

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ДНІПРОВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»



В. М. Горєв, І. П. Гаркуша, А. В. Подляцька

ЗАГАЛЬНА ФІЗИКА

Навчальний посібник

У 2 частинах

Частина 1

Дніпро
НТУ «ДП»
2024

УДК 53

Г68

*Рекомендовано вченою радою НТУ «Дніпровська політехніка»
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра
спеціальності 141 Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка
(протокол № 12 від 04.11.2024)*

Рецензенти:

О. Й. Соколовський – д-р фіз.-мат. наук, проф. (Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара);

Е. П. Штапенко – д-р фіз.-мат. наук, проф. (Український державний університет науки і технологій).

Горєв В. М.

Г68 Загальна фізика [Електронний ресурс] : навч. посіб.: у 2-х ч. Ч. 1 / В. М. Горєв, І. П. Гаркуша, А. В. Подляцька ; М-во освіти і науки України, Нац. техн. ун-т «Дніпровська політехніка». – Дніпро : НТУ «ДП», 2024. – 144 с.

У посібнику розглянуто початкові розділи теоретичного матеріалу дисципліни «Загальна фізика», яку вивчають здобувачі електротехнічного профілю. Зокрема викладено основи механіки, а також електрики та магнетизму. Матеріал посібника супроводжується детальним математичним обґрунтуванням.

Призначений для здобувачів ступеня бакалавра спеціальності 141 Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка, посібник може стати в пригоді студентам інших технічних або фізико-математичних спеціальностей.

УДК 53

© В. М. Горєв, І. П. Гаркуша, А. В. Подляцька, 2024

© НТУ «Дніпровська політехніка», 2024

Зміст

Вступ.....	6
1. Механіка.....	7
1.1. Вектори та дії з ними.....	7
1.2. Кінематика.....	11
1.2.1. Радіус-вектор, шлях, переміщення, швидкість.....	11
1.2.2. Прискорення. Нормальне й тангенціальне прискорення.....	14
1.2.3. Закон додавання швидкостей.....	17
1.2.4. Поступальний та обертальний рух. Рух по колу.....	18
1.2.5. Деякі приклади виведення законів руху.....	21
1.3. Динаміка.....	24
1.3.1. Сила. Закони Ньютона.....	24
1.3.2. Закон всесвітнього тяжіння. Сила тяжіння. Вага.....	25
1.3.3. Сила пружності.....	26
1.3.4. Сила реакції опори та сила тертя.....	29
1.3.5. Закон зміни та збереження імпульсу. Теорема про рух центра мас....	30
1.3.6. Реактивний рух. Рівняння Мещерського. Формула Ціолковського....	33
1.3.7. Робота. Енергія. Закон збереження енергії.....	35
1.3.8. Абсолютно пружний та абсолютно непружний удари.....	38
1.3.9. Потенціальна енергія в окремих випадках.....	39
1.3.10. Момент сили, момент імпульсу. Рівняння моментів.....	41
1.3.11. Кінетична енергія обертання твердого тіла. Момент інерції.....	45
1.3.12. Обертальний рух твердого тіла відносно нерухомої осі.....	46
1.4. Елементи механіки рідин.....	48
1.5. Контрольні питання до розділу 1.....	53
2. Електрика та магнетизм.....	56
2.1. Закон Кулона. Потенціальна енергія кулонівської взаємодії.....	56
2.2. Електростатичне поле.....	58

2.2.1. Поле точкового заряду.....	58
2.2.2. Поле нескінченної рівномірно зарядженої нитки.....	59
2.2.3. Поле нескінченної рівномірно зарядженої площини	61
2.2.4. Теорема Гаусса	62
2.2.5. Поле рівномірно зарядженої сфери.....	64
2.2.6. Поле рівномірно зарядженої кулі.....	65
2.2.7. Поле зарядженого порожнистого нескінченного циліндра.....	66
2.2.8. Поле зарядженого в об'ємі суцільного нескінченного циліндра	67
2.3. Потенціал електростатичного поля	68
2.3.1. Потенціал поля точкового заряду.....	69
2.3.2. Різниця потенціалів у полі коаксіальних циліндрів	69
2.3.3. Різниця потенціалів у полі концентричних сфер.....	70
2.3.4. Різниця потенціалів у полі паралельних площин	71
2.4. Поляризація діелектриків	72
2.4.1. Електричний диполь	72
2.4.2. Механізм поляризації діелектриків.....	74
2.4.3. Вектор поляризованості. Електрична індукція	76
2.5. Властивості провідників.....	79
2.6. Електрична ємність. Конденсатори.....	80
2.6.1. Ємність плоского конденсатора	80
2.6.2. Ємність циліндричного конденсатора	81
2.6.3. Ємність сферичного конденсатора.....	81
2.6.4. З'єднання конденсаторів	82
2.6.5. Енергія системи зарядів, енергія конденсатора	83
2.7. Електричний струм, електричні кола.....	85
2.7.1. Струм. Опір. Закон Ома стосовно ділянки, що не містить джерел	85
2.7.2. Послідовне та паралельне з'єднання резисторів	87
2.7.3. Закон Ома для повного електричного кола. Джерела напруги	89
2.7.4. Робота й потужність струму	91

2.7.5. Закон Ома для ділянки кола, що містить джерело ЕРС.....	93
2.7.6. Закон Ома в диференціальній формі.....	93
2.7.7. Закони Кірхгофа.....	95
2.7.8. Електричний струм у газах	98
2.8. Магнітне поле	99
2.8.1. Закон Біо – Савара – Лапласа	100
2.8.2. Поле прямого провідника.....	101
2.8.3. Поле кругового струму. Магнітний момент	102
2.8.4. Магнітне поле зарядженої частинки	103
2.8.5. Сила Ампера та сила Лоренца	104
2.8.6. Траєкторія зарядженої частинки в однорідному магнітному полі	106
2.8.7. Ефект Холла.....	110
2.8.8. Циркуляція магнітного поля. Магнітне поле соленоїда	112
2.8.9. Робота сили Ампера. Явище електромагнітної індукції.....	114
2.8.10. Магнітне поле в речовині.....	120
2.8.11. Явище самоіндукції. Індуктивність соленоїда. Енергія соленоїда ..	126
2.8.12. Явище взаємної індукції. Ідеальний трансформатор	129
2.9. Задачі про замикання та розмикання RL- та RC-кіл	130
2.9.1. Задача на замикання RL-кола	130
2.9.2. Задача на розмикання RL-кола	132
2.9.3. Задача на зарядження конденсатора	134
2.9.4. Задача на розрядження конденсатора	136
2.10. Контрольні питання до розділу 2	138
Список рекомендованої літератури.....	143

Вступ

Дисципліна «Загальна фізика» є основним освітнім компонентом для здобувачів спеціальності 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка» першого (бакалаврського) рівня вищої освіти.

У цьому посібнику викладено початкові розділи теоретичного матеріалу названої дисципліни, яку вивчають здобувачі електротехнічного профілю. Посібник містить детальний виклад основ механіки, а також електрики й магнетизму. Поданий у посібнику матеріал включає детальний математичний опис фізичних процесів.

Опанування матеріалу посібника, дозволить здобувачам освіти засвоїти базові й необхідні для якісної підготовки за спеціальністю знання з фізики.

Посібник видано як складову реалізації освітньої теми Ш-518 «Розробка методичного забезпечення за дисциплінами, що викладаються кафедрою фізики НТУ «Дніпровська політехніка»».

Виконання здобувачами робочої програми дисципліни «Загальна фізика» зумовлює досягнення таких результатів навчання:

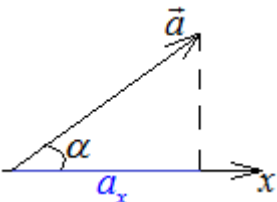
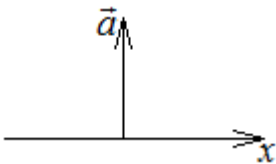
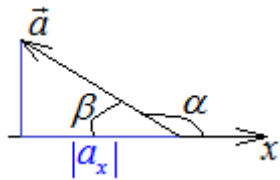
- Здійснювати аналіз процесів в електроенергетичному, електротехнічному та електромеханічному обладнанні, у відповідних комплексах і системах.
- Обирати і застосовувати придатні методи для аналізу й синтезу електромеханічних та електроенергетичних систем із заданими показниками.

1. Механіка

1.1. Вектори та дії з ними

У найпростішому розумінні **вектор** є спрямованим відрізком. **Модуль вектору** – це довжина (абсолютна величина) вектору. **Проекція вектору на вісь** – добуток модуля вектору та косинуса кута між «стрілочками» вектору і осі, див. табл. 1. Зауважимо, що проекція вектору на вісь є *числом*.

Таблиця 1.1. Проекція вектору на вісь в різних випадках

Кут гострий	Кут прямий	Кут тупий
		
$\alpha \in [0, \pi/2)$ $a_x = \vec{a} \cos \alpha > 0$	$\alpha = \pi/2$ $a_x = \vec{a} \cos \alpha = 0$	$\alpha \in (\pi/2, \pi]$ $a_x = \vec{a} \cos \alpha = - \vec{a} \cos \beta < 0$

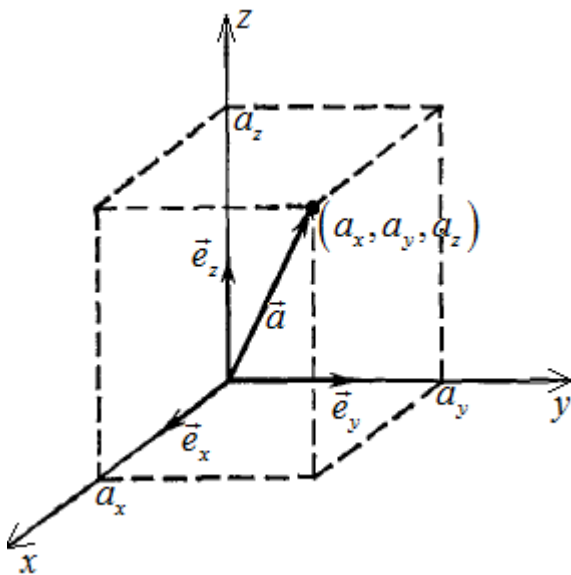


Рисунок 1.1

Координатами вектору є координати кінця вектору, якщо його початок співпадає з початком координат. Координати вектору співпадають з проекціями вектору на координатні осі, див. рис. 1.1. Кожен вектор може бути розвинений за осями таким чином:

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z, \quad (1.1)$$

де a_x, a_y, a_z – координати вектору \vec{a} та $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ – орти осей Ox, Oy, Oz ,

відповідно. **Ортом** осі є безрозмірний вектор, модуль якого дорівнює 1, і який за напрямком співпадає з віссю; $\vec{e}_x = (1, 0, 0)$, $\vec{e}_y = (0, 1, 0)$, $\vec{e}_z = (0, 0, 1)$.

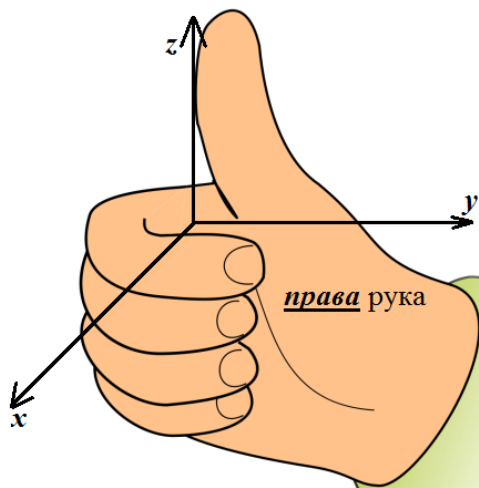


Рисунок 1.2

Тут і надалі ми працюватимемо в декартовій системі координат. За домовленістю, фізики завжди працюють в так званій **правій системі координат**, див. рис. 1.2. Якщо чотири пальці *правої* руки розташувати за напрямом найкоротшого обертання від осі Ox до осі Oy , тоді великий палець показуватиме напрям осі Oz .

За теоремою Піфагора очевидно, що

модуль вектору виражається через його координати таким чином:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (1.2)$$

Вектори можна **додавати і віднімати**. При додаванні (відніманні) векторів їх координати, відповідно, додаються (віднімаються). Нехай маємо вектори $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ та $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$. Тоді

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z), \quad \vec{a} - \vec{b} = (a_x - b_x, a_y - b_y, a_z - b_z). \quad (1.3)$$

Таблиця 1.2. Геометрична інтерпретація додавання векторів

Правило паралелограма	Правило трикутника
$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$	$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$
<p>\vec{c} – по діагоналі паралелограма, утвореного векторами \vec{a}, \vec{b}. Початки векторів \vec{a}, \vec{b} треба співставити в одну точку.</p>	<p>Початок вектору \vec{b} співставляється з кінцем вектору \vec{a}. Вектор \vec{c}: початок – початок вектору \vec{a}, кінець – кінець вектору \vec{b}.</p>

Операція додавання векторів має також відому геометричну інтерпретацію, див. табл. 1.2. Віднімання векторів $\vec{a} - \vec{b}$ – це додавання векторів $\vec{a} + (-\vec{b})$, де вектор $-\vec{b}$ спрямований протилежно до вектору \vec{b} та має однаковий модуль з вектором \vec{b} .

Наступною поширеною операцією з векторами є **множення вектору на число**, яка здійснюється таким чином. Нехай маємо вектор $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$. Тоді

$$\alpha\vec{a} = (\alpha a_x, \alpha a_y, \alpha a_z), \quad (1.4)$$

тобто при множенні вектору \vec{a} на число α кожна з координат вектору \vec{a} множиться на відповідне число. Згідно (1.4) та (1.2) бачимо, що

$$|\alpha\vec{a}| = |\alpha| \cdot |\vec{a}|, \quad (1.5)$$

також зауважимо, що $\alpha\vec{a} \parallel \vec{a}$, знак \parallel означає колінеарні, тобто паралельні один одному. Відповідно, при $\alpha > 0$ вектори $\alpha\vec{a}$ та \vec{a} спрямовані однаково, а при $\alpha < 0$ вектори $\alpha\vec{a}$ та \vec{a} спрямовані протилежним чином. Відповідно, в частинному випадку $\alpha = -1$ вектори \vec{a} та $-\vec{a}$ протилежні за напрямом і однакові за модулем, як і зазначено вище.

Скалярним добутком векторів $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ та $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ є число, яке позначається (\vec{a}, \vec{b}) та вводиться таким чином:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \quad (1.6)$$

Можна показати, що

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha, \quad (1.7)$$

де $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ – модулі векторів \vec{a} , \vec{b} , відповідно, та α – кут між «стрілочками» векторів. Можливі випадки знаку скалярного добутку розглянуто в табл. 1.3.

Комутативна операція – операція, результат якої не залежить від перестановки об'єктів. На основі (1.6) басимо, що скалярний добуток є комутативною операцією:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a}). \quad (1.8)$$

Таблиця 1.3. Знак скалярного добутку

Кут гострий	Кут прямий	Кут тупий
		
$\alpha \in [0, \pi/2)$	$\alpha = \pi/2$	$\alpha \in (\pi/2, \pi]$
$(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \vec{b} \cos\alpha > 0$	$(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \vec{b} \cos\alpha = 0$	$(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \vec{b} \cos\alpha = - \vec{a} \vec{b} \cos\beta < 0$

Векторним добутком векторів $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ та $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ є вектор, що позначається $[\vec{a}, \vec{b}]$ і вводиться через визначник таким чином:

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \vec{e}_x(a_y b_z - a_z b_y) + \vec{e}_y(a_z b_x - a_x b_z) + \vec{e}_z(a_x b_y - b_x a_y). \quad (1.9)$$

Можна показати, що векторний добуток має такі властивості:



Рисунок 1.3

1. Модуль векторного добутку

$$|[\vec{a}, \vec{b}]| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\alpha, \quad (1.10)$$

де $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ – модулі векторів \vec{a} , \vec{b} , відповідно, та α – кут між ними. Модуль векторного добутку є площею паралелограма, побудованого на векторах \vec{a} , \vec{b} .

2. Векторний добуток $[\vec{a}, \vec{b}]$

перпендикулярний обом векторам \vec{a} , \vec{b} ,

і, відповідно, площині, що утворена цими векторами): $[\vec{a}, \vec{b}] \perp \vec{a}$, $[\vec{a}, \vec{b}] \perp \vec{b}$.

3. Векторний добуток спрямовано за правилом правої руки, див. рис. 1.3. Якщо чотири пальці *правої* руки розташувати за напрямом найкоротшого обертання від вектору \vec{a} до вектору \vec{b} , тоді великий палець показуватиме напрям векторного добутку $[\vec{a}, \vec{b}]$. Це правило ще називають правилом правого гвинта.

Якщо змінити порядок векторів, то векторний добуток змінить напрям на протилежний. Тобто векторний добуток не є комутативною операцією:

$$[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}], \quad (1.11)$$

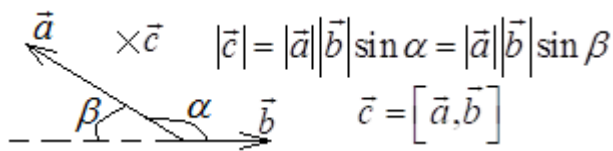


Рисунок 1.4

це очевидно, наприклад, з (1.9). Зауважимо, що у виразі (1.10) не важливо, чи є кут α кутом між «стрілочками» векторів, чи кутом між

прямими, які містять дані вектори – синуси цих кутів є однаковими, див. рис. 1.4.

На основі (1.7) бачимо, що якщо два вектори є перпендикулярними, то їх скалярний добуток дорівнює нулю. Відповідно, на основі (1.10) бачимо, що якщо два вектори є колінеарними, то їх векторний добуток дорівнює нулю.

Згідно рис. 1.2 та рис. 1.3, або визначення векторного добутку (1.9) бачимо, що для правої системи координат справедливим є таке співвідношення між ортами осей:

$$[\vec{e}_x, \vec{e}_y] = \vec{e}_z. \quad (1.12)$$

1.2. Кінематика

1.2.1. Радіус-вектор, шлях, переміщення, швидкість

Матеріальна точка – тіло, розмірами якого можна знехтувати.

Радіус-вектор точки з координатами (x, y, z) – вектор, що проведено з початку координат в цю точку, див. рис. 1.5:

$$\vec{r} = (x, y, z) = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z. \quad (1.13)$$

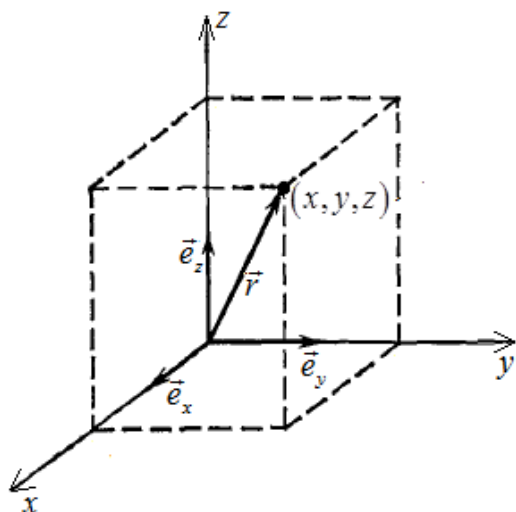


Рисунок 1.5

Нехай тіло рухається, розглянемо малий приріст часу Δt . За цей час радіус-вектор отримав приріст $\Delta \vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$, див. рис. 1.6.

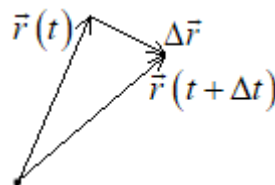


Рисунок 1.6.

Швидкість за визначенням є відношенням нескінченно малого приросту радіус-вектору $\Delta \vec{r}$ до нескінченно малого часу, за який цей приріст відбувся. Тобто швидкість є векторною величиною, що дорівнює похідній радіус-вектору за часом:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}(t), \quad (1.14)$$

у фізиці похідна за часом позначається точкою зверху величини. На основі (1.14) та (1.13) бачимо, що

$$\vec{v} = \frac{d}{dt} (x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z) = \frac{dx}{dt}\vec{e}_x + \frac{dy}{dt}\vec{e}_y + \frac{dz}{dt}\vec{e}_z, \quad (1.15)$$

тут враховано, що $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z = \text{const}$. Тож проекції вектору швидкості на координатні осі задаються виразами

$$v_x = dx/dt, \quad v_y = dy/dt, \quad v_z = dz/dt. \quad (1.16)$$

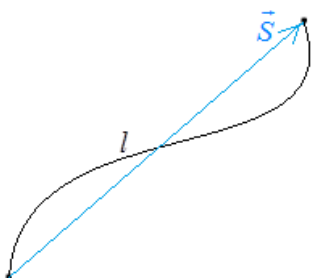


Рисунок 1.7

Траєкторія – лінія, яку тіло описує під час руху.

Шлях (l) – довжина траєкторії, див. рис. 1.7.

Переміщення (\vec{s}) – вектор, що проведений з початкової точки руху в кінцеву, див. рис. 1.7. Шлях – скалярна величина, а переміщення – векторна.

На основі (1.14) маємо

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow |\vec{v}| = \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| = \frac{|d\vec{r}|}{dt}. \quad (1.17)$$

За не нескінченно малий час модуль переміщення та шлях можуть бути різними. Але якщо пройшов дуже малий (нескінченно малий) час, то тоді таку ділянку траєкторії можна з хорошою точністю описати як лінійну, тож за дуже малий час модуль переміщення (модуль приросту радіус-вектору) та шлях, співпадають:

$$|\vec{v}| = \frac{|d\vec{r}|}{dt} = \frac{dl}{dt} \Rightarrow dl = |\vec{v}| \cdot dt = v dt. \quad (1.18)$$

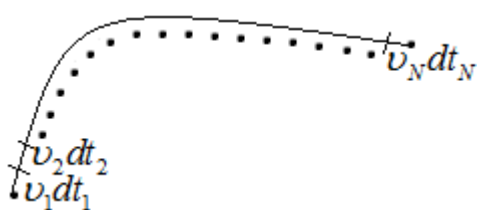


Рисунок 1.8

тут і надалі v – модуль швидкості. На основі (1.18) шлях можна обчислити таким чином. Розіб'ємо траєкторію на дуже багато дуже малих відрізків, див. рис. 1.8, $N \gg 1$. Відрізки є настільки малими, що їх можна вважати

лінійними. На першому відрізку пройдено шлях $v_1 dt_1$, на другому $v_2 dt_2$, і т.д. Тоді згідно визначення інтегралу

$$l = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \max(dt_i) \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^N v_N dt_N = \int_0^t v(\tau) d\tau, \quad (1.19)$$

де t – час, за який пройдено шлях l . Відповідно, *шлях є інтегралом від модуля швидкості за часом.*

Середня швидкість (середня шляхова швидкість) за визначенням задається виразом

$$v_{\text{ср}} = \frac{l}{t}, \quad (1.20)$$

де l – шлях, пройдений за весь часу руху; t – весь час руху.

Середня швидкість переміщення за визначенням задається виразом

$$\vec{v}_{\text{срПер}} = \vec{s}/t, \quad (1.21)$$

де \vec{s} – переміщення за весь час руху, t – весь час руху.

Очевидно, що модуль переміщення не може бути більшим за шлях, див. рис. 1.7. Тож $|\vec{s}| \leq l$, та на основі (1.20) та (1.21) бачимо, що між середньою швидкістю та середньою швидкістю переміщення має виконатися нерівність $|\vec{v}_{\text{срПер}}| \leq v_{\text{ср}}$, причому рівність досягається лише у випадку прямолінійного руху та незмінного напрямку швидкості.

В системі СІ маємо такі розмірності величин: $[\vec{s}] = [\vec{r}] = [l] = \text{м}$, $[\vec{v}] = \text{м/с}$.

1.2.2. Прискорення. Нормальне й тангенціальне прискорення

За визначенням **прискорення є векторною величиною, яка є швидкістю зміни швидкості, тобто похідною від швидкості за часом:**

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}}(t), \quad [\vec{a}] = \frac{\text{м}}{\text{с}^2}. \quad (1.22)$$

Згідно (1.22) та (1.14) бачимо, що прискорення є другою похідною радіус-вектору за часом:

$$\vec{a} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}. \quad (1.23)$$

На основі того, що $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z = \text{const}$ з (1.23) та (1.22) бачимо, що проекції прискорення на координатні осі

$$\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z, \quad (1.24)$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2 y}{dt^2}, \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2 z}{dt^2}.$$

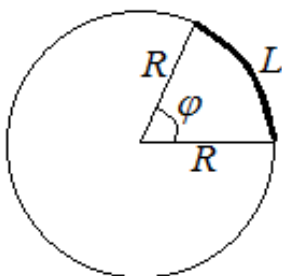


Рисунок 1.9

Для подальшого викладення матеріалу спершу нагадаємо визначення кута в радіанах. Розглянемо коло радіуса R , див. рис. 1.9. Нехай L – довжина дуги кола, яка обмежує кут φ . Тоді за визначенням кут φ в радіанах

$$\varphi = L/R. \quad (1.25)$$

Наприклад, $\varphi_{\text{ПовногоОберту}} = \frac{\text{ДовжинаКола}}{\text{Радіус}} = \frac{2\pi R}{R} = 2\pi$. При малому (нескінченно

малому) куті повороту $d\varphi = \frac{dL}{R} \Rightarrow dL = R d\varphi$, dL – довжина відповідної малої

дуги, що обмежує малий кут $d\varphi$.

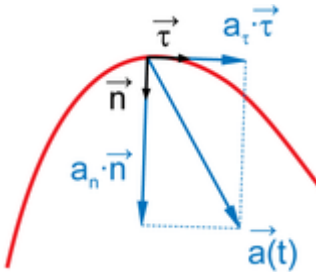


Рисунок 1.10

Прискорення розбивають на дві складові: **тангенціальне прискорення** $\vec{a}_\tau = a_\tau \vec{\tau}$ – компонента прискорення, дотична до траєкторії та **нормальне прискорення** $\vec{a}_n = a_n \vec{n}$ – компонента прискорення, перпендикулярна до траєкторії. Відповідно, вектор прискорення можна розвинути як

$$\vec{a} = a_\tau \vec{\tau} + a_n \vec{n}, \quad (1.26)$$

$\vec{\tau}$ – одиничний безрозмірний вектор, дотичний до траєкторії, \vec{n} – одиничний безрозмірний вектор, перпендикулярний (нормальний) до траєкторії. Вектори $\vec{\tau}, \vec{n}$ в кожній точці траєкторії можуть бути різними. Вектор \vec{n} ще називають вектором нормалі до траєкторії.

Криволінійну траєкторію на дуже малому зміщенні можна наблизити дугою кола. Центр такого кола – *центр кривини* траєкторії в заданій точці, а радіус такого кола – *радіус кривини* траєкторії. Нормальне прискорення спрямоване до центру кривини траєкторії в заданій точці.

Швидкість завжди спрямована по дотичній до траєкторії: $\vec{v} = v \vec{\tau}$.

Згідно властивостей похідних маємо

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v\vec{\tau})}{dt} = v \frac{d\vec{\tau}}{dt} + \vec{\tau} \frac{dv}{dt}, \quad (1.27)$$

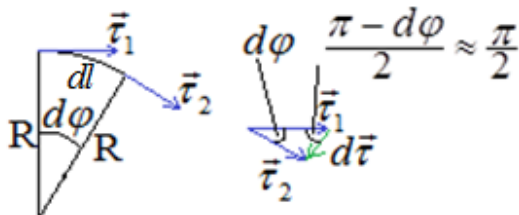


Рисунок 1.11

не лише модуль швидкості, а й вектор $\vec{\tau}$ змінюються з часом. Розглянемо мале зміщення матеріальної точки вздовж траєкторії, див. рис. 1.11. Таке мале зміщення можна описати колом, R – радіус

кривини траєкторії, $\vec{\tau}_1 = \vec{\tau}(t), \vec{\tau}_2 = \vec{\tau}(t + dt)$; dl – довжина дуга кола, іншими словами, шлях, що пройдено за час dt . Приріст вектору $\vec{\tau}$ за малий час dt дорівнює $d\vec{\tau} = \vec{\tau}_2 - \vec{\tau}_1$; вектори $\vec{\tau}_2, \vec{\tau}_1, d\vec{\tau}$ утворюють рівнобедрений трикутник, бо $|\vec{\tau}_1| = |\vec{\tau}_2| = 1$. Фактично, вектор $d\vec{\tau} \perp \vec{\tau}_1$, звідки $d\vec{\tau} \perp \vec{\tau} \Rightarrow d\vec{\tau} \uparrow \uparrow \vec{n} \Rightarrow d\vec{\tau} = \vec{n} \cdot d\tau$.

Тож матимемо

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{dl} \frac{dl}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{dl} v = \frac{d\vec{\tau}}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dl} v = \frac{d\vec{\tau}}{d\varphi} \frac{d\varphi}{R d\varphi} v = \frac{d\vec{\tau}}{d\varphi} \frac{v}{R} = \vec{n} \frac{d\tau}{d\varphi} \frac{v}{R}, \quad (1.28)$$

тут враховано, що $v = dl/dt$, $dl = R d\varphi$ та $d\vec{\tau} = \vec{n} \cdot d\tau$. За теоремою косинусів в трикутнику, утвореному векторами $\vec{\tau}_2, \vec{\tau}_1, d\vec{\tau}$ маємо

$$|\vec{\tau}_1|^2 + |\vec{\tau}_2|^2 - 2|\vec{\tau}_1||\vec{\tau}_2|\cos(d\varphi) = d\tau^2 \Rightarrow d\tau^2 = 2(1 - \cos(d\varphi)), \quad (1.29)$$

тут враховано, що $|\vec{\tau}_1| = |\vec{\tau}_2| = 1$.

Як відомо,

$$\cos(d\varphi) = 1 - \frac{d\varphi^2}{2} + O(d\varphi^4), \quad (1.30)$$

де позначення $O(x)$ означає малу величину порядку x . Тож згідно (1.29) та (1.30)

$$d\tau^2 \approx 2 \left(1 - \left(1 - \frac{d\varphi^2}{2} \right) \right) = d\varphi^2 \Rightarrow d\tau \approx d\varphi. \quad (1.31)$$

Тоді згідно (1.28) матимемо

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \vec{n} \frac{v}{R}, \quad (1.32)$$

та остаточно з урахуванням (1.27) та (1.26)

$$\vec{a} = \vec{n} \frac{v^2}{R} + \vec{\tau} \frac{dv}{dt}, \quad a_\tau = \frac{dv}{dt}, \quad a_n = \frac{v^2}{R}. \quad (1.33)$$

Відповідно, $a_\tau = \frac{dv}{dt}$ – тангенціальне прискорення є похідною за часом від модуля

швидкості; $a_n = \frac{v^2}{R}$ – вираз для нормального прискорення. Нормальне

прискорення ще називають доцентровим. Зауважимо, що наведені вище міркування, можливо, на перший погляд можуть здатись не вельми строгими, але вони є правильними у головному порядку малості за малим кутом $d\varphi$, тож вони є коректними, бо врахування членів вищих порядків не є доцільним при відповідних обчисленнях похідних. За теоремою Піфагора **модуль повного прискорення**

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{v^4}{R^2}}. \quad (1.34)$$

1.2.3. Закон додавання швидкостей

Система відліку – сукупність тіла відліку, жорстко пов'язаної з ним системи координат та годинника для відліку часу. **Інерціальна система відліку** – система відліку, відносно якої тіло зберігає швидкість свого руху сталою (і за модулем, і за напрямком), якщо на нього не діють інші тіла і поля, або якщо їхні дії скомпенсовані. Будь-яка система відліку, яка рухається зі сталою (і за модулем, і за напрямком) швидкістю відносно інерціальної, теж є інерціальною. Якщо ж система рухається з прискоренням відносно інерціальної системи (за модулем, або за напрямком швидкість змінюється), то вона є неінерціальною. *Дуже грубо кажучи, інерціальна система відліку – та, яка нерухома, або рухається з постійною швидкістю (і за модулем, і за напрямком) відносно нерухомої.*

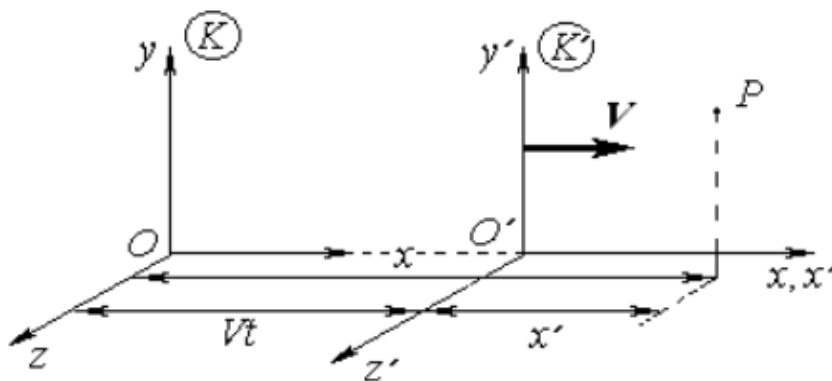


Рисунок 1.12

Нехай маємо дві інерціальні системи відліку, див. рис. 1.12. Зорієнтуємо їх так, як на рисунку, «штрихована» система рухається з постійною швидкістю V вздовж осі Ox відносно «не штрихованої» системи. «Штрихована» система в початковий момент часу співпадає з «не штрихованою».

Тоді координати точки довільної точки P в цих системах, очевидно, пов'язані співвідношеннями

$$x = x' + Vt, \quad x' = x - Vt, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = t', \quad (1.35)$$

вважається, що в усіх системах відліку час йде однаково. Якщо рух проходить зі швидкостями, які на багато порядків менші за швидкість світла, то таке припущення і такі перетворення є адекватними; вирази (1.35) носять назву **перетворень Галілея**.

Згідно (1.35) маємо

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} + V = \frac{dx'}{dt'} + V \Rightarrow v_x = v'_x + V, \quad (1.36)$$

аналогічно $v_y = v'_y$, $v_z = v'_z$, звідки отримуємо **закон додавання швидкостей**

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}, \quad (1.37)$$

бо $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$, $\vec{v}' = (v'_x, v'_y, v'_z)$, та в такій орієнтації координатних систем $\vec{V} = (V, 0, 0)$. Зі шкільної фізики вам, мабуть, відома його інтерпретація у вигляді

$$\vec{v}_{\text{ТілаВідносноНерухомоїСВ}} = \vec{v}_{\text{ТілаВідносноРухомоїСВ}} + \vec{v}_{\text{РухомоїСВ_ВідносноНерухомої}} \quad (1.38)$$

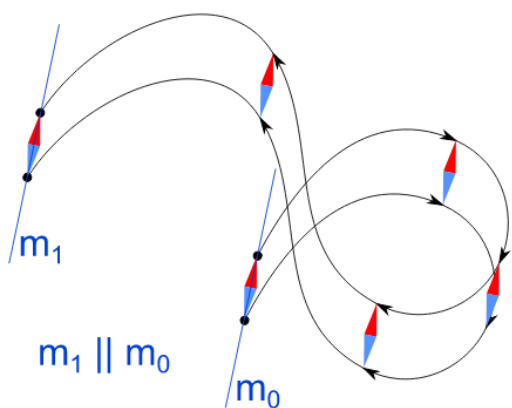


Рисунок 1.13

1.2.4. Поступальний та обертальний рух.

Рух по колу

Поступальний рух твердого тіла – рух, при якому відрізок, що з'єднує будь-які точки цього тіла, форма та розміри якого під час руху не змінюються, залишається паралельним своєму положенню в будь-який момент часу, див. рис. 1.13. При поступальному русі всі точки

тіла описують одну і ту ж траєкторію (з точністю до постійного зміщення у просторі), та в будь-який момент часу мають однакові за модулем та за напрямом вектори швидкості та прискорення. Для опису руху такого тіла достатньо описати рух однієї його точки.

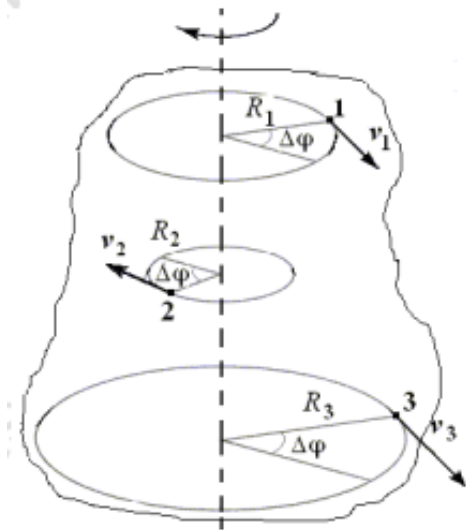


Рисунок 1.14

Обертальний рух – рух, при якому матеріальна точка описує коло, а всі точки абсолютно твердого тіла описують кола, що лежать в паралельних площинах. Центри всіх цих кіл належать одній прямій, яка називається віссю обертання, див. рис. 1.14. Вісь обертання може бути як рухомою, так і ні, і як розташовуватись всередині твердого тіла, так і зовні нього.

Розглянемо рівномірний рух точки по колу.

Цей рух описується наступними фізичними величинами. **Період обертання** T – час одного повного оберту. **Частота** – величина, обернена до періоду: $f = 1/T$.

Зв'язок періоду, швидкості та радіусу кола можна легко вивести:

$$v = \frac{\text{Шлях}}{\text{Час}} = \frac{\text{ДовжинаКола}}{\text{Період}} \Rightarrow v = \frac{2\pi R}{T}. \quad (1.39)$$

За визначенням, кутова швидкість є відношенням кута повороту в радіанах до часу, за який цей кут пройдено:

$$\begin{aligned} \text{КутоваШвидкість} &= \frac{\text{КутПовороту_в_радіанах}}{\text{Час}} = \\ &= \frac{\text{КутПовногоОберту}}{\text{Період}} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T}, \end{aligned} \quad (1.40)$$

де ω – кутова швидкість; $[\omega] = [f] = \text{с}^{-1}$, $[T] = \text{с}$. Ще кажуть, що частота вимірюється в Герцах: $[f] = \text{Гц} = \text{с}^{-1}$. Згідно (1.39) та (1.40) можна отримати такі співвідношення між частотою, кутовою швидкістю, швидкістю та радіусом кола:

$$v = \omega R, \quad \omega = 2\pi f. \quad (1.41)$$

Тепер розглянемо нерівномірний рух точки по колу. Тоді, за аналогією зі швидкістю, *кутова швидкість вводитьься як похідна від кута повороту за часом:*

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}. \quad (1.42)$$

Відповідно, *кутове прискорення є похідною від кутової швидкості за часом:*

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}. \quad (1.43)$$

Згідно визначення кута в радіанах маємо

$$v = \frac{dl}{dt} = \frac{Rd\varphi}{dt} = R \frac{d\varphi}{dt} \Rightarrow v = \omega R, \quad (1.44)$$

Тож зв'язок швидкості (її ще називають лінійною швидкістю) та кутової швидкості $v = \omega R$ є справедливим не лише для рівномірного руху. Відповідно, згідно (1.33) тангенціальне прискорення

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d(\omega R)}{dt} = R \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow a_\tau = R\varepsilon, \quad (1.45)$$

тут враховано, що радіус кола є сталою величиною: $R = \text{const}$. Відповідно, нормальне прискорення згідно (1.33) та (1.44)

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R} \Rightarrow a_n = \omega^2 R, \quad (1.46)$$

та модуль повного прискорення

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}, \quad (1.47)$$

Якщо тверде тіло обертається навколо нерухомої осі, то кутова швидкість всіх точок твердого тіла однакова, бо за однаковий час всі точки тіла повернуться на однаковий кут. А лінійна («звичайна») швидкість кожної точки задаватиметься виразом $v = \omega R$, R – відстань до осі обертання, і у точок, які на різній відстані до осі обертання, лінійна швидкість буде різною. Чим далі від осі обертання, тим більшою буде лінійна швидкість.

1.2.5. Деякі приклади виведення законів руху

Розглянемо виведення законів руху для одновимірного руху зі сталим прискоренням та для простого випадку плоскопаралельного руху. *Законом руху* називається залежність від часу радіус-вектору $\vec{r}(t)$, що еквівалентно залежностям від часу всіх трьох координат: $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$.

