшилася в e разів за $N_e = 16$ повних коливань.

Приклади розв'язання типових задач

Приклад 1. Коливальний контур має ємність $C = 1$ мкФ, індуктивність $L = 25$ мГн, активний опір $R = 1$ Ом. Через скільки коливань амплітуда заряду зменшиться в e разів?

Розв'язання : Кількість коливань за час, протягом якого амплітуда зменшиться в e разів, позначають N_e , вона дорівнює

$$N_e = \tau/T$$

де τ – час релаксації, а T – період коливань.

Час релаксації є величиною, оберненою до коефіцієнта згасання:

$$\tau = \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\left(\frac{R}{2L}\right)} = \frac{2L}{R}$$

Період згасаючих коливань

$$T = 2\pi / \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

Підставивши числа, знайдемо кількості коливань за час релаксації, за який амплітуда коливань має зменшитись у e разів:

$$N_e \approx 50.$$

Контрольні задачі

Варіант 1

Визначити логарифмічний декремент δ згасання математичного маятника довжиною $l = 50$ см, якщо за 8 хвилин він втрачає 99% своєї енергії.

Вказівка. Повна енергія тіла, що здійснює коливання, пропорційна квадрату амплітуди.

$$A = A_0 e^{-\beta t} \quad W \approx A_0^2 e^{-2\beta t} \quad W_2/W_1 = 0,01 \quad \text{Знайти } \beta, \text{ а потім } \delta = \beta T.$$

Варіант 2.

Логарифмічний декремент δ згасання маятника дорівнює 0,01. Визначити кількість N повних коливань маятника до зменшення його амплітуди в 3 рази.

Варіант 3.

Власна частота коливань контура, в якому збуджують загасаючі коливання, $\nu_0 = 8$ кГц, добротність $Q = 72$. Знайти закон, за яким зменшується енергія W контура з часом t . Яка частина початкової енергії W_0 збережеться в контурі за час $t = 1$ мс?

Тригонометричні функції

Функція	Кути				
	0°	30°	45°	60°	90°
	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
sin	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
cos	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0
tg	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	∞
ctg	∞	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	0

Похідні елементарних функцій

Функція	Похідна
x^a	ax^{a-1}
e^{ax}	ae^{ax}
a^x	$a^x \ln a$
$\ln x$	$1/x$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$1/\cos^2 x$

Лабораторна робота № 4. 12.

Дослідження згасаючих коливань за допомогою фазових кривих

Прилади та обладнання: 1) касета ФПЕ-10; 2) перетворювач імпульсів (касета ФПЕ-ПІ); 3) електронний осцилограф; 4) генератор електромагнітних коливань звукової частоти; 5) магазини опорів та ємностей; 6) джерело живлення.

Мета роботи: 1) вивчення згасаючих коливань у коливальному контурі при різних величинах його активного опору контура; 2) розрахунок логарифмічного декременту згасання.

Опис приладу та теоретичні відомості

Перш, ніж приступати до виконання роботи, ознайомтеся з теорією згасаючих коливань в електричному коливальному контурі та поняттям про фазові криві, які наведено в даному навчальному посібнику в розділі «Теоретичне введення»

Систему, яка складається з послідовно з'єднаних конденсатора ємністю C , котушки індуктивності L і провідника з омичним опором R , називають коливальним контуром (рис. 1).

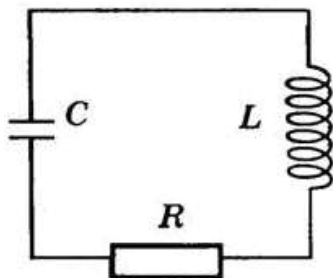


Рис.1.

Принципова електрична схема лабораторної установки зображена на рис. 2. Прямокутний імпульс напруги надходить від перетворювача імпульсів (ПІ) на конденсатор C коливального контура. Конденсатор заряджається практично миттєво, тому що опір кола заряджання малий. Потім конденсатор розряджається через опір R і котушку індуктивності L . Якщо $R < R_{\text{крит}}$, то у коливальному контурі виникають згасаючі коливання. При проходженні наступного імпульсу процеси заряджання та розряджання повторюються.

Зручно описувати процеси в коливальному контурі за допомогою так званої **фазової кривої**. В загальному випадку фазова крива –це залежність похідної деякої величини за часом від самої цієї величини.

Якщо на один із входів електронного осцилографа подати напругу на конденсаторі коливального контура (рис. 2), яка пропорційна заряду q , а на інший вхід подати напругу на активному опорі R , яка пропорційна похідній dq/dt , то ми отримуємо фазову криву $U = U(I)$.

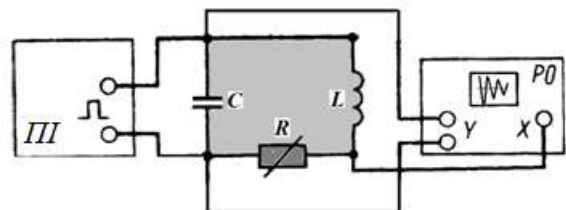


Рис. 2.

Коли аргумент I пробігає область визначення, точка на фазовій площині $(I, U(I))$ пробігає графік функції.

Розглянемо, який вигляд буде мати фазова крива, якщо омичний опір в електричному коливальному контурі відсутній ($R = 0$). У цьому випадку **вільних незгасаючих коливань** напруга на пластинах конденсатора змінюється за гармонічним законом, наприклад, за законом косинуса

$$U = U_0 \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad (1)$$

Тоді сила струму у контурі змінюється за законом синуса

$$I = -\frac{dq}{dt} = -\frac{d(CU)}{dt} = C \omega_0 U_0 \sin(\omega_0 t + \varphi). \quad (2)$$

Якщо з рівнянь (1) та (2) вилучити час t , та врахувати відому тригонометричну рівність $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, то отримаємо

$$\frac{I^2}{(CU_0 \omega_0)^2} + \frac{U^2}{U_0^2} = 1 \quad (3)$$

Це рівняння траєкторії зображувальної точки на фазовій площині - рівняння еліпса, півосі якого становлять $I_0 = CU_0 \omega_0$ та U_0 відповідно (рис.3, а).

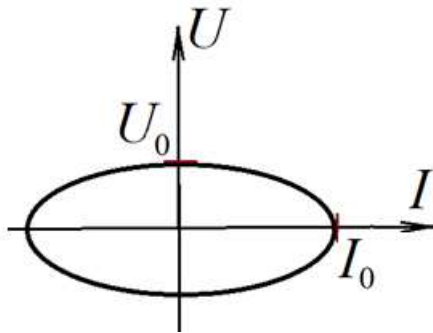


Рис. 3, а

Але якщо електричні коливання в контурі згасають (омічний опір R не дорівнює нулю), то амплітуди напруги та сили струму в контурі безперервно зменшуються. Тоді зображувальна точка описує замість еліпса спіраль, яка скручується і наближається до фокусу спіралі (рис. 3, б). Стрілками вказаний напрям руху зображувальної точки на фазовій площині.

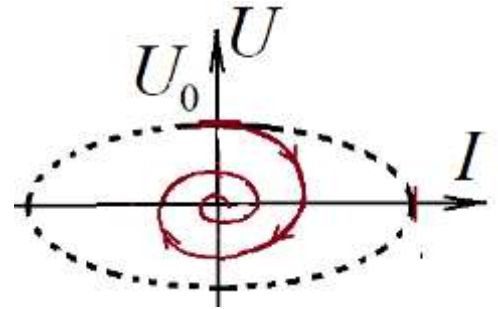


Рис. 3, б

В даній роботі отримують на досліді фазову криву і вимірюють параметр згасання коливань – логарифмічний декремент згасання δ .

Якщо ж активний опір в контурі перевищує так званий критичний опір, $R \geq R_{\text{крит}}$, то коливальний процес у контурі припиняється і фазова крива набуває вигляду рис 3, в.

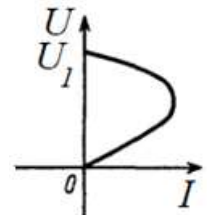


Рис. 3, в

Послідовність вимірювань

1. Зберіть схему установки відповідно рис. 4.
2. Установіть на магазині опорів $R_1 = 100$ Ом.
3. Натисніть на кнопки \square і "СКВАЖНІСТЬ – ГРУБО" на перетворювачі імпульсів.
4. Установіть такі значення параметрів вихідної напруги генератора PQ: частота 250 Гц, вихідна напруга не повинна бути більшою за 3 В.
5. Осцилограф підготуйте для спостереження сигналів, параметри яких наведені у п. 4.

Після перевірки схеми викладачем, починайте виконувати завдання роботи.

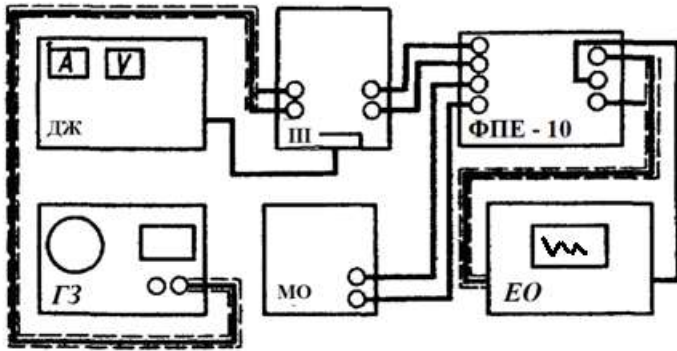


Рис. 4.

Завдання. Вимірювання логарифмічного декременту згасання за допомогою фазової кривої

1. На магазині опорів увімкніть опір $R_M = 100 \text{ Ом}$.
2. Для одержання фазової кривої (залежності напруги на конденсаторі від струму в контурі) необхідно вимкнути генератор розгортки осцилографа.

На вертикальний вхід осцилографа буде подаватися напруга на конденсаторі, а на горизонтальний - напруга з активного опору R . Вона збігається за фазою зі струмом, тому отримуємо **залежність напруги U на конденсаторі від сили струму I в контурі.**

Перемістіть ручками \leftrightarrow " " та \updownarrow " " фазову криву так, щоб фокус знаходився у центрі екрана.

3. Виміряйте за фазовою кривою **напругу і силу струму, які розділені періодом коливань**, тобто значення **двох послідовних перетинів** фазовою кривою осі напруг, оскільки це дає відношення U_1/U_2 для згасаючих напруг. Такі ж виміри зробіть для **двох послідовних перетинів** фазовою кривою осі струмів I_1/I_2 .

Вимірювання виконуйте у поділках сітки на екрані осцилографа для трьох витків фазової кривої. Результати занесіть у табл. 2.

Таблиця 2

R_M	U_1	U_2	U_3	δ	I_1	I_2	I_3	δ

4. Здійсніть вимірювання (п. 3) при інших значеннях опорів магазину ($R_M = 200 \text{ Ом}; 500 \text{ Ом}$). Для кожного значення R_M розрахуйте логарифмічний

декремент згасання, за формулою $\delta = \ln \frac{U_1}{U_2}$ для кожної пари значень амплі-

туд напруги U_1, U_2 та U_2, U_3 , та за формулою $\delta = \ln \frac{i_1}{i_2}$ для кожної пари значень

амплітуд сили струму i_1, i_2 та i_2, i_3

Результати запишіть у табл. 2.

5. Увімкніть $R_M \geq R_{\text{крит}}$. Накресліть фазову криву аперіодичного процесу.
6. Вимкніть прилади і лабораторний стенд.

