

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ДНІПРОВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»



В. М. Горєв, В. В. Титаренко

ЗАГАЛЬНА ФІЗИКА

Навчальний посібник

У 2 частинах

Частина 2

Дніпро
НТУ «ДП»
2024

УДК 53

Г68

*Рекомендовано вченою радою НТУ «Дніпровська політехніка»
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра
спеціальності 141 Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка
(протокол № 12 від 04.11.2024)*

Рецензенти:

О. Й. Соколовський – д-р фіз.-мат. наук, проф. (Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара);

Е. П. Штапенко – д-р фіз.-мат. наук, проф. (Український державний університет науки і технологій).

Горєв В. М.

Г68 Загальна фізика [Електронний ресурс] : навч. посіб.: у 2-х ч. Ч. 2 / В. М. Горєв, В. В. Титаренко ; М-во освіти і науки України, Нац. техн. ун-т «Дніпровська політехніка». – Дніпро : НТУ «ДП», 2024. – 111 с.

У посібнику розглянуто подальші розділи теоретичного матеріалу дисципліни «Загальна фізика», яку вивчають здобувачі спеціальності електротехнічної сфери. У виданні описано основи коливальних і хвильових процесів, оптики, термодинаміки й статистичної фізики, атомної та ядерної фізики. Зокрема, детально охарактеризовано електромагнітні коливання та хвилі. Матеріал посібника супроводжується чітким математичним обґрунтуванням.

Призначено для здобувачів ступеня бакалавра спеціальності 141 Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка. Також видання може бути використано студентами інших технічних або фізико-математичних спеціальностей.

УДК 53

© В. М. Горєв, В. В. Титаренко, 2024

© НТУ «Дніпровська політехніка», 2024

Зміст

Вступ.....	5
3. Коливання та хвилі.....	6
3.1. Коротка довідка з теорії диференційних рівнянь другого порядку.....	6
3.2. Електромагнітні коливання.....	8
3.2.1. Незгасаючі вільні електромагнітні коливання.....	8
3.2.2. Згасаючі електромагнітні коливання.....	13
3.2.3. Вимушені коливання в послідовному RLC-контурі.....	17
3.2.4. Вимушені коливання в паралельному RLC-контурі.....	21
3.3. Рівняння Максвелла. Електромагнітні хвилі.....	26
3.3.1. Визначення градієнта, дивергенції та ротора.....	26
3.3.2. Рівняння Максвелла.....	28
3.3.3. Хвильове рівняння.....	29
3.3.4. Плоска електромагнітна хвиля у відкритому середовищі.....	31
3.3.5. Вектор Пойнтінга.....	34
3.4. Механічні коливання.....	36
3.4.1. Пружинний маятник.....	36
3.4.2. Математичний маятник.....	37
3.4.3. Фізичний маятник.....	40
3.4.4. Фігури Ліссажу.....	41
3.4.5. Биття. Додавання коливань з близькими частотами.....	44
3.4.6. Згасаючі та вимушені коливання.....	45
3.5. Контрольні питання до розділу 3.....	50
4. Оптика.....	53
4.1. Геометрична оптика.....	53
4.1.1. Закони геометричної оптики.....	53
4.1.2. Лінзи та зображення в лінзах.....	57
4.2. Хвильова оптика.....	64
4.2.1. Інтерференція світла.....	64

4.2.2. Дифракція світла	71
4.2.3. Поляризація світла	72
4.3. Контрольні питання до розділу 4	73
5. Термодинаміка та статистична фізика	75
5.1. Розподіл частинок газу за швидкостями.....	75
5.1.1. Випадкова величина, випадкова подія.....	75
5.1.2. Закон розподілу частинок ідеального газу за швидкостями	76
5.2. Характерні швидкості частинок газу	84
5.3 Тиск ідеального газу. Рівняння стану ідеального газу.....	85
5.4. Робота й внутрішня енергія газу. Перший закон термодинаміки	87
5.5. Ізопроееси та робота під час ізопроеесів	89
5.6. Термодинамічні цикли. Цикл Карно	91
5.7. Теплоємність. Теплоємність ідеального газу.....	93
5.8. Другий закон термодинаміки. Ентропія	94
5.9. Барометрична формула, розподіл Больцмана	99
5.10. Елементи пневматики.....	100
5.11. Контрольні питання до розділу 5	101
6. Елементи атомної та ядерної фізики	103
6.1. Модель Бора, що описує атом.....	103
6.2. Ядерні реакції, радіоактивність	106
6.3. Контрольні питання до розділу 6	109
Список рекомендованої літератури.....	110

Вступ

Дисципліна «Загальна фізика» являє собою важливий етап підготовки здобувачів спеціальності 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка» першого (бакалаврського) рівня вищої освіти.

У посібнику викладено продовження теоретичного матеріалу з дисципліни «Загальна фізика», яку вивчають здобувачі освіти електротехнічного спрямування. Подано основи коливальних і хвильових процесів, оптики, термодинаміки й статистичної фізики, атомної та ядерної фізики. Особливу увагу приділено розгляду коливань і хвиль. Матеріал посібника супроводжується детальним математичним обґрунтуванням фізичних явищ.

Опанування матеріалу посібника дозволить здобувачам освіти засвоїти базові й необхідні для якісної підготовки за спеціальністю знання з фізики.

Посібник видано як складову реалізації освітньої теми Ш-518 «Розробка методичного забезпечення за дисциплінами, що викладаються кафедрою фізики НТУ «Дніпровська політехніка»».