Спочатку розглянемо одновимірний рівноприскорений рух. Спрямуємо систему координат так, щоб вісь Ox співпала з прямою, по якій йде рух. Тоді $a_x = \text{const}$, та

$$\frac{dv_x}{dt} = a_x \Rightarrow dv_x = a_x dt \Rightarrow \int dv_x = a_x \int dt \Rightarrow v_x = a_x t + C_1, \quad (1.48)$$

C_1 – стала інтегрування – взялась з того, що невизначений інтеграл визначено з точністю до плюс константи; тут враховано що $a_x = \text{const}$. Вважаємо, що початкова швидкість та початкова координата є заданими:

$$v_x(0) = v_{x0}, \quad x(0) = x_0, \quad (1.49)$$

Тоді на основі (1.49) можемо знайти константу C_1 у (1.48):

$$v_{x0} = a_x \cdot 0 + C_1 \Rightarrow C_1 = v_{x0}, \quad (1.50)$$

та остаточно

$$v_x = a_x t + v_{x0}. \quad (1.51)$$

Згідно визначення швидкості

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} = v_x \Rightarrow dx = v_x dt \Rightarrow dx = (a_x t + v_{x0}) dt \Rightarrow \int dx = \int (a_x t + v_{x0}) dt + C_2 \Rightarrow \\ \Rightarrow x = a_x \frac{t^2}{2} + v_{x0} t + C_2, \end{aligned} \quad (1.52)$$

константу C_2 знайдемо на основі (1.49):

$$x_0 = a_x \cdot \frac{0^2}{2} + v_{x0} \cdot 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = x_0, \quad (1.53)$$

та

$$x = a_x \frac{t^2}{2} + v_{x0}t + x_0. \quad (1.54)$$

Вираз (1.54) є законом прямолінійного рівноприскореного руху; вирази (1.51) та (1.54) є відомими зі шкільної фізики залежностями швидкості та прискорення від часу при рівноприскореному русі.

У випадку рівноприскореного руху по колу ($\varepsilon = \text{const}$) аналогічно можна отримати залежності кутової швидкості та кутової координати від часу:

$$\omega = \varepsilon t + \omega_0, \quad \varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2} + \omega_0 t + \varphi_0, \quad (1.55)$$

ω_0 – початкова кутова швидкість, φ_0 – початкова кутова координата.

Будь-який рух твердого тіла може бути представлений як суперпозиція поступального та обертального рухів.

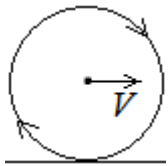


Рисунок 1.15

Плоскопаралельний рух (плоский рух) – вид руху абсолютно твердого тіла, при якому траєкторії всіх точок тіла розташовані в площинах, паралельних заданій площині.

Наприклад, це – рух колеса по дорозі: траєкторії всіх точок колеса знаходяться у площині, перпендикулярній площині рисунку.

Розглянемо детальніше такий рух без проковзування. За визначенням, рух є **рухом без проковзування**, якщо миттєва швидкість **відносно землі** тієї точки колеса, яка стикається з дорогою, дорівнює швидкості дороги відносно землі (якщо це – нерухома дорога, а не бігова доріжка, то нулю).

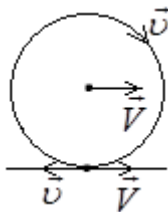


Рисунок 1.16

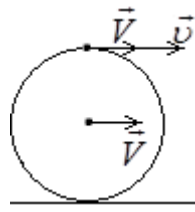


Рисунок 1.17

Надалі розглянемо випадок нерухомої дороги та випадок постійної швидкості колеса відносно землі. \vec{v} – швидкість точки на ободі колеса **відносно центру колеса**, \vec{V} – швидкість центру колеса **відносно землі**. Так як

розглядається рух без проковзування, то в нижній точці $\vec{v} + \vec{V} = 0$, тож в нижній точці вектори \vec{v} та \vec{V} однакові за модулем і спрямовані в протилежних

напрямах, тож $v = V$, див. рис. 1.16. Відповідно, швидкість верхньої точки колеса відносно землі дорівнює $v + V = 2V$, див. рис. 1.17.

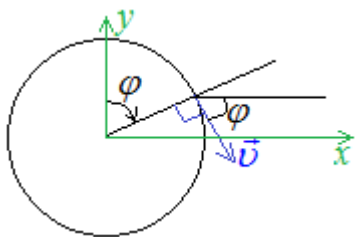


Рисунок 1.18

Виведемо закон руху точки колеса, яка в початковий момент часу знаходилась у крайньому верхньому положенні (початкові координати $x = 0$, $y = 2R$). Відносно центру колеса швидкість точки на ободі колеса (див. рис. 1.18):

$$\vec{v} = (v \cos \varphi, -v \sin \varphi), \quad \varphi = \omega t = \frac{v}{R} t, \quad v = V. \quad (1.56)$$

Швидкість центру колеса відносно землі $\vec{V} = (V, 0)$. Тож згідно закону додавання швидкостей (1.38) швидкість точки на ободі колеса відносно землі

$$\vec{u} = (V, 0) + (v \cos \varphi, -v \sin \varphi) = \left(V + V \cos \left(\frac{Vt}{R} \right), -V \sin \left(\frac{Vt}{R} \right) \right), \quad (1.57)$$

$$u_x(t) = V + V \cos \left(\frac{Vt}{R} \right), \quad u_y(t) = -V \sin \left(\frac{Vt}{R} \right).$$

Тоді відносно землі можна дослідити траєкторію:

$$x = \int u_x(t) dt + C_1 = Vt + V \frac{R}{V} \sin \left(\frac{Vt}{R} \right) + C_1, \quad (1.58)$$

$$y = \int u_y(t) dt + C_2 = V \frac{R}{V} \cos \left(\frac{Vt}{R} \right) + C_2,$$

константи C_1, C_2 знаходяться згідно початкових умов $x(0) = 0$, $y(0) = 2R$:

$$C_1 = 0, \quad C_2 = R, \quad (1.59)$$

звідки шуканий закон руху

$$x(t) = Vt + R \sin \left(\frac{Vt}{R} \right), \quad y(t) = R + R \cos \left(\frac{Vt}{R} \right). \quad (1.60)$$



Рисунок 1.19

Траєкторія точки колеса, яка в початковий момент часу знаходилась у крайньому

верхньому положенні, є параметрично заданою кривою згідно співвідношень

(1.60). Така крива називається *циклоїдою*, її схематичний вигляд наведено на рис. 1.19.

Щойно розглянутий приклад руху яскраво ілюструє факт додавання поступального та обертального рухів (поступальний – якщо б колесо «паралельно переносилось» зі швидкістю \vec{V} , обертальний враховує обертання відносно центру колеса).

1.3. Динаміка

1.3.1. Сила. Закони Ньютона

Сила – фізична векторна величина, що є мірою впливу на дане тіло інших тіл, або полів. Прикладення сили до тіла викликає зміну вектору швидкості тіла, або виникання в ньому деформацій. В СІ сила вимірюється в Ньютонах, $\text{H} = \text{кг} \cdot \text{м}/\text{с}^2$.

Перший закон Ньютона постулює існування інерціальних систем відліку (див. визначення інерціальної системи відліку на стр. 12).

Другий закон Ньютона постулює, що в інерціальній системі відліку

$$d\vec{p}/dt = \vec{F}, \quad (1.61)$$

де \vec{F} – результуюча сила, що діє на тіло; \vec{p} – імпульс тіла, що є добутком маси тіла на швидкість:

$$\vec{p} = m\vec{v}. \quad (1.62)$$

Згідно **принципу суперпозиції** результуюча сила – векторна сума сил, що діють на тіло. У випадку, коли маса тіла є сталою (найпоширеніший випадок) на основі (1.61), (1.62) та (1.22) можна отримати, що

$$\vec{F} = m\vec{a}. \quad (1.63)$$

У частинному випадку, коли $\vec{F} = 0$ $m \frac{d\vec{v}}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{v} = \text{const}$, що і є визначенням інерціальної системи відліку.

Третій закон Ньютона постулює, що сили, з якими взаємодіють два тіла, рівні за модулем і протилежні за напрямком:

$$\vec{F}_{i,j} = -\vec{F}_{j,i}. \quad (1.64)$$

де $\vec{F}_{i,j}$ – сила, що діє з боку i -го тіла на j -те.

1.3.2. Закон всесвітнього тяжіння. Сила тяжіння. Вага

Згідно *закону всесвітнього тяжіння* дві матеріальні точки притягаються одна до одної внаслідок гравітаційної взаємодії, сила притягання за модулем

$$F_{2,1} = F_{1,2} = G \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (1.65)$$

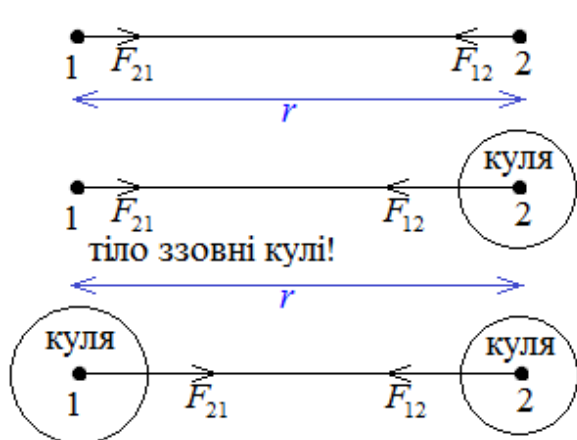


Рисунок 1.20

де m_1, m_2 – маси тіл, r – відстань між ними, $G \approx 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{кг}^2$ – гравітаційна стала, див. рис. 1.20.

Якщо тіла не точкові, то розрахунок сили притягання набагато складніший – треба кожне тіло розбити на дуже багато дуже маленьких частин (кожну з яких можна вважати

точковою), та знайти відповідну суму сил взаємодій точкових об'єктів (інтегрувати). Але можна показати, що формула (1.65) є справедливою для взаємодії точкового тіла та однорідної кулі, або двох однорідних куль, див. рис. 1.20. Так як числове значення константи G в СІ доволі мале, то сила гравітаційного притягання «в побутовому сенсі» є відчутною лише, коли маси об'єктів дуже великі.

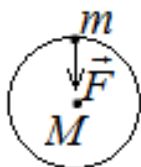


Рисунок 1.21

Сила тяжіння – сила, з якою планета (зірка, великий астрономічний об'єкт) притягає розташовані навколо себе тіла. Основний внесок у силу тяжіння, наприклад, планети Земля, дає саме гравітаційна взаємодія (є певний внесок і від врахування

добового обертання Землі, який порівняно з гравітаційним внеском дуже малий). Надалі враховуватимемо лише гравітаційний внесок. Грубо вважатимемо планету сферичною. Будь-яке тіло на її поверхні порівняно з розмірами планети точкове,

див. рис. 1.21. Як відомо зі шкільного курсу фізики, сила тяжіння $F = mg$, де g – прискорення вільного падіння. Ця сила зумовлена гравітаційною взаємодією, тож

$$F_T = mg = G \frac{mM}{R^2} \Rightarrow g = G \frac{M}{R^2}. \quad (1.66)$$

Отриманий вираз є формулою для прискорення вільного падіння на поверхні планети; M – маса планети, R – радіус планети.

Сила тяжіння $\vec{F} = m\vec{g}$ спрямована до центру планети (в «побутовому» сенсі – вниз, «в підлогу», бо через великий радіус планети її поверхню можна вважати локально плоскою при більшості розрахунків).

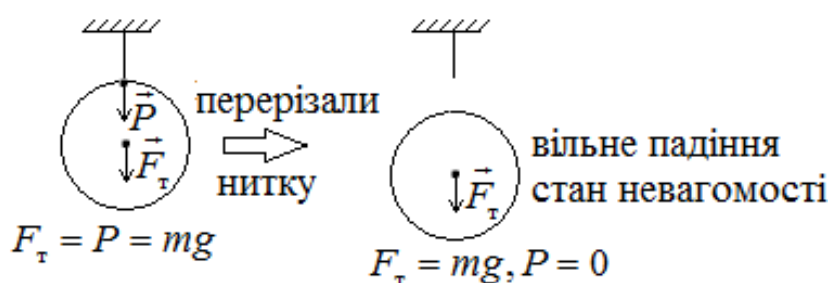


Рисунок 1.22

Вага тіла – сила, з якою тіло давить на опору або підвіс внаслідок того, що на тіло діє сила тяжіння.

Розглянемо приклад –

нехай тіло підвішене за нитку до стелі, див. рис. 1.22. Тоді і сила тяжіння, що діє на тіло, і вага тіла (тобто сила, що діє з боку тіла на нитку) за модулем дорівнюють $F_T = P = mg$, але фізичний зміст цих сил та точки їх прикладання різні. Сила тяжіння завжди прикладена до **центру мас** тіла (якщо тіло однорідне – він співпадає з геометричним центром; точне визначення центру мас буде наведено в подальших параграфах), вага – до **опори** (підвісу). Якщо ж нитку перерізати (див. рис. 1.22), то сила тяжіння $F_T = mg$ продовжить діяти на тіло, а вага тіла під час падіння дорівнюватиме нулю, бо тіло не матиме ні опор, ні підвісів.

1.3.3. Сила пружності

Сила пружності – сила, яка виникає у тілі в результаті його деформації і прагне повернути тіло у початковий стан. Обмежимося в цьому матеріалі лише деформаціями стиснення та розтягнення.

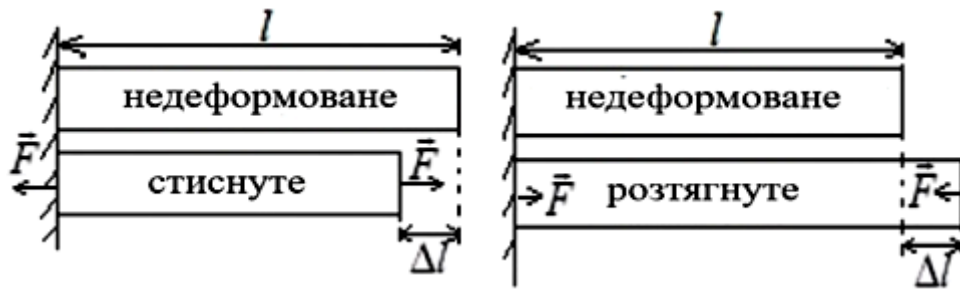


Рисунок 1.23

Пружна деформація – така деформація, яка зникає, якщо прибрати зовнішню силу, яка деформувала тіло. **Пластична деформація** не зникає, якщо прибрати відповідну зовнішню силу. У випадку пружної деформації в тілі виникає сила пружності, що підпорядковується **закону Гука**:

$$F = k\Delta l, \quad (1.67)$$

де Δl – зміна довжини тіла порівняно з недеформованим станом, k – жорсткість тіла, див. рис. 1.23; $[k] = \text{Н/м}$. Жорсткість тіла залежить від його матеріалу та геометричних розмірів:

$$k = \frac{ES}{l}, \quad (1.68)$$

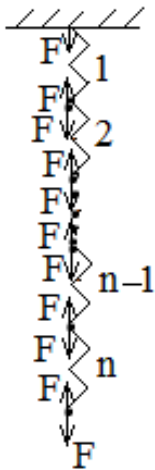


Рисунок 1.24

Де S – площа поперечного перерізу тіла, l – довжина тіла в недеформованому стані, E – модуль Юнга матеріалу тіла; $[E] = \text{Па} = \text{Н/м}^2$. Модуль Юнга є характеристикою лише матеріалу тіла і дається в довідниках.

Зазвичай закон Гука застосовний лише у випадку $\Delta l \ll l$. Якщо ця нерівність не виконається, то деформація в переважній більшості випадків перестає бути пружною, а закон Гука – застосовним.

Розглянемо жорсткість послідовного та паралельного з'єднань тіл. Послідовне з'єднання зображене на рис. 1.24. Це тип з'єднання, коли «початок» кожного наступного тіла прикріплюється до «кінця» попереднього. Розглянемо стан рівноваги, коли таку систему розтягують з зовнішньою силою F . Вниз на n -те тіло дія сила F , тож в цьому тілі має

виникати сила пружності, що дорівнює зовнішній силі F . Відповідно, n -те тіло діє на $(n-1)$ -ше з силою F , тож у $(n-1)$ -шому тілі теж має виникати сила пружності, що дорівнює F , і т. д. – приходимо до висновку, що сила пружності дорівнює F в кожному тілі системи. Тоді згідно закону Гука

$$F = k_1 \Delta l_1 = k_2 \Delta l_2 = \dots = k_n \Delta l_n \Rightarrow \Delta l_1 = \frac{F}{k_1}, \Delta l_2 = \frac{F}{k_2}, \dots, \Delta l_n = \frac{F}{k_n}. \quad (1.69)$$

З рис. 1.24 очевидно, що видовження цієї системи дорівнює сумі видовжень тіл:

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 + \dots + \Delta l_n, \quad (1.70)$$

видовження всієї системи виражається через жорсткість всієї системи:

$$\Delta l = \frac{F}{k}. \quad (1.71)$$

Тоді згідно (1.69) – (1.71) отримаємо **вираз для жорсткості послідовно з'єднаної системи**:

$$k = \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \dots + \frac{1}{k_n} \right)^{-1}. \quad (1.72)$$

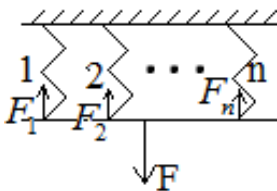


Рисунок 1.25

Приклад паралельного з'єднання тіл зображений на рис. 1.25. В розглянутому прикладі «початки» тіл прикріплені до стелі, а кінці – до горизонтальної планки нехтовно малої маси. Розглянемо стан рівноваги, коли

таку систему розтягують з зовнішньою силою F . На планку вниз діє сила F , а вгору – сили пружності тіл F_1, F_2, \dots, F_n . Через те, що планка знаходиться в рівновазі, матимемо

$$F = F_1 + F_2 + \dots + F_n. \quad (1.73)$$

Згідно закону Гука

$$F_1 = k_1 \Delta l, F_2 = k_2 \Delta l, \dots, F_n = k_n \Delta l, F_n = k \Delta l, \quad (1.74)$$

Δl – видовження всієї системи, k – жорсткість всієї системи. З рис. 1.25 бачимо, що видовження системи співпадає з видовженням кожного з тіл:

$$\Delta l = \Delta l_1 = \Delta l_2 = \Delta l_3 = \dots = \Delta l_n. \quad (1.75)$$

На основі (1.73) – (1.75) отримаємо, що

$$k = k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_n, \quad (1.76)$$

тобто *жорсткість паралельно з'єднаної системи тіл дорівнює сумі жорсткостей тіл*. Зауважимо, що отриманий результат (1.76) є застосовним, коли тіла розташовані близько одне до одного (в ідеалі – впритул), бо лише в такому випадку можна нехтувати «перекосом» планки.

1.3.4. Сила реакції опори та сила тертя

Сила нормальної реакції опори – сила, що діє на тіло з боку опори (або підвісу). Вектор сили нормальної реакції опори спрямований перпендикулярно поверхні зіткнення. За третім законом Ньютона сила нормальної реакції опори



Рисунок 1.26



Рисунок 1.27

спрямована протилежно до ваги тіла та за модулем дорівнює вазі тіла.

Сила тертя – це сила, що виникає при зіткненні двох тіл і перешкоджає їх відносному руху. Причиною виникнення тертя є шорсткість поверхонь, що труться і взаємодія молекул цих поверхонь.

Сила тертя ковзання – сила, що виникає при поступальному переміщенні одного з контактуючих тіл відносно іншого і діє в напрямку, протилежному напрямку ковзання, див. рис. 1.26.

Сила тертя спокою – сила, що виникає між двома контактуючими тілами і перешкоджає виникненню відносного руху, див. рис. 1.27.

Іншими словами, сила тертя ковзання між тілами виникає тоді, коли рух одного тіла відносно іншого вже почався, а сила тертя спокою заважає руху початись. Модуль сила тертя ковзання описується формулою

$$F_{\text{тр}} = \mu_{\text{к}} N, \quad (1.77)$$

N – сила нормальної реакції опори, $\mu_{\text{к}}$ – коефіцієнт тертя ковзання.

Сила тертя спокою за модулем дорівнює прикладеній силі, і не дає тілу почати рухатись. Але у сили тертя спокою є своє максимально можливе значення, яке дорівнює

$$F_{\text{тр}} = \mu_c N, \quad (1.78)$$

N – сила реакції опори, μ_c – коефіцієнт тертя спокою. Якщо зовнішня сила перевищить це значення, то сила тертя спокою вже не зможе завадити тілу почати рухатись, тіло «зірветься» з місця, і надалі діятиме сила тертя ковзання.

Коефіцієнт тертя – додатна безрозмірна величина, яка залежить як від матеріалів поверхонь, так і від якості їх обробки. Коефіцієнт тертя ковзання завжди менший за коефіцієнт тертя спокою, але в чималій кількості випадків

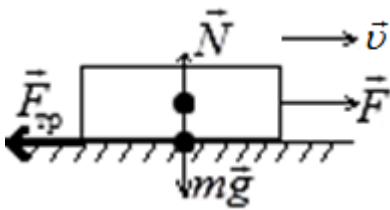


Рисунок 1.28

незначно менший. Зазвичай коефіцієнт тертя не перевищує 1.

У випадку руху по горизонтальній площині, який спричинено горизонтальною силою, див. рис.

1.28, матимемо $N = mg$ (рівність сил вздовж вертикальної осі), звідки $F_{\text{тр}} = \mu_k N = \mu mg$.

1.3.5. Закон зміни та збереження імпульсу. Теорема про рух центра мас

Розглянемо рух одного тіла. Згідно другого закону Ньютона матимемо

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \Rightarrow d\vec{p} = \vec{F} dt. \quad (1.79)$$

Проінтегруємо вираз (1.79) від 0 до τ :

$$\int_0^{\tau} d\vec{p} = \int_0^{\tau} \vec{F} dt \Rightarrow \vec{p}(\tau) - \vec{p}_0 = \int_0^{\tau} \vec{F}(t) dt, \quad (1.80)$$

де \vec{p}_0 – початковий імпульс тіла. Тож маємо

$$\vec{p}(\tau) = \vec{p}_0 + \int_0^{\tau} \vec{F}(t) dt, \quad (1.81)$$

вираз (1.81) є **законом зміни імпульсу тіла**. У випадку $\vec{F} = 0$ згідно (1.81) матимемо $\vec{p}(\tau) = \vec{p}_0 = \text{const}$. Тож при відсутності дії сили на тіло зберігається імпульс тіла – **закон збереження імпульсу тіла**.

Розглянемо тепер рух системи тіл. Нехай маємо систему з n точкових тіл, на яку діють зовнішні сили. Позначимо \vec{F}_i – результуюча сила, що діє на i -те тіло системи; \vec{F}_{ij} – сила, що діє з боку i -го тіла системи на j -те тіло системи та \vec{F}_i^e – результуюча зовнішня сила, що діє на i -те тіло системи. Згідно другого закону Ньютона матимемо

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{F}_1 = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{31} + \dots + \vec{F}_{n1} + \vec{F}_1^e, \quad \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{F}_2 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{32} + \dots + \vec{F}_{n2} + \vec{F}_2^e, \dots, \\ \frac{d\vec{p}_n}{dt} = \vec{F}_n = \vec{F}_{1n} + \vec{F}_{2n} + \dots + \vec{F}_{n-1,n} + \vec{F}_n^e. \end{aligned} \quad (1.82)$$

Систему рівнянь (1.82) компактно запишемо у вигляді

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \vec{F}_{ji} + \vec{F}_i^e. \quad (1.83)$$

Введемо фізичну величину

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i, \quad (1.84)$$

яка є сумарним імпульсом тіл системи. Тоді на основі (1.83) матимемо

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \vec{F}_{ji} + \vec{F}_i^e \right) = \sum_{\substack{i,j=1 \\ j \neq i}}^n \vec{F}_{ji} + \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^e. \quad (1.85)$$

Перепишемо перший доданок у правій частині виразу (1.85)

$$\sum_{\substack{i,j=1 \\ j \neq i}}^n \vec{F}_{ji} = (\vec{F}_{21} + \vec{F}_{12}) + (\vec{F}_{31} + \vec{F}_{13}) + \dots + (\vec{F}_{n-1,n} + \vec{F}_{n,n-1}) = 0, \quad (1.86)$$

бо на основі третього закону Ньютона сума в кожній з дужок дорівнює нулю, див. (1.64). Тож згідно (1.85) та (1.86) маємо

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^e = \vec{F}^e, \quad (1.87)$$

\vec{F}^e – векторна сума зовнішніх сил, що діють на тіла системи. Тоді аналогічно до отримання виразу (1.81) з (1.87) матимемо

$$\vec{p}(\tau) = \vec{p}_0 + \int_0^{\tau} \vec{F}^e(t) dt. \quad (1.88)$$

Вираз (1.88) є *законом зміни імпульсу системи тіл*. Сумарний імпульс тіл системи може змінюватись лише зовнішніми, не внутрішніми силами. Якщо система є замкненою (зовнішні сили не діють), то $\vec{p}(\tau) = \vec{p}_0 = \text{const}$. **Якщо система є замкненою (зовнішні сили не діють), то сумарний імпульс тіл системи зберігається (є постійним) – закон збереження імпульсу.**

Нехай є система n точкових тіл. Тоді за визначенням *центр мас системи* – точка, радіус-вектор якої задано виразом

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots + m_n \vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i, \quad (1.89)$$

де $m = m_1 + m_2 + \dots + m_n$ – сумарна маса тіл системи. У випадку, коли тіло є однорідним та має очевидний геометричний центр (наприклад, центр кулі або круга, точка перетину діагоналей прямокутника), то центр мас співпадає з геометричним центром тіла. Візьмемо другу похідну за часом від обоз частин рівності (1.89), похідна за часом позначається крапкою. Згідно визначень імпульсу, швидкості та прискорення матимемо

$$\ddot{\vec{R}} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \ddot{\vec{r}}_i = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \frac{1}{m} \frac{d\vec{p}}{dt}, \quad (1.90)$$

та з урахуванням (1.87) отримаємо

$$m \ddot{\vec{R}} = \vec{F}^e. \quad (1.91)$$

Тож *центр мас рухається як матеріальна точка, маса якої дорівнює сумарній масі системи, а діюча сила – векторна сума зовнішніх сил, що діють на тіла системи*. Це твердження називається *теоремою про рух центру мас*. Відповідно, *центр мас замкненої системи або нерухомий, або рухається рівномірно прямолінійно*.

Зауважимо, що якщо мати справу з твердим тілом, то його можна подумки розбити на дуже велику кількість дуже маленьких (фактично, точкових) частин, тож рівняння (1.91) є справедливим і для руху центру мас твердого тіла: *центр*

мас твердого тіла рухається як матеріальна точка, маса якої дорівнює масі тіла, а діюча сила є векторною сумою сил, що діють на тіло.

Вище наведене рівняння (1.91) є справедливими у випадку, коли маси тіл є сталими; саме цей випадок є найпоширенішим.

1.3.6. Реактивний рух. Рівняння Мещерського. Формула Ціолковського

На прикладі руху ракети розглянемо рух тіла змінної маси. Ракета виштовхує з себе з великою швидкістю (відповідно, з великою силою) газу, що згідно третього закону Ньютона призводить до того, що газу з цією ж силою штовхають ракету вперед. Такий рух називається *реактивним рухом*. Маса ракети є спадною функцією часу.

Нехай в заданий момент часу маса ракети m та швидкість \vec{v} . Нехай за малий час dt ракета отримала приріст швидкості $d\vec{v}$ та приріст маси $dm < 0$. За цей же малий час dt ракета викинула газу масою $dm_{\text{газ}}$ та швидкістю $\vec{v}_{\text{газ}}$. Очевидно, що за малий час маса викинутого газу буде мала, проте не мала швидкість! Позначимо \vec{p} – сумарний імпульс системи ракети та газів. Тоді зміна імпульсу системи

$$d\vec{p} = (m + dm)(\vec{v} + d\vec{v}) - m\vec{v} + \vec{v}_{\text{газ}} dm_{\text{газ}}, \quad (1.92)$$

перші два доданки алгебраїчної суми в правій частині описують зміну імпульсу ракети, а третій доданок – зміну імпульсу газів. Після розкриття дужок та збирання подібних матимемо

$$d\vec{p} = m d\vec{v} + \vec{v} dm + d\vec{v} \cdot dm + \vec{v}_{\text{газ}} dm_{\text{газ}}, \quad (1.93)$$

доданком $d\vec{v} \cdot dm$ знехтуємо, бо він є набагато меншим за всі інші доданки в правій частині виразу (1.93). Формально кажучи, цей доданок є нескінченно малою величиною вищого порядку, ніж інші нескінченно малі величини у правій частині виразу (1.93). Тож

$$d\vec{p} = m d\vec{v} + \vec{v} dm + \vec{v}_{\text{газ}} dm_{\text{газ}}. \quad (1.94)$$

Очевидно, що маса виштовхнутого газу дорівнює зменшенню маси ракети:

$$dm_{\text{газ}} + dm = 0, \quad (1.95)$$

не слід забувати, що $dm < 0$, $dm_{\text{газ}} > 0$. Тоді на основі (1.94) та (1.95) матимемо

$$d\vec{p} = md\vec{v} - (\vec{v}_{\text{газ}} - \vec{v})dm. \quad (1.96)$$

Різниця швидкостей $\vec{v}_{\text{газ}} - \vec{v}$ є відносною швидкістю (тобто швидкістю, з якої гази вилітають відносно ракети; іншими словами, швидкістю газу, який виштовхує ракета, у власній системі відліку ракети). Це є очевидним на основі закону додавання швидкостей (1.38), де в якості тіла «виступають» гази, а в якості рухомої системи відліку – ракета. Тож

$$d\vec{p} = md\vec{v} - \vec{v}_{\text{відн}} dm, \quad \vec{v}_{\text{відн}} = \vec{v}_{\text{газ}} - \vec{v}. \quad (1.97)$$

Якщо на ракету діє зовнішня сила \vec{F} , то згідно закону зміни імпульсу системи

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} - \vec{v}_{\text{відн}} \frac{dm}{dt} \Rightarrow m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \vec{v}_{\text{відн}} \frac{dm}{dt}, \quad (1.98)$$

Отриманий вираз можна інтерпретувати так:

$$m\vec{a} = \vec{F}_{\text{зовнішня}} + \vec{F}_{\text{реактивна}}, \quad \vec{F}_{\text{реактивна}} = \vec{v}_{\text{відн}} \frac{dm}{dt}. \quad (1.99)$$

Рівняння (1.99) назвали **рівнянням Мещерського**.

Розглянемо простий випадок, коли $\vec{F} = 0$ та $\vec{v}_{\text{відн}} = \text{const}$, початкова маса ракети m_0 , початкова швидкість нульова. Рух буде одновимірним, напрям польоту приймемо за додатний. Тоді згідно (1.98)

$$m \frac{dv}{dt} = -v_{\text{відн}} \frac{dm}{dt}, \quad (1.100)$$

$v_{\text{відн}}$ взята зі знаком «-», бо спрямована проти руху. На основі (1.100) отримаємо

$$\frac{dm}{m} = -\frac{1}{v_{\text{відн}}} dv \Rightarrow \int \frac{dm}{m} = -\frac{1}{v_{\text{відн}}} \int dv \Rightarrow \ln m = -\frac{v}{v_{\text{відн}}} + C, \quad (1.101)$$

C – стала інтегрування, яку знаходимо з початкових умов:

$$C = \ln m_0, \quad (1.102)$$

див. аналогічну ідею при виведенні результатів (1.54) та (1.60). Згідно (1.101) та (1.102) остаточно отримаємо

$$m = m_0 e^{-v/v_{\text{відн}}}. \quad (1.103)$$

Результат (1.103) носить назву *формули Ціолковського*.

1.3.7. Робота. Енергія. Закон збереження енергії.

Робота сили на малій ділянці траєкторії (елементарна робота) за визначенням є скалярним добутком сили та відповідного малого переміщення:

$$\delta A = (\vec{F}, d\vec{r}) = |\vec{F}| |d\vec{r}| \cos \alpha. \quad (1.104)$$

де \vec{F} – сила, $d\vec{r}$ – мале переміщення, α – кут між «стрілочками» сили та переміщення. Робота сила на траєкторії – сума робіт на маленьких ділянках, ділянок нескінченно багато, вони нескінченно малі. Як відомо з визначення інтегралу, така сума ж інтегралом:

$$A = \int \delta A = \int_L (\vec{F}, d\vec{r}). \quad (1.105)$$

Інтеграл (1.105) є так званим криволінійним інтегралом, який взято вздовж траєкторії тіла, крива L є траєкторією тіла. $[A] = \text{Дж} = \text{кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}^2$.

Потужність є швидкістю зміни роботи:

$$P = \frac{\delta A}{dt}. \quad (1.106)$$

$[P] = \text{Вт} = \text{Дж}/\text{с} = \text{кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}^3$. *Кінетична енергія* тіла за визначенням дорівнює

$$E_{\text{к}} = \frac{1}{2} m v^2, \quad (1.107)$$

де m – маса тіла, v – його швидкість. Розглянемо рух тіла вздовж траєкторії (тут і надалі знову розглядатимемо тіла сталої маси):

$$A = \int_L (\vec{F}, d\vec{r}) = \int_L \left(\frac{d\vec{p}}{dt}, \vec{v} dt \right) = \int_L (\vec{v}, d\vec{p}) = m \int_L (\vec{v}, d\vec{v}) = m \int_L d \left(\frac{v^2}{2} \right). \quad (1.108)$$

Пояснимо, звідки взялась остання рівність в ланцюжку рівностей (1.108).

$$\begin{aligned} \frac{v^2}{2} &= \frac{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}{2} \Rightarrow d\left(\frac{v^2}{2}\right) = d\left(\frac{v_x^2}{2}\right) + d\left(\frac{v_y^2}{2}\right) + d\left(\frac{v_z^2}{2}\right) = \\ &= \frac{2v_x dv_x}{2} + \frac{2v_y dv_y}{2} + \frac{2v_z dv_z}{2} = v_x dv_x + v_y dv_y + v_z dv_z = (\vec{v}, d\vec{v}), \end{aligned} \quad (1.109)$$

де $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$, $d\vec{v} = (dv_x, dv_y, dv_z)$, див. визначення скалярного добутку (1.6).

Тож згідно (1.108) матимемо

$$A = m \int_L d\left(\frac{v^2}{2}\right) = m \cdot \frac{v^2}{2} \Bigg|_{\text{НаПочатку}}^{\text{Наприкінці}} = m \frac{v_2^2}{2} - m \frac{v_1^2}{2} = E_{к2} - E_{к1}. \quad (1.110)$$

Тож різниця кінетичної енергії тіла наприкінці руху та на початку руху дорівнює роботі всіх сил, що діють на тіло. Це твердження назвали також **теоремою кінетичної енергії**.

Консервативною, або потенціальною силою називають силу, робота якої вздовж будь-якого замкнутого контуру дорівнює нулю. Наприклад, можна показати, що сила пружності, що підпорядковується закону Гука, сила тяжіння, сила гравітаційної взаємодії є потенціальними силами. Також можна показати, що **робота потенціальної сили не залежить від траєкторії, а залежить лише від кінцевого та початкового положень тіла**. Потенціальні сили залежать від положення тіла, не від швидкості. Потенціальній силі співставляють поняття потенціальної енергії (позначення $E_{п}$): **потенціальна енергія** – це величина розмірності Дж, така, що робота відповідної потенціальної сили при переміщенні тіла із точки 1 в точку 2 дорівнює різниці потенціальних енергій тіла у цих точках:

$$A = E_{п1} - E_{п2}. \quad (1.111)$$

Фізичний зміст має не стільки сама потенціальна енергія, скільки різниця потенціальних енергій. Потенціальна енергія визначена з точністю до плюс константи, а як саме – у кожному конкретному випадку люди між собою домовляються. Якщо на тіло діють декілька потенціальних сил, то потенціальна енергія тіла є сумою відповідних потенціальних енергій.

Потенціальна енергія тіла завжди залежить від положення тіла, не від швидкості.

Повною механічною енергією тіла називають суму потенціальної та кінетичної енергій:

$$E = E_{\text{п}} + E_{\text{к}}. \quad (1.112)$$

Якщо на тіло діють лише потенціальні сили, то згідно (1.110) – (1.112)

$$A = E_{\text{п1}} - E_{\text{п2}} = E_{\text{к2}} - E_{\text{к1}} \Rightarrow E_{\text{п1}} + E_{\text{к1}} = E_{\text{к2}} + E_{\text{п2}} \Rightarrow E_1 = E_2, \quad (1.113)$$

яка у тіла енергія в початковій точці 1, така ж і в кінцевій точці 2. Причому в ролі «кінцевої» можна обирати і проміжну, а не «фінішну» точку траєкторії. Відповідно, **якщо на тіло діють лише потенціальні сили, то його повна механічна енергія зберігається.** Це твердження називають **законом збереження енергії.** Можна показати, що аналогічне твердження справедливе і для системи тіл – **повна механічна енергія системи тіл, що знаходяться під дією тільки потенціальних сил, залишається постійною.** Кінетичною енергією системи є сума кінетичних енергій тіл системи, а потенціальною енергією системи – сума потенціальних енергій тіл системи.

Очевидно, не всі сили є потенціальними. Серед не потенціальних сил виділяють так звані *дисипативні* та *гіроскопічні* сили. Дисипативна сила спрямована проти руху тіла в кожній точці траєкторії (наприклад, сила тертя). *Робота дисипативної сили завжди від'ємна і залежить від траєкторії.* Гіроскопічними силами називають сили, що спрямовані завжди перпендикулярно до швидкості тіла, їх робота завжди дорівнює нулю (наприклад, сила Лоренца в магнітному полі). На відміну від потенціальних сил, гіроскопічні сили залежать також і від швидкості.

Якщо ж на тіло діють потенціальні, дисипативні та гіроскопічні сили, то згідно (1.110)

$$A_{\text{потенціальних}} + A_{\text{дисипативних}} + A_{\text{гіроскопічних}} = E_{\text{к2}} - E_{\text{к1}}. \quad (1.114)$$

Через те, що $A_{\text{потенціальних}} = E_{\text{п1}} - E_{\text{п2}}$, $A_{\text{гіроскопічних}} = 0$, маємо

$$A_{\text{дисипативних}} = E_{к2} + E_{п2} - (E_{к1} + E_{п1}) = E_2 - E_1, \quad (1.115)$$

зміна повної механічної енергії тіла дорівнює роботі дисипативних сил.

Робота дисипативних сил є від'ємною, тож внаслідок дії дисипативних сил повна механічна енергія зменшується.

1.3.8. Абсолютно пружний та абсолютно непружний удари.

Розглянемо систему двох тіл, між якими відбувається зіткнення (удар). Тривалість удару настільки маленька, що зовнішні сили під час удару не встигають змінити сумарний імпульс системи, тож впродовж тривалості удару систему можна вважати замкненою. Також вважаємо, що під час удару тіла не встигають змінити свого положення, тож потенціальна енергія системи не змінюється під час удару. *При ударі обов'язково виконується закон збереження імпульсу, проте може не виконуватись закон збереження енергії.*

Удар, після якого тіла «злипаються» в одне ціле, називається *абсолютно непружним ударом*. Згідно закону збереження імпульсу при ударі

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{v} \Rightarrow \vec{v} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}, \quad (1.116)$$

$\vec{v}_{1,2}$ – швидкості тіл за мить до удару, \vec{v} – швидкість «єдиного цілого» через мить після удару. Різниця кінетичної енергії системи до та після удару

$$E_{к_після} - E_{к_до} = \frac{(m_1 + m_2)v^2}{2} - \frac{m_1v_1^2}{2} - \frac{m_2v_2^2}{2}. \quad (1.117)$$

Підставляючи (1.116) в (1.117) на основі виразів

$$\begin{aligned} (m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2)^2 &= m_1^2v_1^2 + m_2^2v_2^2 + 2m_1m_2(\vec{v}_1, \vec{v}_2), \\ (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2 &= v_1^2 + v_2^2 - 2(\vec{v}_1, \vec{v}_2) \end{aligned} \quad (1.118)$$

шляхом певних перетворень отримуємо вираз

$$E_{к_після} - E_{к_до} = -\frac{\mu}{2}(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2, \quad \mu = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}. \quad (1.119)$$

Величина μ називається приведеною масою тіл, вираз (1.119) описує втрату повної механічної енергії системи внаслідок абсолютно непружного удару.