Контрольні питання

1. Як виникають коливання в коливальному контурі?
2. Що таке логарифмічний декремент згасання?
3. Що являє собою критичний опір коливального контура $R_{\text{крит}}$?
4. Який вигляд має залежність логарифмічного декременту згасання від омичного опору $\delta = f(R)$,
5. Що таке фазова площа та фазова крива?
6. Який вигляд має фазова крива при незгасаючих коливаннях?
При загасаючих коливаннях?
При аперіодичному процесі?

Приклади розв'язання типових задач

Приклад . Тіло здійснює коливання з частотою $\nu = 50$ Гц. Логарифмічний декремент згасання δ дорівнює $0,01$. Визначити: 1) час, за який амплітуда коливань тіла зменшиться в 20 разів; 2) кількість повних коливань тіла, щоб відбулося таке зменшення амплітуди.

Розв'язання. Амплітуда загасаючих коливань

$$A = A_0 e^{-\beta t}, \quad (1)$$

де A_0 – амплітуда коливань у момент $t = 0$, β – коефіцієнт згасання.

Логарифмічний декремент згасання $\delta = \beta T$ ($T = 1/\nu$ – умовний період загасаючих коливань). Тоді $\beta = \delta \nu$ і вираз (1) можна записати у вигляді

$$A = A_0 e^{-\delta \nu t},$$

звідки шуканий час

$$t = \frac{1}{\delta \nu} \ln \left(\frac{A_0}{A} \right). \quad (2)$$

Кількість шуканих повних коливань

$$N = t/T = \nu t. \quad (3)$$

Обчисливши, одержимо 1) $t = 6$ с; 2) $N = 300$.

Варіант 1

Задача. Ємність конденсатора коливального контуру $C = 7$ мкФ, індуктивність його котушки $L = 0,23$ Гн, опір $R = 40$ Ом. Конденсатору надали заряд $q_0 = 0,56$ мКл і приєднали його до котушки. Визначити період коливань, логарифмічний декремент згасання і записати закон зміни напруги на конденсаторі в залежності від часу.

Варіант 2

Задача. У коливальному контурі за 1 с відбувається 100 коливань. Амплітуда коливань за цей час зменшується в $e = 2,72$ рази. Визначте логарифмічний декремент згасання

Множники та приставки

Множник	Приставка	Позначення	Множник	Приставка	Позначення
10^{12}	тера	Т	10^{-1}	деци	д
10^9	гіга	Г	10^{-2}	санти	с
10^6	мега	М	10^{-3}	мілі	м
10^3	кіло	К	10^{-6}	мікро	мк
10^2	гекто	г	10^{-9}	нано	н
10^1	дека	да	10^{-12}	піко	п
			10^{-15}	фемто	ф

Лабораторна робота № 4. 13. Дослідження процесів зарядки і розрядки конденсатора

Прилади та обладнання: 1) перетворювач імпульсів (касета ФПЕ-08); 2) два магазини опорів; магазин ємностей; 3) джерело живлення (ИП); 4) генератор електромагнітних коливань звукової частоти (PQ); 5) електронний осцилограф (РО).

Мета роботи: експериментальне дослідження процесів зарядки і розрядки конденсатора при подачі на нього імпульсу напруги.

Теоретичні відомості та опис установки

Конденсатор – це елемент електричного кола, який здібний накопичувати та віддавати електричний заряд. Конденсатор складається з двох металевих електродів, заряджених різнойменно (обкладок), розміщених на близькій відстані один від одного і розділених шаром діелектрика. Електроємність конденсаторів визначається за формулою

$$C = \frac{q}{U},$$

де q - заряд однієї обкладки конденсатора, U - напруга між обкладками.

Якщо конденсатор заряджається через деякий опір R від джерела з напругою U (рис. 1), то напруга U_C на його обкладках зростає з часом t від нуля до U за законом

$$U_C^{\text{заряд}} = U \left(1 - e^{-\left(\frac{t}{RC}\right)} \right) \quad (1)$$

Миттєве значення зарядного струму

$$i = \left(\frac{U}{R} \right) e^{-\left(\frac{t}{RC}\right)}. \quad (2)$$

Отже **сила струму зарядки конденсатора зменшується з часом за експоненціальним законом.**

Коли напруга U_C на конденсаторі зрівняється з напругою джерела U (рис. 1), процес зарядки припиняється і струм в колі перестає проходити.

На рис. 2, а показані графіки залежності напруги $U_C(t)$ і струму $i(t)$ **під час зарядки** конденсатора. В момент включення ($t = 0$) зарядний струм має максимальне значення $i_{\max} = U/R$. Потім він посту-

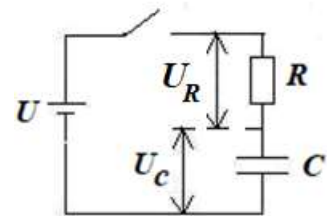


Рис. 1.

Процес зарядки конденсатора



Рис. 2. а.

пово зменшується до нуля *за законом експоненти* (2).

Добуток RC в показнику степені рівняння (2) має розмірність часу. Як видно з виразу (2) за час $\tau = RC$ зарядний струм зменшується в $e = 2.71828\dots$ разів. Цей час τ називається *постійною часу кола* або *часом релаксації*. Термін «релаксація» означає процес самовільного повернення системи із стану відхилення в стан рівноваги.

Напруга за цей час, як випливає з рівняння (1), зростає від нуля до значення $0,63U$.

Якщо тепер повністю заряджений конденсатор відімкнути від джерела напруги та замкнути його обкладки через опір R , то напруга на обкладках U_C буде зменшуватися з часом теж за експоненціальним законом:

$$U_C^{\text{розряд}} = Ue^{-\left(\frac{t}{RC}\right)} \quad (3)$$

Як випливає з виразу (3) *за час розрядки* $\tau = RC$ напруга на конденсаторі зменшується в $e = 2.718\dots$ разів

$$U_C^{\text{розряд}}(\tau) = Ue^{-\left(\frac{RC}{RC}\right)} = Ue^{-1} = \frac{U}{2,718} \quad (4)$$

Такий час τ називається *постійною часу* або *часом релаксації струму розрядки*.

На рис. 2, б показані графіки залежності напруги $U_C(t)$ і струму $i(t)$ під час розрядки конденсатора.



Рис. 2, б.

Графік *повного циклу «заряд-розряд»* конденсатора показаний на рис. 3.

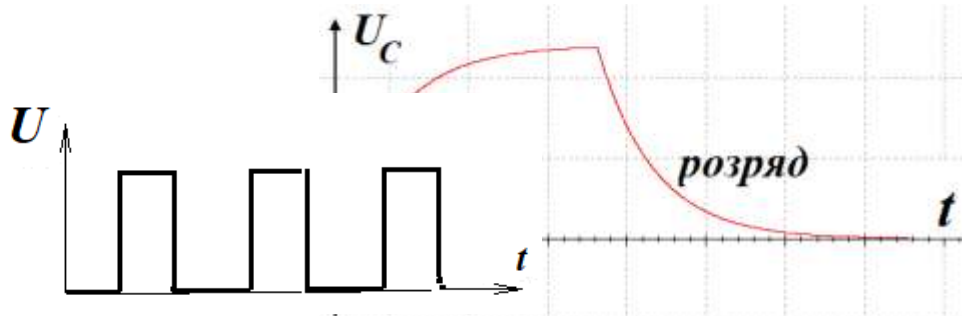


Рис. 4.

Рис. 3 .

Завдяки пульсуючій у вигляді П - подібних імпульсів напрузі (рис. 4) можна спостерігати і процес зарядки , і процес розрядки конденсатора.

Протягом деякого часу на конденсатор подається постійна напруга, яка відповідає високій горизонтальній ділянці П - імпульсу , і відбувається зарядка конденсатора.

У проміжках між імпульсами, коли на конденсатор не подається напруга, відбувається розряд конденсатора.

В обох випадках струм зменшується з часом і можна казати про *релаксацію*, або зменшення струму – як *релаксацію струму зарядки*, так і *релаксацію струму розрядки*.

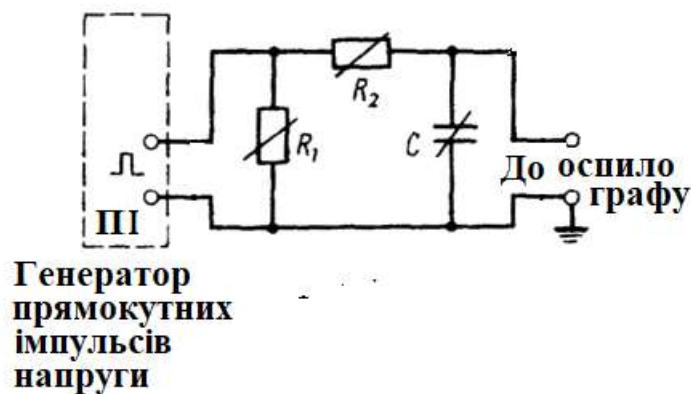


Рис. 5.

Схема лабораторної установки зображена на рис. 5. Вона включає джерело прямокутних імпульсів напруги - перетворювача синусоїдних імпульсів в прямокутні (П І на рис. 5), два змінних опори R_1 і R_2 та конденсатор C , процес зарядки якого досліджується.

Напруга від перетворювача ПІ у вигляді прямокутних імпульсів (рис. 6, суцільні лінії) надходить на опір R_1 .

Залежність напруги на обкладках конденсатору - так звані криві заряду та розряду - зображені на рис. 6 штриховими лініями.

У випадку 1 конденсатор встигає за час $(t_2 - t_1)$ зарядитися до максимальної напруги U_0 . У момент часу t_2 імпульс з ПІ закінчується і конденсатор через опір $R = R_1 + R_2$ (рис. 5) починає **розряджатися** до нуля вздовж кола RC за час $(t_3 - t_2)$.

На екрані осцилографа процеси зарядки та розрядки можна спостерігати візуально.

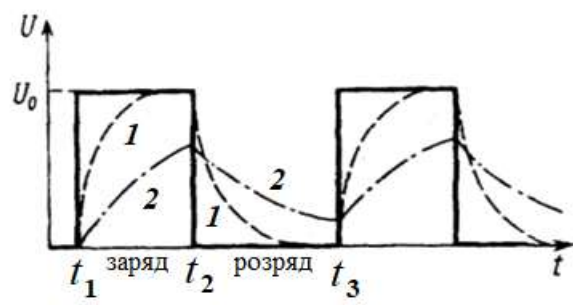


Рис. 6.

При збільшенні опорів R_1 і R_2 і ємності C (рис. 5) конденсатор не встигає повністю зарядитися і розрядитися за один період П-подібного циклу. Цей випадок зображений кривою 2 на рис. 6.

Майже повної релаксації у цьому випадку можна домогтися змінюванням частоти проходження імпульсів (змінюючи частоту генератора) або шпаруватістю імпульсів.

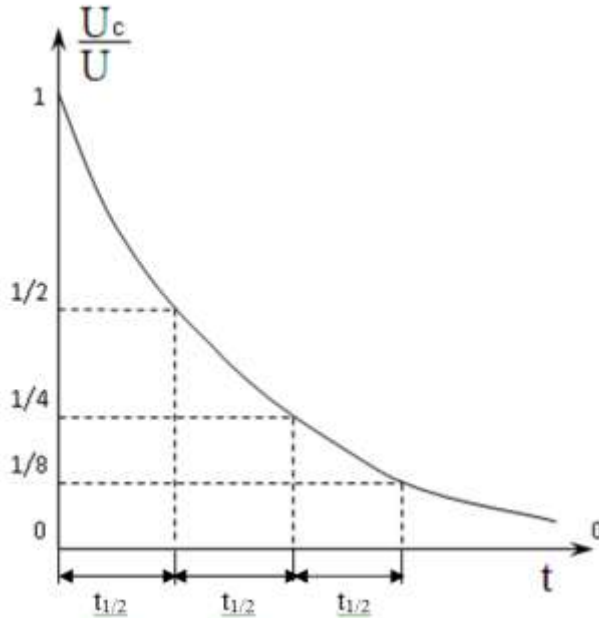


Рис. 7.

Оскільки експонента асимптотично наближується до осі абсцис, то точно встановити закінчення процесу розрядки конденсатора (так само, як і процесу зарядки) неможливо.

Тому доцільно на досліді вимірювати час $t_{1/2}$, за який *напруга* зарядженого конденсатора *спадає до половини* початкового значення (рис. 7).

Потім за цим часом обчислюють величину часу релаксації $\tau = RC$ струму розрядки.

Якщо “половинний час” $t_{1/2}$ підставити в закон (3):

$$\frac{U_0}{2} = U_0 e^{-\left(\frac{t_{1/2}}{RC}\right)}, \quad (5)$$

то після перетворення та логарифмування отримаємо

$$\ln 2 = \frac{t_{1/2}}{RC} = \frac{t_{1/2}}{\tau}. \quad (6)$$

Звідки шуканий *час релаксації струму розрядки*:

$$\tau = RC = t_{1/2} / (\ln 2) = t_{1/2} / 0,693 = 1,44 t_{1/2} \quad (7)$$

Лабораторна установка ФПЕ-08 (рис. 8) складається з двох магазинів опору (МО), за допомогою яких можна міняти опори R_1 і R_2 , магазину ємностей (МЄ), перетворювача імпульсів (ПІ), джерела живлення (ДЖ), електронного осцилографа (ЕО) та генератора (ГЗ).

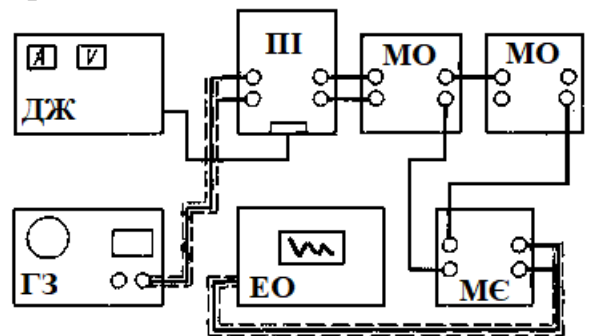


Рис.8.

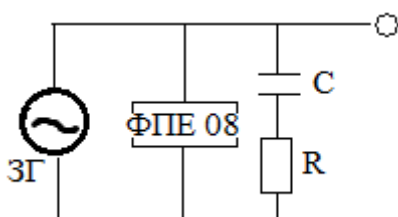


Рис. 9.

Функціональна схема лабораторної установки має вигляд рис.9.

З виходу ЗГ-генератора (пристрою, що виробляє електричні сигнали звукових частот) синусоїдальний імпульс перетворюється модулем ФПЕ-08 на прямокутний. Далі через магазин опору

рів МО (позначений на схемі рис. 9 як R) подається на магазин ємностей МЄ (позначений як C).

Конденсатор C заряджається. Час заряду конденсатора можна змінити опором R . У момент паузи відбувається розряд конденсатора ланцюга RC . Час розряду визначається параметрами цього ланцюга.

Порядок виконання завдання

1. Зберіть схему установки відповідно рис. 8.
2. Установіть на магазинах опорів і ємностей такі значення: $R_1 = 100\text{--}2000\text{ Ом}$ і $R_2 = 2\text{ кОм}$; $C = 2 \cdot 10^{-2}\text{ мкФ}$.
3. Установіть вихідну напругу звукового генератора не більше 3 В, частоту 2 кГц.
4. На касеті перетворювача імпульсів (ФПЕ-08) натисніть кнопку \square та ліву клавішу “СКВАЖНІСТЬ – ГРУБО“. Ручку “СКВАЖНІСТЬ“ установіть у крайнє праве положення.
5. Увімкніть генератор розгортки електронного осцилографа і встановіть час розгортки променя таким, щоб на екрані осцилографа можна було спостерігати 1 – 2 періоди змінної напруги частотою 2 кГц. Підсилення по осі Y осцилографа повинно бути достатнім для спостереження за напругою в 3 В.
6. Після перевірки схеми викладачем, увімкніть стенд і прилади.

Завдання 1. Визначення половинного часу $t_{1/2}$ і часу релаксації τ за графіками зарядки і розрядки конденсатора

Побудова графіків зарядки і розрядки конденсатора

1. Отримайте на екрані осцилографа стійку картину **зарядки** і розрядки конденсатора. У разі необхідності змініть частоту проходження імпульсів (змінюючи частоту звукового генератора), спостерігаючи за тим, щоб процеси зарядки та розрядки конденсатора були достатньо повними (рис. 6).
2. Поєднайте початок кривої зарядки з початком сітки на екрані осцилографа і запишіть координати (в поділках сітки) 5 – 6 точок на кривій зарядки. Використовуючи значення коефіцієнта підсилення по осі Y і коефіцієнта розгортки переведіть координату y кожної точки у вольти, а координату x – у секунди. Результати занесіть у табл. 1.

Таблиця 1

	1	2	3	4	5	6	...
x , см							
y , см							
t , с							
U , В							

3. Аналогічні вимірювання проведіть і з кривою **розрядки** конденсатора. Результати занесіть у табл. 2.

4. Побудуйте на міліметровому папері криві **зарядки і розрядки** конденсатора $U_c = U_c(t)$. За цими кривими **визначте** час, за який напруга зміниться вдвічі (**половинний час** $t_{1/2}$).
5. Визначте час релаксації $\tau = 1,44 t_{1/2}$
6. Розрахуйте теоретичний час релаксації $\tau = RC$, використавши значення параметрів, встановлених на МО і МЄ.
7. Порівняйте знайдений на досліді з теоретичним часи релаксації.

Таблиця 2

	1	2	3	4	5	6	...
x , см							
y , см							
t , с							
U , В							

8. Якщо дозволяє учбовий час, зробіть аналогічні виміри і для інших значень R_1 , R_2 , C . Результати занесіть у таблиці, подібні табл. 1 та 2. Розрахуйте постійну часу τ для цих випадків.

Контрольні питання

1. Доведіть, що добуток RC має розмірність часу.
2. Як залежить час зарядки і розрядки конденсатора від величин R і C ?
3. Як змінюється напруга на обкладках конденсатора від часу в процесах його зарядки і розрядки?

Деякі відомості про вектори

Векторами називаються величини, які характеризуються числовим значенням (модулем) і напрямом, і, крім того, додаються за правилом паралелограма. Вектори зображуються направленим відрізком, довжина якого у деякому масштабі дорівнює *абсолютній величині* або *модулю* вектора, а стрілка показує його напрям. Додавання векторів

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b} \text{ (рис. 1).}$$

Правило паралелограма: сума векторів дорівнює діагоналі паралелограма, сторони якого утворені векторами, що додаються.

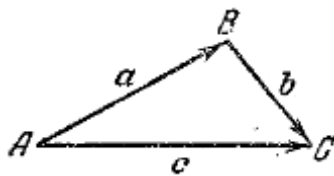
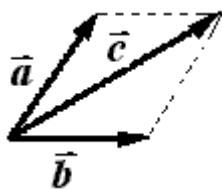


Рис. 1

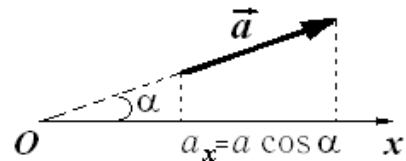


Рис. 2.

Проекція a_x вектора \mathbf{a} на вісь Ox (рис. 2) дорівнює добутку довжини цього вектора на косинус кута між ним і додатним напрямом осі.

Розкладання вектора за базисними векторами (ортами)

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k},$$

де a_x , a_y , a_z – проекції вектора на відповідні напрямки.

Модуль вектора

$$a = |\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Лабораторна робота № 4. 14.

Вивчення вимушених електричних коливань у коливальному контурі

Прилади: лабораторний стенд ФПЕ-11.

Мета роботи: - дослідження залежності сили струму в коливальному контурі від частоти змінної напруги, прикладеної до контура;

- вимірювання резонансної частоти контура;
- дослідження резонансних кривих та визначення добротності коливального контура за різних значень електроємності та активного опору.

Теоретичний вступ

Якщо в коливальному контурі збудити електричні коливання, то вони з часом згасатимуть через втрати енергії на нагрівання провідників (т.зв. «джоулеве» тепло).

Щоб зробити коливання незатухаючими, необхідно ззовні періодично підводити в контур енергію від будь-якого джерела енергії, наприклад, розірвавши контур, подати на контакти, що утворилися, змінну напругу, яка змінюється за гармонічним законом (див. рис. 1):

$$U = U_m \cos \omega t, \quad (1)$$

де U_m – амплітуда напруги, ω – циклічна (кругова) частота змінної напруги, підведеної до контура.

Як показує теорія і дослід, через деякий час в контурі встановляться коливання, що не загасають, з частотою ω напруги, підведеної до контура.

Ці електромагнітні коливання називаються **вимушеними електромагнітними коливаннями**.

При вимушених коливаннях, що встановилися, сила струму в контурі стає рівною

$$I = I_m \cos(\omega t - \varphi), \quad (2)$$

де I_m - амплітуда сили струму:

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}, \quad (3)$$

φ - відставання фази струму від прикладеної напруги.

Як бачимо, амплітуда сили струму I_m пропорційна амплітуді прикладеної напруги U_m і залежить від частоти ω .

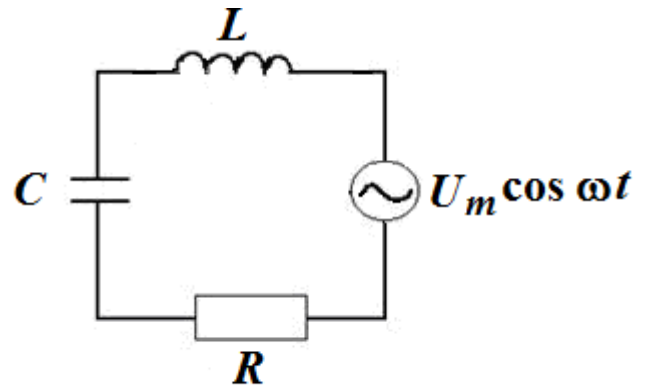


Рис. 1.

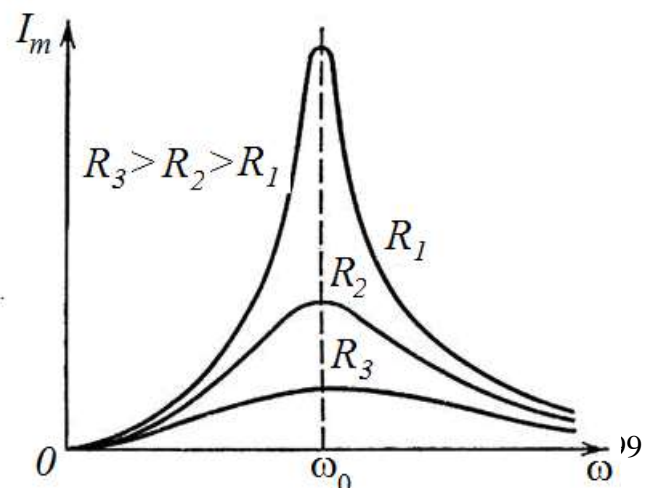


Рис. 2.