Удар, після якого не відбувається втрати повної механічної енергії системи, називається **абсолютно пружним**. Абсолютно пружний удар є теоретичною ідеалізацією, та є єдиним типом удару, при якому виконується закон збереження енергії. На основі законів збереження енергії та імпульсу маємо систему рівнянь

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2, \quad \frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} = \frac{m_1u_1^2}{2} + \frac{m_2u_2^2}{2}, \quad (1.120)$$

де $\vec{v}_{1,2}$ – швидкості тіл до удару, $\vec{u}_{1,2}$ – швидкості тіл після удару. Перепишемо (1.120) у вигляді

$$m_1(\vec{v}_1 - \vec{u}_1) = m_2(\vec{u}_2 - \vec{v}_2), \quad \frac{m_1}{2}(\vec{v}_1 - \vec{u}_1)(\vec{v}_1 + \vec{u}_1) = \frac{m_2}{2}(\vec{u}_2 - \vec{v}_2)(\vec{u}_2 + \vec{v}_2), \quad (1.121)$$

тут використано, що $(\vec{a} - \vec{b})(\vec{a} + \vec{b}) = a^2 + (\vec{a}, \vec{b}) - (\vec{a}, \vec{b}) - b^2 = a^2 - b^2$. Згідно (1.121) маємо

$$m_1(\vec{v}_1 - \vec{u}_1) = m_2(\vec{u}_2 - \vec{v}_2), \quad \vec{v}_1 + \vec{u}_1 = \vec{u}_2 + \vec{v}_2, \quad (1.122)$$

тут враховано, що швидкості тіл після удару мають не співпадати зі швидкостями тіл до удару. З системи (1.122) легко отримати, що

$$\vec{u}_2 = \frac{2m_1\vec{v}_1 - m_1\vec{v}_2 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}, \quad \vec{u}_1 = \frac{2m_2\vec{v}_2 - m_2\vec{v}_1 + m_1\vec{v}_1}{m_1 + m_2}. \quad (1.123)$$

Вирази (1.123) є виразами для швидкостей тіл після абсолютно пружного удару.

1.3.9. Потенціальна енергія в окремих випадках

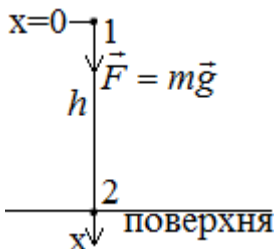


Рисунок 1.29

Спершу розглянемо потенціальну енергію в полі тяжіння, див. рис. 1.29. «За домовленістю» потенціальна енергія тіла вважається нульовою на поверхні планети: $E_{n2} = 0$. Через те, що робота потенціальної сили не залежить від траєкторії, розглянемо найпростішу траєкторію, що являє собою відрізок прямої. Згідно (1.105) та (1.111)

$$A = E_{n1} - E_{n2} = E_{n1} = \int_L (\vec{F}, d\vec{r}) = \int_0^h mg \cos 0 dx = \int_0^h mg dx = mgh. \quad (1.124)$$

Тож *потенціальна енергія точкового тіла, що знаходиться на висоті h над поверхнею планети $E_n = mgh$. Якщо ж тіло не точкове, то $E_n = mgh_{\text{ЦМ}}$, $h_{\text{ЦМ}}$ – висота центру мас тіла.* Пояснимо, чому так. Потенціальна енергія тіла дорівнює сумі потенціальних енергій складових частин тіла. Подумки розіб'ємо тіло на дуже багато дуже маленьких частин:

$$E_n = \sum_{i=1}^n m_i h_i g = g \sum_{i=1}^n m_i h_i = mg \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i h_i = mgh_{\text{ЦМ}}, \quad (1.125)$$

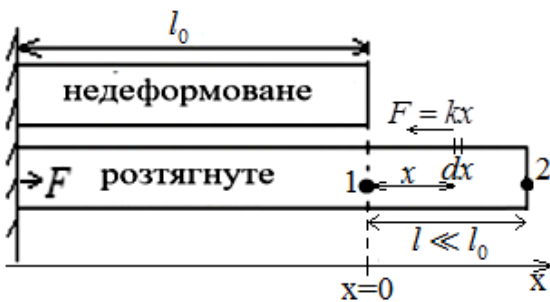


Рисунок 1.30

m – маса всього тіла; при виведенні (1.125) використано визначення центру мас (1.89).

Розглянемо потенціальну енергію пружних деформацій, див. рис. 1.30.

Нехай видовження тіла дорівнює l . «За

домовленістю» нульовою вважається потенціальна енергія недеформованого тіла: $E_{n1} = 0$. Маємо

$$A = E_{n1} - E_{n2} = -E_{n2} = \int_L (\vec{F}, d\vec{r}) = \int_0^l kx \cos \pi dx = -k \int_0^l x dx \Rightarrow E_{n2} = k \frac{l^2}{2}. \quad (1.126)$$

При пружній деформації потенціальна енергія розтягнутого (стисненого) з початкового недеформованого стану на відстань l тіла дорівнює $U = kl^2/2$.

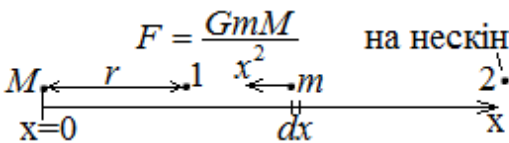


Рисунок 1.31

Розглянемо потенціальну енергію гравітаційної взаємодії точкових тіл.

Перше тіло вважатимемо нерухомим, друге віддаляємо від

першого тіла з початкової відстані r на нескінченно велику відстань, див. рис.

1.31. За нульову вважають потенціальну енергію гравітаційної взаємодії на

нескінченності: $E_{n2} = 0$. Тоді

$$A = E_{n1} - E_{n2} = E_{n1} = \int_L (\vec{F}, d\vec{r}) = \int_r^\infty \frac{GmM}{x^2} \cos \pi dx = -GmM \int_r^\infty \frac{dx}{x^2} = -\frac{GmM}{r}. \quad (1.127)$$

Тож потенціальна енергія гравітаційного притягання двох матеріальних точок дорівнює $U = -GmM/r$, r – відстань між ними.

1.3.10. Момент сили, момент імпульсу. Рівняння моментів

Нехай точка O – точка, відносно якої розглядаємо момент імпульсу та момент сили. Проведемо з точки O радіус-вектор до точки прикладення сили.

Тоді за визначенням **моментом сили** є векторний добуток

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}]. \quad (1.128)$$

Плече сили – відстань від точки O до лінії дії сили. **Лінія дії сили** – пряма, що містить вектор цієї сили. Коли обчислюють векторний добуток, вектори співставляють так, щоб їх початок був в одній точці, див. рис. 1.32.

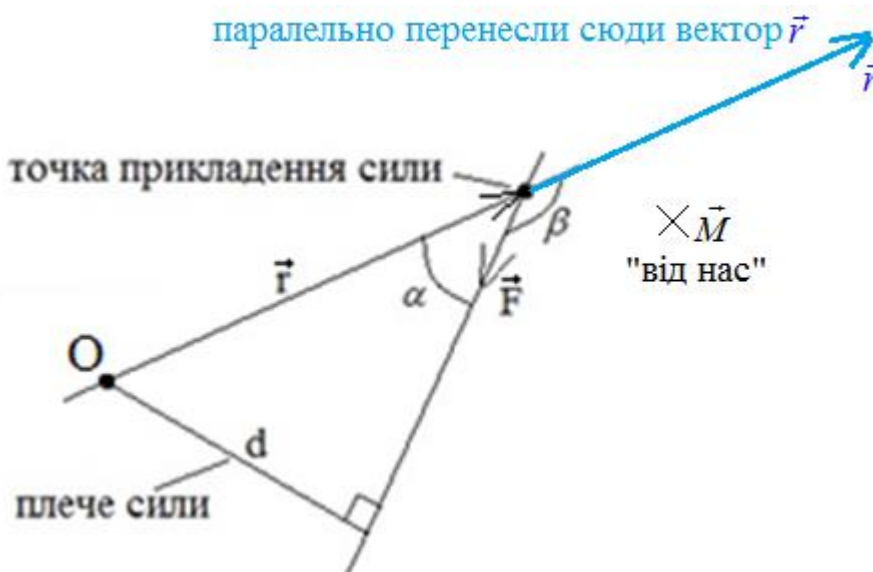


Рисунок 1.32

Згідно (1.10) модуль моменту сили

$$|\vec{M}| = |\vec{F}||\vec{r}|\sin \beta = |\vec{F}||\vec{r}|\sin(\pi - \alpha) = |\vec{F}||\vec{r}|\sin \alpha = |\vec{F}|d, \quad (1.129)$$

тобто **модуль моменту сили дорівнює добутку сили на плече**.

Момент імпульсу матеріальної точки **відносно точки** O є векторний добуток

$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}], \quad (1.130)$$

де \vec{r} – радіус-вектор, проведений з точки О до матеріальної точки. Відповідно, якщо точкове тіло рухається під дією певної сили \vec{F} , то

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \left[\frac{d\vec{r}}{dt}, \vec{p} \right] + \left[\vec{r}, \frac{d\vec{p}}{dt} \right] = [\vec{v}, m\vec{v}] + [\vec{r}, \vec{F}] = m[\vec{v}, \vec{v}] + \vec{M}, \quad (1.131)$$

звідки

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}, \quad (1.132)$$

тут враховано, що $[\vec{v}, \vec{v}] = 0$, бо $\vec{v} \parallel \vec{v}$. Рівняння (1.132) називають **рівнянням моментів**, і воно є основним законом динаміки обертального руху матеріальної точки.

Розглянемо систему з n матеріальних точок, система може бути під впливом зовнішніх сил. Позначимо \vec{F}_i – результуюча сила, що діє на i -те тіло системи; \vec{F}_{ij} – сила, що діє з боку i -го тіла системи на j -те тіло системи та \vec{F}_i^e – результуюча зовнішня сила, що діє на i -те тіло системи. Введемо фізичну величину

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^n [\vec{r}_i, \vec{p}_i] = \sum_{i=1}^n \vec{L}_i, \quad (1.133)$$

яка є сумарним моментом імпульсу тіл системи. Згідно (1.132) матимемо

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}}{dt} &= \sum_{i=1}^n \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i = \sum_{i=1}^n [\vec{r}_i, \vec{F}_i] = \sum_{i=1}^n \left[\vec{r}_i, \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \vec{F}_{ji} + \vec{F}_i^e \right] = \\ &= \sum_{i=1}^n \left[\vec{r}_i, \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \vec{F}_{ji} \right] + \sum_{i=1}^n [\vec{r}_i, \vec{F}_i^e] = \sum_{\substack{i,j=1 \\ j \neq i}}^n [\vec{r}_i, \vec{F}_{ji}] + \sum_{i=1}^n [\vec{r}_i, \vec{F}_i^e]. \end{aligned} \quad (1.134)$$

Детальніше розпишемо перший доданок в отриманому виразі:

$$\sum_{\substack{i,j=1 \\ j \neq i}}^n [\vec{r}_i, \vec{F}_{ji}] = \left([\vec{r}_1, \vec{F}_{21}] + [\vec{r}_2, \vec{F}_{12}] \right) + \left([\vec{r}_1, \vec{F}_{31}] + [\vec{r}_3, \vec{F}_{13}] \right) + \dots + \quad (1.135)$$

$$+\left(\left[\vec{r}_{n-1}, \vec{F}_{n,n-1}\right]+\left[\vec{r}_n, \vec{F}_{n-1,n}\right]\right).$$

Згідно третього закону Ньютона

$$\left[\vec{r}_1, \vec{F}_{21}\right]+\left[\vec{r}_2, \vec{F}_{12}\right]=\left[\vec{r}_1, \vec{F}_{21}\right]-\left[\vec{r}_2, \vec{F}_{21}\right]=\left[\vec{r}_1-\vec{r}_2, \vec{F}_{21}\right]. \quad (1.136)$$

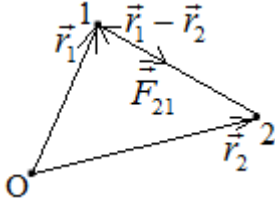


Рисунок 1.33

Сила \vec{F}_{21} спрямована вздовж прямої, що з'єднує тіла (один з можливих випадків – див. рис. 1.33). Тож $\vec{F}_{21} \parallel (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ та

$$\left[\vec{r}_1 - \vec{r}_2, \vec{F}_{21}\right] = 0, \text{ при цьому не важливо, чи сила } \vec{F}_{21}$$

спрямована від точки 2 до точки 1 або навпаки. Аналогічно

кожен з доданків суми (1.135) дорівнює нулю, тож вся сума (1.135) дорівнює нулю, та згідно (1.134) бачимо, що

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^e, \quad \vec{M}^e = \sum_{i=1}^n \left[\vec{r}_i, \vec{F}_i^e\right], \quad (1.137)$$

\vec{M}^e – сума моментів зовнішніх сил, що діють на тіла системи. Вираз (1.137) є **законом зміни моменту імпульсу системи тіл**. Якщо $\vec{M}^e = 0$ (наприклад, якщо система ізольована), то сумарний момент імпульсу системи буде зберігатись – **закон збереження моменту імпульсу**.

Тверде тіло можна уявити як систему нескінченно великої кількості матеріальних точок, жорстко пов'язаних між собою, тож результат (1.137) є справедливим і для твердого тіла: **зміна моменту імпульсу твердого тіла відносно точки дорівнює сумі моментів сил, що діють на це тверде тіло відносно цієї ж точки**.

Вище розглянуто поняття моментів *відносно точки*. Тепер розглянемо їх *відносно осі, що містить цю точку*. **Моментом сили відносно осі** є проекція моменту сили відносно точки на цю вісь, аналогічно **моментом імпульсу відносно осі** є проекція моменту імпульсу відносно точки на цю вісь.

Відповідно, згідно (1.132) для моментів відносно певної осі Ox має виконуватись співвідношення

$$\frac{dL_x}{dt} = M_x, \quad (1.138)$$

бо яка співвідношення працює для векторів, то точно таке ж відношення має спрацювати і для проекцій.

Розпишемо радіус-вектор та вектор сили по координатним осям:

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z, \quad \vec{F} = F_x\vec{e}_x + F_y\vec{e}_y + F_z\vec{e}_z. \quad (1.139)$$

Тоді згідно (1.9) отримаємо

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}] = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \Rightarrow M_x = yF_z - zF_y. \quad (1.140)$$

Розіб'ємо кожен з векторів (1.139) на перпендикулярну та паралельну до осі Ox компоненту:

$$\vec{r} = \vec{r}_{\parallel} + \vec{r}_{\perp}, \quad \vec{F} = \vec{F}_{\parallel} + \vec{F}_{\perp}, \quad (1.141)$$

$$\vec{r}_{\parallel} = x\vec{e}_x, \quad \vec{r}_{\perp} = y\vec{e}_y + z\vec{e}_z, \quad \vec{F}_{\parallel} = F_x\vec{e}_x, \quad \vec{F}_{\perp} = F_y\vec{e}_y + F_z\vec{e}_z,$$

\vec{r}_{\parallel} та \vec{F}_{\parallel} – паралельні до осі Ox компоненти, \vec{r}_{\perp} та \vec{F}_{\perp} – перпендикулярні. Тоді

$$[\vec{r}_{\perp}, \vec{F}_{\perp}] = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & y & z \\ 0 & F_y & F_z \end{vmatrix} \Rightarrow [\vec{r}_{\perp}, \vec{F}_{\perp}]_x = yF_z - zF_y, \quad (1.142)$$

та на основі (1.140) та (1.142) бачимо, що

$$M_x = [\vec{r}_{\perp}, \vec{F}_{\perp}]_x, \quad (1.143)$$

тож при обчисленні моменту сили відносно осі достатньо обчислити векторний добуток лише від перпендикулярних до осі складових радіус-вектору та сили, а потім взяти від нього проекцію на вісь. Аналогічно

$$L_x = [\vec{r}_{\perp}, \vec{p}_{\perp}]_x, \quad (1.144)$$

при обчисленні моменту імпульсу відносно осі достатньо обчислити векторний добуток лише від перпендикулярних до осі складових радіус-вектору та імпульсу.

1.3.11. Кінетична енергія обертання твердого тіла. Момент інерції

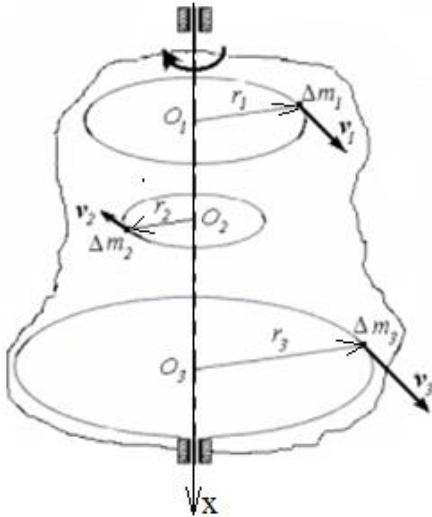


Рисунок 1.34

Розглянемо обертання твердого тіла навколо нерухомої осі, див. рис. 1.34. Кожна точка такого тіла рухається по колу, радіус якого є відстанню від цієї точки до осі. Так як все тверде тіло разом за певний час повертається на певний кут, то на точно такий же кут повернуться всі його точки. Тож кутова швидкість кожної точки твердого тіла однакова (позначимо її ω). Розіб'ємо тверде тіло на дуже багато дуже маленьких частин (фактично, точкових). Тоді

$$E_k = \sum_{i=1}^n \frac{\Delta m_i \cdot v_i^2}{2} = \{v_i = \omega r_i\} = \sum_{i=1}^n \frac{\Delta m_i \cdot \omega^2 r_i^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^n \Delta m_i \cdot r_i^2. \quad (1.145)$$

Величину

$$I = \sum_{i=1}^n \Delta m_i \cdot r_i^2 = \int_V r^2 dm \quad (1.146)$$

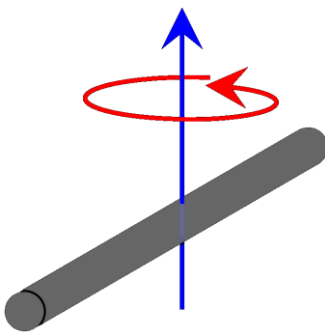


Рисунок 1.35

назвали **моментом інерції** твердого тіла. Момент інерції – сума добутків $\Delta m_i \cdot r_i^2$ по всьому твердому тілу, Δm_i – маса відповідної маленької частини цього твердого тіла, r_i – відстань від цієї малої частини до осі обертання (по суті, це – радіус кола, по якому обертається відповідна маленька частина твердого тіла відносно нерухомої осі).

Відповідно, ця сума є інтегралом від $r^2 dm$, взятим по всьому об'єму тіла. Як бачимо з (1.145) та (1.146), **кінетична енергія обертання твердого тіла дорівнює**

$$E_k = \frac{1}{2} I \omega^2. \quad (1.147)$$

Список моментів інерції тіл деяких форм наведено в літературі. Наприклад, момент інерції однорідного тонкого стрижня відносно осі, що проходить через

його середину перпендикулярно до нього, дорівнює $I = ml^2/12$, l – довжина стрижня, m – його маса, див. рис. 1.35. Покажемо, звідки взявся цей результат. Розглянемо рис. 1.36.

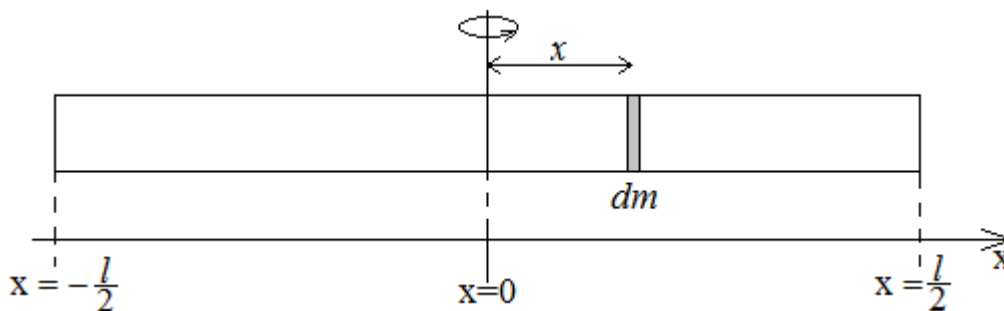


Рисунок 1.36

Лінійна густина стрижня (лінійна густина маси) – маса одиниці довжини стрижня, або $\sigma = dm/dl$, dl – малий елемент довжини стрижня, dm – маса цього елемента. Стрижень називається однорідним, якщо його лінійна густина постійна вздовж всієї довжини. Тож

$$I = \int_V r^2 dm = \int_{-l/2}^{l/2} x^2 \sigma dx = \sigma \int_{-l/2}^{l/2} x^2 dx = \sigma \frac{x^3}{3} \Big|_{-l/2}^{l/2} = \frac{\sigma l^3}{12} = \frac{\sigma l \cdot l^2}{12} = \frac{ml^2}{12}, \quad (1.148)$$

що і треба було показати. При цьому виведенні враховано очевидні співвідношення $dm = \sigma dx$ та $m = \sigma l$.

Момент інерції матеріальної точки відносно осі, очевидно, дорівнює mr^2 , m – маса матеріальної точки, r – відстань до осі.

1.3.12. Обертальний рух твердого тіла відносно нерухомої осі

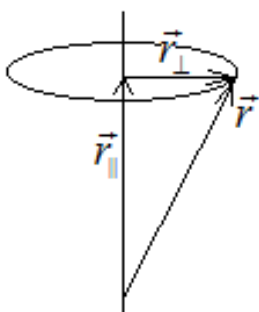


Рисунок 1.37

Момент імпульсу твердого тіла – сума моментів імпульсу складових частин: $L_x = \sum_{i=1}^n [\vec{r}_{\perp i}, \vec{p}_{\perp i}]_x$; $|\vec{r}_{\perp i}| = r_i$ – відстань від даної частини твердого тіла до осі обертання, $\vec{p}_{\perp i} = \vec{p}_i$ – бо швидкість частини твердого тіла знаходиться в площині кола (вона дотична до кола), а ця площина перпендикулярна до осі обертання, див. рис. 1.37.

Вектор $[\vec{r}_{\perp i}, \vec{p}_{\perp i}]$ перпендикулярний площині, в якій лежать і вектор $\vec{r}_{\perp i}$, і вектор $\vec{p}_{\perp i}$. Вісь обертання теж перпендикулярна цій площині. Тобто вектор $[\vec{r}_{\perp i}, \vec{p}_{\perp i}]$ за напрямком є паралельним до осі, тож маж лише складову вздовж цієї осі. Тоді

$$L_x = \sum_{i=1}^n [\vec{r}_{\perp i}, \vec{p}_{\perp i}]_x = \sum_{i=1}^n |\vec{r}_{\perp i}| |\vec{p}_{\perp i}| \sin \frac{\pi}{2} = \sum_{i=1}^n r_i \cdot \Delta m_i \cdot v_i, \quad (1.149)$$

бо між векторами $\vec{r}_{\perp i}$ та $\vec{p}_{\perp i} = \Delta m_i \cdot \vec{v}_i$ кут 90^0 , бо швидкість спрямована по дотичній до кола, а кут між дотичною і радіусом 90^0 . Згідно (1.44) та того факту, що кутова швидкість всіх точок твердого тіла є однаковою, маємо $v_i = \omega r_i$, та

$$L_x = \omega \sum_{i=1}^n \Delta m_i \cdot r_i^2 = I \omega, \quad (1.150)$$

тут використане визначення моменту інерції (1.146). На основі (1.150) маємо

$$\frac{dL_x}{dt} = M_x \Rightarrow \frac{d(I\omega)}{dt} = M_x \Rightarrow I\varepsilon = M_x \Rightarrow \varepsilon = \frac{M_x}{I}, \quad (1.151)$$

тут враховано, що кутова швидкість тіла може змінюватись з часом, а момент інерції (при незмінній осі обертання) – ні. *Отриманий вираз (1.151) є рівнянням обертального руху твердого тіла відносно нерухомої осі.* Під дією моменту сил відносно нерухомої осі M_x тверде тіло набуває кутового прискорення $\varepsilon = M_x / I$.

Є певна математична аналогія між одновимірним рухом матеріальної точки та обертанням твердого тіла відносно нерухомої осі. Ця аналогія представлена у таблиці 1.4.

Таблиця 1.4. Математична аналогія між одновимірним рухом матеріальної точки та обертанням твердого тіла відносно нерухомої осі

m – маса	I – момент інерції
v – швидкість	ω – кутова швидкість
a – прискорення	ε – кутове прискорення
x – координата	φ – кут повороту

$a = \frac{dv}{dt}, v = \frac{dx}{dt}$	$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}, \omega = \frac{d\varphi}{dt}$
$p = mv$ – імпульс	$L_x = I\omega$ – момент імпульсу відносно осі
F – сила	M_x – момент сили відносно осі
$a = F/m$ – другий закон Ньютона	$\varepsilon = M_x/I$ – рівняння обертального руху твердого тіла відносно нерухомої осі

1.4. Елементи механіки рідин

Нехай є мала площадка dS , на яку діє сила $d\vec{F}$. $d\vec{F}$ можна розбити на дві складові – паралельну (тангенціальну) до площадки та перпендикулярну (нормальну) до площадки. Відношення $p = dF_n/dS$ назвали **тиском**, де dF_n – нормальна складова сили.

Для рідин справедливим є **закон Паскаля**: тиск, що створюють зовнішні сили на поверхню **нерухомої** рідини, рідина передає однакою в усіх напрямках. **Цей закон є справедливим і для газів.** Тож якщо відсутні сили, що діють всередині об'єму нерухомої рідини, то в усіх точках рідини тиск рідини буде однаковим та не залежатиме від орієнтації елементарної площадки, на яку чиниться тиск, у просторі.

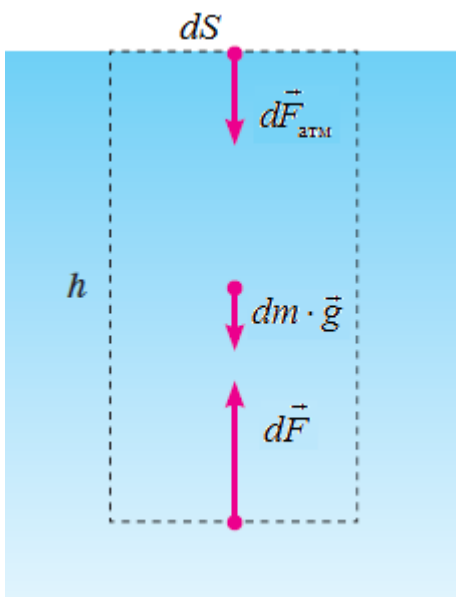


Рисунок 1.38

Але якщо є сили, що діють **всередині** рідини, то тиск рідини не буде однаковим в усіх точках рідини. Яскравим таким прикладом є широко поширений випадок, коли рідина знаходиться в полі тяжіння. Тоді тиск залежатиме від глибини, але на однаковій глибині згідно закону Паскаля він не залежатиме від орієнтації елементарної площадки, взятої на цій глибині. Подумки виділимо в рідині циліндр, його верхня грань на поверхні рідини, див. рис. 1.38. Розглядається випадок, коли

рідина знаходиться в рівновазі. Сили, які діють на цей циліндр вздовж вертикальної осі: $dF_{\text{атм}}$ – сила атмосферного тиску, $dm \cdot g$ – сила тяжіння, dF – сила тиску на глибині h ,

$$dF_{\text{атм}} = p_{\text{атм}} dS, \quad dF = p dS, \quad (1.152)$$

де p – тиск на глибині h . Сили, що діють на бічні поверхні, очевидно скоменсують одна одну. Рівняння балансу сил в рівновазі матиме вигляд

$$d\vec{F}_{\text{атм}} + dm \cdot \vec{g} + d\vec{F} = 0 \Rightarrow dF_{\text{атм}} + dm \cdot g = dF. \quad (1.153)$$

Через те, що $dm = \rho \cdot dV = \rho \cdot h dS$, з урахуванням (1.152) матимемо

$$p_{\text{атм}} dS + \rho g h dS = p dS \Rightarrow p = p_{\text{атм}} + \rho g h, \quad (1.154)$$

цей вираз описує тиск у водоймищі на глибині h . Відповідно, **тиск безпосередньо рідини на глибині h дорівнює $\rho g h$** , ρ – густина рідини.

Збільшення тиску води з глибиною спричиняє виштовхувальну силу, яку називають силою Архімеда. **Силою Архімеда називають рівнодійну сил тиску рідини на всі ділянки поверхні тіла.** Сила Архімеда спрямована вгору та дорівнює

$$F_A = \rho_p g V_3, \quad (1.155)$$

де ρ_p – густина рідини, V_3 – занурений об'єм тіла.

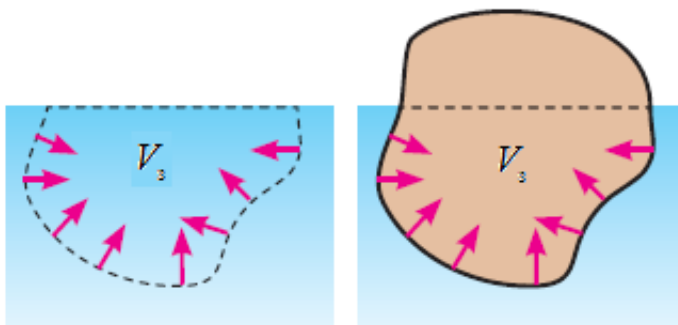


Рисунок 1.39

Обґрунтувати цю формулу можна так. Подумки виділимо в рідині об'єм, що дорівнює зануреному об'єму тіла, див. рис. 1.39. Цей об'єм рідини має знаходитись в рівновазі, тож для нього має виконуватись

$m_p g = F_{\text{тиску}}$, де $F_{\text{тиску}}$ – спрямована вгору до центра мас цього об'єму результуюча сила тиску рідини, звідки $F_{\text{тиску}} = m_p g = \rho_p g V_3$. Якщо ж тепер об'єм рідини

замінити на занурений об'єм твердого тіла, то очевидно, що результуюча сила тиску рідини від цього не зміниться, звідки $F_{\text{тиску}} = F_A = \rho_p g V_3$.

Сила Архімеда прикладена до центру мас зануреної частини тіла. На тіло, що знаходиться в рідині, вниз діє сила тяжіння $mg = \rho_{\text{тіла}} g V_{\text{ТілаПовний}}$, а вгору – сила Архімеда $F_A = \rho_{\text{рідини}} g V_{\text{занурений}}$. Відповідно, можливі випадки:

1) $\rho_{\text{тіла}} > \rho_{\text{рідини}}$. Навіть при повному зануренні $F_A < mg$. Тіло тонутиме.

2) $\rho_{\text{тіла}} < \rho_{\text{рідини}}$. При повному зануренні $F_A > mg$, але при неповному можлива рівновага тіла. Тож тіло плаватиме, не будучи повністю зануреним, $mg = F_A$, $V_{\text{занурений}} < V_{\text{ТілаПовний}}$.

3) $\rho_{\text{тіла}} = \rho_{\text{рідини}}$. При повному зануренні $F_A = mg$. При неповному зануренні рівновага неможлива, при повному – рівновага, тож якщо тіло помістити на будь-яку глибину, то воно «зависне» на цій глибині.

Все вище зазначене стосувалось випадку нерухомої рідини. Тепер розглянемо випадок рухомої рідини. Для простоти обмежимося випадком, коли рідина рухається по трубі в таких припущеннях:

1. Вважатимемо рідину ідеальною (нехтуємо в'язкістю рідини, іншими словами, нехтуємо внутрішнім тертям між шарами рідини).

2. Вважаємо течію **ламінарною** (рідина нібито розділяється на шари, які рухаються паралельно один одному і не змішуються між собою; рух, де шари хаотично змішуються, назвали **турбулентним**).

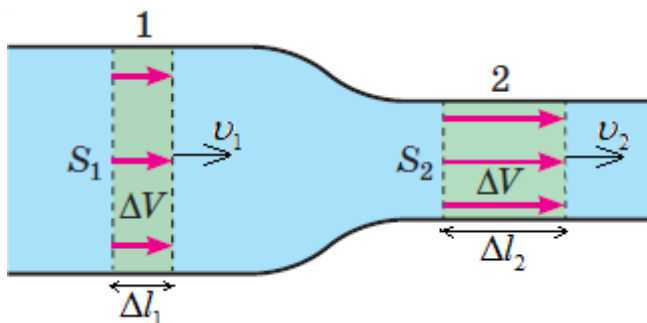


Рисунок 1.40

Через нехтування силами внутрішнього тертя між шарами вважатимемо, що всі шари рідини рухаються з однаковою швидкістю, див. рис. 1.40; в реальній ситуації швидкість течії всередині труби є дещо більшою, ніж біля внутрішньої

поверхні через ненульову в'язкість. Позначимо ΔV – об'єм маленького елемента

рідини, що рухається трубою. *Так як рідини є майже нестисливими*, то ΔV можна вважати постійним вздовж руху. Розглянемо рух цього елемента рідини в різних частинах труби за однаковий малий час Δt :

$$\Delta V = \Delta V_1 = \Delta V_2 \Rightarrow S_1 \Delta l_1 = S_2 \Delta l_2 \Rightarrow S_1 v_1 \Delta t = S_2 v_2 \Delta t \Rightarrow S_1 v_1 = S_2 v_2, \quad (1.156)$$

цей результат можна переписати як

$$Sv = \text{const}, \quad (1.157)$$

тобто добуток перерізу труби на швидкість течії є вздовж труби постійним. Це рівняння назвали *рівнянням нерозривності*.

Розглянемо рух рідини трубою, що може займати різні висоти, див. рис. 1.41.

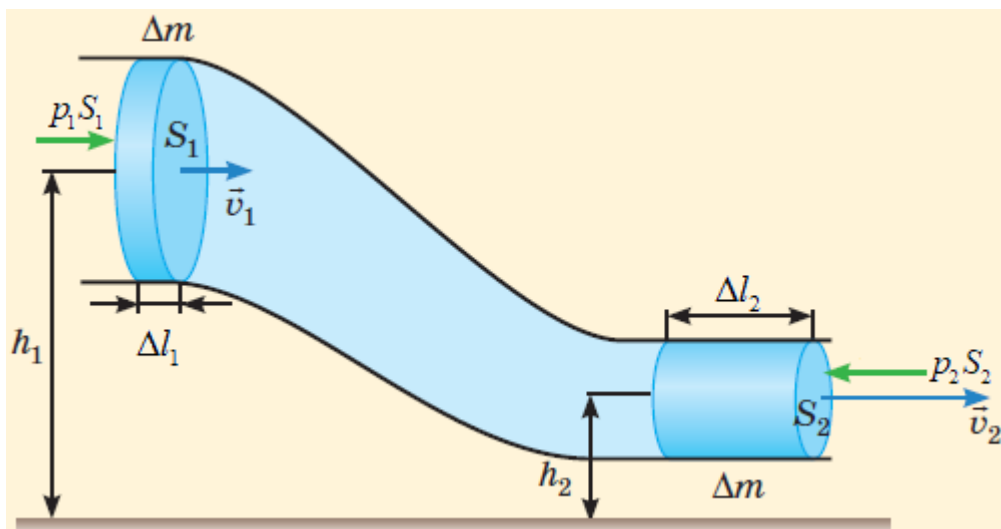


Рисунок 1.41

Δm – маса маленького елемента рідини ($\Delta m = \rho \Delta V = \text{const}$ вздовж труби, бо рідина є майже нестисливою). Згідно теореми кінетичної енергії:

$$E_{k2} - E_{k1} = A_{\text{ВсіхСил}} = A_{\text{СилиТяжіння}} + A_{\text{СилТиску}}, \quad (1.158)$$

робота сили тяжіння згідно (1.124) задається виразом

$$A_{\text{СилиТяжіння}} = E_{п1} - E_{п2} = \Delta m \cdot gh_1 - \Delta m \cdot gh_2, \quad (1.159)$$

робота сил тиску

$$\begin{aligned} A_{\text{СилТиску}} &= F_{\text{тиску1}} \Delta l_1 \cos 0 + F_{\text{тиску2}} \Delta l_2 \cos \pi = \\ &= F_{\text{тиску1}} \Delta l_1 - F_{\text{тиску2}} \Delta l_2 = p_1 S_1 \Delta l_1 - p_2 S_2 \Delta l_2. \end{aligned} \quad (1.160)$$

На основі (1.158) – (1.160) матимемо

$$\Delta m \frac{v_2^2}{2} - \Delta m \frac{v_1^2}{2} = \Delta m \cdot gh_1 - \Delta m \cdot gh_2 + p_1 S_1 \Delta l_1 - p_2 S_2 \Delta l_2, \quad (1.161)$$

через те, що $\Delta m = \rho \Delta V$ перепишемо (1.161) як

$$\rho \frac{v_2^2}{2} - \rho \frac{v_1^2}{2} = \rho gh_1 - \rho gh_2 + \frac{p_1 S_1 \Delta l_1}{\Delta V} - \frac{p_2 S_2 \Delta l_2}{\Delta V}. \quad (1.162)$$

На основі того, що $\Delta V = \text{const} \Rightarrow \Delta V = \Delta V_1 = \Delta V_2 = S_1 \Delta l_1 = S_2 \Delta l_2$ після перезбирання членів остаточно отримаємо

$$\rho \frac{v_2^2}{2} + \rho gh_2 + p_2 = \rho \frac{v_1^2}{2} + \rho gh_1 + p_1, \quad (1.163)$$

або

$$\rho \frac{v^2}{2} + \rho gh + p = \text{const}. \quad (1.164)$$

Вираз (1.164) є **рівнянням Бернуллі**. Важливо зауважити, що це рівняння працює для ідеальної рідини (в'язкістю нехтуємо, іншими словами, тут не враховано робота сил внутрішнього тертя).

Вище ми розглянули ламінарний рух ідеальної рідини вздовж труби. В гідродинаміці в більш загальних випадках вводять такі поняття, як **лінія течії** – лінія, така, що дотична до неї в кожній точці співпадає з напрямом швидкості рідини в цій точці та **трубка течії** – частина рідини, обмежена дуже близько розташованими лініями течії. Можна показати, що рівняння нерозривності

$Sv = \text{const}$ виконується вздовж кожної окремо взятої трубки течії (хоча добуток Sv може бути різним на різних трубках течії), та рівняння Бернуллі

$\frac{\rho v^2}{2} + \rho gh + p = \text{const}$ виконується вздовж кожної окремо взятої лінії течії (хоча

на різних лініях течії значення величини $\frac{\rho v^2}{2} + \rho gh + p$, взагалі кажучи, може бути різним).

1.5. Контрольні питання до розділу 1

1. Дати визначення вектору, проекції вектору на вісь, модуля вектору, координат вектору, орту осі, правої системи координат.
2. Дати визначення операціям додавання та віднімання векторів, а також множення вектору на число, навести геометричний зміст цих операцій.
3. Дати визначення скалярного та векторного добутку векторів, навести властивості цих операцій.
4. Надати визначення радіус-вектору, швидкості, шляху, траєкторії, переміщення. Навести та пояснити зв'язок шляху та модуля швидкості. Надати визначення середньої швидкості та середньої швидкості переміщення, обґрунтувати нерівність між модулями цих величин.
5. Навести визначення прискорення. Вивести формули для нормального та тангенціального прискорень.
6. Пояснити та вивести закон додавання швидкостей.
7. Навести визначення поступального та обертального руху. Навести фізичні величини, що описують рух матеріальної точки по колу, та вивести формули, що описують зв'язки між цими величинами.
8. Вивести закони залежності координати та швидкості від часу при одновимірному рівноприскореному русі.
9. Для точки на ободі колеса, що рухається нерухомою дорогою без проковзування, вивести залежності швидкості та координат від часу.
10. Дати визначення сили. Сформулювати закони Ньютона.
11. Сформулювати закон Всесвітнього тяжіння. У яких випадках цей закон працює у вигляді (1.65)? Дати визначення сили тяжіння, вивести вираз для прискорення вільного падіння на поверхні планети. Дати визначення ваги, пояснити відмінність між вагою та силою тяжіння.
12. Дати визначення сили пружності. Сформулювати закон Гука. Вивести вирази для жорсткості паралельного та послідовного з'єднань тіл.

13. Дати визначення сили нормальної реакції опори. Дати визначення силі тертя. Пояснити принципову відмінність між силою тертя ковзання та силою тертя спокою. Навести математичні вирази для цих сил.

14. Вивести закони зміни та збереження імпульсу тіла та системи тіл.

15. Дати визначення центру мас. Сформулювати та довести теорему про рух центру мас.

16. Дати поняття реактивного руху. Вивести рівняння Мещерського та формулу Ціолковського.

17. Дати визначення роботи, потужності та кінетичної енергії. Сформулювати та довести теорему кінетичної енергії.

18. Дати визначення потенціальної сили та потенціальної енергії. Дати визначення дисипативної та гіроскопічної сили. Вивести закон збереження енергії при відсутності дисипативних сил. Вивести закон зміни повної механічної енергії тіла.

19. Дати визначення абсолютно пружного та абсолютно непружного ударів. Вивести вираз для втрати повної механічної енергії при абсолютно непружному ударі. Вивести вирази для швидкостей тіл після абсолютно пружного удару.

20. Вивести потенціальну енергію в полі тяжіння поблизу поверхні планети, потенціальну енергію пружно розтягнутого (стиснутого) тіла та потенціальну енергію гравітаційної взаємодії.

21. Дати визначення моменту сили та моменту імпульсу відносно точки. Вивести рівняння моментів.

22. Вивести закони зміни та збереження моменту імпульсу системи тіл.

23. Дати визначення моменту сили та моменту імпульсу відносно осі. Довести, що при їх обчисленні достатньо обчислити векторні добутки лише від перпендикулярних до осі компонент.

24. Дати визначення моменту інерції. Вивести вираз для кінетичної енергії обертання твердого тіла навколо нерухомої осі.

25. Вивести момент інерції однорідного тонкого стрижня відносно осі, що проходить через його середину перпендикулярно до нього.
26. Вивести рівняння обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі.
27. Навести математичну аналогію між одновимірним рухом матеріальної точки та обертанням твердого тіла відносно нерухомої осі.
28. Сформулювати закон Паскаля. Вивести вираз для гідростатичного тиску рідини на глибині h .
29. Навести визначення сили Архімеда та обґрунтувати вираз для неї. Вказати умови плавання тіл.
30. Дати визначення ідеальної рідини. Дати визначення ламінарної течії. Вивести рівняння нерозривності та рівняння Бернуллі.

2. Електрика та магнетизм

2.1. Закон Кулона. Потенціальна енергія кулонівської взаємодії

Електричний заряд – фізична скалярна величина, що визначає можливість тіл бути джерелом електромагнітних полів та приймати участь в електромагнітній взаємодії. Заряд може бути додатним або від’ємним. Єдиною базовою електромагнітною одиницею СІ є Ампер (А), всі інші електромагнітні одиниці виражаються через А, кг, м, с. Одиницею виміру електричного заряду є Кулон, $\text{Кл} = \text{А} \cdot \text{с}$ (це можна легко зрозуміти, згадавши формулу з курсу фізики 8 класу школи: $I = q/t \Rightarrow \text{А} = \text{Кл}/\text{с} \Rightarrow \text{Кл} = \text{А} \cdot \text{с}$).

Згідно **закону Кулона** два точкових заряджених тіла взаємодіють з силою, що за модулем дорівнює

$$F = F_{12} = F_{21} = \frac{k|q_1q_2|}{r^2}, \quad k \approx 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{Кл}^2}, \quad (2.1)$$

q_1, q_2 – заряди тіл, r – відстань між ними. Якщо заряди однойменні, то сили Кулона є силами відштовхування; якщо заряди різнойменні, то сили Кулона є силами притягання, див. рис. 2.1.

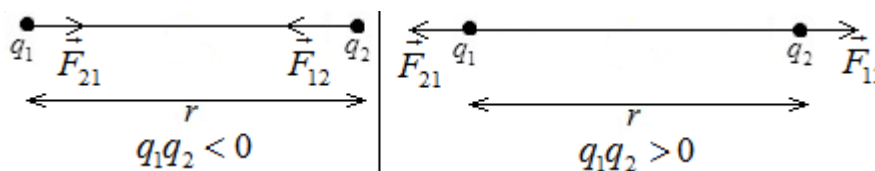


Рисунок 2.1

На основі (2.1) можна вивести, що розмірність константи k в СІ через основні

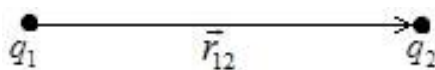


Рисунок 2.2.

одиниці виражається як $[k] = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{Кл}^2} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^3}{\text{А}^2 \cdot \text{с}^4}$. У

векторній формі кулонівську силу, що діє з боку першого тіла на друге, можна виразити таким чином, див. рис. 2.2.

$$\vec{F}_{12} = \frac{kq_1q_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12}. \quad (2.2)$$

Пояснимо, чому так. По-перше, має відтворитись результат (2.1). Дійсно, згідно (2.2) маємо

$$\vec{F}_{12} = \frac{kq_1q_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12} \Rightarrow |\vec{F}_{12}| = \left| \frac{kq_1q_2}{r_{12}^3} \right| \cdot |\vec{r}_{12}| = \frac{k|q_1q_2|}{r_{12}^3} \cdot r_{12} = \frac{k|q_1q_2|}{r_{12}^2}, \quad (2.3)$$

тобто результат (2.1) відтворено. По-друге, вираз (2.2) має відтворювати правильний напрям сили. Дійсно, на основі (2.2) бачимо, що при $q_1q_2 > 0$ $\vec{F}_{12} \uparrow \uparrow \vec{r}_{12}$, що і має бути; а при $q_1q_2 < 0$ $\vec{F}_{12} \uparrow \downarrow \vec{r}_{12}$, що і має бути. Відповідно, вираз (2.2) коректно описує як модуль сили, так і її напрям.

Закон Кулона в вище наведеному вигляді працює

- для точкових зарядів;
- для взаємодії рівномірно зарядженої кулі і точкового заряду, r – відстань між центром кулі та точковим зарядом (при умовах, що точковий заряд ззовні кулі, та що можна вважати, що заряд кулі залишається рівномірно розподіленим і не перерозподіляється внаслідок такої взаємодії);
- для взаємодії рівномірно заряджених куль, r – відстань між центрами куль (при умові, що можна вважати, що заряд куль залишається рівномірно розподіленим і не перерозподіляється внаслідок такої взаємодії).

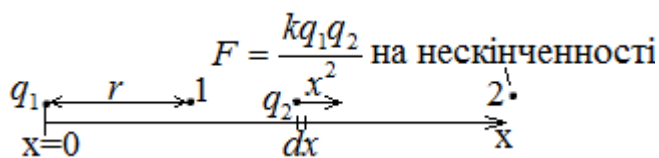


Рисунок 2.3

Кулонівські сили є потенціальними силами. Виведемо вираз для потенціальної енергії кулонівської взаємодії. За

домовленістю, потенціальна енергія кулонівської взаємодії вважається рівною нулю при нескінченно великій відстані між тілами. Спершу розглянемо однойменні заряди, див. рис. 2.3. Перший заряд вважатимемо нерухомим, а другий будемо переміщувати вздовж прямої лінії з відстані r до першого заряду на нескінченність:

$$A = E_{n1} - E_{n2} = E_{n1} = \int_r^\infty \frac{kq_1q_2}{x^2} \cos 0 dx = kq_1q_2 \int_r^\infty \frac{1}{x^2} dx = \frac{kq_1q_2}{r}. \quad (2.4)$$

У випадку різнойменних зарядів аналогічно отримаємо

$$A = E_{n1} - E_{n2} = E_{n1} = \int_r^{\infty} \frac{k|q_1q_2|}{x^2} \cos \pi dx = -\frac{k|q_1q_2|}{r} = \frac{kq_1q_2}{r}. \quad (2.5)$$

Тож потенціальна енергія кулонівської взаємодії двох точкових зарядів на відстані r

$$E_n = \frac{kq_1q_2}{r}, \quad (2.6)$$

цей результат є справедливим при будь-яких знаках зарядів.

2.2. Електростатичне поле

Електричне поле – одна зі складових електромагнітного поля, що існує навколо тіл або частинок, що мають електричний заряд, а також може бути створене змінним у часі магнітним полем (наприклад, в електромагнітних хвилях). Силовою характеристикою електричного поля є його напруженість \vec{E} . За визначанням, на точковий заряд q , що знаходиться у електричному полі, діє з боку поля сила

$$\vec{F} = q\vec{E}, \quad (2.7)$$

На основі (2.7) бачимо, що $[E] = \frac{H}{Кл} = \frac{кг \cdot м}{А \cdot с^3}$, також $[E] = \frac{В}{м}$, бо

$$В = \frac{Дж}{Кл} = \frac{Н \cdot м}{Кл} = [E] \cdot м \quad (\text{тут можна згадати формулу з 8 класу школи } A = qU).$$

Електростатичне поле – поле, створене нерухомими в просторі та незмінними в часі електричними зарядами за відсутності електричних струмів.

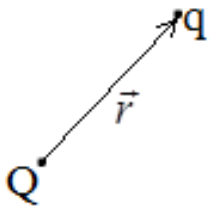


Рисунок 2.4

2.2.1. Поле точкового заряду

Розглянемо точковий заряд q , що знаходиться в полі точкового заряду Q , див. рис. 2.4. На заряд q з боку заряду Q дає кулонівська сила

$$\vec{F} = \frac{kQq}{r^3} \vec{r} = q \cdot \frac{kQ}{r^3} \vec{r}, \quad (2.8)$$

див. (2.2). З іншого боку, маємо визначення (2.7). На основі цих фактів маємо

$$\vec{E} = \frac{kQ}{r^3} \vec{r}, \quad (2.9)$$

вираз (2.9) описує напруженість поля точкового заряду в заданій точці, де \vec{r} є радіус-вектором, що проведено від даного заряду в задану точку. Згідно (2.9) бачимо, що за модулем напруженість поля точкового заряду дорівнює

$$E = \frac{k|Q|}{r^2}, \quad (2.10)$$

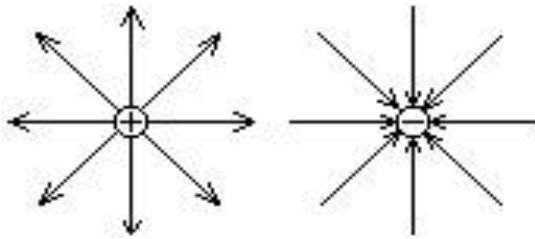


Рисунок 2.5

та напрямком напруженості поля відображено на рис. 2.5, тобто при $Q > 0$ $\vec{E} \uparrow \uparrow \vec{r}$, а при $Q < 0$ $\vec{E} \uparrow \downarrow \vec{r}$. Іншими словами, поле додатного заряду спрямоване від нього, а поле від'ємного

заряду – до нього.

Згідно принципу суперпозиції поле системи точкових зарядів є векторною сумою полів цих зарядів. На основі цієї ідеї, зокрема, можна обчислити поля від заряджених неточкових об'єктів, розбиваючи їх на дуже маленькі частини, кожна з яких, фактично, точкова, та знаходячи векторну суму полів таких об'єктів (інтегруючи).

2.2.2. Поле нескінченної рівномірно зарядженої нитки

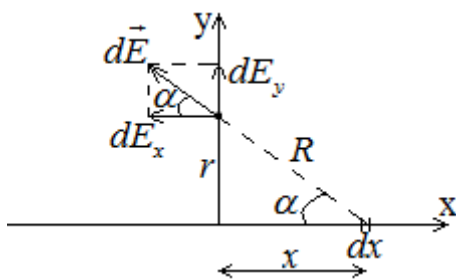


Рисунок 2.6

Нехай нитка заряджена *рівномірно* з лінійною густиною заряду $\sigma = dq/dl$, нехай для визначеності нитка позитивно заряджена. Розглянемо поле такої нитки в точці на відстані r від нитки, вздовж нитки проведемо вісь Ox , перпендикулярно до нитки – вісь Oy , див. рис.

2.6. Розіб'ємо нитку на дуже багато дуже малих відрізків. Напруженість поля від відрізка з координатою x має такі складові:

$$dE_x = -dE \cdot \cos \alpha = -\frac{k dq}{R^2} \cdot \frac{x}{R} = -\frac{k x dq}{R^3} = -\frac{k x \sigma dx}{(x^2 + r^2)^{3/2}},$$

$$dE_y = dE \cdot \sin \alpha = \frac{k dq}{R^2} \cdot \frac{r}{R} = \frac{k r dq}{R^3} = \frac{k r \sigma dx}{(x^2 + r^2)^{3/2}}.$$
(2.11)

Відповідно,

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} dE_x = -k\sigma \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x dx}{(x^2 + r^2)^{3/2}} = 0,$$
(2.12)

бо підінтегральна функція $f(x) = \frac{x}{(x^2 + r^2)^{3/2}}$ є непарною: $f(-x) = -f(x)$. Також

$$E_y = \int_{-\infty}^{+\infty} dE_y = k r \sigma \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + r^2)^{3/2}} = 2 k r \sigma \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + r^2)^{3/2}},$$
(2.13)

бо підінтегральна функція $f(x) = \frac{1}{(x^2 + r^2)^{3/2}}$ є парною: $f(-x) = f(x)$.

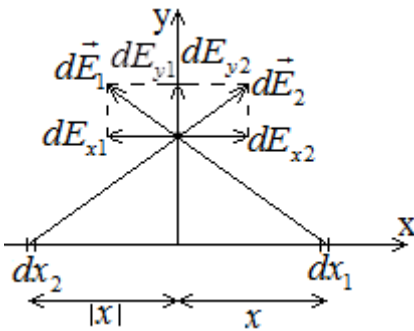


Рисунок 2.7

Зауважимо, що інтеграли з нескінченним межами тут обчислюються в сенсі своїх головних значень (іншими словами, вважається, що x однаковим чином прямує і до $+\infty$, і до $-\infty$).

Результати (2.12) та (2.13) легко зрозуміти фізично: до кожного елементу довжини нитки є симетричний, див. рис. 2.7. Вздовж Oy поля симетричних відрізків подвоють одне одного, а вздовж Ox ці поля скомпенсуються.

Як відомо, первісною функцією до $f(x) = (x^2 + r^2)^{-3/2}$ є функція

$$F(x) = \frac{x}{a^2 (x^2 + a^2)^{1/2}},$$
(2.14)

ТОЖ

$$E_y = 2kr\sigma \cdot \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{r^2(x^2 + r^2)^{1/2}} - \frac{0}{r^2(0^2 + r^2)^{1/2}} \right) = \frac{2k\sigma}{r}. \quad (2.15)$$

Тож *напруженість електростатичного поля позитивно рівномірно зарядженої нескінченної нитки на відстані r від нитки дорівнює $E = 2k\sigma/r$ та спрямована від нитки*. Аналогічно можна показати, що *напруженість електростатичного поля негативно рівномірно зарядженої нескінченної нитки на відстані r від нитки дорівнює $E = 2k|\sigma|/r$ та спрямована до нитки*.

2.2.3. Поле нескінченної рівномірно зарядженої площини

Нехай площина заряджена рівномірно з поверхневою густиною заряду $\xi = dq/dS$, нехай для визначеності площина позитивно заряджена. Кожному елементу площини знайдеться симетричний, див. рис. 2.8, тому поле від такої площини буде мати внесок лише вздовж осі Oz .

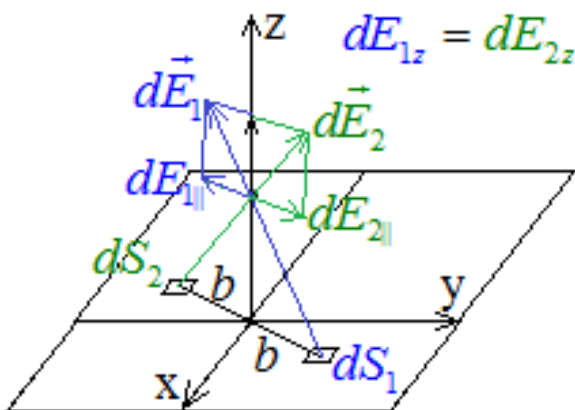


Рисунок 2.8

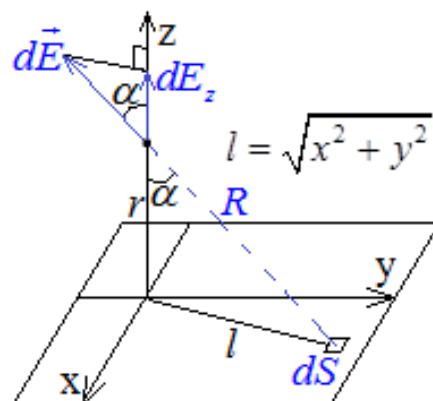


Рисунок 2.9

Паралельні до площини компоненти поля скомпенсуються. Відповідно, обчислимо поле від такої пластини в точці на відстані r від площини. Через відсутність паралельних до площини компонент $E_x = E_y = 0$, залишилось обчислити E_z , див. рис. 2.9:

$$dE_z = dE \cdot \cos \alpha = \frac{k dq}{R^2} \cdot \frac{r}{R} = \frac{k r dq}{R^3} = k r \frac{\xi dS}{(r^2 + l^2)^{3/2}} = k r \xi \frac{dx dy}{(r^2 + x^2 + y^2)^{3/2}} \quad (2.16)$$

$$E_z = kr\xi \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dxdy}{(r^2 + x^2 + y^2)^{3/2}} = kr\xi \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(r^2 + y^2 + x^2)^{3/2}}.$$

$\int_{-\infty}^{+\infty} (r^2 + y^2 + x^2)^{-3/2} dx$ беремо як інтеграл суто від x парності підінтегральної функції та на основі (2.14):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(r^2 + y^2 + x^2)^{3/2}} = 2 \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(r^2 + y^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{2}{r^2 + y^2}. \quad (2.17)$$

Тоді на основі парності підінтегральної функції

$$\begin{aligned} E_z &= kr\xi \int_{-\infty}^{+\infty} dy \frac{2}{r^2 + y^2} = 4kr\xi \int_0^{+\infty} \frac{dy}{r^2 + y^2} = \\ &= 4kr\xi \frac{1}{r} \operatorname{arctg} \left(\frac{y}{r} \right) \Big|_{y=0}^{y=+\infty} = 4k\xi (\operatorname{arctg}(+\infty) - \operatorname{arctg}(0)) = 4k\xi \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) = 2\pi k\xi. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Напруженість електростатичного поля позитивно рівномірно зарядженої нескінченної площини на відстані r від площини дорівнює $E = 2\pi k\xi$ та спрямована від площини. Ця напруженість поля не залежить від відстані до площини. **Аналогічно можна показати, що напруженість електростатичного поля негативно рівномірно зарядженої нескінченної площини на відстані r від площини дорівнює $E = 2\pi k|\xi|$ та спрямована до площини.** Ця напруженість поля не залежить від відстані до площини.

2.2.4. Теорема Гаусса



Рисунок 2.10

Часто для обчислення поля деякого об'єкту зручно використовувати теорему Гаусса. Прийmemo її тут без виведення (вона є наслідком одного з рівнянь Максвелла та математичної теореми Остроградського–Гаусса).

Розглянемо об'єм V , обмежений замкненою поверхнею S . Розіб'ємо цю поверхню на дуже багато дуже маленьких елементарних площадок, настільки маленьких, що їх можна вважати плоскими. Розглянемо одну таку площадку ΔS , \vec{n} – нормаль до неї, що

спрямована зовні об'єму. Нехай напруженість електричного поля на цій площадці дорівнює \vec{E} . Тоді **поток вектора напруженості електричного поля** через цю поверхню за визначенням є сума $\sum_{\text{По Всій Поверхні}} (\vec{E}, \vec{n}) \Delta S$, так як така сума

взята, коли площадок нескінченно багато, і вони нескінченно малі, то вона є інтегралом. Такий інтеграл носить назву поверхневого інтегралу та позначається $\oiint_S (\vec{E}, \vec{n}) dS$ (кружечок позначає той факт, що поверхня замкнена, значок подвійного інтегралу часто для меншої громіздкості опускають, і просто записують $\oint_S (\vec{E}, \vec{n}) dS$).

Теорема Гаусса для напруженості електричного поля має таке формулювання:

$$\varepsilon_0 \oint_S (\vec{E}, \vec{n}) dS = Q, \quad (2.19)$$

де Q – сумарний заряд, що міститься в об'ємі, який обмежено замкненою поверхнею S , ε_0 – так звана електрична стала, її можна виразити через константу

$$k \text{ в законі Кулона: } \varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} \approx 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\Phi}{\text{м}}.$$

Або формулювання словами: *потік вектору напруженості електростатичного поля у вакуумі крізь довільну замкнену поверхню дорівнює сумарному заряду, що міститься в об'ємі, який обмежено цією замкненою поверхнею, поділеному на електричну сталу ε_0 ,*

Зауважимо, що за розмірністю $[\varepsilon_0] = \frac{1}{[k]} = \frac{\text{А}^2 \cdot \text{с}^4}{\text{кг} \cdot \text{м}^3} = \frac{\Phi}{\text{м}}$, бо

$$\Phi = \frac{\text{Кл}}{\text{В}} = \frac{\text{Кл}}{\text{Дж/Кл}} = \frac{\text{Кл}^2}{\text{Дж}} = \frac{\text{А}^2 \cdot \text{с}^4}{\text{кг} \cdot \text{м}^2}.$$

2.2.5. Поле рівномірно зарядженої сфери

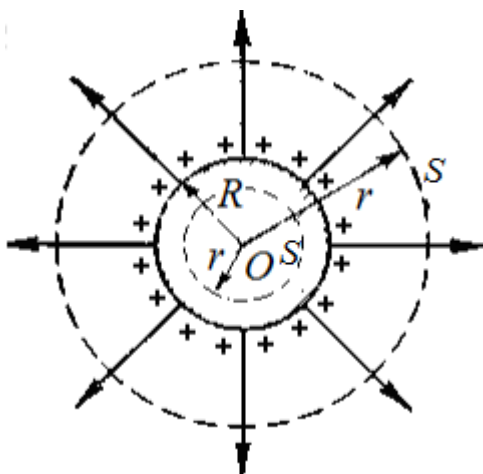


Рисунок 2.11

Нехай сфера радіусом R позитивно заряджена.

Через симетрію очевидно, що *поле в довільній точці зовні сфери буде спрямовано по прямій, що з'єднує центр сфери та цю точку, від центра до точки* (бо кожному елементу поверхні сфери знайдеться симетричний, такий що компоненти полів цих елементів, перпендикулярні цій прямій,

скомпенсуються).

Розглянемо спочатку поле зовні сфери на відстані $r \geq R$ від центру сфери. Подумки оточимо сферу іншою концентричною сферою радіуса r , див. рис. 2.11.

$$\varepsilon_0 \oint_S (\vec{E}, \vec{n}) dS = \varepsilon_0 4\pi r^2 E = Q \Rightarrow E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \Rightarrow E = \frac{kQ}{r^2}, \quad (2.20)$$

Якщо ж розглянути поле всередині сфери ($r < R$), то

$$\oint_S (\vec{E}, \vec{n}) dS = -4\pi r^2 E = 0 \Rightarrow E = 0. \quad (2.21)$$

Тож за модулем

$$E(r) = \begin{cases} \frac{kQ}{r^2}, & r \geq R \\ 0, & r < R \end{cases}. \quad (2.22)$$

Аналогічно можна показати, що якщо сфера *негативно* заряджена, то *поле в довільній точці зовні сфери буде спрямовано по прямій, що з'єднує центр сфери та цю точку, до центра від точки*, та за модулем

$$E(r) = \begin{cases} \frac{k|Q|}{r^2}, & r \geq R \\ 0, & r < R \end{cases}. \quad (2.23)$$

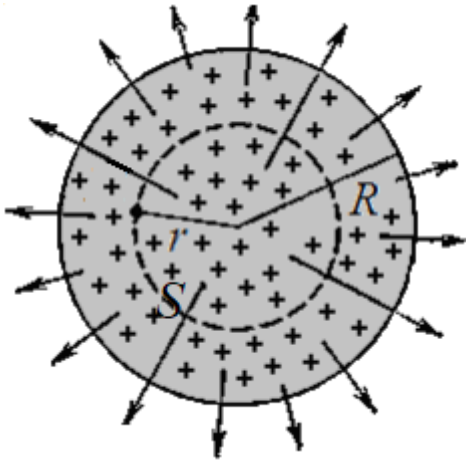


Рисунок 2.12

2.2.6. Поле рівномірно зарядженої кулі

Нехай куля позитивно заряджена. Через симетрію очевидно, що поле в довільній точці буде спрямовано по прямій, що з'єднує центр кулі та цю точку.

Розглянемо поле на відстані r від центру кулі всередині кулі, нехай об'ємна густина заряду кулі дорівнює $\rho = dq/dV$. Розглянемо концентричну сферу радіуса r всередині кулі,

див. рис. 2.12.

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 \oint_S (\vec{E}, \vec{n}) dS = Q_S &\Rightarrow \varepsilon_0 4\pi r^2 (\vec{E}, \vec{n}) = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho \Rightarrow (\vec{E}, \vec{n}) = \frac{r\rho}{3\varepsilon_0} \\ &= \frac{r}{3\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{4\pi R^3/3} = \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3} > 0 \Rightarrow E = \frac{kQr}{R^3}, \quad r \leq R; \end{aligned} \quad (2.24)$$

Q_S – заряд всередині поверхні S , Q – повний заряд кулі.

Тепер розглянемо концентричну сферу радіуса r зовні кулі. Тоді всередині такої сфери знаходиться повний заряд кулі, тож

$$\varepsilon_0 \oint_S (\vec{E}, \vec{n}) dS = \varepsilon_0 4\pi r^2 E = Q \Rightarrow E = \frac{kQ}{r^2}, \quad r > R. \quad (2.25)$$

Тобто *напруженість поля кулі радіуса R , що позитивно та рівномірно заряджена, спрямована від центру кулі до заданої точки, та за модулем дорівнює*

$$E(r) = \begin{cases} \frac{kQr}{R^3}, & r \leq R \\ \frac{kQ}{R^2}, & r > R \end{cases}. \quad (2.26)$$

Тобто напруженість поля за модулем лінійно наростає з відстанню від центру всередині кулі, а потім починає квадратично спадати ззовні кулі, див. рис. 2.13.

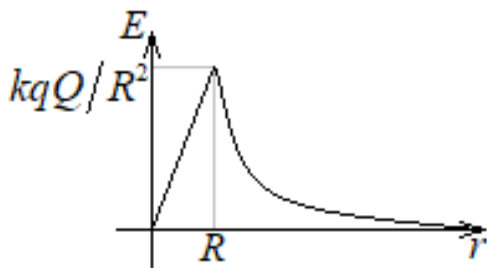


Рисунок 2.13

Аналогічно можна показати, що *напруженість поля кулі радіуса R , що негативно та рівномірно заряджена, спрямована від центру кулі до заданої точки, та за модулем дорівнює*

$$E(r) = \begin{cases} \frac{k|Q|r}{R^3}, & r \leq R \\ \frac{k|Q|}{R^2}, & r > R \end{cases} . \quad (2.27)$$

2.2.7. Поле зарядженого порожнистого нескінченного циліндра

Нехай *рівномірно* циліндр позитивно заряджений. Через симетрію очевидно, що *поле в довільній точці зовні циліндру буде спрямовано по прямій, що з'єднує проекцію цієї точки на вісь циліндру з цією точкою, від осі до точки*, див. рис. 2.14.

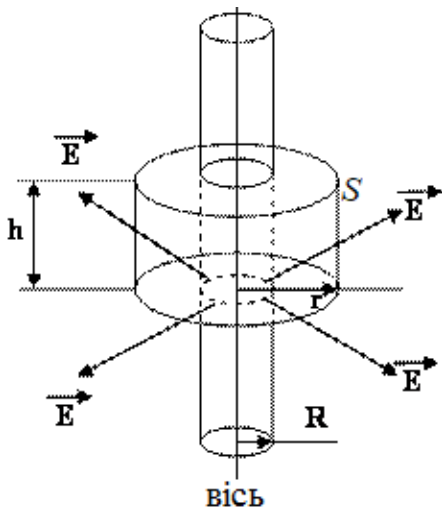


Рисунок 2.14

Розглянемо поле на відстані $r \geq R$ від осі циліндру. Побудуємо циліндр висотою h та радіусом основи r , рис. 2.14.

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 \oint_S (\vec{E}, \vec{n}) dS &= \varepsilon_0 \cdot 2\pi r h E = Q \Rightarrow \\ \Rightarrow E &= \frac{Q}{2\pi r h \varepsilon_0} = \frac{\sigma h}{2\pi r h \varepsilon_0} = \frac{2k\sigma}{r}, \end{aligned} \quad (2.28)$$

де σ – заряд одиниці довжини циліндру (фактично, лінійна густина заряду циліндру).

Аналогічно на основі теореми Гауса можна отримати, що всередині циліндру $E = 0$, тож

$$E(r) = \begin{cases} \frac{2k\sigma}{r}, & r \geq R \\ 0, & r < R \end{cases} . \quad (2.29)$$

Якщо ж циліндр заряджений негативно, то аналогічно отримаємо

$$E(r) = \begin{cases} \frac{2k|\sigma|}{r}, & r \geq R \\ 0, & r < R \end{cases}, \quad (2.30)$$

напряг напруженості поля – від заданої точки до її проекції на вісь циліндру.

2.2.8. Поле зарядженого в об'ємі суцільного нескінченного циліндра

Нехай циліндр *рівномірно* заряджений *позитивно*, розглянемо поле на відстані $r \leq R$ від осі циліндру. Тоді аналогічно до рис. 2.14 обираючи поверхню (увага – розглядається випадок $r \leq R$), отримаємо

$$\varepsilon_0 \oint_S (\vec{E}, \vec{n}) dS = \varepsilon_0 \cdot 2\pi r h (\vec{E}, \vec{n}) = Q_S \Rightarrow E = \frac{\pi r^2 h \rho}{2\pi r h \varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{r \rho}{2\varepsilon_0}, \quad (2.31)$$

ρ – об'ємна густина заряду, Q_S – заряд всередині поверхні S . Виразимо об'ємну густина заряду через заряд одиниці довжини циліндру:

$$dq = \rho \pi R^2 dh = \sigma dh \Rightarrow \sigma = \rho \pi R^2. \quad (2.32)$$

На основі (2.31) та (2.32) отримаємо

$$E = \frac{\sigma r}{2\pi R^2 \varepsilon_0} = \frac{2k\sigma r}{R^2}. \quad (2.33)$$

При $r > R$ аналогічно отримаємо

$$\varepsilon_0 \oint_S (\vec{E}, \vec{n}) dS = \varepsilon_0 \cdot 2\pi r h (\vec{E}, \vec{n}) = Q \Rightarrow E = \frac{Q}{2\pi r h \varepsilon_0} = \frac{2k\sigma}{r}. \quad (2.34)$$

Тож для *позитивно* зарядженого циліндру *за модулем*

$$E = \begin{cases} \frac{2k\sigma r}{R^2}, & r \leq R \\ \frac{2k\sigma}{r}, & r > R \end{cases}, \quad (2.35)$$

напряг напруженості поля – від проекції заданої точки на вісь циліндру до заданої точки.

Якщо ж циліндр заряджено *негативно*, то аналогічно можна показати, що *за модулем*

$$E = \begin{cases} \frac{2k|\sigma|r}{R^2}, r \leq R \\ \frac{2k|\sigma|}{r}, r > R \end{cases}, \quad (2.36)$$

напрям напруженості поля – від заданої точки до її проекції на вісь циліндру.

2.3. Потенціал електростатичного поля

Нехай маємо систему точкових зарядів Q_1, Q_2, \dots, Q_n (це можуть бути безпосередньо точкові заряди, а можуть малі частини заряджених об'єктів). Нехай поле цієї системи внесли пробний заряд q (назвали пробним, що він своїм власним полем не змінює характеристик системи). Тоді його потенціальна енергія – сума потенціальних енергій в полі кожного з зарядів, див. (2.6):

$$E_n = \frac{kqQ_1}{r_1} + \frac{kqQ_2}{r_2} + \dots + \frac{kqQ_n}{r_n} = kq \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{r_i}, \quad (2.37)$$

r_i – відстань від точки, де знаходиться пробний заряд, до заряду Q_i . Величина

$$\varphi = \frac{E_n}{q} = k \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{r_i}, \quad (2.38)$$

не залежить від величини пробного заряду, вона залежить лише від характеристик системи та від місця розташування пробного заряду. Її назвали

потенціалом електростатичного поля. $[\varphi] = \text{В} = \frac{\text{Дж}}{\text{Кл}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{Кл}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{А} \cdot \text{с}^3}$.

За визначенням потенціальної енергії (1.111) робота сил поля по переміщенню заряду q з точки 1 в точку 2:

$$A = E_{n1} - E_{n2} = q\varphi_1 - q\varphi_2 \Rightarrow A = q(\varphi_1 - \varphi_2) = q\Delta\varphi. \quad (2.39)$$

«За домовленістю» потенціальна енергія кулонівської взаємодії дорівнює нулю при нескінченній відстані між зарядами. Аналогічно *потенціал нескінченно віддаленої точки за домовленістю вважається нульовим*. Тож робота по переміщенню заряду з заданої точки простору в нескінченно віддалену дорівнює

$$A = q(\varphi - 0) = q\varphi, \quad (2.40)$$

тому *потенціал точки чисельно дорівнює роботі, яку здійснюють сили поля над позитивним одиничним зарядом при віддаленні його з цієї точки на нескінченність.*

2.3.1. Потенціал поля точкового заряду

Згідно (2.38) у випадку, коли система являє собою один точковий заряд,

$$\varphi = k \frac{Q}{r}, \quad (2.41)$$

де r – відстань від заданої точки, де обчислюється потенціал, до заряду. Тож *потенціал поля точкового заряду описується виразом (2.41).*

2.3.2. Різниця потенціалів у полі коаксіальних циліндрів

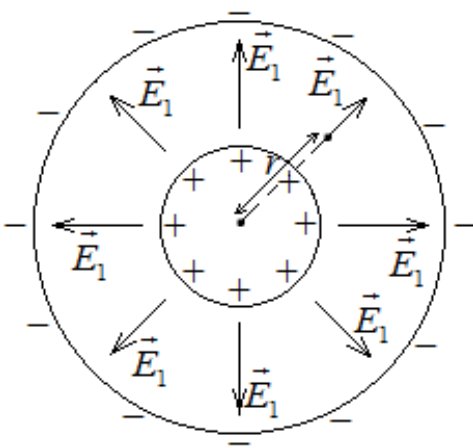


Рисунок 2.15

Розглянемо *різницю потенціалів між двома точками у полі, що створене двома рівномірно зарядженими коаксіальними нескінченними циліндрами; обидві точки розташовано між циліндрами.* Поле в просторі між циліндрами $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$, див. рис. 2.15; де \vec{E}_1 – поле внутрішнього циліндру, \vec{E}_2 – поле зовнішнього циліндру; $E_1 = \frac{2k\sigma}{r}$, σ – заряд

одиниці довжини циліндру; $E_2 = 0$, див. (2.29).

Через циліндричну симетрію задачі зрозуміло, що потенціал всіх точок, рівновіддалених від осі, має бути однаковий. Розглянемо роботу сил поля по переміщенню позитивного заряду q з точки, що на відстані r_1 від осі в точку, що на відстані r_2 від осі. Роботу можна розглядати вздовж прямолінійної траєкторії, так як кулонівські сили є потенціальними, то робота від вигляду траєкторії не залежить:

$$\delta A = (\vec{F}, d\vec{r}) = qE dr \cos 0 \Rightarrow A = \int_{r_1}^{r_2} qE dr = \int_{r_1}^{r_2} q \frac{2k\sigma}{r} dr = 2k\sigma q \cdot \ln \frac{r_2}{r_1}, \quad (2.42)$$

звідки з урахуванням (2.39) отримуємо *шукану різницю потенціалів*:

$$\Delta\varphi = 2k\sigma \cdot \ln \frac{r_2}{r_1}. \quad (2.43)$$

Відповідно, різниця потенціалів між поверхнями циліндрів

$$\Delta\varphi = 2k\sigma \cdot \ln \frac{R_2}{R_1}, \quad (2.44)$$

де R_2 та R_1 – радіуси циліндрів.

2.3.3. Різниця потенціалів у полі концентричних сфер

Розглянемо *різницю потенціалів між двома точками у полі, що створене двома рівномірно зарядженими концентричними сферами; обидві точки розташовано між сферами*. Поле в просторі між сферами $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$, див. рис.

2.15; де \vec{E}_1 – поле внутрішньої сфери, \vec{E}_2 – поле зовнішньої сфери; $E_1 = \frac{kQ}{r^2}$, $E_2 = 0$, див. (2.22).

Через сферичну симетрію задачі зрозуміло, що потенціал всіх точок, рівновіддалених від центру, має бути однаковий. Розглянемо роботу сил поля по переміщенню позитивного заряду q з точки, що на відстані r_1 від центру в точку, що на відстані r_2 від центру. Роботу можна розглядати вздовж прямолінійної траєкторії, так як кулонівські сили є потенціальними, то робота від вигляду траєкторії не залежить:

$$\delta A = (\vec{F}, d\vec{r}) = qE dr \cos 0 \Rightarrow A = \int_{r_1}^{r_2} qE dr = \int_{r_1}^{r_2} q \frac{kQ}{r^2} dr = kQq \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right), \quad (2.45)$$

звідки з урахуванням (2.39) отримуємо *шукану різницю потенціалів*:

$$\Delta\varphi = kQ \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right), \quad (2.46)$$

Відповідно, різниця потенціалів між поверхнями сфер

$$\Delta\varphi = kQ \cdot \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right), \quad (2.47)$$

R_2 та R_1 – радіуси сфер.

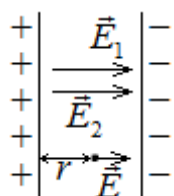


Рисунок 2.16

2.3.4. Різниця потенціалів у полі паралельних площин

Розглянемо різницю потенціалів між двома точками у полі, що створене двома рівномірно зарядженими нескінченними паралельними площинами; обидві точки розташовано між площинами. Розглянемо важливий випадок,

коли площини різнойменно заряджені, та модуль густини заряду на обох площинах однаковий.

$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$, див. рис. 2.16, де \vec{E}_1 – поле позитивно зарядженої площини ($E_1 = 2\pi k\xi$ спрямоване від площини) та \vec{E}_2 – поле негативно зарядженої площини ($E_2 = 2\pi k\xi$ спрямоване до площини); ξ – поверхнева густина заряду позитивно зарядженої площини, див. (2.15). Через симетрію задачі зрозуміло, що потенціал всіх точок, рівновіддалених від позитивно зарядженої площини, однаковий. Розглянемо роботу сил поля по переміщенню позитивного заряду q з точки, що на відстані r_1 від позитивно зарядженої площини, в точку, що на відстані r_2 від неї. Роботу можна розглядати вздовж прямолінійної траєкторії, так як кулонівські сили є потенціальними, то робота від вигляду траєкторії не залежить:

$$\delta A = (\vec{F}, d\vec{r}) = qE dr \cos 0 \Rightarrow A = \int_{r_1}^{r_2} qE dr = \int_{r_1}^{r_2} q \cdot 4\pi k\xi dr = 4\pi k\xi q (r_2 - r_1), \quad (2.48)$$

звідки з урахуванням (2.39) отримуємо шукану різницю потенціалів:

$$\Delta\varphi = 4\pi k\xi (r_2 - r_1), \quad (2.49)$$

Відповідно, різниця потенціалів між пластинами

$$\Delta\varphi = 4\pi k\xi(d - 0) = 4\pi k\xi d, \quad (2.50)$$

d – відстань між пластинами.

2.4. Поляризація діелектриків

2.4.1. Електричний диполь

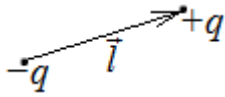


Рисунок 2.17

Електричним диполем називають систему двох жорстко зв'язаних зарядів, які протилежні за знаком та однакові за модулем, див. рис. 2.17. Від від'ємного до додатного заряду

проведено вектор \vec{l} . **Дипольним моментом диполя** називають вектор

$$\vec{p} = q\vec{l}. \quad (2.51)$$

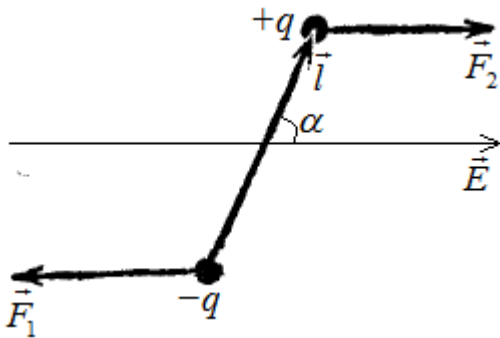


Рисунок 2.18

Диполь називають точковим, якщо його довжина l є набагато меншою за відстань від диполя до точки спостереження. Розглянемо поведінку диполя в зовнішньому однорідному електричному полі, див. рис. 2.18. За модулем обидві сили $F_1 = F_2 = qE$, тож

результуюча сила, що діє на диполь, дорівнює нулю. Тим не менш, моменти сил \vec{F}_1 та \vec{F}_2 не скопменсуються, що призведе до обертання диполя. Система двох сил протилежно спрямованих, модулі яких однакові, проте яка викликає обертальний момент, називається **парою сил**.