Про власні коливання з частотою ω_0 контур «забуває». Однак, наявність у контура власної частоти ω_0 позначиться на величині амплітуди I_m коливань, що встановилися.

Залежність амплітуди вимушених коливань від частоти змушуючої напруги призводить до того, що за деякої частоти амплітуда сили струму досягає максимального значення. Це **різке збільшення амплітуди вимушених коливань сили струму в контурі при наближенні частоти зовнішнього періодичного впливу до власної частоти** називається **резонансом**, а відповідна частота - **резонансною частотою**.

Максимум амплітуди сили струму (3) досягається при мінімумі підкореного виразу. Продиференціювавши підкорений вираз за ω , прирівнявши нулю і вирішивши отримане рівняння відносно ω , отримаємо для резонансної циклічної частоти

$$\omega_{рез} = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0. \quad (4)$$

Таким чином, резонансна частота $\omega_{рез}$ для сили струму збігається з власною частотою ω_0 контура.

Напруга U_R на активному опорі R у цьому випадку дорівнює зовнішній напрузі, прикладеній до кола ($U_R = U$). При цьому сила струму та зовнішня напруга збігаються за фазою.

Крива залежності амплітуди сили струму I_m у контурі від частоти зовнішньої напруги називається **резонансною кривою** коливального контура.

Резонансні криві для сили струму показані на рис. 2.

Добротність контура Q показує, у скільки разів напруга на конденсаторі (або котушці) більша за напругу, прикладеній до кола.

Ця властивість широко використовується у радіотехніці. Нехай напруга, прикладена до контура, містить коливання різних частот $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ и т.д.

Настроївши контур на одну з частот (4) (тобто підібравши відповідні параметри C і L), можна отримати на конденсаторі напругу, що в Q разів перевищує значення даної складової. У той час, як напруга, яка створюється на конденсаторі іншими складовими, буде слабкою. Такий процес здійснюється при настройці радіоприймача на потрібну довжину хвилі. Тому явище резонансу використовується в техніці для посилення коливання напруги якоїсь певної частоти, або виділення з багатьох сигналів одного коливання певної частоти.

Добротність контура визначає гостроту резонансних кривих. На рис. 3 показано одну з резонансних кривих для сили струму в контурі.

Під **шириною резонансної кривої** розуміють різницю частот

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1, \quad (5)$$

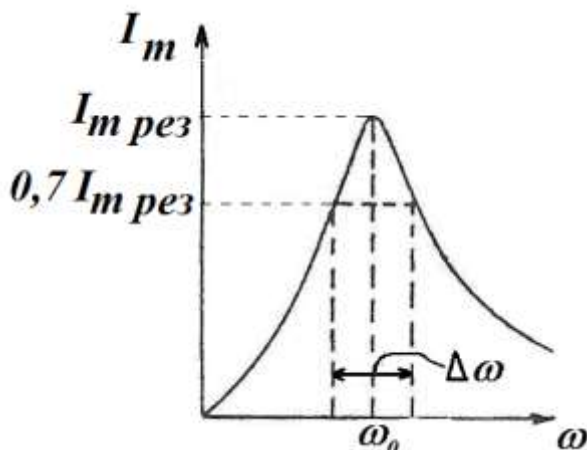


Рис.3.

для яких енергія коливань у два рази менша за енергію для частоти, за якої амплітуда досягає максимуму. Для цього ширина кривої береться на висоті 0,7 від резонансного значення сили струму.

Окремо показується (див., наприклад, підручники [1,2]), що для малих загасань ($\beta^2 \ll \omega_0^2$) ширина резонансної кривої пов'язана з добротністю коливального контура Q співвідношенням

$$\omega_0 / \Delta\omega = Q \quad (6)$$

а також

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (7)$$

Порядок виконання роботи

У навчальній лабораторії на стенді вже зібрано електричну схему, показану на рис. 4. Тут: PQ - звуковий генератор; РО – електронний осцилограф; ФПЕ-11 – модуль; МО – магазин опорів; МЄ – магазин ємностей.

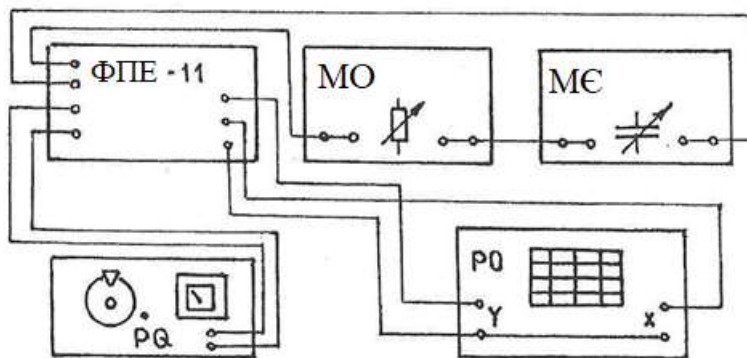


Рис.4.

Принципова електрична схема досліду наведена на рис. 5.

Коливальний контур (виділений на рис. 5 сірим кольором) складається з котушки L , магазину ємностей C , змінного опору R і опору R_1 . Напряга на опорі R_1 , яка пропорційна струму I в контурі, подається на вхід Y електронного осцилографа, а на вхід X – напряга зі звукового генератора.

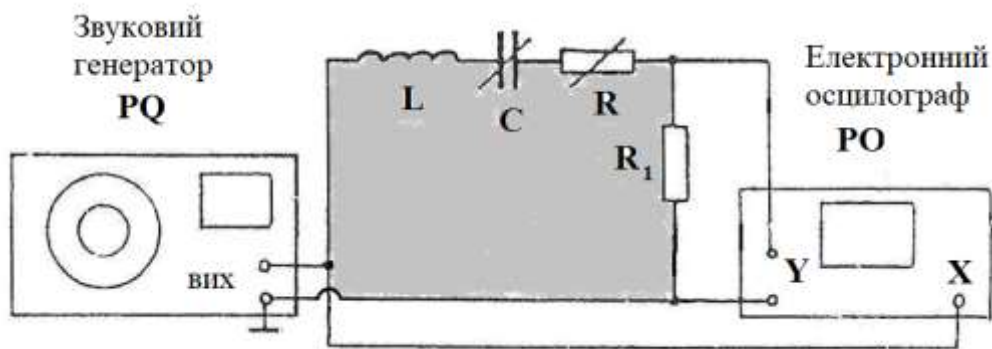


Рис. 5.

1. Підготуйте прилади для роботи. Для цього встановіть перемикачами магазинів опорів і ємностей $R = 0$ і $C = 3 \cdot 10^{-2}$ мкФ.

2. Увімкніть розгортку електронного осцилографа із запуском від підсилювача Y, та частоту розгортки, зручну для спостереження сигналів напругою 1 В та частотою 2 – 10 кГц.

3. Встановіть наступні параметри вихідної напруги звукового генератора: напруга до 3 В, частота 2 кГц.

4. Увімкніть прилади: генератор, вольтметр та осцилограф.

5. Напругу звукового генератора встановіть рівною 1 В. Це значення при всіх вимірах підтримуйте незмінним.

Отримайте на екрані осцилографа стійке зображення синусоїди. Виміряйте амплітуду U_m синусоїдальної напруги в поділах сітки осцилографа і переведіть її у вольти.

Нагадаємо, що амплітуда дорівнює абсолютному значенню найбільшого відхилення (рис.6).

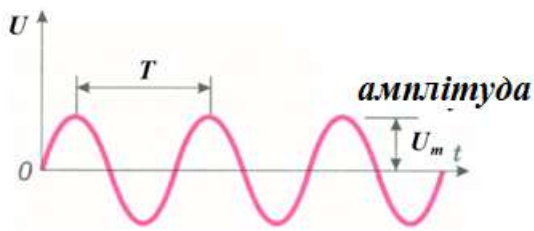


Рис. 6.

Для переведення амплітуди у вольти необхідно висоту сигналу в сантиметрах помножити на коефіцієнт підсилення ($\frac{V}{cm}$), вказаний на панелі осцилографа та на множник (0,5, 1, 2) на панелі блоку Y на осцилографі.

Результат виміру запишіть у таблицю 1.

Таблиця 1

ν , Гц										
U_m , В										
I_m , мА										

Плавно змінюючи частоту звукового генератора, спостерігайте на осцилографі залежність напруги U_m від частоти змушуючих коливань і **приблизно визначте значення резонансної частоти $\nu_{рез}$** . Поблизу резонансу частоту змінюйте повільно, щоб не пройти максимального значення.

7. Використовуючи встановлену ємність $C = 3 \cdot 10^{-2}$ мкФ і приблизне значення індуктивності $L = 400$ мГн, **розрахуйте резонансну лінійну частоту** контура за формулою

$$\nu_{рез} = \frac{\omega_{рез}}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

Порівняйте розраховане значення зі знайденим на досліді у п.6.

8. Проведіть вимірювання амплітуди U_m за інших частот у діапазоні 2 – 16 кГц. Частоту змінювати з інтервалом 0,5 – 1 кГц поблизу резонансу (у межах $\nu = \pm 1$ кГц) з інтервалом 0,2 кГц. Результати вимірів занесіть у табл. 1.

9. Розрахуйте амплітуду I_m сили струму в коливальному контурі за формулою $I_m = \frac{U_m}{R_1}$, де $R_1 = 75$ Ом. Розрахунок проведіть для кожного значення частоти, результати обчислень запишіть в табл. 1 у міліамперах.

10. Встановіть опір магазину $R = 100 \text{ Ом}$ і знову проведіть вимірювання (п. 8). Результати вимірювань запишіть до таблиці 2.

Таблиця 2
($R = 500 \text{ Ом}$)

$\nu, \text{Гц}$										
$U_m, \text{В}$										
$I_m, \text{мА}$										

11. Встановіть опір магазину $R = 300 \text{ Ом}$ та здійсніть вимірювання (п. 8). Результати вимірів запишіть у таблицю 3.

Т а б л и ц я 3
($R = 3\,000 \text{ Ом}$)

$\nu, \text{Гц}$										
$U_m, \text{В}$										
$I_m, \text{мА}$										

12. За даними таблиць 1, 2 і 3 побудуйте на одному рисунку три графіки залежностей $I_m(\nu)$.

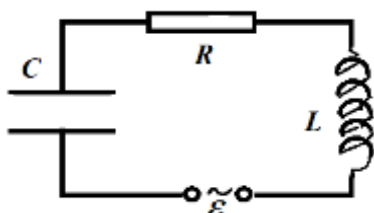
13. За графіком для $R = 0$ знайдіть резонансну частоту ν_0 і ширину $\Delta\nu$ резонансної кривої на висоті $0,7 I_{m \text{ рез}}$. Розрахуйте добротність коливального контуру за формулою

$$Q = \omega_0 / \Delta\omega = \nu_0 / \Delta\nu.$$

Контрольні питання

1. Розгляньте коливальний контур, що містить джерело змінної напруги. Якою буде частота коливань, що встановилися?
2. Що таке резонансна частота коливального контура? Чим визначається резонансна частота сили струму в коливальному контурі?
3. Яку залежність від частоти прикладеної напруги відображає резонансна крива для сили струму: сили струму від частоти або амплітуди сили струму від частоти?
4. До якого значення прагнутиме амплітуда сили струму, якщо частоту спрямувати до нуля? А якщо до нескінченості?
5. Яку роль відіграє явище електричного резонансу при настройці радіоприймача на потрібну радіостанцію?
6. Яким чином за резонансною кривою можна визначити добротність коливальної системи? Запишіть розрахункову формулу.
7. Як зміниться резонансна крива електричного коливального контура, якщо збільшити його омичний опір R , а інші параметри залишити незмінними?