Відносно точки, що співпала з зарядом $-q$, момент цієї пари сил

$$\vec{M} = [\vec{l}, \vec{F}_2] = [q\vec{l}, \vec{F}_2/q] = [\vec{p}, \vec{E}], \quad (2.52)$$

за модулем $M = pE \sin \alpha$, див. (1.10). Робота сил електричного поля по повороту на малий кут $d\alpha$ проти годинникової стрілки (по зменшенню кута α на величину $d\alpha$):

$$\delta A = M d\alpha = pE \sin \alpha d\alpha = -pEd(\cos \alpha) = -d(pE \cos \alpha), \quad (2.53)$$

Тут враховано постійність модуля дипольного моменту та однорідність поля. Згідно (1.111)

$$\delta A = E_n(\alpha) - E_n(\alpha - d\alpha) = dE_n, \quad (2.54)$$

співставляючи (2.53) та (2.54) бачимо, що

$$d(E_n + pE \cos \alpha) = 0 \Rightarrow E_n = -pE \cos \alpha + \text{const} = -(\vec{p}, \vec{E}) + \text{const}. \quad (2.55)$$

Обравши цю константу рівною нулю (тобто поклавши нульовою потенціальну енергію диполя, перпендикулярного до поля), запишемо

$$E_n = -(\vec{p}, \vec{E}). \quad (2.56)$$

Як відомо, в стані стійкої рівноваги реалізується найменше значення потенціальної енергії, яке у розглянутому випадку дорівнює $W = -pE$. Це значення досягається, коли $\vec{l} \uparrow \uparrow \vec{E}$.

Тож отримали відомий результат, що в стані стійкої рівноваги диполь орієнтований так, що його дипольний момент співнапрямлений до поля. **Поле прагне повернути диполь таким чином, щоб його дипольний момент співпав з полем за напрямком.**

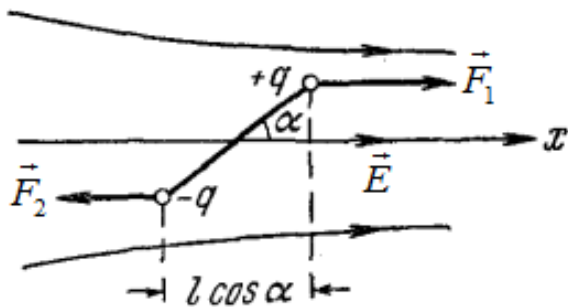


Рисунок 2.19

Зауважимо, що вирази $W = -(\vec{p}, \vec{E})$ та $\vec{M} = [\vec{p}, \vec{E}]$ є коректними для точкового диполя навіть у неоднорідному полі, бо при розрахунку роботи спроба врахування зміни електричного поля вздовж

довжини диполя призведе до отримання нескінченно малої величини другого порядку (добутку приросту поля на приріст кута), якою можна знехтувати. **Окрім обертального моменту, на диполь в неоднорідному полі діє також і результуюча сила**, бо сили \vec{F}_1 та \vec{F}_2 вже не скомпенсованими в неоднорідному полі. Знайдемо вираз для сили, що діє на точковий диполь в неоднорідному полі. Спрямуємо вісь x у напрямку найшвидшої зміни поля, див. рис. 2.19. Якщо

диполь точковий (має дуже малі розміри), то сили \vec{F}_1 та \vec{F}_2 можна вважати колінеарними, та

$$\begin{aligned}
 F &= F_1 - F_2 = qE_1 - qE_2 = q\left(E + \frac{\Delta E}{\Delta x} \Delta x\right) - qE = \\
 &= q \frac{\Delta E}{\Delta x} \Delta x = q \frac{\Delta E}{\Delta x} l \cos \alpha = p \frac{\Delta E}{\Delta x} \cos \alpha,
 \end{aligned}
 \tag{2.57}$$

тут, фактично, відношення $\frac{\Delta E}{\Delta x}$ є частинною похідною $\frac{\partial E}{\partial x}$. Відповідно, ця сила прагне втягнути диполь в область сильнішого поля.

2.4.2. Механізм поляризації діелектриків

Електронейтральні молекули діелектриків прийнято розглядати саме як диполі, де $+q$ та $-q$ – сумарний позитивний та негативний заряди, що містяться у молекулі, а \vec{l} – вектор, що проведено від «центру мас» позитивного заряду в молекулі до «центру мас» негативного заряду в молекулі.

Якщо молекули діелектрика мають ненульовий дипольний момент навіть без прикладення зовнішнього поля, їх називають *полярними*. Якщо молекули діелектрика не мають дипольного моменту при відсутності зовнішнього електричного поля, їх називають *неполярними*.

Коли діелектрик поміщають у зовнішнє електричне поле, то він, як єдине ціле, набуває ненульового дипольного моменту. Це явище назвали *поляризацією* діелектрика. При поляризації в діелектрика виникає *макроскопічний* дипольний момент.

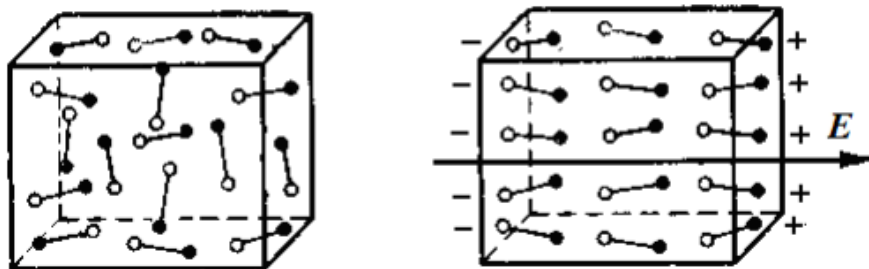


Рисунок 2.20

Механізм поляризації діелектрика з полярними молекулами продемонстровано на рис. 2.20, чорним – «плюси», білим – «мінуси».

До включення поля дипольні моменти молекул орієнтовані хаотичним чином, та середній дипольний момент діелектрика дорівнює нулю. Після включення поля ці диполі орієнтуються за полем, та діелектрик набуває ненульового дипольного моменту як єдине ціле.

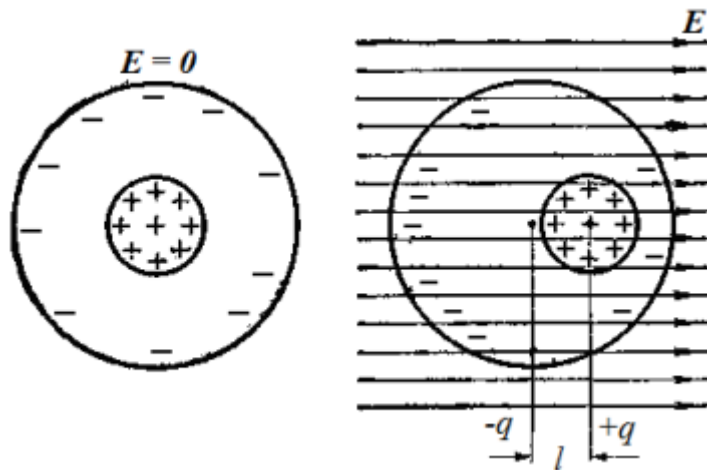


Рисунок 2.21

Механізм поляризації діелектрика з неполярними молекулами продемонстровано на рис. 2.21. У відсутності зовнішнього поля «центри мас» додатного та від'ємного зарядів молекул співпадають. При прикладенні зовнішнього поля заряд всередині молекули перерозподіляється таким чином, що ці «центри мас» перестають співпадати. Відповідно, вздовж поля поляризуються молекули діелектрика, а отже і діелектрик як єдине ціле.

Виділяють ще один тип діелектриків, які називають іонними кристалами. Такі діелектрики складаються, фактично, з двох кристалічних ґраток, «вставлених» одна в іншу, одна з ґраток містить позитивно заряджені іони, інша – негативно. Під дією зовнішнього електричного поля ці ґратки трохи зміщуються у протилежних напрямках, що призводить до виникнення дипольного моменту в діелектрика як єдиного цілого.

У деяких кристалічних діелектриках стиснення зразка у певному напрямку призводить до його поляризації – до появи на протилежних гранях поляризаційних зарядів протилежного знаку. Навпаки, подача різниці потенціалів на протилежні грані веде до стискання (або розширення) зразка. Таке явище називається *п'єзоелектричним ефектом*. П'єзоелектричні матеріали широко використовують у техніці для перетворення механічних коливань в електричні і навпаки.

В деяких діелектриках можлива так звана *спонтанна поляризація*, яка може існувати навіть у відсутності електричного поля. Вона характерна для матеріалів, що складаються з окремих *макроскопічних* областей (доменів), кожен домен має свій дипольний момент. Якщо спочатку ці дипольні моменти спрямовані хаотично, і дипольний момент діелектрика як єдиного цілого є нульовим, то при прикладанні зовнішнього поля домени орієнтуються вздовж поля, що викликає поляризацію діелектрика. Але якщо це зовнішнє поле прибрати, то поляризація не зникне, тож поляризація в таких матеріалах проявляє суттєво нелінійну залежність від зовнішнього поля навіть при малому полі (явище гістерезису). Такі матеріали називають *сегнетоелектриками*.

Надалі будемо розглядати не сегнетоелектричні матеріали.

2.4.3. Вектор поляризованості. Електрична індукція

Для кількісної оцінки поляризації діелектрика вводиться поняття *поляризованості (вектору поляризованості)* діелектрика:

$$\vec{P} = \frac{1}{\Delta V} \cdot \sum_{\Delta V} \vec{p}_i, \quad (2.58)$$

$\sum_{\Delta V} \vec{p}_i$ – сума дипольних моментів молекул, що потрапили в малий об'єм ΔV .

Об'єм ΔV макроскопічний, тобто в ньому знаходиться достатньо молекул, щоб провести відповідне усереднення, але він є нескінченно малим порівняно з об'ємом всього діелектрика.

Фактично, *вектор поляризованості є дипольним моментом одиниці об'єму діелектрика*. Як відомо з експерименту, поляризованість діелектрика пропорційна до напруженості електричного поля всередині нього:

$$\vec{P} = \chi \epsilon_0 \vec{E}, \quad (2.59)$$

де χ – безрозмірний коефіцієнт, що не залежить від \vec{E} , і називається *діелектричною сприйнятливістю* діелектрика. За розмірностями маємо

$$[P] = \frac{[p]}{[V]} = \frac{\text{Кл} \cdot \text{м}}{\text{м}^3} = \frac{\text{А} \cdot \text{с}}{\text{м}^2}, \quad [E] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{А} \cdot \text{с}^3}, \quad [\epsilon_0] = \frac{\text{А}^2 \cdot \text{с}^4}{\text{кг} \cdot \text{м}^3}, \quad [E\epsilon_0] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{А} \cdot \text{с}^3} \cdot \frac{\text{А}^2 \cdot \text{с}^4}{\text{кг} \cdot \text{м}^3} = \frac{\text{А} \cdot \text{с}}{\text{м}^2} = [P].$$

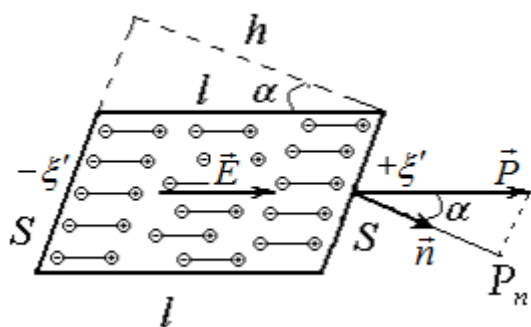


Рисунок 2.22

Розглянемо частину діелектрика у вигляді похилої призми з площею основи S і ребром l , що поміщений в електричне поле, що є паралельним її бічному ребру, див. рис. 2.22. Через явище поляризації на гранях, що є «гранями» діелектрика наводяться заряди, ці заряди називають

зв'язаними зарядами. Позначимо ξ' – модуль поверхневої густини зв'язаних зарядів. Матимемо

$$P = \frac{q'l}{V} = \frac{q'l}{Sh} = \frac{\xi'Sl}{Sh} = \frac{\xi'l}{h} = \frac{\xi'l}{l \cos \alpha} = \frac{\xi'}{\cos \alpha} \Rightarrow \xi' = P \cos \alpha = P_n, \quad (2.60)$$

поверхнева густина зв'язаних зарядів дорівнює проекції вектору поляризованості на зовнішню нормаль до розглянутої поверхні діелектрика.

Розглянемо діелектрик, що знаходиться між нескінченно зарядженими площинами, що заряджені за модулем однаково, проте різнойменно. Діелектрик поляризується, та поле зв'язаних зарядів всередині діелектрика буде спрямовано проти зовнішнього поля, див. рис. 2.23.

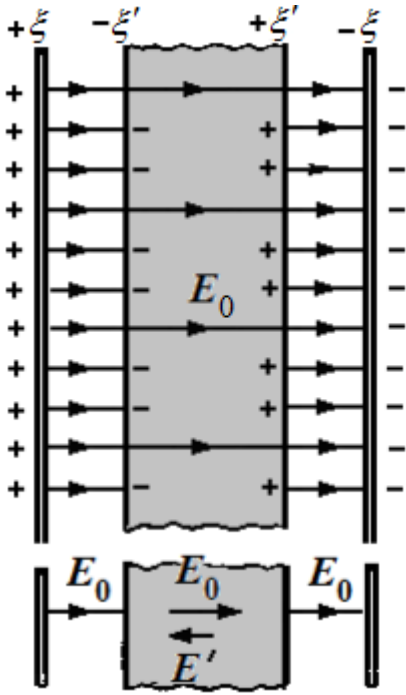


Рисунок 2.23

Поле, створене площинами

$$E_0 = 4\pi k \xi = \frac{\xi}{\epsilon_0}, \quad (2.61)$$

див. пояснення перед формулою (2.48), тут враховано зв'язок $\epsilon_0 = (4\pi k)^{-1}$. Аналогічно поле зв'язаних зарядів

$$E' = \frac{\xi'}{\epsilon_0} = \frac{P}{\epsilon_0}, \quad (2.62)$$

у випадку, що розглядається $\vec{P} \uparrow \uparrow \vec{n}$, тож $\xi' = P_n = P$. Поле всередині діелектрика

$$E = E_0 - E' = \frac{\xi - P}{\epsilon_0}, \quad (2.63)$$

звідки з урахуванням (2.59) та (2.61) можна

отримати

$$E_0 = E(1 + \chi), \quad (2.64)$$

поле у діелектрику ϵ в $1 + \chi$ разів меншим за зовнішнє поле. Безрозмірну величину

$$\epsilon = 1 + \chi, \quad (2.65)$$

назвали **діелектричною проникністю** діелектрика. Тож поле у діелектрику ϵ в ϵ разів меншим за поле у вакуумі. Щойно факт $E_0 = \epsilon E$ продемонстровано на простому випадку. У загальному випадку його теж можна вивести, але на значно складнішому математичному апараті.

Всі вище наведені формули для закону Кулона та полів заряджених об'єктів стосувались поля у вакуумі, тож відповідні напруженості полів, потенціали, різниці потенціалів та кулонівські сили у діелектрику матимуть точно такий же вигляд, як і у вакуумі, але замість величини k у відповідні вирази буде входити величина k/ϵ . Для вакууму $\epsilon = 1$.

Без виведення приймемо факт, що всередині діелектрику теорема Гауса матиме вигляд

$$\oint_S (\vec{D}, \vec{n}) dS = q, \quad (2.66)$$

де q – сума вільних зарядів, що розташована всередині об'єму V , який обмежено замкненою поверхнею S , а

$$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} \quad (2.67)$$

є так званою *електричною індукцією*. Важливо зауважити, що у величину q не входять зв'язані заряди.

Слід зауважити, що вище розглянуто лише так звані ізотропні діелектрики, тобто середовища, властивості яких однакові в усіх напрямках. Інші випадки в рамках цього курсу ми не розглядатимемо.

2.5. Властивості провідників

На відміну від діелектрика, *електростатичне поле не проникає всередину ідеального провідника*. Це пов'язано з тим, що на відміну від діелектрика, у провіднику електрони можуть переміщатись на макроскопічні відстані під дією зовнішнього електричного поля, та при прикладенні зовнішнього поля заряд всередині провідника *дуже швидко* перерозподіляється таким чином, щоб утворився рівноважний стан (явище такого перерозподілу зарядів називається явищем *електростатичної індукції*). В цьому стані поле всередині провідника дорівнює нулю. Відповідно,

1. *Поверхня провідника є екіпотенціальною поверхнею*, тобто потенціал електростатичного поля всюди однаковий на поверхні провідника.

2. *На поверхні провідника електростатичне поле завжди спрямовано перпендикулярно до поверхні*, бо інакше виникала б тангенціальна складова поля, що спричиняла би рух зарядів поверхнею та стан не був би рівноважним.

3. *Всередині провідника сумарний заряд дорівнює нулю, ненульовий заряд може бути розподілений лише по поверхні провідника* (наслідок теореми Гауса та того факту, що всередині провідника відсутнє поле).

2.6. Електрична ємність. Конденсатори

Ємністю відокремленого провідника називається відношення його заряду

до потенціалу його поверхні: $C = \frac{q}{\varphi}$, $[C] = \Phi = \frac{\text{Кл}}{\text{В}} = \frac{\text{Кл}}{\text{Дж/Кл}} = \frac{\text{Кл}^2}{\text{Дж}} = \frac{\text{А}^2 \cdot \text{с}^4}{\text{кг} \cdot \text{м}^2}$.

Наявність поблизу провідника інших тіл змінюють його електроємність, тому що потенціал провідника залежить і від електричних полів, що створюються зарядами, наведеними в навколишніх тілах внаслідок електростатичного індукції.

Конденсатор – система з двох провідників (металевих обкладинок), які розділені діелектриком, товщина якого набагато менша за лінійні розміри обкладинок. Якщо на одній з обкладинок наводиться заряд $+q$, то на іншій обов'язково має навестись заряд $-q$. Відношення цього заряду до різниці потенціалів обкладинок назвали *ємністю конденсатора*

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2}. \quad (2.68)$$

Ємність конденсатора залежить лише від геометричних розмірів конденсатора та діелектричної проникності його діелектрика.

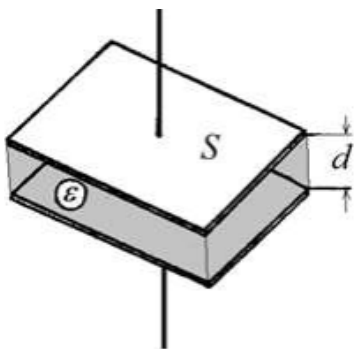


Рисунок 2.24

2.6.1. Ємність плоского конденсатора

У плоскому конденсаторі обкладинки є плоскими, див. рис. 2.24.

Так як товщина конденсатора d є набагато меншою за лінійні розміри обкладинок, то поле всередині конденсатора можна вважати полем від нескінченних пластин, нехтуючи крайовими ефектами.

Різниця потенціалів цих пластин дорівнює $\Delta\varphi = 4\pi \frac{k}{\varepsilon} \xi d$, див. (2.50) та той факт,

що при наявності діелектрика у виразах для потенціалів k замінюється на k/ε .

Відповідно,

$$\Delta\varphi = 4\pi \frac{k}{\varepsilon} \xi d = \frac{\xi d}{\varepsilon \varepsilon_0} = \frac{qd}{S \varepsilon \varepsilon_0}, \quad (2.69)$$

звідки отримуємо формулу для ємності плоского конденсатора

$$C = \frac{q}{\Delta\varphi} = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 S}{d}. \quad (2.70)$$

2.6.2. Ємність циліндричного конденсатора

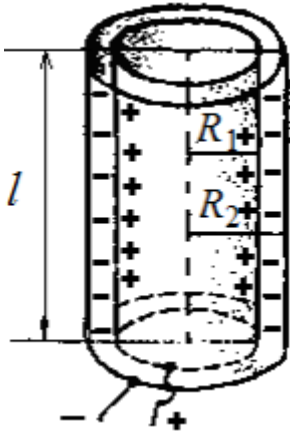


Рисунок 2.25

Обкладинки циліндричного конденсатора являють собою коаксіальні тонкостінні циліндри, див. рис. 2.25. Так як товщина конденсатора $d = R_2 - R_1$ є набагато меншою за довжину обкладинок l , то поле всередині конденсатора можна вважати полем від нескінченних циліндрів, нехтуючи крайовими ефектами.

Різниця потенціалів цих пластин дорівнює

$$\Delta\varphi = 2 \frac{k}{\varepsilon} \sigma \ln \frac{R_2}{R_1}, \text{ див. (2.44) та той факт, що при наявності}$$

діелектрика у виразах для потенціалів k замінюється на k/ε . Відповідно,

$$\Delta\varphi = 2 \frac{k}{\varepsilon} \sigma \ln \frac{R_2}{R_1} = \frac{1}{2\pi \varepsilon \varepsilon_0} \frac{q}{l} \ln \frac{R_2}{R_1}, \quad (2.71)$$

звідки отримуємо формулу для ємності циліндричного конденсатора

$$C = \frac{q}{\Delta\varphi} = \frac{2\pi \varepsilon \varepsilon_0 l}{\ln(R_2/R_1)}. \quad (2.72)$$

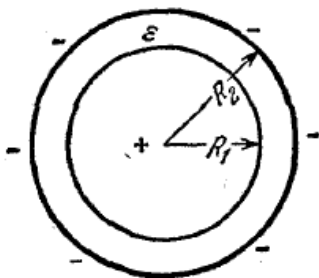


Рисунок 2.26

2.6.3. Ємність сферичного конденсатора

Обкладинки сферичного конденсатора являють собою концентричні тонкостінні сфери, див. рис. 2.26. Різниця потенціалів обкладинок

дорівнює $\Delta\varphi = \frac{k}{\varepsilon} q \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$, див. (2.47) та той

факт, що при наявності діелектрика у виразах для потенціалів k замінюється на k/ε . Відповідно,

$$\Delta\varphi = \frac{k}{\varepsilon} q \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} q \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right), \quad (2.73)$$

звідки отримуємо формулу для ємності сферичного конденсатора

$$C = \frac{q}{\Delta\varphi} = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}. \quad (2.74)$$

2.6.4. З'єднання конденсаторів

При *паралельному* з'єднанні конденсаторів одна з обкладинок кожного з них має потенціал φ_1 , інша – потенціал φ_2 , див. рис. 2.27.

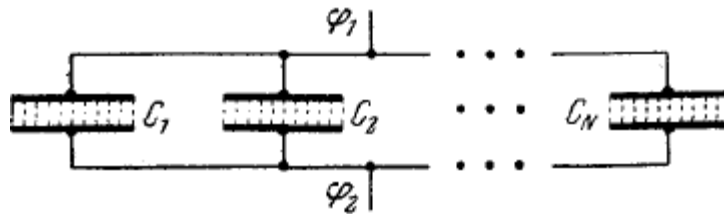


Рисунок 2.27

Тож згідно (2.68) $q_1 = C_1(\varphi_1 - \varphi_2)$, $q_2 = C_2(\varphi_1 - \varphi_2)$, ..., $q_N = C_N(\varphi_1 - \varphi_2)$, звідки сумарний заряд системи

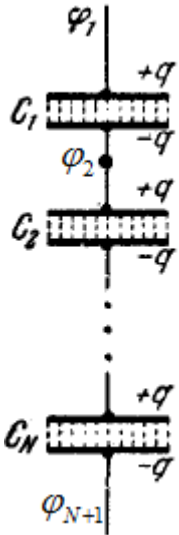
$$q = q_1 + q_2 + \dots + q_N = (\varphi_1 - \varphi_2)(C_1 + C_2 + \dots + C_N), \quad (2.75)$$

$\varphi_1 - \varphi_2$ – різниця потенціалів на всій системі, тож ємність паралельного з'єднання

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = C_1 + C_2 + \dots + C_N, \quad (2.76)$$

Ємність паралельного з'єднання конденсаторів дорівнює сумі їх ємностей.

Розглянемо *послідовне* з'єднання, див. рис. 2.28. Нехай на «верхній» обкладинці першого конденсатора наведеться заряд $+q$, тоді на «нижній» наведеться заряд $-q$.



«Нижня» обкладинка першого конденсатора пов'язана ідеальним провідником з «верхньою» обкладинкою другого конденсатора, тоді через закон збереження заряду на «верхній» обкладинці другого конденсатора має навестись заряд $+q$, відповідно на «нижній» обкладинці другого конденсатора наводиться заряд $-q$, і так далі. В цих міркуваннях використано, що система, що являє собою провідник та дві обкладинки «сусідніх» конденсаторів є електронейтральною.

Тож по модулю заряд обкладинок кожного з конденсаторів дорівнюватиме q . «Верхня» обкладинка всієї системи є «верхньою» обкладинкою першого конденсатора, «нижня» обкладинка всієї системи є «нижньою» обкладинкою останнього конденсатора. Тож заряд на обкладинках всієї системи теж дорівнює q .

Різниця потенціалів на всій системі

$$\begin{aligned} \Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_{N+1} &= \frac{q}{C} = (\varphi_1 - \varphi_2) + (\varphi_2 - \varphi_3) + (\varphi_3 - \varphi_4) + \dots + (\varphi_N - \varphi_{N+1}) = \\ &= \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} + \dots + \frac{q}{C_N}, \end{aligned} \quad (2.77)$$

звідки бачимо, що *ємність послідовного з'єднання конденсаторів описується формулою*

$$C = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_N} \right)^{-1}. \quad (2.78)$$

2.6.5. Енергія системи зарядів, енергія конденсатора

Розглянемо спочатку систему точкових зарядів. Її потенціальна енергія є сумою потенціальних енергій попарних кулонівських взаємодій зарядів:

$$E_{\text{п}} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \frac{kq_i q_j}{r_{ij}}. \quad (2.79)$$

Покажемо, звідки взявся коефіцієнт $1/2$. Для двох частинок

$$E_{\text{п}} = \frac{kq_1q_2}{r_{12}} = \frac{1}{2} \left(\frac{kq_1q_2}{r_{12}} + \frac{kq_2q_1}{r_{21}} \right), \quad (2.80)$$

для трьох частинок

$$E_{\text{п}} = \frac{kq_1q_2}{r_{12}} + \frac{kq_1q_3}{r_{13}} + \frac{kq_2q_3}{r_{23}} = \frac{1}{2} \left(\frac{kq_1q_2}{r_{12}} + \frac{kq_2q_1}{r_{21}} + \frac{kq_1q_3}{r_{13}} + \frac{kq_3q_1}{r_{31}} + \frac{kq_2q_3}{r_{23}} + \frac{kq_3q_2}{r_{32}} \right), \quad (2.81)$$

і так далі. Тож **енергія системи зарядів задається виразом**

$$E_{\text{п}} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \frac{kq_iq_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n \frac{kq_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \varphi_i, \quad (2.82)$$

де

$$\varphi_i = \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n \frac{kq_j}{r_{ij}} \quad (2.83)$$

є потенціалом i -го заряду в полі всіх інших зарядів.

Розглянемо поверхню провідника як систему дуже великої кількості дуже малих площадок, кожна з яких «виступає» в ролі точкового заряду. Тоді енергія зарядженого провідника

$$E_{\text{п}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \varphi_i = \frac{1}{2} \varphi \sum_{i=1}^n q_i = \frac{\varphi q}{2}, \quad (2.84)$$

тут використано, що поверхня провідника є еквіпотенціальною, тож потенціали всіх її точок однакові; q – сумарний заряд провідника (він лише на поверхні, всередині провідника некомпенсованого заряду немає). Аналогічно можна показати, що енергія системи з k заряджених провідників

$$E_{\text{п}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k q_i \varphi_i, \quad (2.85)$$

де q_k – сумарний заряд k -го провідника, φ_k – потенціал k -го провідника.

Відповідно, енергія конденсатора

$$E_{\text{п}} = \frac{1}{2}(q_1\varphi_1 + q_2\varphi_2) = \frac{1}{2}(q\varphi_1 + (-q)\varphi_2) = \frac{q}{2}(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{qU}{2}, \quad (2.86)$$

де різниця потенціалів $U = \Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ – **напруга** на конденсаторі. Згідно (2.68) остаточно матимемо **вираз для енергії зарядженого конденсатора**

$$E_{\text{п}} = \frac{CU^2}{2} = \frac{q^2}{2C}. \quad (2.87)$$

2.7. Електричний струм, електричні кола

2.7.1. Струм. Опір. Закон Ома стосовно ділянки, що не містить джерел

Електричний струм (як фізичне явище) – напрямлений (впорядкований) рух заряджених частинок. Для виникнення та підтримування електричного струму необхідні як наявність електричного поля (джерела, щоб «було кому ганяти заряди») та наявність вільних заряджених частинок (щоб «було кому рухатись» під дією поля). Напрямок струму завжди є напрямом руху позитивних зарядів (таке визначення склалось історично, потім люди зрозуміли, що носії струму в металах – це електрони, але вже змінювати таке визначення не стали).

Електричне коло – сукупність пристроїв, з'єднаних провідниками таким чином, який забезпечує можливість протікання електричного струму. Коло має бути замкненим.

Фізична величина, що описує електричний струм – це **сила струму** I . За визначенням

$$I = \frac{dq}{dt}, \quad (2.88)$$

де dt – нескінченно малий проміжок часу, а dq – заряд, що пройшов через поперечний переріз провідника за час dt . Як бачимо, **сила струму є похідною від заряду за часом**.

Розглянемо дві точки B та C електричного кола. Тоді **різниця потенціалів** між точками B та C – це робота по переносу одиничного позитивного заряду (тобто заряду, що дорівнює $+1$ Кл) з точки B в точку C . **Різницю потенціалів**

між двома точками також називають **напругою** між двома точками. Відповідно, робота A по переносу заряду q з точки B в точку C дорівнює

$$A = q(\varphi_B - \varphi_C) = qU_{BC}, \quad (2.89)$$

де φ_B та φ_C – потенціали точок B та C , відповідно та U_{BC} – напруга між точками B та C .

Електричні кола завжди зручно описувати в термінах потенціалів. При цьому слід зауважити, що *фізичний зміст має не стільки сам потенціал, скільки їхня різниця*. Потенціали завжди задані з точністю до плюс константи, тобто якщо до всіх потенціалів кола додати одну й ту ж величину, то фізичний опис кола не зміниться. Дійсно, нехай до всіх потенціалів кола додали одну й ту ж величину φ . Тоді напруга між двома точками кола не зміниться, бо

$$U_{BC} = \varphi_B - \varphi_C = (\varphi_B + \varphi) - (\varphi_C + \varphi). \quad (2.90)$$

Однак досить часто для потенціалів кола задають конкретні числові значення, базуючись на такій домовленості: *потенціал заземленої точки вважається рівним нулю*.

Опір – фізична величина, яка характеризує властивість тіла опиратись проходженню через нього електричного струму. Опір тіла є властивістю лише самого тіла, а не параметрів кола. В переважній більшості випадків при описі кола провали вважаються ідеальними, тобто такими, що мають нехтовно малий опір. **Резистор** – елемент кола, що має опір (тобто його опір є набагато більшим за опір провідів).

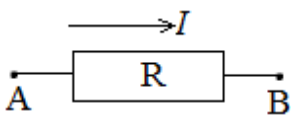


Рисунок 2.29

Нехай ми маємо ділянку кола між точками A та B , див. рис. 2.29. Нехай цією ділянкою тече струм від точки A до точки B . Тоді струм та напруга на цій ділянці пов'язані таким співвідношенням:

$$U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B = IR_{AB}, \quad (2.91)$$

яке називають **законом Ома для ділянки кола, що не містить джерел**; тут R_{AB} – опір ділянки AB .

Одиницею розмірності опору в СІ є Ом, $\text{Ом} = \frac{\text{В}}{\text{А}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{А}^2 \cdot \text{с}^3}$.

2.7.2. Послідовне та паралельне з'єднання резисторів

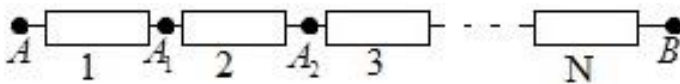


Рисунок 2.30

При *послідовному* з'єднанні «початок» кожного наступного елемента приєднано до «кінця»

попереднього, див. рис. 2.30. Нехай за час dt через ділянку AB пройшов заряд dq . Цей же заряд пройшов через кожен елемент ділянки, тож

$$dq = dq_1 = dq_2 = \dots = dq_N \Rightarrow \frac{dq}{dt} = \frac{dq_1}{dt} = \frac{dq_2}{dt} = \dots = \frac{dq_N}{dt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = I_1 = I_2 = \dots = I_N,$$
(2.92)

див. (2.88). Тож *на послідовному з'єднанні струм однаковий через всі елементи і дорівнює загальному струму*. Зауважимо, що при виведенні співвідношення (2.92) не використовувалось те, що елементи є резисторами, тож співвідношення (2.92) є справедливим для послідовного з'єднання будь-яких елементів.

Розглянемо різницю потенціалів між точками A та B :

$$\varphi_A - \varphi_B = (\varphi_A - \varphi_{A_1}) + (\varphi_{A_1} - \varphi_{A_2}) + (\varphi_{A_2} - \varphi_{A_3}) + \dots + (\varphi_{A_{N-1}} - \varphi_B). \quad (2.93)$$

Згідно (2.90)

$$U = \varphi_A - \varphi_B, \quad U_1 = \varphi_A - \varphi_{A_1}, \quad U_2 = \varphi_{A_1} - \varphi_{A_2},$$

$$U_3 = \varphi_{A_2} - \varphi_{A_3}, \quad \dots, \quad U_N = \varphi_{A_{N-1}} - \varphi_B, \quad (2.94)$$

з (2.93) та (2.94) бачимо, що

$$U = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_N. \quad (2.95)$$

На послідовному з'єднанні загальна напруга дорівнює сумі напруг на елементах. Зауважимо, що при виведенні співвідношення (2.95) не використовувалось те, що елементи є резисторами, тож співвідношення (2.95) є справедливим для послідовного з'єднання будь-яких елементів.

Згідно закону Ома та виразу (2.92) маємо

$$U_1 = I_1 R_1 = IR_1, U_2 = I_2 R_2 = IR_2, \dots, U_N = I_N R_N = IR_N. \quad (2.96)$$

Додаючи рівняння (2.96) одне до одного з урахуванням (2.95) маємо

$$U = I(R_1 + R_2 + \dots + R_N). \quad (2.97)$$

З іншого боку, загальні струм, напруга та опір згідно закону Ома пов'язані співвідношенням $U = IR$. Тож

$$R = R_1 + R_2 + \dots + R_N. \quad (2.98)$$

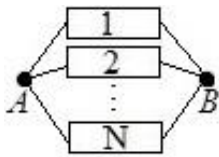


Рисунок 2.31

Загальний опір послідовного з'єднання резисторів дорівнює сумі їх опорів.

При *паралельному* з'єднанні «початки» всіх елементів з'єднані (або еквівалентно з'єднані) в одній точці, «кінці» всіх елементів теж з'єднані (або еквівалентно з'єднані) в одній точці; точки початків і кінців, зрозуміло, не співпадають; див. рис. 2.31.

Очевидно, що

$$U_1 = U_2 = \dots = U_N = U = \varphi_A - \varphi_B, \quad (2.99)$$

тож *на паралельному з'єднанні напруга на кожному елементі однакова та дорівнює загальній напрузі*. Зауважимо, що при виведенні співвідношення (2.99) не використовувалось те, що елементи є резисторами, тож *співвідношення (2.99) є справедливим для паралельного з'єднання будь-яких елементів*.

Нехай за час dt через ділянку AB пройшов заряд dq . Частина цього заряду пройшла через перший елемент, частина – через другий, і т. д:

$$dq = dq_1 + dq_2 + \dots + dq_N \Rightarrow \frac{dq}{dt} = \frac{dq_1}{dt} + \frac{dq_2}{dt} + \dots + \frac{dq_N}{dt} \Rightarrow \quad (2.100)$$

$$\Rightarrow I = I_1 + I_2 + \dots + I_N.$$

На паралельному з'єднанні загальний струм дорівнює сумі струмів на елементах. Зауважимо, що при виведенні співвідношення (2.100) не використовувалось те, що елементи є резисторами, тож *співвідношення (2.100) є справедливим для паралельного з'єднання будь-яких елементів*.

Згідно закону Ома та виразу (2.99) маємо

$$I_1 = \frac{U_1}{R_1} = \frac{U}{R_1}, I_2 = \frac{U_2}{R_2} = \frac{U}{R_2}, \dots, I_N = \frac{U_N}{R_N} = \frac{U}{R_N}, \quad (2.101)$$

додаючи рівняння (2.101) одне до одного, з урахуванням (2.100) отримаємо

$$I = U \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_N} \right). \quad (2.102)$$

З іншого боку, загальні струм, напруга та опір згідно закону Ома пов'язані співвідношенням $I = U \cdot (1/R)$. Тож

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_N} \Rightarrow R = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_N} \right)^{-1}. \quad (2.103)$$

Загальний опір паралельного з'єднання задається виразом (2.103).

2.7.3. Закон Ома для повного електричного кола. Джерела напруги

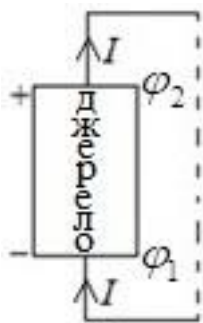


Рисунок 2.32

Для того щоб у колі йшов струм, необхідно, щоб у ньому обов'язково було *джерело*. На рис. 2.32 пунктиром схематично зображено зовнішнє коло, до якого підключено джерело. Клеми джерела позначаються як «плюс» і «мінус». Потенціал «плюса» джерела позначимо як φ_2 , а «мінуса» — як φ_1 . Оскільки зовнішнім колом струм іде від «плюса» джерела до «мінуса», то $\varphi_2 > \varphi_1$, бо *струм у колі завжди йде від більшого*

потенціалу до меншого. Але, відповідно, очевидно, що всередині джерела струм має йти від «мінуса» до «плюса». Електричне поле не може таким чином «пересувати» заряди всередині джерела, звідки можна зробити висновок, що *за рух зарядів всередині джерела відповідальні сили неелектричної природи. Ці сили ще називають сторонніми силами*. Цей рух може мати місце за рахунок механічних або хімічних процесів, або магнітних полів, або за рахунок світлової енергії в фотоелементах, або за рахунок інших причин — проте не за рахунок впливу електричного поля.

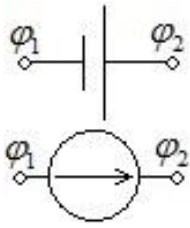


Рисунок 2.33

Ідеальне джерело напруги (ідеальне джерело ЕРС) підтримує на своїх кінцях постійну різницю потенціалів, яка є характеристикою лише самого джерела й не залежить від параметрів кола, до якого підключене джерело. ЕРС (електрорушійна сила) джерела напруги –

робота, яку виконує джерело, щоб «прогнати» колом одиничний позитивний заряд. Можливі умовно-графічні позначення ідеального джерела ЕРС наведені на рис. 2.33. *Різниця потенціалів на кінцях ідеального джерела напруги дорівнює ЕРС джерела* (див. рис. 2.33):

$$\varepsilon = \varphi_2 - \varphi_1, \quad (2.104)$$

ЕРС джерела – його «паспортна» характеристика.