Приклади розв'язання типових задач



Для підтримання в контурі вимушених електричних коливань необхідно включити в нього джерело струму з періодичною ЕРС

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \sin \Omega t.$$

Сила струму в колі при цьому

$$I = I_0 \sin(\Omega t + \varphi),$$

де амплітуда сили струму в контурі

$$I_0 = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\Omega C} - \Omega L\right)^2}}.$$

Величина

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\Omega C} - \Omega L\right)^2}$$

називається повним опором електричного кола коливального контура.

Максимальне значення струму (**резонанс**) сягається при значенні

$$\Omega = \Omega_{рез} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Контрольні задачі

Варіант 1

Задача.

Індуктивність L коливального контура дорівнює 0,5 мГн. Якою має бути електроємність C контура, щоб він резонував на довжину хвилі $\lambda = 300$ м?

Варіант 2.

Задача.

На яку довжину хвилі λ буде резонувати контур, який складається з котушки індуктивністю $L = 4$ мкГн і конденсатора електроємністю $C = 1,11$ нФ?

ГРЕЦЬКИЙ АЛФАВІТ

Позначення	Назва букви	Позначення	Назва букви
Α, α	альфа	Ν, ν	ню
Β, β	бета	Ξ, ξ	ксі
Γ, γ	гамма	Ο, ο	омікрон
Δ, δ	дельта	Π, π	пі
Ε, ε	епсилон	Ρ, ρ	ро
Ζ, ζ	дзета	Σ, σ	сигма
Η, η	ета	Τ, τ	тау
Θ, θ	тхета	Υ, υ	іпсилон
Ι, ι	йота	Φ, φ	фі
Κ, κ	каппа	Χ, χ	хі
Λ, λ	лямбда	Ψ, ψ	псі
Μ, μ	мю	Ω, ω	омега

Лабораторна робота № 4. 15.

Дослідження обміну енергією коливань у зв'язаних контурах

Прилади та обладнання: 1) касета ФПЕ-13; 2) магазин ємностей; 3) електронний осцилограф; 4) генератор електромагнітних коливань звукової частоти; 5) джерело живлення.

Мета роботи – визначення: 1) частоти обміну енергією між контурами залежно від ємності конденсатора зв'язку; 2) опору зв'язаних контурів за згасанням биття. Опис приладу та теоретичні відомості

Поняття про зв'язані осцилятори

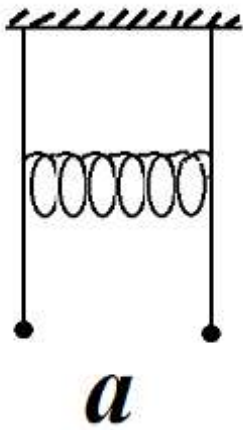


Рис.1. а

Нехай між маятниками, або електричними контурами існують зв'язки, що забезпечують можливість обміну енергією. Такі системи називаються зв'язаними.

Найпростішим прикладом такої системи може бути два з'єднаних пружиною маятники (рис. 1, а). Якщо збудити коливання одного з маятників, інший також почне розгойдуватися. При цьому буде спостерігатися складна картина зміни амплітуди коливань маятників та почергового переходу енергії від одного маятника до другого.

Зв'язок між маятниками здійснюється за допомогою пружини. Її деформація в процесі коливань призводить до взаємного впливу один на одного

На рис 2 два зв'язаних осцилятора зовсім іншої фізичної природи: два коливальних LC контури, причому взаємний вплив осциляторів один на одного здійснюється за рахунок взаємної індуктивності M котушок L_1 і L_2 .

У наведених прикладах розглядаються системи з двома ступенями вільності. Для опису стану кожної з систем необхідно мати дві змінних, наприклад кути $\varphi_1(t)$ і $\varphi_2(t)$ відхилення маятників, або заряди конденсаторів $q_1(t)$ $q_2(t)$.

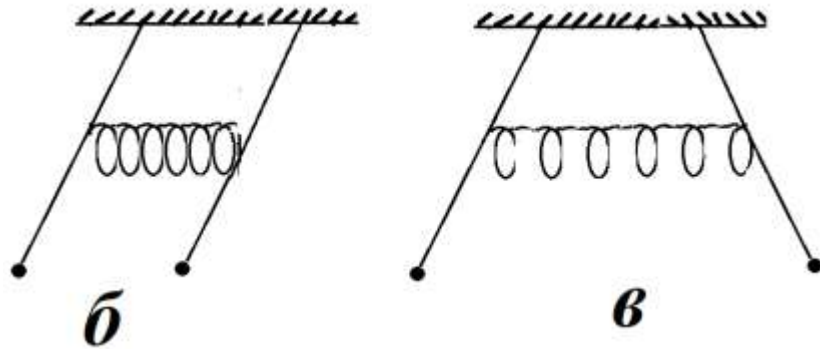


Рис.1.

Коливання зв'язаної системи можна представити у вигляді суми гармонічних коливань з частотами, які називаються **нормальними частотами або нормальними модами** системи. Кількість нормальних частот дорівнює числу ступенів вільності системи, що розглядається.

Якщо система здійснює коливання на одній з нормальних частот, то всі складові системи коливаються з тією ж частотою і переходу енергії між ними не відбувається.

Наприклад, у випадку двох зв'язаних пружиною маятників нормальними є :

а) коливання, при яких обидва маятники відхиляються на однаковий кут в один і той же бік (рис 1 б). При цьому пружина в процесі коливань залишається недеформованою і не оказує ніякого впливу на коливання маятників.

б) коливання, при яких обидва маятники відхиляються на однаковий кут у протилежні боки (рис. 1, в)

В обох випадках зв'язані маятники будуть коливатися з однаковою частотою і перехід енергії між ними відсутній.

Окремо доказується, що в загальному випадку коливання системи являє собою суперпозицію нормальних типів коливань (мод).

Опис приладу та теоретичні відомості

Метою цієї лабораторної роботи є практичне дослідження обміну енергією у зв'язаних контурах. Такими є два однакових коливальних контури, які мають котушки індуктивності L , конденсатори ємністю C і резистори R з невеликим опором. Контури, з'єднані між собою ємнісим зв'язком (конденсатор C_{12}).

Принципова схема установки зображена на рис.3.

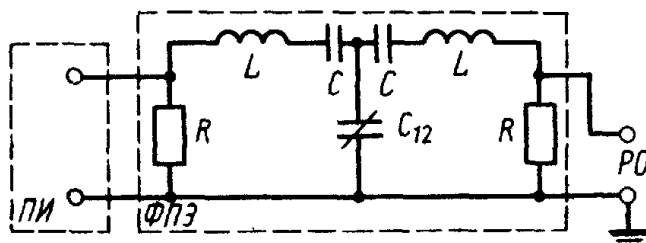


Рис.3.

Імпульс від перетворювача імпульсів (ПІ) збуджує коливання у першому контурі. Через ємність зв'язку $C_{12} \gg C$ (слабкий зв'язок) відбувається передача енергії коливань в контур 2 і назад в контур 1. Напряга з резистора R другого контура, пропорційна силі струму I_2 , подається на вхід Y електронного осцилографа, на екрані якого можна спостерігати за згасанням биття (рис. 4,б).

Наступний імпульс ПІ збуджує нові коливання, і всі процеси повторюються. При належному підборі частоти проходження імпульсів спостерігається майже повне згасання коливань. Швидкість згасання залежить від опором конту-

ра. Натуральний логарифм двох сусідніх амплітуд биття, розділених деяким проміжком часу $t_{обм}$:

$$\ln \frac{A_1}{A_2} = \ln \frac{\xi_0 e^{-\beta t}}{\xi_0 e^{-\beta(t_1+t_{обм})}} = \beta t_{обм}, \quad (1)$$

де $\beta = \frac{R}{2L}$, а $t_{обм} = \frac{4\pi LC_{12}}{T}$.

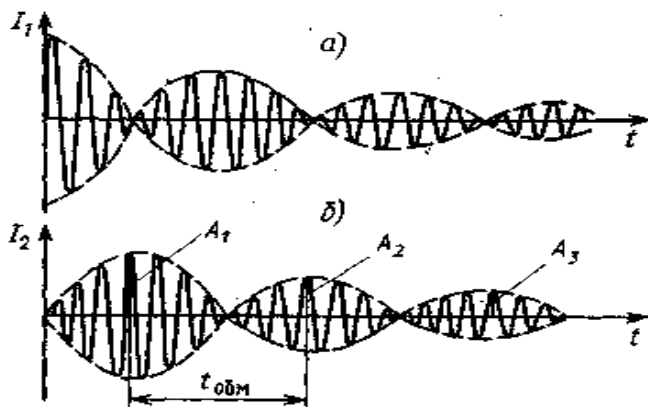


Рис. 4

Звідки
$$\ln \frac{A_1}{A_2} = \frac{2\pi^2 RC_{12}}{T}.$$

(2)

При малому згасанні та слабкому

зв'язку $\frac{t_{обм}}{T} = \frac{C_{12}}{C}$;

$$\ln \frac{A_1}{A_2} = \frac{2\pi^2 RC_{12}}{t_{обм}}$$

(3)

Послідовність вимірювань

З'єднати спеціальними кабелями прилади установки згідно з маркуванням на касеті ФПЕ-13 (рис. 5).

Підготовка приладів до роботи.

1. Установіть такі параметри вихідної напруги звукового генератора: частота 200 Гц, вихідна напруга не повинна перебільшувати 3 В.

2. На осцилографі встановіть час розгортки, необхідний для спостереження за першим періодом змінної напруги звукового генератора.

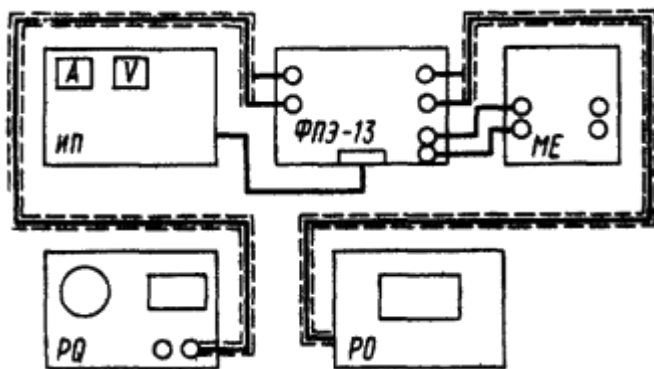


Рис. 5

Завдання 1. Вивчення биття у зв'язаних контурах з різними ємностями зв'язку

1. Установіть ємність магазину ємностей $4 \cdot 10^{-2}$ мкФ.

2. На екрані осцилографа отримайте стійку картину биття в контурі 2 (рис. 4, б). При необхідності можна змінювати частоту розгортки та частоту проходження імпульсів, змінюючи частоту сигналу звукового генератора.

3. Підрахуйте число N повних коливань, які вміщуються між двома сусідніми мінімумами. Дані занесіть у таблицю.

C_{12}							
N							
C, мкФ							

4. Проведіть вимірювання (пп. 2 – 3) з іншими ємностями в межах від $4 \cdot 10^{-2}$ до 0,4 мкФ. Результати занесіть у таблицю.

5. За формулою $C = \frac{T \cdot C_{12}}{t_{обм}} = \frac{C_{12}}{N}$ обчисліть ємність коливального контура для всіх вимірів. Знайдіть середнє значення і порівняйте його з істинним значенням, яке зазначене на касеті.