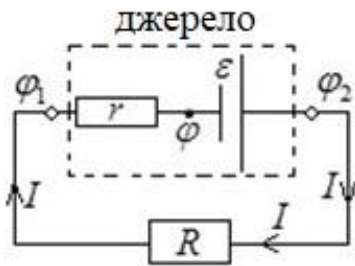


Рисунок 2.34

Але джерела є реальними (хоча при певних умовах дуже близькими до ідеальних). Різниця потенціалів (напруга) на кінцях реального джерела ЕРС залежить від параметрів кола, до якого джерело підключене. Найпростішою та найпоширенішою моделлю реального джерела ЕРС є так звана

послідовна схема заміщення, в рамках якої джерело описується як послідовне з'єднання ідеального джерела ЕРС та резистора, фізичний зміст якого – *внутрішній опір* джерела ЕРС, див. рис. 2.34. Розглянемо підключення реального джерела до зовнішнього кола опору R . φ_2 , φ_1 – потенціали клем джерела. Згідно закону Ома маємо

$$\varphi_2 - \varphi_1 = IR, \quad \varphi_1 - \varphi = Ir, \quad \varepsilon = \varphi_2 - \varphi, \quad (2.105)$$

звідки отримуємо

$$\varepsilon = I(r + R). \quad (2.106)$$

Цей вираз носить назву *закону Ома для повного кола*. Також на основі (2.105) можна отримати, що

$$U = \varepsilon - Ir, \quad (2.107)$$

де $U = IR = \varphi_2 - \varphi_1$ є напругою на клеммах джерела. Вираз (2.107) є **вольт-амперною характеристикою джерела**, тобто залежністю напруги на клеммах джерела від струму, що проходить через джерело. У реальних джерел наявна залежність напруги від струму, у ідеальних – ні. Як бачимо з (2.107), така залежність пропадає при $r = 0$; при $r = 0$ матимемо $U = \varepsilon = \text{const}$, що є визначенням ідеального джерела напруги. Тож **внутрішній опір ідеального джерела напруги є нульовим**. Відповідно, коли r малий, то залежність незначна, і можна сказати, що джерело близьке до ідеального. *Якщо внутрішній опір джерела набагато менший за опори резисторів, які містить коло (набагато менший за загальний опір кола), то тоді таке джерело близьке до ідеального.*

2.7.4. Робота й потужність струму

Нехай за час dt через коло пройшов заряд dq . Тоді згідно (2.89), (2.88) та (1.106)

$$\delta A = Udq \Rightarrow \frac{\delta A}{dt} = U \frac{dq}{dt} \Rightarrow P = IU, \quad (2.108)$$

тобто *потужність струму дорівнює добутку сили струму та напруги*. Відповідно, робота виконана за час t

$$A = \int_0^t I(\tau)U(\tau)d\tau. \quad (2.109)$$

В усталеному режимі роботи кіл постійного струму характеристики кіл не змінюються в часі, в цьому випадку

$$A = \int_0^t IUd\tau = IUt. \quad (2.110)$$

У випадку, коли постійний струм проходить по нерухомому металевому провіднику, і в провіднику не відбувається хімічних перетворень, робота струму йде на нагрів провідника. Тоді згідно закону збереження енергії та закону Ома:

$$Q = A = IUt \Rightarrow Q = I^2Rt, \quad (2.111)$$

отриманий вираз носить назву *закону Джоуля – Ленца*.

Розглянемо відому задачу про передачу максимальної потужності від джерела в коло. Нехай у нас є реальне джерело, підключене до кола, з фіксованими параметрами джерела ε та r . Дослідимо питання при якому загальному опорі кола R таке джерело передає в коло максимально можливу потужність.

Згідно (2.108) та (2.106) маємо

$$P = IU = I^2 R = \varepsilon^2 \frac{R}{(R+r)^2} = P(R), \quad (2.112)$$

та, фактично, треба знайти максимально можливе значення функції $P(R)$ на інтервалі $R \in [0, +\infty)$. Очевидно, що

$$\lim_{R \rightarrow \infty} P(R) = \lim_{R \rightarrow 0} P(R) = 0. \quad (2.113)$$

Обчислимо похідну:

$$\frac{dP}{dR} = \varepsilon^2 \frac{(R+r)^2 - 2R(R+r)}{(R+r)^4} = \varepsilon^2 \frac{r-R}{(R+r)^3}, \quad (2.114)$$

тобто похідна дорівнює нулю лише при $R=r$; та $\left. \frac{dP}{dR} \right|_{R < r} > 0$, $\left. \frac{dP}{dR} \right|_{R > r} < 0$, тож

точка $R=r$ є точкою максимуму функції $P(R)$. Відповідне максимальне значення

$$P_{\max} = P(r) = \frac{\varepsilon^2}{4r}. \quad (2.115)$$

Тож *максимально можлива потужність, яку реальне джерело може передати у коло, задається виразом (2.115) та досягається у випадку, коли загальний опір кола дорівнює внутрішньому опорі джерела*. Слід зауважити, що в такому випадку джерело не може вважатись ідеальним.

2.7.5. Закон Ома для ділянки кола, що містить джерело ЕРС

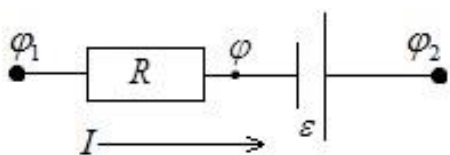


Рис. 2.35

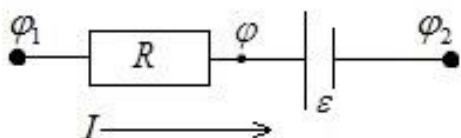


Рис. 2.36

Розглянемо ділянку кола, що містить ідеальне джерело ЕРС, див. рис. 2.35 та рис. 2.36. Нехай $\varphi_1 > \varphi_2$. На основі закону Ома для ділянки кола, що не містить джерел, та того факту, що джерело ЕРС є ідеальним, маємо для рис. 2.35

$$\varphi_1 - \varphi = IR, \quad \varphi - \varphi_2 = -\varepsilon, \quad (2.116)$$

звідки для ділянки кола на рис. 2.35 маємо, що

напруга на ділянці

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = IR - \varepsilon. \quad (2.117)$$

Для ділянки кола, зображеної на рис. 2.36, маємо

$$\varphi_1 - \varphi = IR, \quad \varphi - \varphi_2 = \varepsilon, \quad (2.118)$$

звідки напруга

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = IR + \varepsilon. \quad (2.119)$$

Вирази (2.117) та (2.119) є законами Ома для ділянки кола, що містить співнапрявлене та протинапрявлене до струму ідеальне джерело ЕРС, відповідно.

2.7.6. Закон Ома в диференціальній формі

Опір провідника довжиною l та площею перерізу S задається виразом

$$R = \frac{\rho l}{S}, \quad (2.120)$$

де ρ – питомий опір матеріалу провідника, $[\rho] = \text{Ом} \cdot \text{м} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{А}^2 \cdot \text{с}^3} \cdot \text{м} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^3}{\text{А}^2 \cdot \text{с}^3}$.

Густина струму – векторна величина \vec{j} , що за визначенням дорівнює

$$\vec{j} = \vec{n}_0 \frac{dI}{dS}, \quad (2.121)$$

де dS – елементарна (проте макроскопічна) площадка, яка є перпендикулярною до руху зарядів, \vec{n}_0 – одиничний вектор, який напрямлено за рухом позитивних зарядів та dI – струм, що проходить через елементарну площадку dS . Слід зауважити, що вектор \vec{n}_0 є перпендикулярним до площадки dS , $[\vec{j}] = A/m^2$.

Як відомо, електричне поле, створене рухомими зарядами всередині провідника, як і електростатичне, теж є потенціальним полем та має походження на основі кулонівських сил. Але, на відміну від електростатичного поля, що створене нерухомими зарядами, воно може існувати всередині провідника та не обов'язково є перпендикулярним до поверхні провідника. При цьому макроскопічний заряд може існувати лише на поверхні провідника, всередині провідника в кожній області сумарний позитивний заряд компенсується негативним.

Описана картина є справедливою для так званих стаціонарних струмів, але

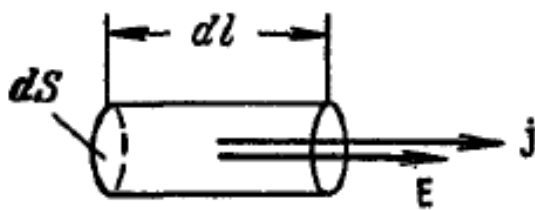


Рисунок 2.37

саме такий випадок є найпоширенішим. Подумки виділимо всередині провідника малий циліндр, площі основи якого перпендикулярні до напрямку руху зарядів (бічна поверхня – паралельна), див.

рис. 2.37. Матимемо

$$j = \frac{dI}{dS} = \frac{dU}{RdS} = \frac{dU}{\rho \frac{dl}{dS} dS} = \frac{dU}{\rho dl} = \frac{dA}{\rho dl dq} = \frac{Fdl}{\rho dl dq} = \frac{dqEdl}{\rho dl dq} = \frac{1}{\rho} \cdot E, \quad (2.122)$$

з урахуванням напрямку векторів \vec{E} та \vec{j} запишемо

$$\vec{j} = \frac{1}{\rho} \cdot \vec{E}. \quad (2.123)$$

Питома провідність – величина, обернена до питомого опору: $\sigma = 1/\rho$,

$$[\rho] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^3}{\text{А}^2 \cdot \text{с}^3} \Rightarrow [\sigma] = \frac{\text{А}^2 \cdot \text{с}^3}{\text{кг} \cdot \text{м}^3}. \text{ Відповідно,}$$

$$\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E}, \quad (2.124)$$

цей вираз є **законом Ома в диференціальній формі**.

Розгляд, наведений вище, стосується опису ділянки кола, що не містить джерела. При наявності джерел цей закон модифікується таким чином:

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}_{\text{ст}}), \text{ де } \vec{E}_{\text{ст}} - \text{напруженість поля сторонніх сил, } \vec{E} - \text{кулонівських;}$$

$$\vec{E}_{\text{ст}} = \vec{F}_{\text{ст}}/q.$$

2.7.7. Закони Кірхгофа

Гілка електричного кола – ділянка кола с одним і тим же струмом. Гілка може складатись з одного чи декількох послідовно з'єднаних елементів кола.

Вузол електричного кола – точка з'єднання трьох і більше гілок.

Контур – будь-який замкнений шлях у електричному колі, що проходить по декількох гілках.

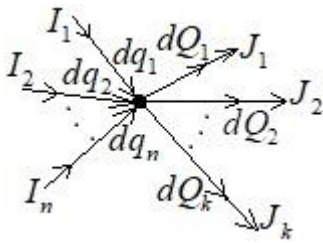


Рисунок 2.38

Розглянемо деякий вузол кола, див. рис. 2.38. Нехай за час dt різними провідниками в цей вузол зайшли заряди dq_1 (відповідний струм I_1), dq_2 (відповідний струм I_2), ..., dq_n (відповідний струм I_n), та за цей же час з цього вузла вийшли заряди dQ_1 (відповідний струм J_1),

dQ_2 (відповідний струм J_2), ..., dQ_k (відповідний струм J_k). Як відомо, **заряд не накопичується у вузлі**, тобто сума зарядів, які зайшли у вузол за час dt , повинна дорівнювати сумі зарядів, що вийшли з вузла за той же самий час:

$$dq_1 + dq_2 + \dots + dq_n = dQ_1 + dQ_2 + \dots + dQ_k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dq_1}{dt} + \frac{dq_2}{dt} + \dots + \frac{dq_n}{dt} = \frac{dQ_1}{dt} + \frac{dQ_2}{dt} + \dots + \frac{dQ_k}{dt} \Rightarrow \quad (2.125)$$

$$\Rightarrow I_1 + I_2 + \dots + I_n = J_1 + J_2 + \dots + J_k.$$

Сума струмів, що увійшли у вузол дорівнює сумі струмів, що вийшли з вузла.

Це твердження є **першим законом Кірхгофа**. Перший закон Кірхгофа виконується для будь-якого вузла у колі.

Другий закон Кірхгофа стверджує, що вздовж будь-якого контуру алгебраїчна сума ЕРС дорівнює алгебраїчній сумі падінь напруг на елементах кола, що не містять джерел. При застосуванні другого закону Кірхгофа довільним чином обирають напрям обходу контуру, при цьому струм або ЕРС, що є співнапрямленими з напрямом обходу контуру, беруться зі знаком «+», а протинапрямлені – зі знаком «-». Другий закон Кірхгофа можна вивести, послідовно записуючи різницю потенціалів на кожному елементі контуру, а потім підсумувавши отримані вирази.

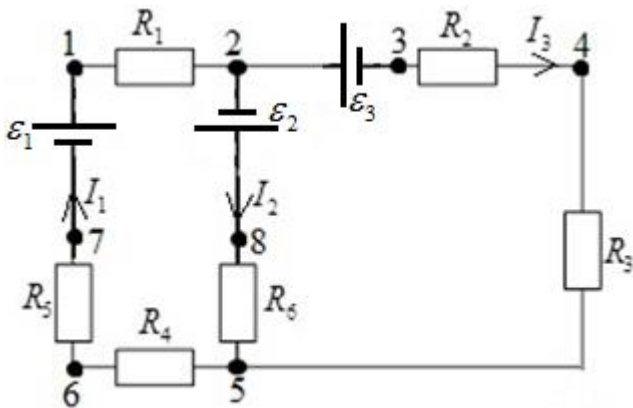


Рисунок 2.39

Проілюструємо це виведення на прикладі схеми, зображеної на рис. 2.39. Гілками схеми є 56712, 2345, 285; вузлами – точки 2 та 5; контурами – 1285671, 12345671, та 234582. Покажемо, звідки взявся другий закон Кірхгофа на прикладі контуру 234582. Згідно (2.104) та

закону Ома запишемо «послідовно» різниці потенціалів вздовж цього контуру, ЕРС вважаються ідеальними:

$$\begin{aligned} \varphi_2 - \varphi_8 &= -\varepsilon_2, \quad \varphi_8 - \varphi_5 = I_2 R_6, \quad \varphi_5 - \varphi_4 = -I_3 R_3, \\ \varphi_4 - \varphi_3 &= -I_3 R_2, \quad \varphi_3 - \varphi_2 = -\varepsilon_3. \end{aligned} \quad (2.126)$$

Додамо рівняння (2.126) одне до одного. Всі потенціали у лівій частині скоротяться, отримаємо $= -\varepsilon_2 + I_2 R_6 - I_3 R_3 - I_3 R_2 - \varepsilon_3$

$$0 = -\varepsilon_2 + I_2 R_6 - I_3 R_3 - I_3 R_2 - \varepsilon_3 \Rightarrow \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = I_2 R_6 - I_3 R_3 - I_3 R_2, \quad (2.127)$$

що і є другим законом Кірхгофа для контуру 234582 (обхід проти годинникової стрілки).

Зазвичай опори резисторів, та ЕРС джерел, з яких зібране коло, є відомими, та важливою задачею є знайти струми через кожен резистор кола. Ця задача розв'язується на основі такого алгоритму. Спочатку довільним чином розставляються струми на кожній гілці (якщо струм вийде додатним, то він

спрямований точно так же, як і на рисунку, а якщо від'ємним – то протилежно до того, як на рисунку). Далі на основі законів Кірхгофа виписуються лінійні алгебраїчні рівняння на струми, і ця система розв'язується, наприклад, матричним методом. Проілюструємо це на прикладі схеми, зображеної на рис. 2.39.

У вузол 2 входить струм I_1 , а виходять I_2 та I_3 . Тож згідно першого закону Кірхгофа

$$I_1 = I_2 + I_3. \quad (2.128)$$

Якщо у колі n вузлів, то треба виписати рівняння першого закону Кірхгофа в $n-1$ вузлі, рівняння в n -му вузлі буде вже зайвим. Наприклад, в схемі, що розглядається наявні два вузли, тож треба виписати лише рівняння в одному з них. У вузлі 2 рівняння виписали вище, а у вузлі 5 відповідне рівняння матиме вигляд $I_2 + I_3 = I_1$ – воно вже зайве, бо співпало з (2.128).

Другий закон Кірхгофа для контуру 1285671 (обхід за годинниковою стрілкою):

$$\varepsilon_2 + \varepsilon_1 = I_2 R_6 + I_1 R_4 + I_1 R_5 + I_1 R_1. \quad (2.129)$$

Другий закон Кірхгофа для контуру 234582 (обхід проти годинникової стрілки):

$$\varepsilon_2 + \varepsilon_3 = I_2 R_6 - I_3 R_3 - I_3 R_2. \quad (2.130)$$

Здавалось би, має бути ще одне рівняння: рівняння другого закону Кірхгофа для контуру 12345671. Воно мало б вигляд

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_3 = I_1 R_4 + I_1 R_5 + I_1 R_1 + I_3 R_3 + I_3 R_2. \quad (2.131)$$

Але це рівняння вже не несе нової інформації, воно не є незалежним, бо вони є результатом віднімання рівнянь (2.129) та (2.130). Відповідно, рівняння (2.131) теж є зайвим, *та система рівнянь (2.128) – (2.130) є системою «3 на 3» (три невідомих струми, три рівняння), яка розв'язується, наприклад, матричним методом.*

Щоб уникнути ситуації, коли ви в систему дописали зайве рівняння, треба нові рівняння другого закону Кірхгофа вписувати для контурів, що містять гілки,

які не були враховані у вище вписаних рівняннях. Наприклад, рівняння (2.129) є рівнянням для контуру, що охоплює гілки 285 та 56712. Рівняння (2.130) є рівнянням для контуру, що охоплює гілки 285 та 2345 (2345 не описана рівнянням (2.129), вона нова в цій системі рівнянь). А контур 12345671 охоплює гілки 56712 та 2345 – але вони вже обидві враховані у (2.129) та (2.130), тож рівняння для контуру 12345671 зайве.

Зазвичай для отриманої системи рівнянь шукають числовий розв'язок, бо аналітичний зазвичай є вкрай громіздким. Однак в деяких простих випадках існують і не громіздкі аналітичні розв'язки. Наприклад, у випадку, коли на схемі на рис. 2.39 всі резистори мають однаковий опір R , а всі джерела мають однакову ЕРС ε , то розв'язком системи (2.128) – (2.130) буде

$$I_1 = \frac{4\varepsilon}{11R}, \quad I_2 = \frac{10\varepsilon}{11R}, \quad I_3 = -\frac{6\varepsilon}{11R}. \quad (2.132)$$

Оскільки $I_1 > 0$ та $I_2 > 0$, то в розглянутому випадку напрям струмів I_1 та I_2 точно такий же, як вказано на рисунку. Оскільки струм $I_3 < 0$, то його значення дорівнює $6\varepsilon/11R$, а напрям є протилежним до напрямку, вказаному на рисунку.

2.7.8. Електричний струм у газах

Гази в звичайному стані погано проводять електричний струм. Однак вони добре його проводять у випадку, коли виникає процес *іонізації* газу – процес відокремлення електронів від атомів та молекул. Газ іонізується при високих температурах або при опроміненні газу. При високих температурах енергія електрону на зовнішній орбіталі атома достатня, щоб подолати кулонівську взаємодію з атомом, та «улетіти» з атому; а при опроміненні електрони можуть «вибиватися» з атому внаслідок ударів частинок, якими опромінюють газ. Носіями струму в газах є і електрони, і іони. Пристрій, що іонізує газ, називається *іонізатором* (він нагріває або опромінює газ).

Газовий розряд – процес проходження електричного струму через газ. Розряди, що викликані дією зовнішнього іонізатора, називають несамоствійними.

Газовий розряд, який буде продовжуватись і після припинення дії зовнішнього іонізатора, називається самостійним. Самостійний розряд може бути тліючим, дуговим, іскровим та коронним.

Тліючий розряд – тип газового розряду із неоднорідним розподілом електричного поля між катодом і анодом. Це самостійний розряд, в якому катод випромінює електрони внаслідок бомбардування позитивними іонами й високоенергетичними світловими квантами. При тліючому розряді проміжок між катодом і анодом розділяється на області, що характеризуються різною яскравістю.

Дуговий розряд – вид самостійного газового розряду, який виникає за високої температури між електродами, розведеними на невелику відстань і супроводжується яскравим світінням у формі дуги.

Іскровий розряд має вигляд яскравих зигзагоподібних розгалужених ниток – каналів іонізованого газу, які пронизують розрядний проміжок і зникають, замінюючись новими. Супроводжується виділенням великої кількості теплоти і яскравим світінням газу. Приклад – блискавка.

Коронний розряд – тип газового розряду, що виникає в сильних неоднорідних електричних полях навколо електродів із великою кривиною в газах із доволі високою густиною. Коронний розряд проявляється візуально у вигляді світіння навколо гострих кутів електрода.

2.8. Магнітне поле

Магнітне поле – складова електромагнітного поля, яке діє на *рухомі* електричні заряди і на намагнічені тіла, незалежно від стану їх руху. Джерелами магнітного поля є рухомі електричні заряди, тобто електричні струми, а також намагнічені тіла (постійні магніти), в яких магнітне поле створюється магнітними моментами електронів в атомах. Крім того, магнітне поле виникає навколо електричного поля, що змінюється з часом.

2.8.1. Закон Біо – Савара – Лапласа

Елементом струму $I d\vec{l}$ називають вектор, модуль якого дорівнює добутку сили струму уздовж провідника на нескінченно малий відрізок цього провідника, а напрямок збігається з напрямком струму. Силовою характеристикою магнітного поля є магнітна індукція, що вимірюється в Теслах:

$$[B] = \text{Тл} = [\mu_0] \cdot \text{А} \cdot \frac{\text{М}^2}{\text{М}^3} = \frac{\text{кг} \cdot \text{М}}{\text{А}^2 \cdot \text{с}^2} \cdot \text{А} \cdot \frac{\text{М}^2}{\text{М}^3} = \frac{\text{кг}}{\text{А} \cdot \text{с}^2}.$$

Згідно закону Біо–Савара–Лапласа елемент струму створює навколо себе магнітне поле

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{[d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}. \quad (2.133)$$

де $d\vec{B}$ – індукція магнітного поля в заданій точці, \vec{r} – радіус-вектор, що проведено від елемента струму в задану точку, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнітна стала. Константу μ_0 можна виразити через ϵ_0 та швидкість світла: $\mu_0 = \epsilon_0^{-1} c^{-2}$, зокрема на цей факт в електродинаміці використовується для виведення того, що швидкість поширення електромагнітної хвилі у вакуумі у відкритому просторі

дорівнює швидкості світла. $[\mu_0] = \frac{\text{кг} \cdot \text{М}^3}{\text{А}^2 \cdot \text{с}^4} \cdot \frac{\text{с}^2}{\text{М}^2} = \frac{\text{кг} \cdot \text{М}}{\text{А}^2 \cdot \text{с}^2}$, $\text{Гн} = [\mu_0] \cdot \text{М} = \frac{\text{кг} \cdot \text{М}^2}{\text{А}^2 \cdot \text{с}^2}$.

Поле від провідника є сумою полів елементів струму по цьому провіднику. Згідно (2.133)

$$\vec{B} = \int_L \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{[d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}, \quad (2.134)$$

позначення \int_L означає, що інтеграл береться по провіднику (крива L є кривою, вздовж якої проходить цей провідник).

2.8.2. Поле прямого провідника

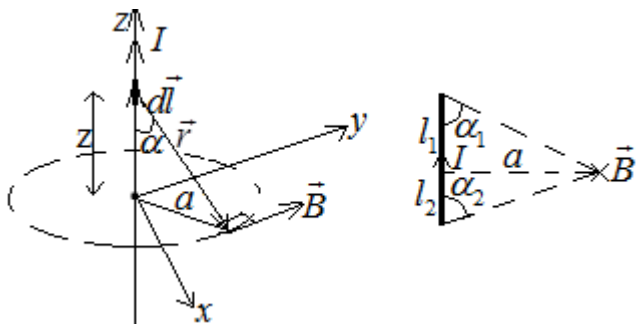


Рисунок 2.40

Розташуємо систему координат так, щоб прямий провідник, що розглядається, був частиною осі Oz при $z \in [-l_2, l_1]$, поле шукатимемо в площині xOy . Шукаємо поле на відстані a від провідника.

Поле від малого елемента $d\vec{l}$ спрямоване як на рис. 2.40 (за правилом правого гвинта, див. визначення векторного добутку). В заданій точці простору в тому ж напрямі спрямоване поле від кожного елемента провідника. Вектори полів від всіх елементів провідника спрямовані однаково, тож модуль їх суми дорівнює сумі модулів:

$$B = \int_L \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{[d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_L \frac{r dl \sin \alpha}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-l_2}^{l_1} \frac{\sin \alpha}{z^2 + a^2} dz = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-l_2}^{l_1} \frac{adz}{(z^2 + a^2)^{3/2}} =$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \cdot \left(\frac{l_1}{\sqrt{l_1^2 + a^2}} + \frac{l_2}{\sqrt{l_2^2 + a^2}} \right) = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \cdot (\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2),$$
(2.135)



Рисунок 2.41

кути α_1 та α_2 позначено на рис. 2.40; інтеграл (2.135) обчислено за допомогою виразу (2.14). Силві лінії магнітного поля прямого провідника – концентричні кола навколо такого провідника. Зауважимо, що щойно було аргументоване відоме вам зі школи **правило правої руки** (його ще

називають правилом правого гвинта), див. рис. 2.41. Відповідно, якщо провідник нескінченний, то $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, та

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a},$$
(2.136)

Магнітне поле нескінченного прямого провідника спадає обернено пропорційно до першої степені відстані від нього.

2.8.3. Поле кругового струму. Магнітний момент

Обчислимо магнітне поле, яке створює круговий виток зі струмом вздовж своєї центральної осі. Перпендикулярні складові полів двох діаметрально протилежних елементів скомпенсують одна одну, а паралельні – подвоять. Тож вектор \vec{B} буде спрямований як на рис. 2.42.

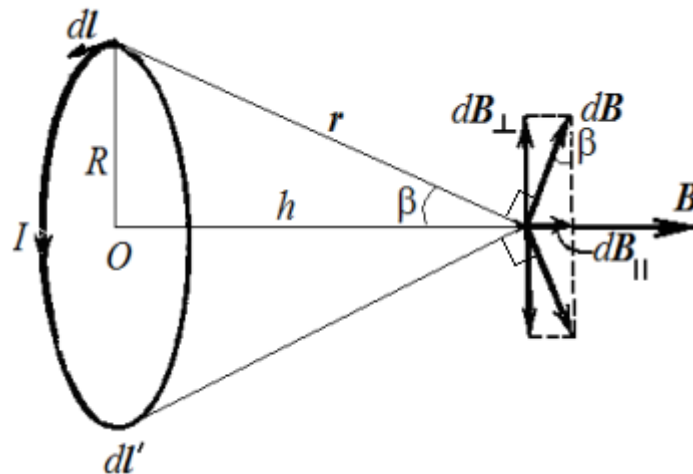


Рисунок 2.42

Від кожної пари симетричних елементів напрям поля $d\vec{B}$ буде однаковим, тож при інтегруванні модуль суми дорівнює сумі модулів, та

$$\begin{aligned}
 B &= \int_L \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\left[\vec{dl}, \vec{r} \right] \sin \beta}{r^3} = 2 \int_{L'} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\left[\vec{dl}, \vec{r} \right] \sin \beta}{r^3} = \frac{\mu_0 I \sin \beta}{2\pi r^2} \int_{L'} dl = \\
 &= \frac{\mu_0 I \sin \beta}{2\pi r^2} \pi R = \frac{\mu_0 I R}{2\pi r^3} \pi R \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + h^2)^{3/2}},
 \end{aligned}
 \tag{2.137}$$

отриманий вираз є виразом для індукції магнітного поля на відстані h від витка по центральній осі витка, L' – півколо (половина витка). При виведенні враховано, що компонента поля $d\vec{B}$, паралельна до осі, дорівнює $dB \cdot \sin \beta$, та кут між векторами \vec{dl} та \vec{r} дорівнює $\pi/2$, $\left[\vec{dl}, \vec{r} \right] = rdl$. Відповідно, в центрі

витка $h = 0$ та $B = \frac{\mu_0 I}{2R}$.



Рисунок 2.43

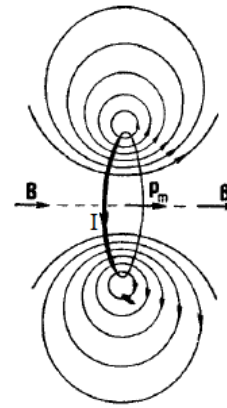


Рисунок 2.44

Зауважимо, що щойно було аргументоване відоме вам зі школи **правило правої руки (правого гвинта) для кругового струму**, яке задає зв'язок напрямів струму та магнітного поля по центральній осі кругового струму, див. рис. 2.43. Схематично повна картина силових ліній магнітного поля кругового струму наведена на рис. 2.44.

Магнітним моментом кругового струму називають величину

$$\vec{p}_m = IS\vec{n}, \quad (2.138)$$

де \vec{n} – вектор нормалі до витка, спрямований за правилом правого гвинта, S – площа витка, I – струм у витку.

Тоді результат для поля по центральній осі кругового струму може бути записаний як

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + h^2)^{3/2}} \vec{n} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{\pi R^2}{(R^2 + h^2)^{3/2}} \vec{n} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{IS\vec{n}}{(R^2 + h^2)^{3/2}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\vec{p}_m}{(R^2 + h^2)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (2.139)$$

2.8.4. Магнітне поле зарядженої частинки

Співставимо зарядженій частинці елемент струму

$$I\Delta\vec{l} = \frac{q}{\Delta t} \Delta\vec{l} = q\vec{v}. \quad (2.140)$$

Тоді згідно закону Біо-Савара-Лапласа

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{[\Delta\vec{l}, \vec{r}]}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[I\Delta\vec{l}, \vec{r}]}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[q\vec{v}, \vec{r}]}{r^3} \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \frac{[\vec{v}, \vec{r}]}{r^3}. \quad (2.141)$$

Отриманий вираз (2.141) є магнітним полем зарядженої частинки. На відміну від магнітного поля провідника, магнітне поле зарядженої частинки не може бути постійним у часі, бо весь час буде змінюватись вектор \vec{r} . Зауважимо, що при $v = 0$ поле відсутнє, тобто *магнітне поле створює лише рухома заряджена частинка*.

2.8.5. Сила Ампера та сила Лоренца

Згідно *закону Ампера* сила, яка діє на елемент провідника зі струмом $I d\vec{l}$ в зовнішньому магнітному полі, дорівнює векторному добутку елемента струму на вектор магнітної індукції:

$$d\vec{F} = [I d\vec{l}, \vec{B}] = I [d\vec{l}, \vec{B}]. \quad (2.142)$$

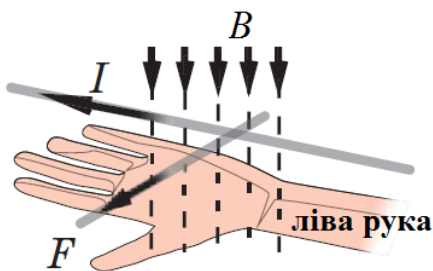


Рисунок 2.45

Напрямок цієї сили є напрямком відповідного векторного добутку. Його також можна визначити на основі відомого зі школи *правила лівої руки*: якщо помістити ліву руку так, щоб магнітні силові лінії входили в її долоню, чотири випрямлених пальця вказували напрямок струму,

то відставлений вбік великий палець вказує напрямок сили Ампера, див. рис. 2.45.

Сила Ампера, що діє на провідник, є сумою (інтегралом) сил, що діють на кожен елемент провідника:

$$\vec{F} = \int_L I [d\vec{l}, \vec{B}]. \quad (2.143)$$

Якщо провідник прямолінійний та поле однорідне, то сила на кожен елемент провідника спрямована однаково, тоді модуль суми дорівнює сумі модулів та

$$F = \int_L I \left| [d\vec{l}, \vec{B}] \right| = \int_L IB dl \sin \alpha = IB \sin \alpha \int_L dl = IB l \sin \alpha, \quad (2.144)$$

α – кут між провідником і магнітним полем.

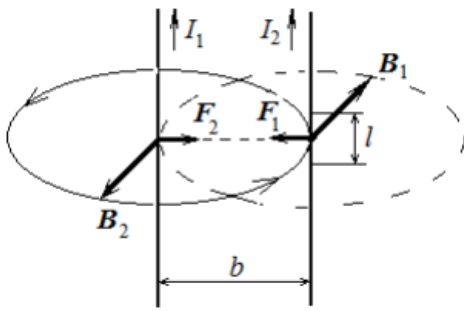


Рисунок 2.46

Розглянемо силу, з якою притягаються два нескінченних паралельних провідника зі струмом. Розглянемо випадок, коли *струми в провідниках спрямовані однаково*, див. рис. 2.46. Перший провідник створює навколо себе магнітне поле \vec{B}_1 (його

напрямок визначається правилом правої руки), яке створює на другий провідник силу Ампера, спрямовану до першого провідника (її напрям визначається, зокрема, правилом лівої руки). Аналогічно другий провідник створить магнітне поле, яке діятиме на перший провідник з силою Ампера, спрямованою до другого провідника. Відповідно, такі два провідники *притягаються*. Аналогічно можна показати, що *якщо струми в провідниках спрямовані в протилежні боки, то провідники відштовхуються*.

З урахуванням (2.136) бачимо, що за модулем сила Ампера, що діє на ділянку провідника довжиною l , дорівнює

$$F_1 = F_2 = B_1 I_2 l = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi b} l. \quad (2.145)$$

Відповідно, сила, що припадає на одиницю довжини провідників, при силі струму 1 А в кожному провіднику та відстані між провідниками 1 м дорівнює

$$\frac{\mu_0 \cdot 1\text{A}^2}{2\pi \cdot 1\text{м}} \cdot 1\text{м} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}\text{Н}}{2\pi} = 2 \cdot 10^{-7}\text{Н}.$$

Як описано вище, з однією зарядженою частинкою можна пов'язати елемент струму $I\Delta\vec{l} = q\vec{v}$, тож на основі закону Ампера приходимо до висновку, що *сила, що діє з боку магнітного поля на заряджену частинку, дорівнює*

$$\vec{F} = q[\vec{v}, \vec{B}]. \quad (2.146)$$

Цю силу назвали *силою Лоренца*. Зауважимо, що при $v = 0$ сила відсутня, тож *магнітне поле діє лише на рухому частинку*. Напрямок сили Лоренца можна

визначити як на основі векторного добутку, так і на основі правила лівої руки, див. рис. 2.47.

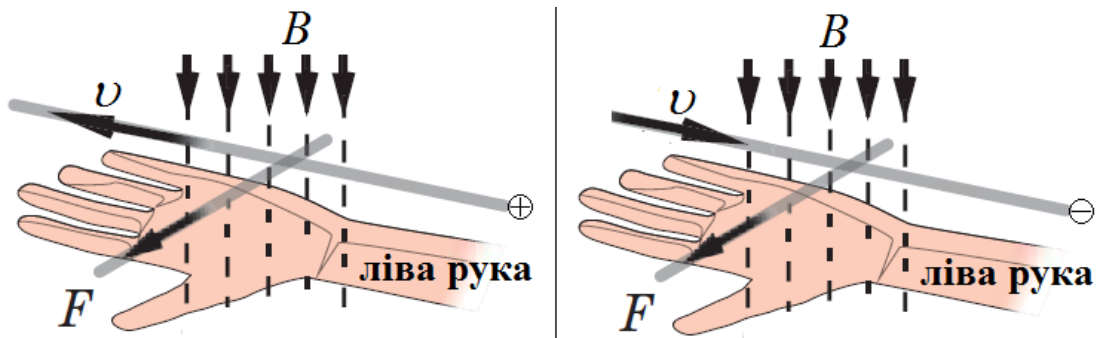


Рисунок 2.47

Це правило є аналогічним до правила лівої руки для сили Ампера, але слід пам'ятати, що якщо частинка заряджена позитивно, то напрями відповідного струму, та швидкості частинки однакові, а якщо негативно – то протилежні. Зауважимо, що часто силою Лоренца називають повну силу, що діє на частинку з боку електромагнітного поля: $\vec{F} = q\vec{E} + q[\vec{v}, \vec{B}]$.

2.8.6. Траєкторія зарядженої частинки в однорідному магнітному полі

Нехай для визначеності частина заряджена позитивно.

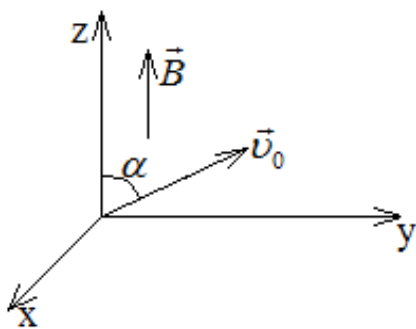


Рисунок 2.48

Нехай в точці з координатами (0,0,0) частинка влітає в однорідне магнітне поле, яке співнаправлене з віссю Oz , систему координат спрямуємо так, щоб початкова x -компонента швидкості частинки дорівнювала нулю, частинка влітає в поле під кутом α до нього. Згідно (2.146) та другого закону Ньютона маємо

$$\vec{F} = q[\vec{v}, \vec{B}] \Rightarrow m \frac{d\vec{v}}{dt} = q \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ v_x & v_y & v_z \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix} = qBv_y \vec{e}_x - qBv_x \vec{e}_y. \quad (2.147)$$

тож відсутня компонента сили, паралельна Oz , звідки

$$\frac{dv_z}{dt} = 0 \Rightarrow v_z = v_0 \cos \alpha = \text{const}. \quad (2.148)$$

Щодо руху вздовж Ox та Oy на основі (2.147) маємо

$$m \frac{dv_x}{dt} = qBv_y, \quad m \frac{dv_y}{dt} = -qBv_x. \quad (2.149)$$

Помножимо перше рівняння системи (2.149) на v_x , а друге – на v_y , та додамо ці рівняння:

$$mv_x \frac{dv_x}{dt} + mv_y \frac{dv_y}{dt} = 0, \quad (2.150)$$

звідки з урахуванням (1.109) матимемо

$$\frac{m}{2} \frac{d}{dt} (v_x^2 + v_y^2) = 0 \Rightarrow v_x^2 + v_y^2 = v_0^2 \sin^2 \alpha = \text{const}, \quad (2.151)$$

Через те, що $v_x^2 + v_y^2 = \text{const}$ та $v_z = \text{const}$ бачимо, що **модуль швидкості не змінюється**. Цей факт можна також аргументувати теоремою кінетичної енергії та тим фактом, що сила Лоренца завжди перпендикулярна до швидкості і не виконує роботу (сила Лоренца є гіроскопічною силою). З (2.151) матимемо

$$v_y = \pm \sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha - v_x^2}, \quad (2.152)$$

підставимо цей результат в перше рівняння системи (2.149), отримаємо

$$\begin{aligned} \pm \frac{dv_x}{\sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha - v_x^2}} &= \frac{qB}{m} dt \Rightarrow \pm \int \frac{dv_x}{\sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha - v_x^2}} = \int \frac{qB}{m} dt + A \Rightarrow \\ \Rightarrow \pm \arcsin \left(\frac{v_x}{v_0 \sin \alpha} \right) &= \frac{qBt}{m} + A \Rightarrow v_x = \pm v_0 \sin \alpha \sin \left(\frac{qBt}{m} + A \right), \end{aligned} \quad (2.153)$$

значення сталої інтегрування $A = 0$ обчислюється з початкових умов

$$v_{x0} = 0, \quad v_{y0} = v_0 \sin \alpha. \quad (2.154)$$

Відповідно, згідно (2.154) у виразах (2.152) та (2.153) має реалізуватись знак «+», тож

$$v_x(t) = v_0 \sin \alpha \cdot \sin \left(\frac{qBt}{m} \right), \quad (2.155)$$

відповідно,

$$v_y = \sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha - v_0^2 \sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \left(\frac{qB}{m} t \right)} = \pm v_0 \sin \alpha \cos \left(\frac{qB}{m} t \right), \quad (2.156)$$

згідно (2.154) має реалізуватись знак «+», тож остаточно

$$v_y(t) = v_0 \sin \alpha \cdot \cos \left(\frac{qB}{m} t \right). \quad (2.157)$$

Вирази (2.148), (2.155) та (2.157) є виведеними залежностями компонент швидкості частинки від часу. Зауважимо, що щойно ми розглянули лише значення $A=0$, розгляд значень $A=\pi n, n \in \mathbb{Z}$ аналогічно привів би до точно такого ж результату.