Завдання 2. Вимірювання опору зв'язаних контурів із згасанням биття

1. Установіть ємність магазину ємностей $C = 4 \cdot 10^{-2}$ мкФ.
2. Спостерігайте на екрані осцилографа стійку картину биття (див. рис. 4, б).
3. Вимірюйте у поділках сітки на екрані осцилографа амплітуди трьох сусідніх максимумів биття A_1, A_2, A_3 .
4. У поділках сітки осцилографа вимірюйте час $t_{обм}$ та, користуючись коефіцієнтом розгортки, перерахуйте його в секунди.
5. Обчисліть загальний опір коливального контура за формулою (3) для кожної пари значень A . При обчисленні використовуйте значення ємності C , отримані в завданні 1. Знайдіть середнє значення опору R .

Контрольні питання

1. Які коливальні контури називаються зв'язаними?
2. Які типи зв'язку існують?
3. Що називається нормальними коливаннями.

Позначення і назви деяких одиниць у СІ

Величина	Одиниця і її назва	Величина	Одиниця і її назва
Довжина	м - метр	Температура	К - кельвін
Час	с - секунда	Теплоємність питома	Дж/кг·К
Швидкість	м/с	Кількість електрики	Кл - кулон
Прискорення	м/с ²	Потенціал	В - вольт
Частота коливань	Гц - герц	Напруженість електр. поля	В/м
Колова частота	с ⁻¹	Ємність	Ф - фарад
Кутова швидкість	рад/с	Сила струму	А - ампер
Маса	кг - кілограм а. о. м. - атомна одиниця маси	Опір	Ом
Густина	кг/м ³	Питомий опір	Ом·м
Сила	Н - ньютон	Магнітна індукція	Тл - тесла
Тиск, напруження	Па - паскаль	Магнітний потік	Вб - вебер
Імпульс	кг·м/с	Індуктивність	Гн - генрі
Момент сили	Н·м	Сила світла	кд - кандела
Енергія,	Дж - джоуль	Світловий	лм - люмен

робота	еВ – електрон-вольт	потік	
Потужність	Вт – ват	Освітленість	лк – люкс

Лабораторна робота № 4. 16.

Вивчення електричних властивостей сегнетоелектриків за допомогою осцилографа

Прилади та обладнання: 1) касета ФПЕ-02; 2) джерело живлення; 3) електронний осцилограф.

Мета роботи: визначення: 1) залежності електричного зміщення D та діелектричної проникності сегнетоелектрика ϵ від напруженості електричного поля E ; 2) коерцитивної сили E_c .

Теоретичні відомості

Діелектрики – речовини, які погано проводять електричний струм – мають здатність поляризуватися. Цей процес відбувається при внесенні діелектрика у зовнішнє електричне поле. *Поляризація* полягає у зміщенні позитивних і негативних зарядів всередині атомів і молекул у протилежних напрямках або орієнтації молекул-диполів у напрямі поля.

Це призводить до того, що напруженість поля в діелектрику становиться меншою, ніж у вакуумі. Діелектрична проникність ϵ речовини визначається відношенням напруженості E_0 електричного поля в вакуумі до напруженості E його в однорідному діелектрику, який поміщений в це поле, за умови, що поверхня діелектрика перпендикулярна до ліній напруженості :

$$\epsilon = E_0/E.$$

Для описання електричного поля в діелектриках крім вектора напруженості електричного поля E використовують векторну величину D , що характеризує електричне поле системи зарядів і є незалежною від відносної діелектричної проникності середовища.

Для ізотропного однорідного середовища у відсутності сегнетоелектриків $D = \epsilon_0 \epsilon E$,

Фізичний зміст вектора D такий. Під дією зовнішнього поля вільних електричних зарядів E_0 на поверхнях, обмежуючих діелектрик, з'являються так звані зв'язані або *поляризаційні* заряди. Вони створюють власне поле E_p . В діелектрику обидва поля векторно додаються. Результуюче макроскопічне поле E , природно, залежить від електричних властивостей середовища.

На відміну від цього, поле, яке створюється одними тільки вільними зарядами (тобто в вакуумі), але при такому їх розподілі в просторі, який існує в присутності діелектрика, описується так званим *вектором електричного зміщення* (колишня назва: *індукція електричного поля*) D .

Кількісною мірою поляризації є поляризованість (інтенсивність поляризації, вектор поляризації) P - дипольний момент одиниці об'єму. Зв'язок між величинами E і D має вигляд

$$D = \epsilon_0 E + P. \quad (1)$$

Сегнетоелектрики – це група кристалічних діелектриків, в яких у відсутності зовнішнього поля виникає спонтанна (самочинна) поляризація. Свою назву сегнетоелектрики дістали по першій виявленій кристалічній речовині з та-

кими властивостями - сегнетовій солі. До сегнетоелектриків відноситься також титанат барію BaTiO_3 .

Сегнетоелектрики мають своєрідні особливості поляризації.

1. Сегнетоелектрики мають доменну структуру. Домени - це мікрообласті повної спонтанної поляризації.

2. Дуже велика ступінь поляризації і як наслідок діелектрична проникність ϵ сегнетоелектриків надзвичайно велика (порядку декількох тисяч), тоді як у більшості звичайних діелектриків ϵ складає усього кілька одиниць (за виключенням води, $\epsilon_{\text{води}} = 81$). Діелектрична проникність різко зростає у певному інтервалі температур і є функцією напруженості E поля в речовині:

$$\epsilon = \epsilon(E).$$

3. У зв'язку з цим залежність поляризованості від напруженості електричного поля $P(E)$ є нелінійною. При достатньо великому значенні E відбувається *насичення* – поляризованість P перестає змінюватися з ростом E .

4. При перевищенні певної температури (точка Кюрі) сегнетоелектрик стає звичайним полярним діелектриком.

5. При змінах поля значення поляризованості P (а отже і зміщення D) відстають від напруженості поля E , внаслідок чого P і D визначається не тільки значенням E в даний момент, а й попереднім значенням E . Це явище називається *діелектричним гістерезисом* (від грецької - «відставання»).

Як видно з рис. 1, зі збільшенням напруженості E зовнішнього електричного поля поляризованість P , а з нею і зміщення D зростають у відповідності з гілкою 1

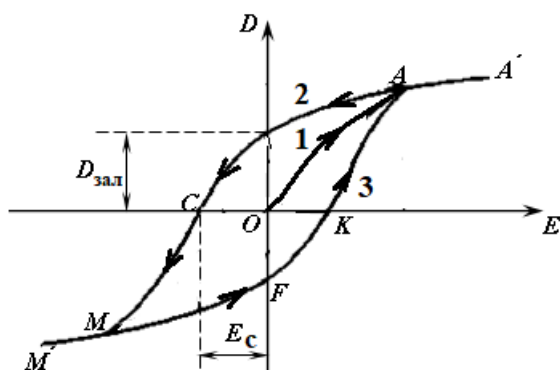


Рис. 1.

кривої і досягає насичення (у точці A). Якщо потім напруженість зовнішнього поля зменшувати, зменшення відбувається по гілці 2. При перетворенні E в нуль сегнетоелектрик зберігає стан поляризованості і D , зменшуючись, досягне значення $D_{\text{зал}}$ (залишкове зміщення). І тільки при накладенні певного поля зворотного напрямку (напруженості E_c) поляризованість і зміщення зникають повністю.

Напруженість E_c поля, при якій усувається залишкова поляризація називається *коерцитивною «силою»*.

При подальшому збільшенні від'ємного значення E знову досягається насичення (точка M). Наступному зростанню E відповідає гілка 3 кривої.

Стрілками на кривій рис. 1 показано залежність D від зміни напруженості E електричного поля. Залежність D від E при замкненому циклі переорієнтації зовнішнього поля називають *діелектричною петлею гістерезису*.

Зробимо деякі перетворення. Якщо в формулу $D = \epsilon_0 E + P$ підставити вираз $D = \epsilon_0 \epsilon E$, то для ϵ отримуємо вираз

$$\epsilon = 1 + P/(\epsilon_0 E)$$

У випадку сегнетоелектрика $\epsilon \gg 1$, тоді можна покласти, що

$$\epsilon \approx P/(\epsilon_0 E),$$

або $\epsilon \epsilon_0 E \approx P$, або

$$D \approx P. \quad (2)$$

У сегнетоелектрику вектор електричного зміщення практично співпадає з вектором поляризації. На досліді зручніше розглядати замість залежності $P(E)$ залежність $D(E)$. У даній лабораторній роботі досліджується залежність $D(E)$ для титанату барію ($BaTiO_3$), який є сегнетоелектриком в області температур від 5°C до 120°C .

Опис приладу

Лабораторна установка складається з осцилографа (EO), джерела регульованої змінної напруги (R), досліджуваного сегнетоелектрика (титанат барію, C) еталонного конденсатора (C_0).

Щоб отримати на екрані осцилографа петлю сегнетоелектричного гістерезису ($D = f(E)$), треба на вертикально відхиляючі пластини подати напругу U_y , пропорційну модулю вектора електричного зміщення ($U_y \sim D$), а на горизонтально відхиляючі – напругу U_x , пропорційну напруженості поля ($U_x \sim E$).

Принципова схема експериментальної установки наведена на рис. 2. До двох послідовно з'єднаних конденсаторів C_0 і C приєднано джерело змінної напруги. Між пластинами конденсатора C знаходиться досліджуваний сегнетоелектрик.

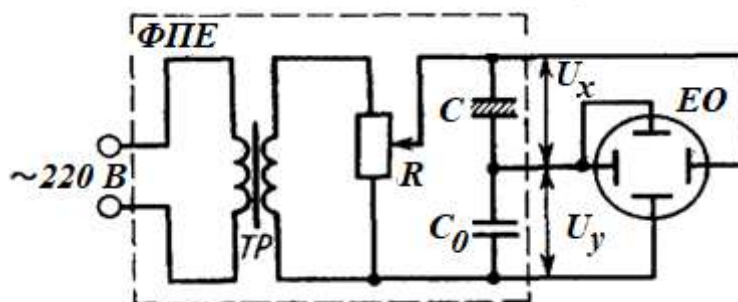


Рис.2.

Зміщення D електростатичного поля усередині сегнетоелектрика дорівнює поверхневій густині σ зарядів на пластинах конденсатора:

$$D = \sigma = q/S$$

де q – заряд однієї з пластин сегнетоконденсатора.

Конденсатори C і C_0 з'єднані послідовно, заряди їх однакові. Тому напруга на конденсаторі C_0

$$U_{C_0} = \frac{q}{C_0} = \frac{DS}{C_0}.$$

Таким чином, напруга на конденсаторі C_0 , що подається на вертикально відхиляючі пластини осцилографа, $U_{C_0} = U_y$, пропорційна зміщенню D :

$$U_y = U_{C_0} = \frac{DS}{C_0}, \quad (3)$$

Відхилення у електронного променя по вертикалі

$$y = \frac{U_y}{b_2},$$

де b_2 – чутливість осцилографа по вертикальній осі.

З двох останніх співвідношень отримаємо, що

$$D = \frac{C_0 b_2}{S} y. \quad (4)$$

Тепер переконаємося, що напруга, яка створюється сегнетоконденсатором C , пропорційна напруженості поля E . За умовою досліду $C \ll C_0$.

Через те, що опір конденсатора змінному струму обернено пропорційний ємності ($R_C = \frac{1}{\omega \cdot C}$), практично вся напруга, яка знімається з потенціометра R ,

прикладена до сегнетоконденсатора C . Ця напруга зв'язана з напруженістю поля E у сегнетоелектрику співвідношенням

$$U_x = E d, \quad (5)$$

де d – товщина сегнетоелектрика

Таким чином, на **горизонтально відхиляючі пластини** осцилографа подається напруга U_x , пропорційна напруженості зовнішнього електричного поля.

Якщо відома чутливість b_1 осцилографа по горизонтальній осі, то

$$U_x = b_1 x,$$

де x – відхилення електронного променя вздовж осі X ;

З двох останніх співвідношень отримаємо, що

$$E = \frac{b_1}{d} x. \quad (6)$$

Отже, у цій схемі на входи X і Y осцилографа одночасно подаються напруги $U_x \sim E$ і $U_y \sim D$. У результаті на екрані осцилографа спостерігається петля гістерезису (рис.1).

Розглянемо криву поляризації OA (рис.1), яка є геометричним місцем точок вершин кривих окремих циклів. Для кожної точки цієї кривої можна вважати, що величина зміщення $D = \epsilon_0 \epsilon E$. Тоді, визначивши величини D і E вершин окремих циклів, можна розрахувати відповідне значення діелектричної проникності ϵ сегнетоелектрика за формулою

$$\epsilon = \frac{D}{\epsilon_0 E} = \frac{d C_0 b_2 y}{\epsilon_0 S b_1 x} \quad (7)$$

і отримати залежність $\epsilon = f(E)$.

Використовуються такі вихідні дані

$$C_0 = 0,22 \cdot \text{мкФ}; \quad S = 1,3 \cdot \text{см}^2.$$

$$b_1 = 0,033 \text{ В/см}.$$

$$d = 3 \text{ мм}.$$

Послідовність вимірювань

1. Складіть схему установки відповідно до маркування на касеті (рис. 3).

2. Приєднайте електронний осцилограф і джерело живлення до мережі.
3. Підготуйте електронний осцилограф до роботи у режимі спостереження фігур Ліссажу.
4. Подайте живлення на лабораторний стенд та прилади. Установіть світну точку в центр екрана осцилографа.

Завдання 1. Отримання зображення петлі гістерезису та встановлення залежності $\varepsilon = f(E)$

1. Переконайтеся, що за відсутності напруги на конденсаторах світна точка на екрані осцилографа знаходиться у центрі екрана.

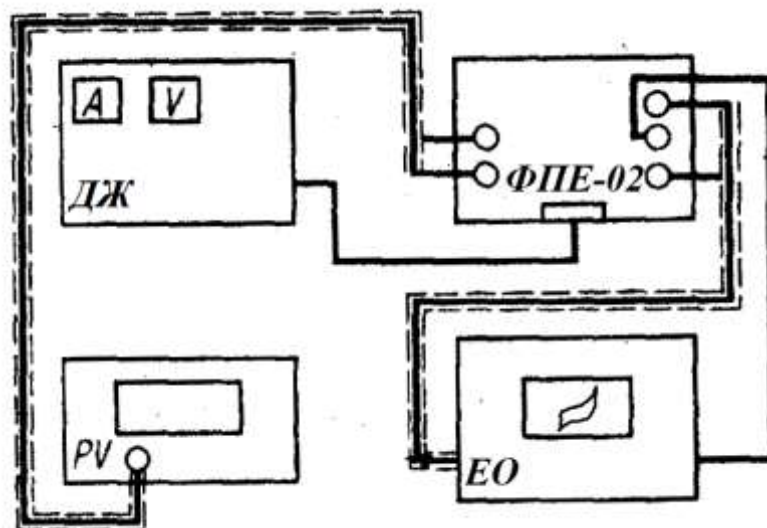


Рис. 3

2. Регулюючи потенціометром R на касеті напругу та підсилення сигналу по осі Y осцилографа, отримайте максимальну петлю гістерезису, яка буде відповідати максимальному стану насичення поляризації сегнетоелектрика. Площа петлі гістерезису при цьому повинна займати всю площину екрана осцилографа.

3. Запишіть у таблицю координати x_m і y_m вершини петлі гістерезису (точка А).

4. Поступово зменшуючи поворотом ручки потенціометра R на панелі касети напругу живлення, отримайте ще 4 – 5 петель гістерезису. Занесіть у таблицю координати x і y їхніх вершин. У разі необхідності змініть чутливість осцилографа по вертикалі b_2 . При цьому треба врахувати, що величина b_2 прийме нове значення.

5. За формулами (6) і (7) обчисліть значення ε і E та занесіть їх у таблицю.

№ петлі	x , см	y , см	b_1 , В/см	b_2 , В/см	ε	E , В/м
1						
2						
3						
4						

Завдання 2. Визначення залишкового зміщення $D_{зл.}$ та коерцитивної сили E_c

1. Установіть на екрані максимальну петлю гістерезису.

2. Найдіть за допомогою координатної сітки екрана осцилографа координату $u_{зал}$, яка відповідає залишковому зміщенню, координату x_c , яка відповідає коерцитивній силі (з точністю до 0,1 поділки шкали екрана осцилографа).
3. За формулами (4 і (6) розрахуйте коерцитивну силу і залишкове зміщення.

Контрольні питання

1. Які речовини називають діелектриками?
2. Що таке поляризація діелектрика? Що являє собою вектор поляризації? Вектор зміщення? Який їх фізичний зміст?
3. Записати зв'язок вектора електричного зміщення з вектором поляризації.
4. Що таке діелектрична проникність речовини?
5. Який клас діелектриків відноситься до сегнетоелектриків? Які основні властивості мають сегнетоелектрики?
6. Що являє собою явище гістерезису для сегнетоелектриків?
7. Що таке коерцитивна сила та залишкова поляризованість?

. Фундаментальні фізичні сталі

Назва	Позначення	Числове значення
Швидкість світла у вакуумі	c	$2,998 \cdot 10^8$ м/с
Електрична стала	ϵ_0	$8,854 \cdot 10^{-12}$ Ф/м
Магнітна стала	$\mu_0 = 1/(\epsilon_0 c^2)$	$4\pi \cdot 10^{-7}$ $\text{Н/А}^2 = 12,566 \cdot 10^{-7}$ Н/А^2
Гравітаційна стала	G	$6,673 \cdot 10^{-11}$ $\text{м}^3/(\text{кг} \cdot \text{с}^2)$
Стала Планка	h	$6,626 \cdot 10^{-34}$ Дж·с
	$\hbar = h/(2\pi)$	$1,0546 \cdot 10^{-34}$ Дж·с
Елементарний заряд	e	$1,602 \cdot 10^{-19}$ Кл
Стала Рідберга	R_∞	$1,097 \cdot 10^7$ м ⁻¹
Борівський радіус	a_0	$0,529 \cdot 10^{-10}$ м
Маса спокою електрона	m_e	$9,109 \cdot 10^{-31}$ кг
		0,511 МеВ
		$5,49 \cdot 10^{-4}$ а.о.м.
Маса спокою протона	m_p	$1,673 \cdot 10^{-27}$ кг
		1,00728 а.о.м.
Маса спокою нейтрона	m_n	$1,675 \cdot 10^{-27}$ кг
		1,00866 а.о.м.
Атомна одиниця маси	а.о.м.	$1,661 \cdot 10^{-27}$ кг (931,494 МеВ)
Стала Авогадро	N_A	$6,022 \cdot 10^{23}$ 1/моль
Стала Больцмана	k	$1,3807 \cdot 10^{-23}$ Дж/К
Універсальна га-	R	8,315 Дж/(моль·К)

зона стала		
Прискорення вільного падіння	g	$9,807 \text{ м/с}^2$

Лабораторна робота № 4. 17.

Дослідження гістерезису феромагнітних матеріалів

Прилади: 1) касета ФПЕ-07; 2) генератор електромагнітних коливань звукової частоти; 3) електронний осцилограф.

Мета роботи – визначення: 1) кривої намагнічування; 2) коерцитивної сили; 3) залишкової намагніченості; 4) роботи перемагнічування за один цикл феромагнетика по петлі гістерезису при різних напругах живлення.

Опис приладу та теоретичні відомості

Феромагнетиками називають тверді тіла, які мають спонтанну намагніченість, тобто намагнічені вже у відсутності магнітного поля. Типовими представниками феромагнетиків є залізо, кобальт, нікель та багато їх сплавів.

Характерною особливістю феромагнетиків є нелінійна залежність величини B від H (рис. 1), їм властиво явище магнітного гістерезису. Залежність між B і H виявляється неоднозначною, а визначається попередньою історією намагнічування. Якщо спочатку ненамагнічений феромагнетик намагнічувати, збільшуючи H від нуля до значення, при якому настає насичення (точка A на рис.1), а потім зменшувати H від H_a до $-H_0$, то крива намагнічування $B(H)$ піде не по первісному шляху AO , а вище – по шляху ACD . Якщо далі змінювати H у зворотному напрямку від $-H_0$ до $+H_a$, то крива намагнічування пройде нижче – по шляху $A'C'A$.

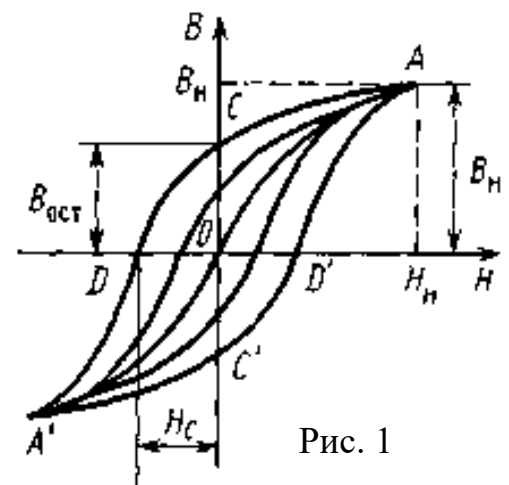


Рис. 1

Отриману замкнену криву називають петлею гістерезису. У тому випадку, коли в точках A і A' досягається насичення, петлю гістерезису називають максимальною. Якщо ж у крайніх точках насичення нема, то одержують петлі гістерезису меншого розміру, тобто вписану в максимальну петлю.

З рисунка видно, що при $H = 0$ намагнічування не зникає (точка C) і характеризується величиною $B_{зал}$, яку називають залишковою індукцією. Для її зникнення треба прикласти поле $H = -H_k$. Величина H_k називається коерцитивною силою. Прийнято феромагнетик вважати жорстким, якщо $H_k \geq 100 \text{ А/м}$. Якщо $H_k < 100 \text{ А/м}$, то феромагнетик вважають м'яким. Жорсткі феромагнетики використовують для виготовлення постійних магнітів, м'які – як осердя трансформаторів змінного струму та для електричних машин.

Петлю гістерезису легко отримати на екрані електронно – променевої трубки осцилографа.

Принципова схема установки зображена на рис. 2.

На первинну обмотку трансформатора подається змінна напруга від звукового генератора. У коло первинної обмотки приєднаний резистор R_1 . В осерді трансформатора утворюється змінне магнітне поле, напруженість якого пропорційна силі струму, який протікає через резистор R_1 . Якщо з резистора R_1 напругу подати на вхід X

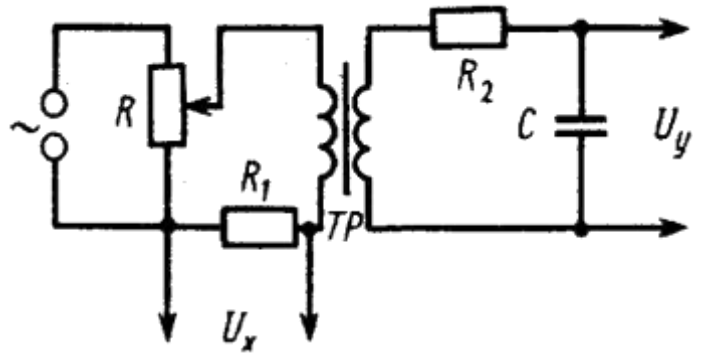


Рис. 2

осцилографа, то величина відхилення променя на екрані буде пропорційна напруженості H магнітного поля.