Враховуючи те, що частинка влетіла в поле в точці $(0,0,0)$, маємо такі результати, отримані на основі (2.148), (2.155) та (2.157):

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t v_x(\tau) d\tau = \frac{mv_0 \sin \alpha}{qB} \left(1 - \cos \left(\frac{qB}{m} t \right) \right), \\ y(t) &= \int_0^t v_y(\tau) d\tau = \frac{mv_0 \sin \alpha}{qB} \sin \left(\frac{qB}{m} t \right), \\ z(t) &= \int_0^t v_z(\tau) d\tau = v_0 \cos \alpha \cdot t. \end{aligned} \quad (2.158)$$

Вирази (2.158) є законом руху частинки. На основі (2.158) можна побачити, що

$$\left(x(t) - \frac{mv_0 \sin \alpha}{qB} \right)^2 + y^2(t) = \frac{m^2 v_0^2 \sin^2 \alpha}{q^2 B^2}, \quad (2.159)$$

тож проекція траєкторії частинки на площину xOy – коло з центром в точці

$\left(x = \frac{mv_0 \sin \alpha}{qB}, y = 0 \right)$ та радіусом

$$R = \frac{mv_0 \sin \alpha}{qB}, \quad (2.160)$$

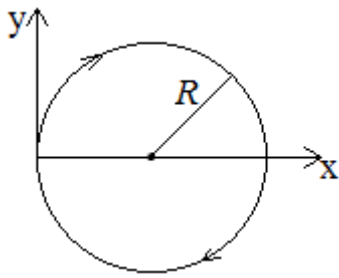


Рисунок 2.49

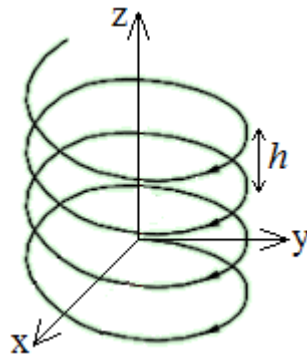


Рисунок 2.50

див. рис. 2.49. Період обертання по такому колу, очевидно, дорівнює

$$T = \frac{2\pi}{qB/m} = \frac{2\pi m}{qB}, \quad (2.161)$$

Траєкторією частинки є гвинтова лінія, див. рис. 2.50. Вздовж осі

Oz рух частинки є рівномірним зі швидкістю $v_0 \cos \alpha$, звідки крок гвинтової лінії

$$h = v_0 \cos \alpha \cdot T = \frac{2\pi m v_0 \cos \alpha}{qB}. \quad (2.162)$$

На основі отриманих результатів бачимо, що:

1. У частинному випадку, коли $\alpha = \pi/2$ (частинка влітає в поле перпендикулярно до нього), траєкторія частинки буде колом, та буде відсутній рух вздовж напрямку, паралельного до поля.

2. У частинному випадку, коли $\alpha = 0$ (частинка влітає в поле паралельно до нього), траєкторія частинки буде прямою, рух буде рівномірним, та не буде руху вздовж перпендикулярного до поля напрямку. Це швидко пояснюється тим фактом, що сила Лоренца є нульовою (не діє на частинку), коли $\vec{v} \parallel \vec{B}$, бо векторний добуток колінеарних векторів дорівнює нулю.

Зауважимо, що всі ці результати (окрім виведення явних залежностей координат та компонент швидкості від часу) можна отримати, розбивши швидкість частинки на перпендикулярну та паралельну до поля складові, та скориставшись тим, що в напрямку, перпендикулярному до поля, сила Лоренца є доцентровою.

У випадку негативно зарядженої частинки виведені формули для радіуса, періоду, та кроку гвинтової лінії точно так ж, єдино що – замість q в них стояв би $|q|$. Траєкторія – очевидно, теж спіраль, але закручена в іншу сторону, рух проходив би не при додатних, а при від'ємних значеннях координати x .

2.8.7. Ефект Холла

Ефект Холла – явище, при якому виникає поперечна різниця потенціалів під час розміщення провідника з постійним струмом у магнітному полі.

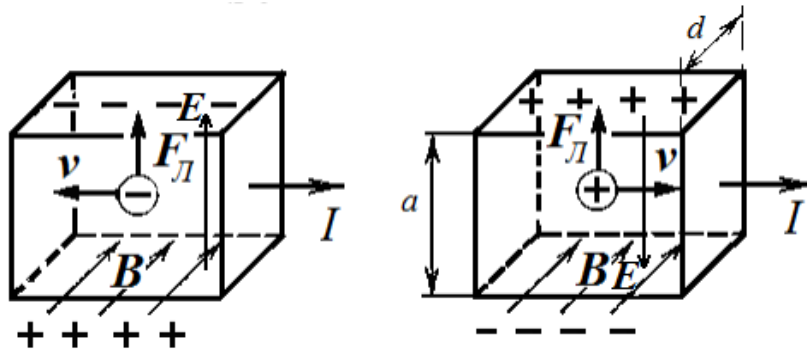


Рисунок 2.51

Розглянемо провідник, розташований перпендикулярно до магнітного поля, див. рис. 2.51. При заданому на рисунку напрямі магнітного поля незалежно від того, чи є носії струму позитивно зарядженими, чи негативно, сила Лоренца, що діє на них, спрямована вгору.

Розглянемо випадок негативно заряджених носіїв струму (електрони в металах). На верхній грані провідника через дію сили Лоренца накопичується негативний заряд, відповідно через загальну електронейтральність провідника на нижній грані накопичуватиметься позитивний заряд. Наведені таким чином заряди створять у провіднику електричне поле \vec{E} (див. рис. 2.51). Відповідно, це поле діятиме на носії заряду всередині провідника з силою $q\vec{E}$, що спрямована проти поля \vec{E} , тобто проти сили Лоренца. У стаціонарному розподілі зарядів, що з часом встановлюється у провіднику, сила Лоренца буде врівноважувати силу $q\vec{E}$, тож

$$qE = qvB \Rightarrow E = vB. \quad (2.163)$$

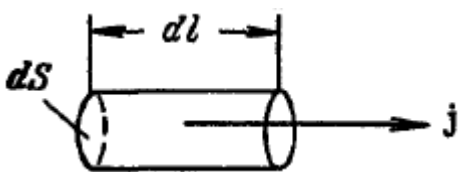


Рисунок 2.52

всередині провідника.

Якщо розглянути випадок позитивно заряджених носіїв струму, то отримаємо точно такий же вираз $E = vB$; вище розглянуто лише поперечну компоненту електричного поля

Виділимо в провіднику циліндрик, бічна поверхня якого паралельна до напрямку руху зарядів, див. рис. 2.52. Струм через цей циліндрик

$$dI = \frac{dq}{dt} = \frac{qdN}{dt}, \quad (2.164)$$

де q – заряд однієї частинки (носія струму), dN – кількість носіїв струму в цьому циліндрику;

$$dI = \frac{qdN}{dt} = \frac{qdN}{dt dV} dV = q \frac{dN}{dV} \frac{dV}{dt} = qn \frac{dS dl}{dt} = qndS \frac{dl}{dt} = qnv dS, \quad (2.165)$$

тут $n = dN/dV$ – концентрація носіїв струму та v – швидкість носіїв струму. Згідно (2.121)

$$j = \frac{dI}{dS} = \frac{qnv dS}{dS} = qnv \Rightarrow v = \frac{j}{qn}, \quad (2.166)$$

тож з урахуванням (2.163) отримуємо вираз для поперечної різниці потенціалів

$$E = \frac{j}{qn} B \Rightarrow U = Ea = R_H jBa, \quad (2.167)$$

де $R_H = (qn)^{-1}$ – константа Холла, її знак (та, відповідно, знак різниці потенціалів U) залежить від знаку заряду носіїв струму. Тож остаточно

$$U = R_H jBa = R_H \frac{I}{S} Ba = R_H \frac{I}{ad} Ba \Rightarrow U = R_H \frac{IB}{d}, \quad (2.168)$$

Отриманий вираз є виразом для поперечної («холлівської») різниці потенціалів. Визначивши знак холлівської різниці потенціалів, можна встановити знак носіїв струму, а вимірявши сталу Холла, можна визначити концентрацію носіїв струму. Наприклад, на основі ефекту Холла працюють так звані датчики Холла: прилади, що дозволяють вимірювати індукцію магнітного поля.

Ефект Холла має місце не лише у провідниках, а ще й у напівпровідниках, в залежності від типу напівпровідника носії струму в них можуть бути як позитивно, так і негативно зарядженими.

2.8.8. Циркуляція магнітного поля. Магнітне поле соленоїда

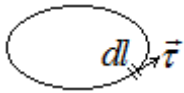


Рисунок 2.53

Нехай маємо заданий замкнений контур. Тоді за визначенням **циркуляцією** магнітного поля по цьому контуру є величина, що дорівнює $\oint_L (\vec{B}, d\vec{l})$, інтеграл береться по всьому

контурі, $d\vec{l} = \vec{\tau} dl$, $\vec{\tau}$ – одиничний безрозмірний вектор, дотичний до контуру, див. рис. 2.53.

Без виведення наведемо теорему про циркуляцію магнітного поля: **циркуляція вектору магнітної індукції по довільному контуру дорівнює помноженій на магнітну сталу алгебраїчній сумі струмів, які охоплюються цим контуром:**

$$\oint_L (\vec{B}, d\vec{l}) = \mu_0 \sum_i I_i. \quad (2.169)$$

Ця теорема є наслідком рівнянь Максвелла та відомої з векторного аналізу формули Стокса.

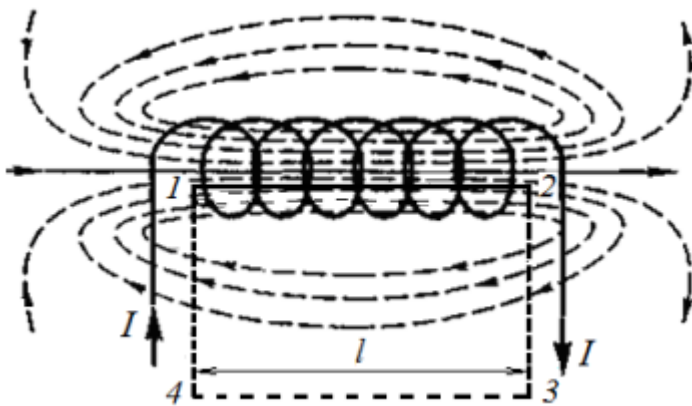


Рисунок 2.54

Соленоїдом називається ізолюваний провідник, що намотаний по гвинтовій лінії на циліндричний каркас. Якщо довжина соленоїда набагато більше за його діаметр, то поле всередині соленоїда є майже однорідним, та спрямованим

паралельно до осі соленоїда згідно правила правої руки для кругового струму. За соленоїдом поле неоднорідне, поблизу поверхні соленоїда поле буде майже паралельне до неї, а при віддаленні від поверхні поле стає дуже слабким, див. рис. 2.54.

На основі теореми про циркуляцію виведемо наближений вираз для магнітного поля всередині соленоїда. Розглянемо замкнений контур 1234, що

охоплює всі витки соленоїда, див. рис. 2.54, лінія 43 знаходиться далеко від соленоїда. Тоді

$$\oint_L (\vec{B}, d\vec{l}) = \mu_0 \sum_i I_i \Rightarrow \int_{12} (\vec{B}, d\vec{l}) + \int_{23} (\vec{B}, d\vec{l}) + \int_{34} (\vec{B}, d\vec{l}) + \int_{41} (\vec{B}, d\vec{l}) = \mu_0 NI, \quad (2.170)$$

де N – кількість витків соленоїда. Для простоти вважатимемо, що всередині соленоїда поле є однорідним, а зовні нього – паралельним до поверхні в тій області поблизу соленоїда, в якій воно ще не є нехтовно малим.

Тоді всередині соленоїда

$$\int_{12} (\vec{B}, d\vec{l}) = \int_{12} B \cos 0 dl = B \int_{12} dl = Bl. \quad (2.171)$$

Всередині соленоїда та зовні соленоїда близько до його поверхні поле паралельне до поверхні, тож перпендикулярне до ліній 23 та 14; а в інших зонах поле вважається нехтовно малим і не внесе суттєвого вкладу в цей інтеграл. Лінія 43 знаходиться далеко від соленоїда, тож на ній поле нехтовно мале. Відповідно,

$$\int_{23} (\vec{B}, d\vec{l}) = \int_{41} (\vec{B}, d\vec{l}) = \int_{43} (\vec{B}, d\vec{l}) = 0. \quad (2.172)$$

Згідно (2.170) – (2.172) матимемо

$$B = \mu_0 \frac{N}{l} I = \mu_0 n I, \quad (2.173)$$

де $n = N/l$ – кількість витків на одиницю довжини соленоїда. **Вираз (2.173) є наближеним виразом для індукції магнітного поля всередині соленоїда.**

Для довідки також наведемо теорему Гауса для потоку магнітного поля через замкнену поверхню та теорему про циркуляцію напруженості електростатичного поля:

$$\oint_L (\vec{E}, d\vec{l}) = 0, \quad \oiint_S (\vec{B}, d\vec{S}) = 0, \quad (2.174)$$

тобто циркуляція вектора напруженості електростатичного поля вздовж довільного замкненого контуру дорівнює нулю та потік вектора магнітної індукції \vec{B} через будь-яку замкнену поверхню дорівнює нулю.

Можна показати, що вираз (2.169) та другий з виразів (2.174) зумовлюють **вихровий** характер магнітного поля – силові лінії магнітного поля є **замкненими** (центральні лінії магнітного поля кругових струмів вважаються замкненими на нескінченності).

2.8.9. Робота сили Ампера. Явище електромагнітної індукції

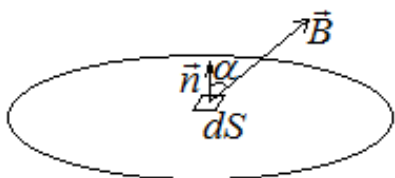


Рисунок 2.55

Магнітним потоком вектору магнітної індукції через поверхню, називають інтеграл

$$\Phi = \iint_S (\vec{B}, d\vec{S}) = \iint_S B \cos \alpha dS, \quad (2.175)$$

де $d\vec{S} = \vec{n}dS$, \vec{n} – одиничний безрозмірний вектор, перпендикулярний до елементу dS (вектор нормалі), див. рис. 2.55; інтеграл береться по всій поверхні.

Магнітний потік вимірюється у Веберах, $[\Phi] = \text{Вб} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{А} \cdot \text{с}^2}$.

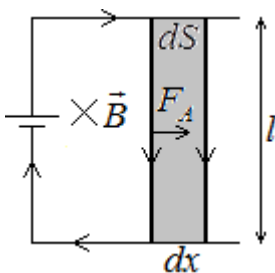


Рисунок 2.56

Нехай прямолінійний провідник довжиною l , вздовж якого проходить струм I , поміщений в однорідне магнітне поле B перпендикулярно лініям магнітної індукції. Тоді на нього діятиме сила Ампера $F_A = IBl$, див. (2.144).

Обчислимо роботу сили Ампера по переміщенню такого провідника в магнітному полі:

$$\delta A = F_A dx = IB dx = IB dS = Id(BS) = Id\Phi, \quad (2.176)$$

тож

$$A = I \int_1^2 d\Phi = I(\Phi_2 - \Phi_1) = I\Delta\Phi, \quad (2.177)$$

1 – стартове положення провідника, 2 – кінцеве, $\Delta\Phi$ – магнітний потік через площу ΔS , яку «описав» провідник при русі.

Тож в розглянутому простому випадку показано, що *робота сил Ампера при переміщенні провідника зі струмом в магнітному полі дорівнює добуткові сили*

струму в провіднику на магнітний потік, що пересікається провідником під час його руху. Можна показати, що **це твердження (2.177) справедливе і в загальному випадку** (навіть коли поле не обов'язково є постійним). Зауважимо, що робота переміщення провідника із струмом в магнітному полі відбувається не за рахунок енергії магнітного поля, а за рахунок енергії джерела, що підтримує постійний струм в провіднику (бо сила Лоренца, що діє на частинки, не виконує роботи).

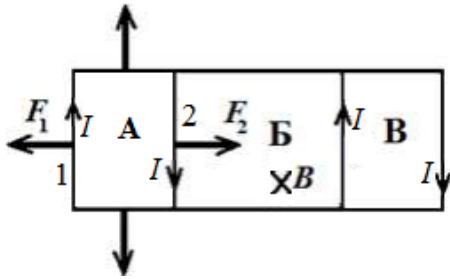


Рисунок 2.57

Розглянемо контур з незмінним струмом, що є перпендикулярним до магнітного поля, не обов'язково однорідного, див. рис. 2.57. Нехай контур перемістився з положення А у положення В. Тоді робота сил Ампера по його

переміщенню

$$A = A_{F_2} + A_{F_1}, \quad (2.178)$$

сили Ампера, що діють на «верхню» та «нижню» сторони контуру не виконують роботу, бо є перпендикулярними до переміщення. Згідно (2.177) матимемо

$$A_{F_2} = I(\Phi_B + \Phi_B), \quad A_{F_1} = -I(\Phi_A + \Phi_B), \quad (2.179)$$

знаки розставлено на основі того факту, що сила F_2 співнапрямлена з переміщенням, а сила F_1 протинапрямлена до переміщення. Згідно (2.178) та (2.179)

$$A = A_{F_2} + A_{F_1} = I(\Phi_B - \Phi_A) = I\Delta\Phi, \quad (2.180)$$

$\Delta\Phi$ – різниця початкового та кінцевого магнітних потоків через контур. *Робота сил Ампера по переміщенню замкнутого контуру зі струмом в магнітному полі дорівнює добуткові сили струму в контурі на приріст магнітного потоку через контур. Можна показати, що цей факт є справедливим не лише у вище розглянутому випадку, а і в загальному випадку.*

Нехай маємо замкнений провідний контур, по якому не тече струм. Тоді, як відомо з дослідів, якщо магнітний потік через поверхню, обмежену цим контуром змінюватиметься, то у такому контурі виникатиме струм. Можна сказати, що у провіднику виникає електрорушійна сила, яка призводить до виникнення такого струму. Така електрорушійна сила виникатиме і у провіднику, через який йде струм. **Явище виникнення в провіднику електрорушійної сили при зміні магнітного потоку, що пронизує площу контуру провідника, називається явищем електромагнітної індукції**. Відповідний струм, що виникає у провіднику, називається **індукційним струмом**.

Повернемось що вище розглянутої ситуації, коли провідник зі струмом рухається у зовнішньому однорідному магнітному полі, див. рис. 2.56. Вважатимемо нехтовно малим опір дротів, що підводять струм від джерела до провідника. Розглянемо елементарне переміщення провідника.

Робота джерела струму

$$dA = I \varepsilon dt, \quad (2.181)$$

згідно закону Джоуля-Ленца елементарна теплота

$$\delta Q = I^2 R dt. \quad (2.182)$$

Робота джерела струму пішла на нагрів та на переміщення провідника:

$$\begin{aligned} \delta A &= \delta Q + \delta A_A \Rightarrow I \varepsilon dt = I^2 R dt + I B dS \Rightarrow \\ \Rightarrow I &= \frac{1}{R} \left(\varepsilon - B \frac{dS}{dt} \right) = \frac{1}{R} \left(\varepsilon - \frac{d\Phi}{dt} \right), \end{aligned} \quad (2.183)$$

δA_A – елементарна робота сили Ампера, див. (2.177). Тож в контурі фактично виникає «додаткова» ЕРС, яка називається **ЕРС індукції** і дорівнює

$$\varepsilon_i = - \frac{d\Phi}{dt}, \quad (2.184)$$

та пов'язана зі зміною магнітного потоку через контур. Вираз (2.183) можна інтерпретувати так:

$$I = \frac{1}{R} \left(\varepsilon - \frac{d\Phi}{dt} \right) = \frac{\varepsilon + \varepsilon_i}{R} = \frac{\varepsilon}{R} + \frac{\varepsilon_i}{R} = I_{\text{джерела}} + I_{\text{індукційний}}, \quad (2.185)$$

де $I_{\text{джерела}}$ – струм, що породжено джерелом, а $I_{\text{індукційний}}$ – індукційний струм, що виникає внаслідок зміни магнітного потоку, що охоплює контур, однією з границю якого є розглянутий провідник. У випадку $\varepsilon = 0$ матимемо $I = I_{\text{індукційний}} = \varepsilon_i / R$, тож індукційний струм виникатиме і в контурі без джерел.

Вище аргументоване твердження (2.184) носить назву **закону Фарадея**. Можна показати, що цей закон справедливий не лише у вище наведеному простому прикладі, а і в загальному випадку.

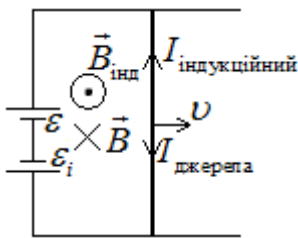


Рисунок 2.58

У вище розглянутому випадку магнітний потік через контур збільшується (нормаль до контуру спрямуємо від нас). Відповідно, $d\Phi/dt > 0$ та $\varepsilon_i < 0$, тобто ε_i спрямована проти джерела ε . ε_i породжує індукційний струм, його напрям – див. рис. 2.58. Тоді магнітне поле індукційного струму $\vec{B}_{\text{інд}}$ буде спрямоване проти зовнішнього поля, тобто магнітний потік індукційного магнітного поля $\vec{B}_{\text{інд}}$ протидіє збільшенню магнітного потоку зовнішнього магнітного поля. Це є частинним випадком **правила Ленца**, яке працює в загальному випадку і формулюється таким чином: **індукційний струм завжди спрямований так, що створюване ним власне магнітне поле перешкоджає зміні магнітного потоку, яке збуджує індукційний струм**.

Відповідно, знак « \leftarrow » в законі Фарадея описано саме правилом Ленца. Сила Ампера, що діє з боку зовнішнього магнітного поля на індукційний струм, спрямована проти швидкості, відповідно внаслідок явища електромагнітної індукції сповільнюється рух провідника. Це явище носить назву **явища магнітного гальмування**.

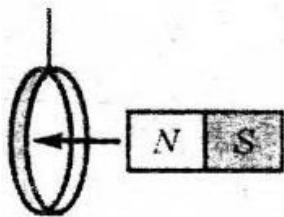


Рисунок 2.59

Розглянемо відоме питання про те, як буде поводитись провідне кільце, якщо до нього наближати магніт, див. рис. 2.59. Зовнішнє магнітне поле (поле від

магніту), що пронизує кільце, зростає при наближенні магніту до кільця. Згідно правилу Ленца в кільці наводиться індукційний струм, магнітне поле якого протидіє такому зростанню, див. рис. 2.60.

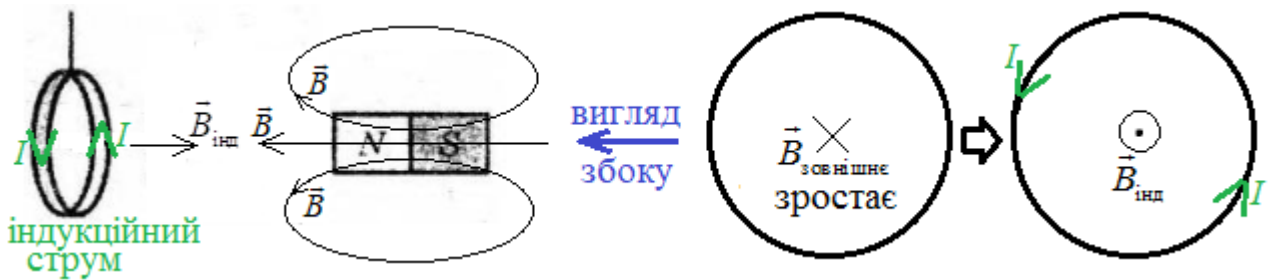


Рисунок 2.60

Відповідно, кільце буде відштовхуватись від магніту.

Це можна показати двома способами. Перший з них – прийти до висновку, що кільце набуде властивостей магніту, розташування магнітних полюсів вказано на рис. 2.61; магніти, розташовані один до одного однойменними полюсами, відштовхуються. Другий спосіб – розглянути дію сили Ампера з боку зовнішнього магнітного поля на індукційний струм, див. рис. 2.62.

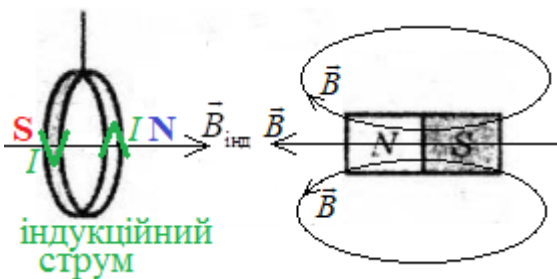


Рисунок 2.61



Рисунок 2.62

Відповідно, ця сила буде відштовхувати кільце від магніту. Слід зауважити, що компоненти сил Ампера, паралельні до площини кільця, будуть його стискувати, але зазвичай ефект стиснення майже непомітний, бо кільце майже не деформується.

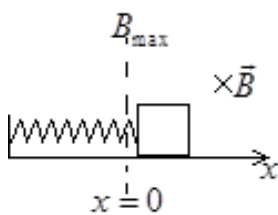


Рисунок 2.63

Продемонструємо, як явище магнітного гальмування призводить до сильнішого згасання коливань. Розглянемо таку просту ситуацію. На непровідній пружині є провідна рамка, яка коливається (пружинний маятник), див. рис. 2.63.

Магнітне поле має таку структуру – максимальне воно в положенні рівноваги, і симетрично спадає при віддалені від положення рівноваги; поле залежить лише від координати x . Розглянемо рух рамки у випадку, коли вона рухається праворуч стану рівноваги у напрямку від стану рівноваги, див. рис. 2.64. Щоб не загроможувати рис. 2.64, на ньому наведено лише індукційний струм та фізичні величини, з ним пов'язані. Магнітний потік, що пронизує рамку, зменшується,

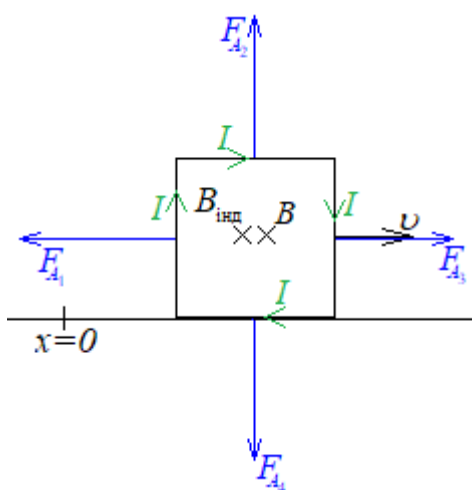


Рисунок 2.64

тому поле індукційного струму спрямоване «від нас», та напрям індукційного струму згідно правила правої руки вказано на рис. 2.64. Зовнішнє магнітне поле діє на цей струм з силою Ампера. Очевидно, що сили $F_{A_2} = F_{A_4}$ скомпенсують одна одну, а $F_{A_1} > F_{A_3}$, бо магнітне поле на лівій стороні рамки більше, ніж на правій. Тож результуюча сила Ампера, що виникає, спрямована проти швидкості, **тож**

коливання згасатимуть швидше за рахунок явища магнітного гальмування.

Аналогічно можна показати, що в розглянутій фізичній ситуації результуюча сила Ампера буде спрямована проти швидкості в будь-якому випадку.

Тож при русі провідної рамки в неоднорідному магнітному полі виникає індукційний струм, дія магнітного поля на нього сповільнює коливання. Якщо б замість рамки була б провідна пластина, то в ній теж би наводились замкнені вихрові струми, для магнітного поля на які сповільнювала б коливання. Такі струми є частинним випадком *струмів Фуко*. **Струми Фуко** – вихрові індукційні струми, які виникають у провідниках при зміні магнітного потоку, який їх пронизує. Вихрові струми самі «обирають» замкнені шляхи в товщі провідника, утворюючи вихроподібні контури. Напрямок струмів Фуко задається правилом Ленца. В результаті на рухомий в магнітному полі провідник діє гальмівна сила. Ще одним наслідком струмів Фуко є нагрівання провідника.

2.8.10. Магнітне поле в речовині.

Магнетизм речовини обумовлений такими фізичними причинами:

- орбітальним рухом електронів навколо атомних ядер;
- обертанням електронів навколо власної осі (з таким рухом пов'язаний так званий власний момент імпульсу, який називають спіном електрона);
- обертанням атомних ядер навколо власної осі (спіном ядер).

Атоми речовини при виконують хаотичний тепловий рух, та їх магнітні моменти спрямовані хаотично при відсутності зовнішнього магнітного поля, відповідне середнє значення магнітного моменту таких атомів нульове. При наявності зовнішнього магнітного поля ці магнітні моменти атомів повністю або частково орієнтуються по полю, та речовина набуває ненульового макроскопічного магнітного моменту (це явище називається **явищем намагнічування**).

Всі тіла, які здатні намагнічуватись у зовнішньому магнітному полі, називають **магнетиками**. Для математичного опису явища намагнічування вводять поняття **вектору намагнічування**:

$$\vec{J} = \frac{1}{\Delta V} \cdot \sum_{\Delta V} \vec{p}_{mi}, \quad (2.186)$$

$\sum_{\Delta V} \vec{p}_{mi}$ – сума магнітних моментів молекул, що потрапили в малий об'єм ΔV .

Об'єм ΔV макроскопічний, тобто в ньому знаходиться достатньо молекул, щоб провести відповідне усереднення, але він є нескінченно малим порівняно з

об'ємом всього магнетика. $[\vec{J}] = \frac{A \cdot m^2}{m^3} = \frac{A}{m}$.

Розглянемо поле, яке створюють в речовині провідники зі струмом (назвемо ці струми **макрострумами**). В речовині магнітне поле є сумою магнітного поля макрострумів \vec{B}_0 та магнітного поля **мікрострумів** \vec{B}' , створене магнітними моментами замкнених молекулярних струмів. Тож в речовині

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'. \quad (2.187)$$

Розглянемо певний замкнений контур всередині речовини, див. рис. 2.65.

Згідно теореми про циркуляцію:

$$\oint_L (\vec{B}, d\vec{l}) = \mu_0 \sum_i I_i \Rightarrow \oint_L (\vec{B}, d\vec{l}) = \mu_0 \sum I_{\text{макро}} + \mu_0 \sum I_{\text{мікро}} . \quad (2.188)$$

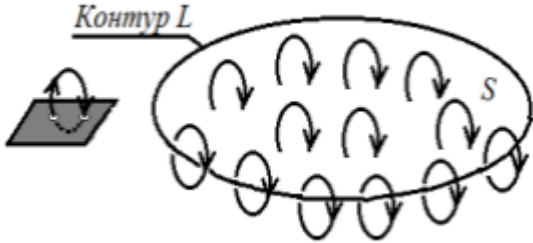


Рисунок 2.65

Кожен внутрішній мікрострум перетне поверхню S , обмежену контуром L , двічі, і внесок в алгебраїчну суму мікрострумів від нього буде нульовим. Але мікроструми у «прикордонному» шарі перетнуть поверхню лише одного разу, та саме вони

і «сформують» суму $\sum I_{\text{мікро}}$. Обчислимо цю суму. Розглянемо елемент контуру $d\vec{l}$, нехай кут між ним та вектором намагніченості \vec{J} речовини дорівнює α , див. рис. 2.66. Тоді на цей елемент будуть «нанизані» «прикордонні» мікроструми, центри яких потраплять у косий циліндр з площами основи $S_{\text{мол}}$ та довжини dl ; $S_{\text{мол}}$ – площа, що охоплена окремим молекулярним струмом.

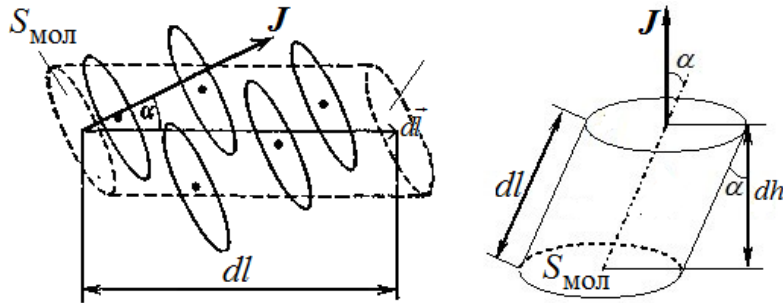


Рисунок 2.66

Об'єм такого косого циліндру

$$\Delta V = S_{\text{мол}} dh = S_{\text{мол}} \cos \alpha dl , \quad (2.189)$$

потрапить в нього кількість струмів, що дорівнює

$$\Delta N = n \Delta V = n S_{\text{мол}} \cos \alpha dl , \quad (2.190)$$

n – кількість молекул в одиниці об'єму. Тож в даному об'ємі

$$\sum_{\Delta V} I_{\text{мікро}} = \Delta N \cdot I_{\text{мол}} = n S_{\text{мол}} I_{\text{мол}} \cos \alpha dl . \quad (2.191)$$

З іншого боку,

$$\vec{J} = \frac{1}{\Delta V} \cdot \sum_{\Delta V} \vec{p}_{mi} = \frac{\Delta N \cdot \vec{p}_m}{\Delta V} = n\vec{p}_m, \quad (2.192)$$

де ΔN – число молекул в об'ємі ΔV , \vec{p}_m – магнітний момент мікроструму однієї молекули; $p_m = I_{\text{мол}} S_{\text{мол}}$, $I_{\text{мол}}$ – мікрострум однієї молекули, тож

$$J = nI_{\text{мол}}S_{\text{мол}}; \quad (\vec{J}, d\vec{l}) = nI_{\text{мол}}S_{\text{мол}} \cos \alpha dl. \quad (2.193)$$

Приходимо до висновку, що вздовж малого елемента контуру

$$\sum_{\Delta V} I_{\text{мікро}} = (\vec{J}, d\vec{l}), \quad (2.194)$$

звідки сума вздовж всього контуру

$$\sum_{\text{ПоВсьому Контуру}} I_{\text{мікро}} = \sum_{\text{ПоВсьому Контуру}} (\vec{J}, d\vec{l}) \Rightarrow \oint_L (\vec{J}, d\vec{l}) = \sum I_{\text{мікро}}. \quad (2.195)$$

Тоді згідно (2.188) та (2.195) отримаємо

$$\oint_L (\vec{B}, d\vec{l}) = \mu_0 \sum I_{\text{макро}} + \mu_0 \oint_L (\vec{J}, d\vec{l}) \Rightarrow \oint_L \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}, d\vec{l} \right) = \sum I_{\text{макро}}. \quad (2.196)$$

Введемо величину

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}, \quad (2.197)$$

циркуляція якої по будь-якому замкненому контуру всередині магнетика дорівнює сумі макрострумів, що пронизують цей контур. Цю величину назвали **напруженістю магнітного поля**. Згідно (2.197) та (2.196)

$$\oint_L (\vec{H}, d\vec{l}) = \sum I_{\text{макро}}, \quad (2.198)$$

$[H] = [J] = \frac{\text{А}}{\text{М}}$. Згідно (2.197)

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} \Rightarrow \vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{J}. \quad (2.199)$$

Так як величина \vec{H} задана саме макрострумами, а величина $\mu_0 \vec{J}$ «регламентована» саме мікрострумами, то можна сказати, що **індукція магнітного поля всередині магнетика є сумою магнітної індукції зовнішнього**

магнітного поля $\mu_0 \vec{H}$ та магнітної індукції поля, утвореного магнітними моментами молекул речовини $\mu_0 \vec{J}$.

Як показує дослід, у випадку досить слабких магнітних полів для більшості речовин вектори \vec{J} та \vec{H} є пропорційними:

$$\vec{J} = \chi \vec{H}, \quad (2.200)$$

безрозмірний коефіцієнт χ назвали *магнітною сприйнятливістю речовини*.

Тоді

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \chi \vec{H} = (1 + \chi) \mu_0 \vec{H} = \mu \mu_0 \vec{H}, \quad (2.201)$$

де $\mu = 1 + \chi$ – *магнітна проникність речовини*.

Так як $\mu_0 \vec{H}$ є індукцією зовнішнього магнітного поля, то *магнітна проникність μ показує, у скільки разів посилюється магнітне поле в магнетикі*. Для вакууму $\chi = 0$, $\mu = 1$, бо у вакуумі немає мікрострумів.

Тож закон Біо-Савара-Лапласа в середовищі матиме такий же вигляд, як і у вакуумі, лише μ_0 замінюється на $\mu \mu_0$:

$$d\vec{B} = \frac{\mu \mu_0 I}{4\pi} \frac{[d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}. \quad (2.202)$$

Відповідно, всі вище виведені формули для полів різних конфігурацій струмів у вакуумі в середовищі теж працюватимуть, але у випадку наявності середовища в них треба замінити μ_0 замінюється $\mu \mu_0$. Наприклад, поле нескінченного прямолінійного струму в середовищі матиме вигляд $B = \frac{\mu \mu_0 I}{2\pi a}$, a – відстань до провідника; поле всередині соленоїда з осердям $B = \mu \mu_0 n I$ (μ – магнітна проникність осердя).

Зауважимо, що щойно розглянуто лише ізотропні магнетики (магнетики, властивості яких в усіх напрямках однакові). В анізотропних магнетиках зв'язок \vec{J} та \vec{H} має складнішу (тензорну) структуру, в цьому курсі обмежимося розглядом ізотропних магнетиків.

За своїм магнітними властивостями магнетики поділяються на три основні групи:

1) **діамагнетики**, у яких магнітна сприйнятливість χ від'ємна і є малою за модулем, $\chi < 0$, $|\chi| \ll 1$, магнітна проникність $\mu < 1$ є близькою до 1.

2) **парамагнетики**, у яких магнітна сприйнятливість χ додатна і є малою за модулем, $\chi > 0$, $|\chi| \ll 1$, магнітна проникність $\mu > 1$ є близькою до 1.

3) **феромагнетики**, у яких χ додатна може бути значно більшою за 1, відповідно, магнітна проникність таких речовин може досягати дуже великих значень (порядку $10^2 - 10^5$).

Діамагнетики слабо намагнічуються проти зовнішнього магнітного поля, парамагнетики слабо намагнічуються за зовнішнім магнітним полем. Магнітна проникність діамагнетиків та парамагнетиків є постійною величиною. Феромагнетики можуть дуже сильно намагнічуватись по полю, для них магнітна проникність залежить від зовнішнього поля.

Феромагнетики – це речовини, елементарні структурні складові яких мають власні магнітні моменти, спонтанно орієнтовані паралельно один до одного або складнішим чином, внаслідок чого утворюються *макрообласті*

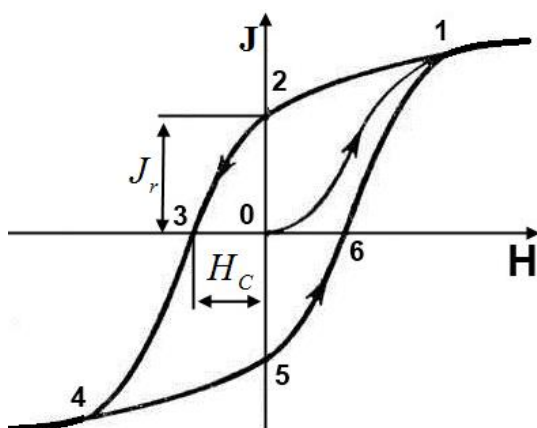


Рисунок 2.67

(*домени*) з відмінним від нуля вектором намагніченості. У не намагніченій речовині вектори намагніченості доменів спрямовані хаотично, і сумарна намагніченість нульова. При включенні зовнішнього магнітного поля домени спочатку змінюють свої межі (збільшуються домени, орієнтовані по полю), а потім домени переорієнтуються

по полю, що зумовлює дуже сильні магнітні властивості речовини.

Залежність $J(H)$ для феромагнетиків є нелінійною, та описується кривою гістерезису, див. рис. 2.67. Нехай феромагнітний зразок початково не є намагніченим. При збільшенні напруженості магнітного поля (крива 0–1) J спочатку зростає, а потім майже перестає зростати (виходить на насичення). Якщо зменшити магнітне поле до нуля (крива 1–2), зразок не розмагнітиться повністю, в нього залишиться **надлишкова намагніченість** J_r . Для того, щоб розмагнітити зразок, треба включити магнітне поле H_C в зворотному напрямку (крива 2–3). При збільшенні магнітного поля в зворотному напрямку (крива 3–4) зразок намагнітиться в зворотному напрямку і намагнічення досягне насичення. Якщо ж тепер зменшувати магнітне поле та перепідключати його в прямому напрямку, то крива 4–5–6–1 буде симетрична кривій 1–2–3–4 (у випадку, коли максимальне значення зовнішнього магнітного поля під час процесу однакове в умовно додатному і у умовно від'ємному напрямках). Замкнена крива 1–2–3–4–5–6–1 називається **кривою гістерезису**.

Намагніченість феромагнетиків залежить від температури. Зі зростанням температури залишкове намагнічування зменшується і при певній температурі, яка називається **температурою Кюрі**, зникає зовсім. При температурі вищій за температуру Кюрі феромагнетик втрачає свої феромагнітні властивості і стає парамагнетиком.

Феромагнетики належать до так званих **магнітовпорядкованих** речовин. Зокрема, серед магнітовпорядкованих речовин також виділяють антиферомагнетики та ферити.

Антиферомагнетики – речовини, в яких власні магнітні моменти сусідніх атомів протилежно спрямовані. Кристалічну структуру таких речовин можна уявити як накладення двох або більше кристалічних підґраток, в кожній з яких магнітні моменти атомів паралельні один одному і однакові за модулем. Відповідно, антиферомагнетики є дуже слабкими парамагнетиками. Для антиферомагнетиків існує температура, вище якої антипаралельна орієнтація магнітних моментів підґраток зникає, та речовина поводить себе як звичайний

парамагнетик. Ця температура називається *температурою Нееля*. У деяких антиферромагнетиків існують дві температури Нееля, між якими властивості речовини антиферромагнітні, нижче нижньої температури Нееля речовина феромагнітна, а вище вищої – парамагнітна.

Ферити мають таку ж кристалічну структуру, як і антиферромагнетики – вона складається з декількох підґраток, магнітні моменти атомів сусідніх підґраток спрямовані назустріч один одному. Але на відміну від антиферромагнетика, магнітні моменти атомів різних під ґраток не є рівними за модулем, що призводить до не рівного нулю сумарного вектора намагніченості у відсутності зовнішнього магнітного поля. Поведінка цих речовин в зовнішньому магнітному полі схожа з поведінкою феромагнетиків: вони мають високі значеннями магнітної проникності, для них існує температура Кюрі, спостерігається магнітний гістерезис.

2.8.11. Явище самоіндукції. Індуктивність соленоїда. Енергія соленоїда

Розглянемо котушку у вигляді соленоїда, що через певний опір під'єднана до джерела ЕРС, див. рис. 2.68.

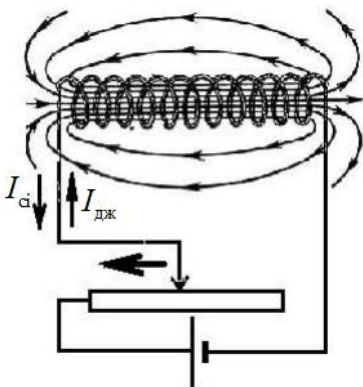


Рисунок 2.68

При зміні відповідного опору змінюватиметься струм через котушку, тож змінюватиметься магнітне поле цієї котушки, тож змінюватиметься магнітний потік через котушку, що викличе індукційний струм. Виникнення ЕРС електромагнітної індукції в контурі (катушці) внаслідок зміни сили струму в цьому ж самому контурі (цій же самій катушці) називається *явищем самоіндукції*. Відповідно, саме це явище має

місце в катушці, що приєднана до електричного кола.

Магнітне поле всередині катушки описується виразом (2.173), повний магнітний потік через катушку $\Phi = NBS$, бо BS – магнітний потік через один

виток котушки, та кількість витків дорівнює N ; S – площа поперечного перерізу котушки). Тож

$$\Phi = NBS = N\mu_0 nIS = \frac{N}{l} \mu_0 nISl = \mu_0 n^2 VI, \quad (2.203)$$

цей магнітний потік пропорційний до струму через котушку.

Коефіцієнт пропорційності між повним магнітним потоком та струмом через котушку називають *індуктивністю* котушки:

$$\Phi = LI, \quad (2.204)$$

$[L] = \Gamma_{\text{H}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{А}^2 \cdot \text{с}^2}$; для соленоїдальної котушки згідно (2.203)

$$L = \mu_0 n^2 V, \quad (2.205)$$

У випадку наявності осердя ця формула видозміниться як

$$L = \mu \mu_0 n^2 V, \quad (2.206)$$

де μ – магнітна проникність матеріалу осердя. Відповідно, індуктивність котушки залежить лише від внутрішньої будови котушки і не залежить від параметрів кола, які можуть змінюватись з часом (винятком є випадок феромагнітного осердя). Тобто індуктивність конкретно взятої котушки є сталою: $L = \mu \mu_0 n^2 V = \text{const}$, тоді ЕРС самоіндукції

$$\varepsilon_{\text{ci}} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{dLI}{dt} \Rightarrow \varepsilon_{\text{ci}} = -L \frac{dI}{dt}, \quad (2.207)$$

ця формула справедлива для котушки, в якій немає феромагнітного осердя, у випадку феромагнітного осердя параметр μ може змінюватись зі зміною параметрів кола, і тому L може бути не константою.

Часто котушку розглядають не як елемент з ЕРС $\varepsilon_{\text{ci}} = -L \frac{dI}{dt}$, а як елемент

з напругою

$$U = L \frac{dI}{dt}. \quad (2.208)$$

Це можна пояснити на основі того, що у випадку не постійних струмів закони Кірхгофа також є справедливими для миттєвих значень струмів, ЕРС та напруг. Якщо розглянути контур, що містить дану котушку, то другий закон Кірхгофа запишеться як

$$\sum U_{\text{НаІншихЕлементах}} = \sum \varepsilon_{\text{інших}} + \varepsilon_{\text{сі}} \Rightarrow \sum U_{\text{НаІншихЕлементах}} = \sum \varepsilon_{\text{інших}} - L \frac{dI}{dt}, \quad (2.209)$$

Перенесемо $L \frac{dI}{dt}$ в інший бік рівності, отримаємо

$$\sum U_{\text{НаІншихЕлементах}} + L \frac{dI}{dt} = \sum \varepsilon_{\text{інших}}, \quad (2.210)$$

отриманий вираз можна інтерпретувати таким чином, що котушка – елемент (не джерело), напруга на якому $U = L \frac{dI}{dt}$, що і зумовлює вище описаний факт.

Енергію магнітного поля в котушці можна обчислити таким чином. Розглянемо випадок, коли котушку, послідовно з'єднану через резистор до батареї, відключають від неї (замикають котушку та резистор, так званий RL-ланцюжок, сам на себе). Тоді якийсь час в ній буде протікати згасаючий індукційний струм. Його елементарна робота

$$\delta A = \varepsilon_{\text{сі}} Idt = -L \frac{dI}{dt} Idt = -LI dI, \quad (2.211)$$

звідки

$$A = -L \int_{I_{\text{н}}}^0 IdI = L \int_0^{I_{\text{н}}} IdI = \frac{LI_{\text{н}}^2}{2}, \quad (2.212)$$

де $I_{\text{н}}$ – значення струму в той момент, коли таке з'єднання відключили від батареї. Робота цього струму виділиться у вигляді джоулевого тепла на резисторі. Тож можна це інтерпретувати так – енергія магнітного поля, що була «запасена» в котушці, виділиться на нагрів резистора. Тож **енергія магнітного поля в котушці**

$$E_M = \frac{LI^2}{2}, \quad (2.213)$$

де I – струм через котушку.

2.8.12. Явище взаємної індукції. Ідеальний трансформатор

Розглянемо два так звані *магнітозв'язані* контури, тобто зміна магнітного поля в одному з них змінює магнітний потік через другий контур. Тоді наявне явище *взаємної індукції*, що полягає у виникненні ЕРС індукції в одному контурі при зміні струму через другий контур, і навпаки.

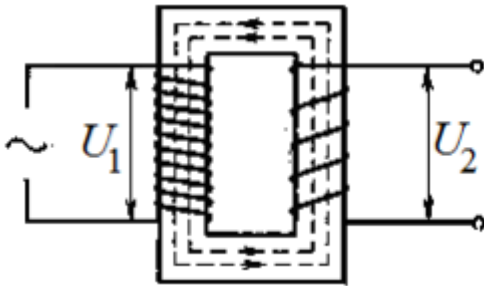


Рисунок 2.69

Найпростішим *трансформатором* є система котушок, з'єднаних спільним феромагнітним сердечником, див. рис. 2.69. Для простоти вважаємо *магнітний потік всередині сердечника всюди однаковим* (ідеальний трансформатор). Зміна магнітного потоку, що викликана струмом в першій

котушці, викличе наведення ЕРС в другій котушці.

Тоді

$$U_1 = N_1 \frac{d\Phi}{dt}, \quad U_2 = N_2 \frac{d\Phi}{dt}, \quad (2.214)$$

U_1 – напруга на першій котушці, N_1 – кількість витків на першій котушці, U_2 – напруга на другій котушці, N_2 – кількість витків на другій котушці (тут враховано, що $d\Phi/dt$ є напругою на одному витку). При $d\Phi/dt \neq 0$ (що справедливо для змінного струму) згідно (2.214) отримаємо

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2} \Rightarrow U_2 = \frac{N_2}{N_1} U_1, \quad (2.215)$$

відношення напруг дорівнює відношенню кількостей витків. **При $N_1 > N_2$ трансформатор понижує напругу ($U_2 < U_1$), при $N_1 < N_2$ трансформатор підвищує напругу ($U_2 > U_1$).**

2.9. Задачі про замикання та розмикання RL- та RC-кіл

2.9.1. Задача на замикання RL-кола

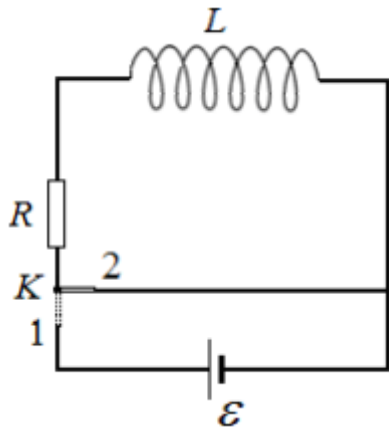


Рисунок 2.70

Розглянемо котушку, яку послідовно через резистор приєднали до джерела ЕРС, див. рис. 2.70. Розглянемо випадок, коли ключ К знаходиться в положенні 1, початковий струм через котушку дорівнює нулю: $I(t=0) = 0$. Поставимо задачу знайти залежність струму в колі від часу. Згідно другого закону Кірхгофа для контуру, що проходить через ЕРС, резистор та котушку матимемо

$$\varepsilon = U_R + U_L, U_R = IR, U_L = L \frac{dI}{dt}, \quad (2.216)$$

тут враховано вирази для напруги на резисторі (2.91) та на котушці (2.208). Струм на котушці та на резисторі однаковий через те, що вони з'єднані послідовно. Тож маємо диференціальне рівняння на невідому функцію $I(t)$:

$$L \frac{dI}{dt} + IR = \varepsilon. \quad (2.217)$$

Перезберемо члени та проінтегруємо:

$$\frac{dI}{\frac{\varepsilon}{R} - I} = \frac{R}{L} dt \Rightarrow \int \frac{dI}{\frac{\varepsilon}{R} - I} = \frac{R}{L} \int dt + A_1 \Rightarrow -\ln\left(\frac{\varepsilon}{R} - I\right) = \frac{R}{L}t + A_1 \Rightarrow \quad (2.218)$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{\varepsilon}{R} - I\right) = -\frac{R}{L}t - A_1 \Rightarrow e^{\ln\left(\frac{\varepsilon}{R} - I\right)} = e^{-\frac{R}{L}t - A_1} \Rightarrow I(t) = \frac{\varepsilon}{R} - Ae^{-\frac{R}{L}t},$$

де A_1 – константа інтегрування та $A = e^{-A_1}$ – перепозначена константа.

Отриманий вираз є *загальним розв'язком* диференційного рівняння (2.217), тобто він є розв'язком відповідного рівняння при будь-якому значенні константи A . Але в нашій фізичній ситуації це значення не будь-яке, бо у нас є початкова умова $I(t=0) = 0$. На основі цієї початкової умови треба конкретизувати константу A :

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R} - Ae^{-\frac{R}{L}t} \Rightarrow I(t=0) = \frac{\varepsilon}{R} - Ae^{-\frac{R}{L} \cdot 0} = 0 \Rightarrow \frac{\varepsilon}{R} - A = 0 \Rightarrow A = \frac{\varepsilon}{R}. \quad (2.219)$$

Тож остаточно шукана залежність струму від часу:

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right). \quad (2.220)$$

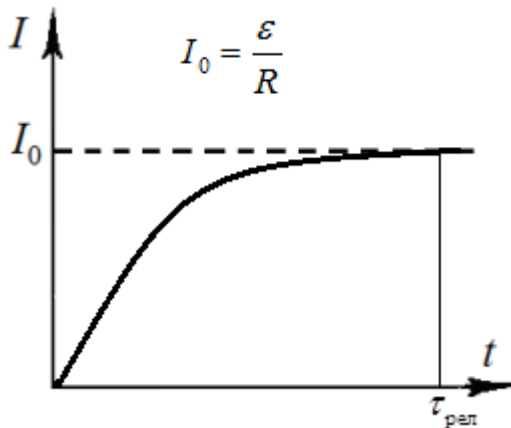


Рисунок 2.71

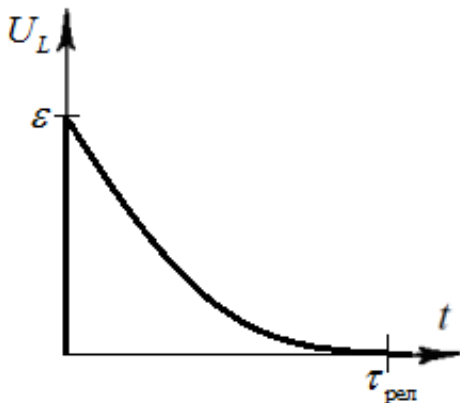


Рисунок 2.72

Відповідний графік – див. рис. 2.71.
Величину

$$\tau = \frac{L}{R} \quad (2.221)$$

назвали **сталюю часу** RL – ланцюжка, ця величина дійсно має розмірність часу, бо

$$[\tau] = \frac{\text{Гн}}{\text{Ом}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{А}^2 \cdot \text{с}^2} / \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{А}^2 \cdot \text{с}^3} = \text{с}. \text{ Перепишемо}$$

отриманий результат (2.220) у вигляді

$$I(t) = I_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right), \quad I_0 = \frac{\varepsilon}{R}, \quad (2.222)$$

На перший погляд, струм ніколи не досягне значення I_0 , бо $e^{-t/\tau} > 0 \quad \forall t$. Але член $e^{-t/\tau}$ згасає дуже швидко, і на практиці вважають, що він повністю згасає за час від 3τ до 5τ . При $t = 3\tau$ $e^{-t/\tau} = e^{-3} \approx 1/20$, при

$t = 5\tau$ $e^{-t/\tau} = e^{-5} \approx 1/148$, тож якщо різниця між струмом в даний момент часу стає меншою за $1/20 - 1/148$ частину струму I_0 , то такою різницею просто нехтують.

Час від 3τ до 5τ називають ще часом **перехідного процесу**, або **часом релаксації** RL -ланцюжка. При цьому напруга котушці поводитиметься як

$$U_L(t) = L \frac{dI}{dt} = L \frac{d}{dt} \left(\frac{\varepsilon}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) \right) = L \frac{\varepsilon R}{R L} e^{-\frac{R}{L}t} = \varepsilon e^{-\frac{R}{L}t}, \quad (2.223)$$

тобто в початковий момент часу стрибкоподібно змінюється на значення ε , а потім експоненційно згасає, див. рис. 2.72. Залежність напруги на резисторі від часу

$$U_R(t) = RI(t) = \varepsilon \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right), \quad (2.224)$$

часові залежності $U_R(t)$ та $I(t)$ є ідентичними з точністю до сталого розмірного множника. Строго математично кажучи,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} U_L(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} U_R(t) = \varepsilon, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} I(t) = I_0 = \frac{\varepsilon}{R}. \quad (2.225)$$

На практиці вважають, що після настання часу релаксації (2.221) напруга на котушці падає до нуля, напруга на резисторі становиться рівною ε , та струм у колі становиться рівним I_0 .

2.9.2. Задача на розмикання RL-кола

Розглянемо коло, наведене на рис. 2.70. Нехай ключ довго (довше за час релаксації) був в положенні 1. Відповідно, встановився постійний струм I_0 . Перемикаємо ключ з положення 1 в положення 2, від моменту перемикавання заново ведемо відлік часу. Початковою умовою на струм в колі буде

$$I(0) = I_0, \quad (2.226)$$

бо спрацює *перший закон комутації – магнітний потік всередині котушки є неперервною функцією часу*. Відповідно, якщо індуктивність котушки є незмінною, що майже завжди виконується, цей закон можна переформулювати як «струм через котушку є неперервною функцією часу». Тобто напруга на котушці може змінитись стрибкоподібно, а струм – ні.

Аналогічно до (2.216) на основі другого закону Кірхгофа отримаємо диференціальне рівняння

$$L \frac{dI}{dt} + IR = 0, \quad (2.227)$$

в розглянутому випадку коло є контуром, що містить лише котушку та резистор, і не містить ЕРС (містить нульову ЕРС). Перезібравши члени та проінтегрувавши, отримаємо

$$\frac{dI}{I} = -\frac{R}{L} dt \Rightarrow \int \frac{dI}{I} = -\frac{R}{L} \int dt + A_1 \Rightarrow \ln I = -\frac{R}{L} t + A_1 \Rightarrow I(t) = A e^{-\frac{R}{L} t}, \quad (2.228)$$

A_1 – константа інтегрування та $A = e^{A_1}$ – перепозначена константа. Значення константи $A = I_0$ знайдемо з початкової умови (2.226). Тож матимемо

$$I(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L} t} = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (2.229)$$

де стала часу τ введена у (2.221). Аналогічно до задачі замикання кола, час релаксації $\tau_{\text{рел}}$ оцінюється рівним від 3τ до 5τ , тобто якщо струм падає у 20 – 148 разів, їм починають нехтувати.

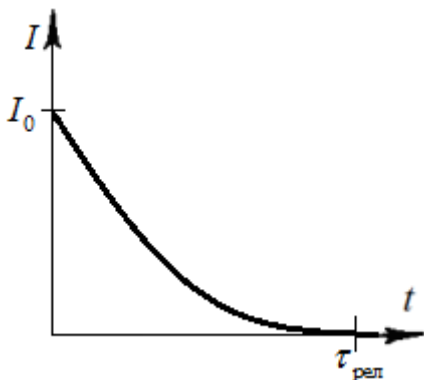


Рисунок 2.73

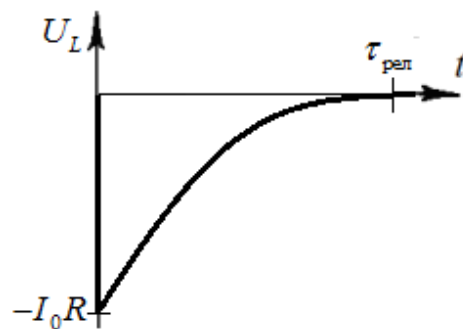


Рисунок 2.74

$$I(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow I(\tau) = I_0 e^{-1} = \frac{I_0}{e}, \quad (2.230)$$

з цього виразу зрозумілий фізичний зміст сталої часу τ . Стала часу RL -ланцюжка – час, за який при замкненні ланцюжка сам на себе струм в ньому впаде в e разів.

Залежність напруги на котушці від часу

$$U_L(t) = L \frac{dI}{dt} = L \frac{dI_0 e^{-\frac{R}{L} t}}{dt} = L I_0 \frac{d e^{-\frac{R}{L} t}}{dt} = -\frac{R}{L} L I_0 e^{-\frac{R}{L} t} = -R I_0 e^{-\frac{R}{L} t} = -\varepsilon e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (2.231)$$

графіки залежності $I(t)$ та $U_L(t)$ наведені на рис. 2.73 та 2.74. Залежність напруги на резисторі від часу з точністю до сталого розмірного множника ϵ ідентичною до залежності струму в колі від часу:

$$U_R(t) = IR = I_0 R e^{-\frac{t}{\tau}} = \epsilon e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (2.232)$$

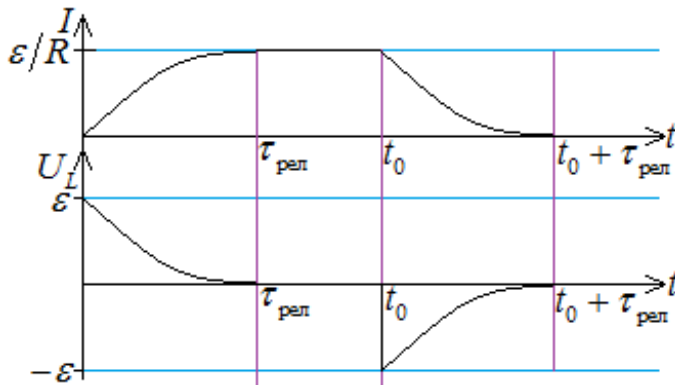


Рисунок 2.75

«Повні» часові графіки від початку роботи кола (а не від моменту перемикавання ключа) для розглянутих вище процесів наведені на рис. 2.75; t_0 – момент перемикавання ключа. Залежність струму на котушці від часу – неперервна функція, напруги – ні.

2.9.3. Задача на зарядження конденсатора

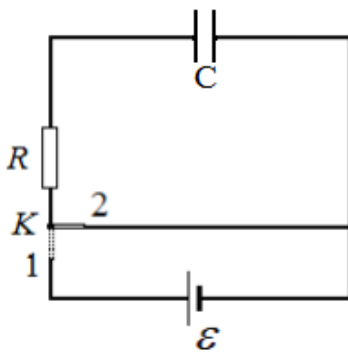


Рисунок 2.76

Розглянемо конденсатор, який послідовно через резистор приєднали до джерела ЕРС, див. рис. 2.76. Розглянемо випадок, коли ключ K знаходиться в положенні 1, початковий заряд конденсатора дорівнює нулю: $q(0) = 0$. Поставимо задачу знайти залежність заряду конденсатора від часу. Фактично, ця задача є задачею замикання RC-кола. Згідно другого закону

Кірхгофа для контуру, що проходить через ЕРС, резистор та котушку матимемо

$$\epsilon = U_R + U_C, \quad U_R = IR = R \frac{dq}{dt}, \quad U_C = \frac{q}{C}, \quad (2.233)$$

тут враховано вирази (2.88) та (2.68), напруга на конденсаторі є різницею потенціалів на його обкладинках; **струм через конденсатор дорівнює похідній по часу від заряду конденсатора**. Через те, що резистор та конденсатор з'єднані послідовно, струм на них є однаковим. Відповідно, отримуємо таке диференціальне рівняння на заряд конденсатора:

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = \frac{\varepsilon}{R}, \quad (2.234)$$

початковою умовою є $q(t=0)=0$. Таке рівняння розв'язується аналогічно до рівняння (2.217). Перезбираємо члени та інтегруємо:

$$\frac{dq}{\frac{1}{RC}(\varepsilon C - q)} = dt \Rightarrow \int \frac{dq}{\varepsilon C - q} = \frac{1}{RC} \int dt + A_1 \Rightarrow \quad (2.235)$$

$$\Rightarrow -\ln(\varepsilon C - q) = \frac{t}{RC} + A_1 \Rightarrow q(t) = \varepsilon C - A e^{-\frac{t}{RC}},$$

A_1 – константа інтегрування та $A = e^{-A_1}$ – перепозначена константа, значення якої $A = \varepsilon C$ знаходимо з початкової умови. Тож остаточно

$$q(t) = \varepsilon C \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right), \quad U_c(t) = \frac{q(t)}{C} = \varepsilon \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right). \quad (2.236)$$

Введемо величину

$$\tau = RC, \quad (2.237)$$

яка називається **сталюю часу RC-ланцюжка**, дійсно, ця величина має

розмірність часу, бо $[\tau] = \Phi \cdot \text{Ом} = \frac{\text{А}^2 \cdot \text{с}^4}{\text{кг} \cdot \text{м}^2} \cdot \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{А}^2 \cdot \text{с}^3} = \text{с}$.

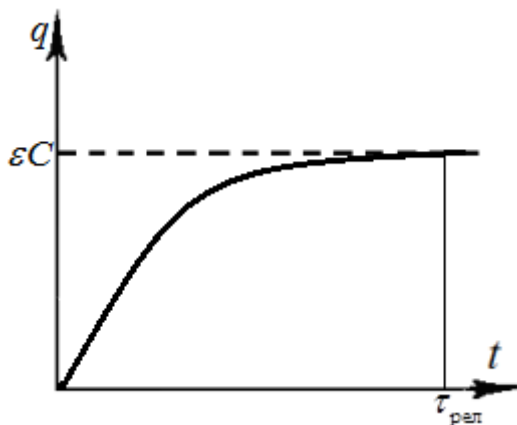


Рисунок 2.77

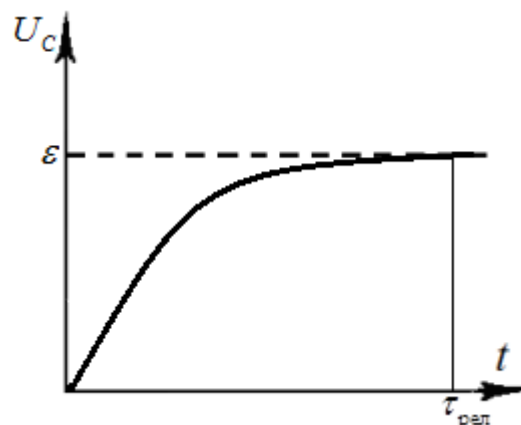


Рисунок 2.78

Аналогічно до задачі замикання/розмикання RL-кола, в цій задачі на практиці вважають, конденсатор повністю заряджається до напруги, що дорівнює ε за час від 3τ до 5τ , який назвали часом релаксації або часом

перехідного процесу RC – ланцюжка. Відповідні графіки залежності заряду конденсатора від часу та напруги на конденсаторі від часу наведені на рис. 2.77 та 2.78. Ці залежності є ідентичними з точністю до сталого розмірного множника.

Виведемо залежність струму в колі від часу:

$$I(t) = \frac{dq(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \varepsilon C \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) = \frac{\varepsilon}{R} e^{-\frac{t}{RC}}, \quad (2.238)$$

Залежність напруги на резисторі від часу є ідентичною з точністю до сталого розмірного множника:

$$U_R = RI(t) = \varepsilon e^{-\frac{t}{RC}}. \quad (2.239)$$

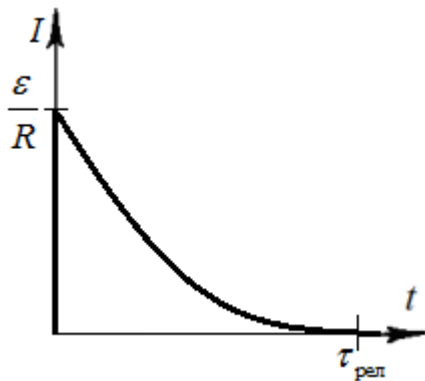


Рисунок 2.79

Залежність струму в колі від часу наведена на рис. 2.79. В початкову мить струм стрибкоподібно зростає до значення ε/R , а далі – експоненційно спадає до нуля, після часу релаксації струм вважається нехтовно малим. Зазвичай в електроніці час релаксації є доволі малим, і тому кажуть, що *конденсатор не пропускає постійний струм*, бо струм після

завершення перехідного процесу зарядження конденсатора падає до нуля. Слово «постійний» в цій фразі означає, що це твердження працює для кіл зі сталими ЕРС. Якщо ж ЕРС джерел залежать від часу, до конденсатор може пропускати струм і в усталеному режимі роботи кіл.

2.9.4. Задача на розрядження конденсатора

Розглянемо коло, наведене на рис. 2.76. Нехай ключ довго (довше за час релаксації) був в положенні 1. Відповідно, встановилось постійне значення заряду конденсатора $q_0 = \varepsilon C$. Перемикаємо ключ з положення 1 в положення 2, від моменту перемикування заново ведемо відлік часу. Початковою умовою на заряд конденсатора буде

$$q(0) = q_0, \quad (2.240)$$

бо справує *другий закон комутації – заряд конденсатора (а разом з ним і напруга на конденсаторі) є неперервною функцією часу*. Струм через конденсатор може змінитись стрибкоподібно, а напруга на ньому (його заряд) – ні.

Аналогічно до (2.234) на основі другого закону Кірхгофа отримаємо диференціальне рівняння

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = 0, \quad (2.241)$$

в розглянутому випадку коло є контуром, що містить лише конденсатор та резистор, і не містить ЕРС (містить нульову ЕРС). Перезібравши члени та проінтегрувавши, отримаємо

$$\frac{dq}{q} = -\frac{dt}{RC} \Rightarrow \int \frac{dq}{q} = -\int \frac{dt}{RC} + A_1 \Rightarrow \ln q = -\frac{t}{RC} + A_1 \Rightarrow q(t) = Ae^{-\frac{t}{RC}}, \quad (2.242)$$

A_1 – константа інтегрування та $A = e^{A_1}$ – перепозначена константа. Значення константи $A = q_0$ знайдемо з початкової умови (2.240), тож остаточно

$$q(t) = q_0 e^{-\frac{t}{RC}}. \quad (2.243)$$

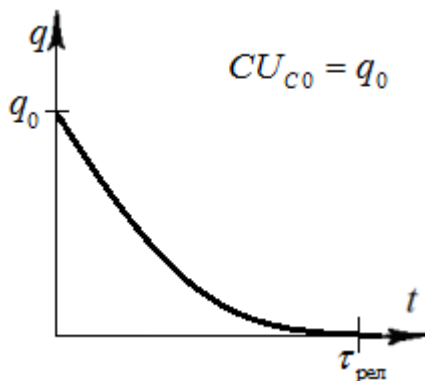


Рисунок 2.80

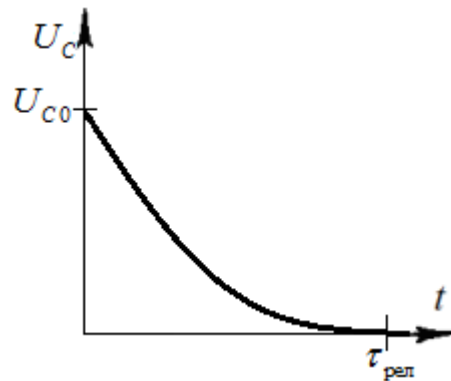


Рисунок 2.81

Графіки залежності заряду конденсатора від часу та напруги на конденсаторі від часу наведені на рис. 2.77 та 2.78. Ці залежності є ідентичними з точністю до сталого розмірного множника. На практиці вважається, що за час

релаксації (оцінка на нього – від 3 до 5 сталих часу) конденсатор розрядиться повністю. За час, рівний сталій часу

$$q(t) = q_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow q(\tau) = q_0 e^{-1} = \frac{q_0}{e}, \quad (2.244)$$

звідки зрозумілий фізичний зміст сталої часу τ . *Стала часу RC-ланцюжка – час, за який при замкненні ланцюжка сам на себе заряд конденсатора впаде в e разів.*

Залежність струму та напруги на резисторі від часу задаються виразами

$$I(t) = \frac{dq(t)}{dt} = \frac{d}{dt} q_0 e^{-\frac{t}{RC}} = -\frac{q_0}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}, \quad U_R(t) = RI(t) = -\frac{q_0}{C} e^{-\frac{t}{RC}}, \quad (2.245)$$

ці залежності теж є ідентичними з точністю до сталої розмірного множника.

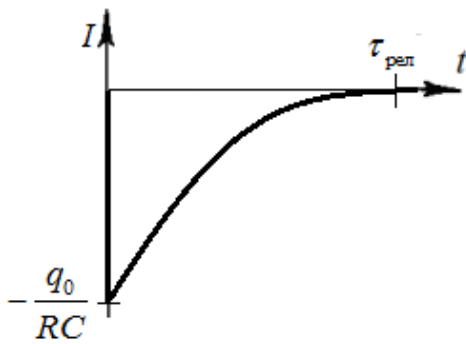


Рисунок 2.82

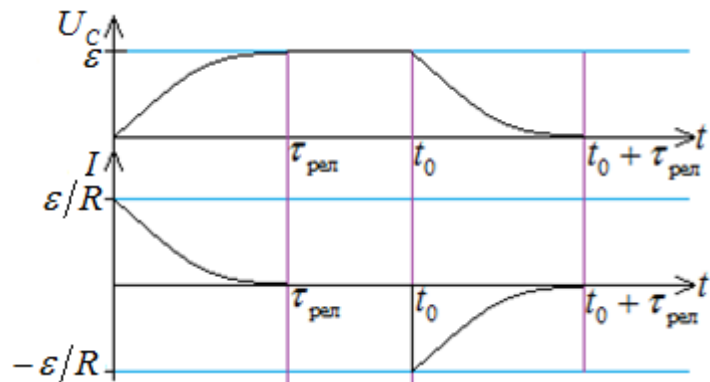


Рисунок 2.83

Графік залежності $I(t)$ наведено на рис. 2.82. На рис. 2.83 наведено «повні» часові графіки від початку роботи кола (а не від моменту перемикавання ключа); t_0 – момент перемикавання ключа. Залежність напруги на конденсаторі – неперервна функція часу, струму – ні.

2.10. Контрольні питання до розділу 2

1. Дати визначення електричного заряду, сформулювати закон Кулона. В яких випадках закон Кулона працює у вигляді (2.1)? Вивести потенціальну енергію кулонівської взаємодії.

2. Дати визначення електричного поля. Вивести вираз для електростатичного поля точкового заряду.

3. Сформулювати принцип суперпозиції. Вивести вираз для електростатичного поля рівномірно зарядженої нескінченної нитки.
4. Вивести вираз для електростатичного поля рівномірно зарядженої площини.
5. Сформулювати теорему Гауса для напруженості електричного поля.
6. Вивести вираз для електростатичного поля рівномірно зарядженої сфери.
7. Вивести вираз для електростатичного поля рівномірно зарядженої кулі.
8. Вивести вираз для електростатичного поля рівномірно зарядженого полого нескінченного циліндру.
9. Вивести вираз для електростатичного поля рівномірно зарядженого по об'єму суцільного нескінченного циліндру.
10. Дати визначення поняття потенціалу електростатичного поля. Вивести вираз для потенціалу поля точкового заряду.
11. Вивести вираз для різниці потенціалів в полі коаксіальних циліндрів.
12. Вивести вираз для різниці потенціалів в полі концентричних сфер.
13. Вивести вираз для різниці потенціалів в полі паралельних площин.
14. Дати визначення електричного диполя та його дипольного моменту. Дати визначення пари сил. Вивести вираз для потенціальної енергії диполя у зовнішньому електричному полі. Вивести вираз для результуючої сили, що діє на диполь в неоднорідному зовнішньому електричному полі.
15. Дати визначення поляризації діелектриків. Описати механізми поляризації полярних та неполярних діелектриків.
16. Дати визначення вектору поляризованості. Дати визначення діелектричної сприйнятливості. Вивести вираз для поверхневої густини зв'язаних зарядів.
17. Дати визначення діелектричної проникності. Навести поняття електричної індукції та сформулювати теорему Гауса для електричної індукції. Навести зв'язок між електричною індукцією і напруженістю електричного поля.
18. Описати властивості провідників у зовнішньому електричному полі.

19. Дати визначення ємності провідника. Дати визначення конденсатора та ємності конденсатора. Вивести вираз для ємності плоского конденсатора.

20. Вивести вирази для ємності сферичного та циліндричного конденсатора.

21. Вивести вирази для ємності паралельного та послідовного з'єднань конденсаторів.

22. Вивести вирази для енергії системи зарядів, енергії зарядженого провідника та системи заряджених провідників. Вивести вираз для енергії зарядженого конденсатора.

23. Навести поняття електричного струму як явища. Навести поняття електричного кола. Дати визначення сили струму, напруги та опору. Сформулювати закон Ома для ділянки кола, що не містить джерел.

24. Вивести вирази для загального струму, напруги та опору для послідовного та паралельного з'єднань.

25. Пояснити принцип роботи джерела напруги. Дати визначення ЕРС ідеального джерела напруги. Навести послідовну схему заміщення реального джерела напруги, вивести закон Ома для повного кола. Вивести вольт-амперну характеристику реального джерела напруги. Вказати значення внутрішнього опору ідеального джерела та аргументувати відповідь.

26. Вивести вираз для роботи та потужності струму. Сформулювати закон Джоуля-Ленца. Вивести умову передачі максимальної потужності від джерела в коло.

27. Вивести закон Ома для ділянки кола, що містить джерело ЕРС.

28. Навести вираз для опору провідника заданої довжини та площі перерізу. Навести визначення густини струму та питомої провідності. Вивести закон Ома в диференціальній формі.

29. Сформулювати та вивести закони Кірхгофа.

30. Навести визначення іонізації газу та газового розряду. Навести типи газових розрядів.

31. Навести визначення магнітного поля та закон Біо-Савара-Лапласа у вакуумі. Навести вираз для магнітного поля зарядженої частинки.

32. Вивести вираз для поля прямого провідника, сформулювати та обґрунтувати правило правої руки.

33. Навести вираз для поля кругового струму вздовж центральної осі. Дати визначення магнітного моменту. Сформулювати та обґрунтувати правило правої руки для кругового струму.

34. Навести закон Ампера. Вивести силу Ампера, що діє на прямолінійний в однорідному магнітному полі. Вивести силу взаємодії двох нескінченних паралельних провідників зі струмом. Вивести вираз для сили Лоренца. Сформулювати правило лівої руки для сили Ампера та для сили Лоренца.

35. Вивести рівняння траєкторії зарядженої частинки у однорідному магнітному полі.

36. Дати поняття ефекту Холла. Вивести вираз для поперечної («холлівської») різниці потенціалів.

37. Дати визначення циркуляції магнітного поля. Сформулювати теорему про циркуляцію магнітного поля. Вивести наближений вираз для індукції магнітного поля всередині соленоїда.

38. Дати визначення магнітного потоку. Вивести вираз для роботи сили Ампера, що діє на провідник та на замкнений контур.

39. Дати поняття явища електромагнітної індукції. Вивести закон Фарадея. Сформулювати і обґрунтувати правило Ленца.

40. Дати поняття і детально описати на прикладі явище магнітного гальмування.

41. Дати поняття явища намагнічування. Дати визначення вектору намагнічування. Дати визначення напруженості магнітного поля в речовині та розкрити фізичний зміст цього поняття. Дати визначення магнітної сприйнятливості та магнітної проникності речовини. Вивести зв'язок між

магнітною індукцією і напруженістю магнітного поля. Навести закон Біо-Савара-Лапласа в речовині.

42. Дати поняття діамагнетика, парамагнетика, феромагнетика, антиферомагнетика та фериту. Навести їх властивості. Детально описати криву гістерезису для феромагнетиків. Дати визначення температури Кюрі та температури Нееля.

43. Навести поняття самоіндукції. Дати визначення індуктивності соленоїда, вивести формулу для індуктивності соленоїда. Вивести формулу для ЕРС самоіндукції соленоїда (катушки) та формулу для напруги на котушці. Вивести вираз для енергії магнітного поля в котушці.

44. Навести поняття взаємної індукції. Описати будову найпростішого трансформатора та вивести зв'язок між напругами на його котушках.

45. Розв'язати задачу замикання RL-кола. Вивести часові залежності напруг та струмів на елементах кола. Дати визначення сталої часу RL-ланцюжка і розкрити її фізичний зміст. Навести та обґрунтувати вираз для тривалості перехідного процесу.

46. Сформулювати перший закон комутації. Розв'язати задачу розмикання RL-кола. Вивести часові залежності напруг та струмів на елементах кола. Навести та обґрунтувати вираз для тривалості перехідного процесу.

47. Розв'язати задачу зарядження конденсатора. Вивести часові залежності напруг та струмів на елементах RC-ланцюжка. Дати визначення сталої часу RC-ланцюжка і розкрити її фізичний зміст. Навести та обґрунтувати вираз для тривалості перехідного процесу. Пояснити фразу «конденсатор не пропускає постійний струм».

48. Сформулювати другий закон комутації. Розв'язати задачу розрядження конденсатора. Вивести часові залежності напруг та струмів на елементах RC-ланцюжка. Навести та обґрунтувати вираз для тривалості перехідного процесу.

Список рекомендованої літератури

1. Гаркуша І. П., Курінний В. П.. Фізика : навч. посіб. у 7 частинах. Ч. 1. Механіка. Дніпро : НТУ «Дніпровська політехніка», 2019, 95 с.
2. Гаркуша І. П., Курінний В. П.. Фізика : навч. посіб. у 7 частинах. Ч. 3. Електрика і магнетизм. Дніпро : Національний гірничий університет, 2018, 163 с.
3. Янг Г., Фрідман Р. Фізика для університетів. Львів : Наутілус, 2018, 1516 с.
4. Шкурдода Ю. О., Пасько О. О., Коваленко О. А. Фізика. Механіка, молекулярна фізика та термодинаміка. Суми : Сумський державний університет, 2021, 221 с.
5. Дідух Л. Д.. Електрика та магнетизм : підручник. Тернопіль : Підручники і посібники, 2020, 464 с.
6. Дідух Л. Д. Механіка : підручник. Тернопіль : Підручники і посібники, 2016, 428 с.

Навчальне видання

Горєв В'ячеслав Миколайович
Гаркуша Ігор Павлович
Подляцька Анна Валеріївна

ЗАГАЛЬНА ФІЗИКА

Навчальний посібник

У 2 частинах

Частина 1

Видано в авторській редакції.

Електронний ресурс
Підписано до видання 04.11.2024. Авт. арк. 8,4.

Підготовлено до видання
в Національному технічному університеті «Дніпровська політехніка».
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру ДК № 1842 від 11.06.2004.
49005, м. Дніпро, просп. Дмитра Яворницького, 19.