На вхід Y осцилографа подається напруга з конденсатора C , пропорційна заряду конденсатора, який, у свою чергу, пропорційний величині B . Таким чином, на горизонтальний і вертикальний входи осцилографа одночасно подають напруги, пропорційні відповідно напруженості H та індукції B магнітного поля. На екрані осцилографа можна спостерігати петлю гістерезису.

Досліджуваний зразок феромагнетика виконано у вигляді тороїду. Тому

$$H = \frac{N_1}{2\pi \cdot r_m} I_1,$$

де $r_m = \frac{r_1 + r_2}{2}$, r_1 і r_2 – внутрішній та зовнішній радіуси тороїду; I_1 – сила струму у первинній обмотці тороїду; N_1 – кількість витків первинної обмотки тороїду.

Спад напруги на резисторі R_1 визначається за формулою

$$U_x = I_1 R_1 = \frac{2\pi \cdot r_m}{N_1} R_1 H \quad (1)$$

і пропорційний відхиленню електронного променя по осі X, тобто

$$U_x = b_1 x, \quad (2)$$

де b_1 – чутливість осцилографа.

З урахуванням виразів (1) і (2) напруженість магнітного поля можна розрахувати так:

$$H = \frac{N_1}{2\pi r_m R_1} b_1 x = \alpha b_1 x, \quad \text{де } \alpha = \frac{N_1}{2\pi r_m R_1}. \quad (3)$$

За законом Фарадея – Ленца ЕРС індукції у вторинній обмотці

$$\varepsilon_i = -N_2 \frac{d\Phi}{dt} = -N_2 \frac{dB}{dt} S_2,$$

де Φ – потік магнітної індукції \vec{B} через один виток вторинної обмотки;

$S_2 = (r_2 - r_1)d$ – площа перерізу тороїду (d – товщина тороїду).

За законом Ома для вторинної обмотки трансформатора

$$\varepsilon_{i2} = U_c + I_2 R_2 + L_2 \frac{dI_2}{dt}, \quad (4)$$

де U_c – напруга на конденсаторі; I_2 – сила струму у вторинній обмотці; L_2 – індуктивність обмотки.

Якщо електроємність C і опір R_2 достатньо великі, то

$$I_2 R_2 \gg U_c = \frac{q}{C}, \quad I_2 R_2 \gg L_2 \frac{dI_2}{dt}, \quad (5)$$

де q – заряд конденсатора.

З урахуванням формули (5) вираз (4) виглядає так:

$$I_2 = -\frac{\varepsilon_s}{R_2} = -\frac{N_2 S_2}{R_2} \cdot \frac{dB}{dt} \quad (6)$$

Напруга на конденсаторі U_c , яку подають на підсилювач вертикального відхилення променя осцилографа,

$$U_c = U_y = \frac{q}{c} = \frac{0}{C} = \frac{\int_0^t I_2 dt}{C} = -\frac{N_2 S_2}{R_2 C} \int \frac{dB}{dt} dt = -\frac{N_2 S_2}{R_2 C} \cdot B. \quad (7)$$

Ця напруга пропорційна відхиленню електронного променя вздовж вертикальної осі, тобто

$$U_y = b_2 y. \quad (8)$$

Із виразів (7) та (8) отримаємо величину магнітної індукції:

$$B = \beta \cdot b_2 \cdot y, \quad \text{де } \beta = \frac{R_2 C}{N_2 S_2}. \quad (9)$$

Змінюючи силу струму I у первинній обмотці тороїдального трансформатора, спостерігають за петлею гістерезису на екрані осцилографа.

По площі петлі гістерезису можна знайти роботу перемагнічування ферромагнетику, віднесена до одиниці об'єму зразка. Тоді об'ємна густина енергії магнітного поля

$$\omega_v = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} = \frac{BH}{2}.$$

Елементарна робота, яка виконується у циклі перемагнічування,

$$\delta A = d\omega_v = H dB.$$

Робота за повний цикл перемагнічування

$$A = \oint H dB. \quad (10)$$

З урахуванням виразів (9) і (10) можна записати, що

$$A = \alpha \beta b_1 b_2 \oint x dy = \alpha \beta b_1 b_2 S_{\text{пет}}, \quad (11)$$

де $S_{\text{пет}}$ – площа петлі гістерезису на екрані осцилографа, виміряна в см^2 .

Послідовність вимірювань

Зберіть схему установки відповідно до маркування на касеті ФПЕ-07 (рис. 3).

Завдання 1. Знімання кривої намагнічування

1. Підготуйте осцилограф до роботи у режимі спостереження фігур Ліссажу.

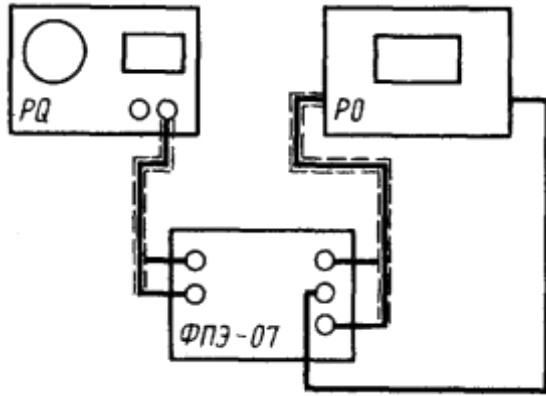


Рис. 3

2. На генераторі встановіть частоту 2 кГц.

3. Підведіть живлення до лабораторного столу та увімкніть прилади.

4. Регулюючи вихідну напругу генератора і підсилення по осі Y осцилографа, установіть максимальну петлю гістерезису, яка відповідає магнітному насиченню зразка. При цьому петля гістерезису повинна займати найбільшу площу екрана осцилографа.

5. Занесіть у таблицю координати x та y у вершин максимальної петлі гістерезису.

6. Змініть за допомогою ручки "Рег. вих." звукового генератора площу петлі гістерезису на екрані осцилографа і знову занесіть у таблицю координати її вершин.

7. Повторіть вимірювання за п. 6 ще для чотирьох петель гістерезису. У разі необхідності (якщо розмір петлі малий) можна змінити чутливість осцилографа по вертикалі. При цьому величина b_2 приймає нове значення (обчислюють b_2 як добуток коефіцієнта підсилення по осі Y на множник). Результати вимірювань занесіть у таблицю.

8. Обчисліть величини H та B за формулами (3) і (8). Додаткові дані, необхідні для розрахунків: $r_1 = 10$ мм; $r_2 = 15$ мм; $N_1 = 200$ витків; $N_2 = 50$ витків; $R_1 = 100$ Ом;

$R_2 = 24$ кОм; $b_1 = 0,032$ В/см; $C = 0,022$ мкФ; $d = 0,5$ см.

9. Побудуйте криву намагнічування $B = f(H)$.

Завдання 2. Визначення коерцитивної сили

1. Установіть максимальну петлю гістерезису.

2. Для цієї петлі знайдіть координату X_k , яка відповідає коерцитивній силі H_k , та координату $Y_{зал}$, яка відповідає величині $B_{зал}$. За формулами (3) і (9) обчисліть H_k і $B_{зал}$.

3. Визначте групу магнетика (твердий або м'який).

№ петлі	X , см	Y , см	H , А/м	B , Тл	A , Дж	H_k , А/м	Група феромагнетика

Завдання 3. Визначення роботи перемагнічування A за цикл

1. Максимальну за розміром петлю гістерезису перенесіть на міліметро-

вий папір і обчисліть її площу S_{net} (см²).

2. За формулою (11) обчисліть роботу перемагнічування.

Контрольні питання

1. На які групи поділяють магнетики?
2. Які основні властивості мають феромагнетики?
3. У чому полягає явище магнітного гістерезису?
4. Що називають коерцитивною силою?
5. Які феромагнетики відносять до твердих, а які до м'яких?
6. Що називають роботою перемагнічування?

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА.

1. Кучерук І.М., Горбачук І.Т., Луцік П.П. Загальний курс фізики. У 3 т. Навч посі-бн.– К. Техніка. – 2006, т.1. Механіка. Молекулярна фізика і термодинаміка. - 536 с. Т. 2. Електрика і магнетизм – 452 с. Т. 3. Оптика. Квантова фізика. - 518 с.

2. Янг Г., Фрідман Р. Фізика для університетів. – Підручник. Львів, Наутілус. 2018. - 1516 с.

Young H.D., Freedman R.A., University Physics with Modern Physics (13 th ed.) 2011 Addison Wesley Logman Inc. , 1598.

3. Savelyev I.V. Physics. The Textbook for general engineering colleges. V. 1-3. Nauka Publishers. 1989. - V.2 464 p.

4 Загальна фізика. Лабораторний практикум. / За загальною редакцією І.Т.Горбачука. – К.: Вища школа, 1992.

5. Зачек І.Р., Лопатинський І.Є., Юр'єв С.О., Рибак О.В., Дубельт С.П. Фізика і комп'ютерні технології. Навч. посібн. НТУ «Львівська політехніка» 2019 – 360 с

6. Навчальний посібник «Фізика» (II частина) для студентів спеціальностей «Комп'ютерна інженерія», «Комп'ютерні науки», «Програмна інженерія». Тернопіль, ФОП «Шпак», 2017. 128 с.

7. Воловик П. М. Фізика для університетів. Повний курс в одному томі. К, "Перун", 2005 р. - 864 ст.

8. Дидух Л.Д. Електрика та магнетизм : підручник - Тернопіль : Підручники і посіб-ники, 2020. — 464 с

9. Бойко В.В., Булах В.І., Гуменюк Я.О., Ільїн П.П. Фізика. Підручник для вищих навчальних закладів. К.: Ліра-К, 2016. - 468 с.

10. Гаркуша І.П., Курінний В.П. Фізика. Навч. посібн. у 7 ч. Ч. 1. Механіка. Ч. 3. Елект-рика і магнетизм. Ч. 4. Колювання і хвилі. Ч. 5. Хвильова оптика. Ч. 6. Квантова фізика. Ч. 7. Фізика атомного ядра і елементарних частинок. Д. НТУ «Дніпровська політехніка», 2018 - 2020. - 598 с.

11. Гаркуша І.П., Горбачук І.Т., Курінний В.П. та ін. Загальний курс фізики: Збірник задач – К.: «Техніка», 2004, – 560 с.

12. Гаркуша І.П., Мокляк З.П., Буслов Ю.О. Фізика. Задачі з розв'язаннями. – Д. НГУ. 2007. - 328 с.

Навчальне видання

Гаркуша Ігор Павлович
Курінний Володимир Павлович
Журавльов Михайло Олександрович

ЛАБОРАТОРНІ РОБОТИ З ФІЗИКИ
КОЛИВАННЯ І ХВИЛІ

Навчальний посібник

Редактор Ю.В. Рачковская

Підписано до друку 30.06.2023. Формат 30x42/4
Папір офсетний. Ум. друк. арк. 6,7.
Обл.-вид. арк. 6,7. Тираж 50 пр. Зам. №

Підготовлено до друку та видруковано
в Національному технічному університеті «Дніпровська політехніка»
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру ДК № 1842 від 11.06.2014
49005, м. Дніпро, просп. Д. Яворницького, 19