Виконання здобувачами робочої програми дисципліни «Загальна фізика» зумовлює досягнення очікуваних результатів навчання, а саме:

- Здійснювати аналіз процесів в електроенергетичному, електротехнічному та електромеханічному обладнанні, у відповідних комплексах і системах.
- Обирати і застосовувати придатні методи для аналізу й синтезу електромеханічних та електроенергетичних систем із заданими показниками.

3. Коливання та хвилі

3.1. Коротка довідка з теорії диференціальних рівнянь другого порядку

Функціональне рівняння – рівняння, в якому невідомою є не змінна, а функція. **Диференціальне рівняння** – функціональне рівняння, що містить похідну від невідомої функції. Порядок диференціального рівняння співпадає зі старшим порядком похідної, що входить у нього. Наприклад, в рівняння другого порядку старший порядок похідної є другий.

Нехай маємо диференціальне рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами

$$a\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + cx(t) = 0, \quad (3.1)$$

де $x(t)$ – невідома функція, яку треба знайти; $a, b, c = \text{const}$, крапкою позначена похідна за часом, двома крапками – друга похідна. Таке рівняння ще називають однорідним рівнянням. Для розв'язання такого рівняння спершу складають так зване характеристичне рівняння

$$ak^2 + bk + c = 0, \quad (3.2)$$

яке є квадратним рівнянням на параметр k , та шукають його корені. Можливі випадки наведено нижче.

Випадок 1. Корені – дійсні числа, що не співпадають між собою: $k_{1,2} \in \mathbb{R}$, $k_1 \neq k_2$. Цей випадок реалізується, коли дискримінант рівняння (3.2) додатний. В цьому випадку загальним розв'язком рівняння (3.1) є

$$x(t) = Ae^{k_1 t} + Be^{k_2 t}, \quad (3.3)$$

де A, B – довільні константи.

Випадок 2. Корені – дійсні числа, що співпадають між собою: $k_1 = k_2 \in \mathbb{R}$. Цей випадок реалізується, коли дискримінант рівняння (3.2) дорівнює нулю. В цьому випадку загальним розв'язком рівняння (3.1) є

$$x(t) = Ae^{k_1 t} + Bte^{k_1 t}, \quad (3.4)$$

де A, B – довільні константи.

Випадок 3. Розв'язку рівняння (3.2) в дійсних числах не існує. Цей випадок реалізується, коли дискримінант рівняння (3.2) є від'ємним. В цьому випадку корені рівняння (3.2) є комплексними:

$$k_{1,2} = \alpha \pm \beta i, \quad i = \sqrt{-1}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad (3.5)$$

та загальним розв'язком рівняння (3.1) є

$$x(t) = e^{\alpha t} (A \cos(\beta t) + B \sin(\beta t)), \quad (3.6)$$

де A, B – довільні константи.

Нагадаємо, що **загальним розв'язком** диференційного рівняння називають розв'язок, що містить довільні константи. Наприклад, при довільних значеннях констант A, B вирази (3.3), (3.4), (3.6) є розв'язками рівняння (3.1) у відповідних випадках. Загальний розв'язок диференційного рівняння другого порядку має містити дві довільні сталі.

Частинний розв'язок диференційного рівняння – одна конкретно взята функція, що є розв'язком даного рівняння. Зазвичай у фізичних задачах рівняння (3.1) розв'язується за певних початкових умов

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0. \quad (3.7)$$

Тоді фізично реалізується розв'язок не з довільними константами A, B , а саме з тими, які відповідають початковим умовам (3.7). Тобто реалізується саме частинний розв'язок рівняння (3.1).

Вище розглянуто однорідне рівняння $a\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + cx(t) = 0$. У випадку, коли стоїть задача розв'язати неоднорідне рівняння з постійними коефіцієнтами

$$a\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + cx(t) = f(t), \quad (3.8)$$

де $f(t)$ – задана функція, то можна скористатись теоремою, яка стверджує, що **загальний розв'язок неоднорідного рівняння (3.8) дорівнює сумі частинного розв'язку неоднорідного рівняння (3.8) та загального розв'язку відповідного однорідного рівняння (3.1).**

3.2. Електромагнітні коливання

3.2.1. Незгасаючі вільні електромагнітні коливання

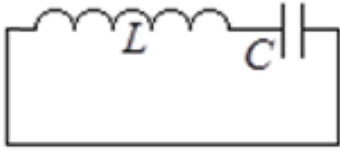


Рисунок 3.1

Розглянемо послідовний LC-контур, див. рис. 3.1. Цей контур складається з ідеальних котушки та конденсатора, резистивний опір елементів контуру вважаємо нехтовно малим.

Позначимо заряд конденсатора як $q(t)$. Згідно другого закону Кірхгофа маємо

$$U_L(t) + U_C(t) = 0. \quad (3.9)$$

На основі відомих співвідношень для напруги на конденсаторі

$$U_C(t) = \frac{q(t)}{C} \quad (3.10)$$

та для напруги на котушці

$$U_L(t) = L \frac{dI(t)}{dt} \quad (3.11)$$

перепишемо (3.11) як

$$L \frac{dI(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} = 0. \quad (3.12)$$

Контур послідовний, тобто струм однаковий і на котушці, і на конденсаторі. Через те, що струм через конденсатор дорівнює похідній заряду конденсатора від часу, остаточно перепишемо (3.12) як

$$\ddot{q}(t) + \frac{1}{LC} q(t) = 0. \quad (3.13)$$

Введемо позначення

$$\omega^2 = \frac{1}{LC} \Leftrightarrow \omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}. \quad (3.14)$$

Тоді перепишемо (3.13) як

$$\ddot{q}(t) + \omega^2 q(t) = 0. \quad (3.15)$$

Рівняння (3.15) носить назву *рівняння гармонічних коливань*. Воно має

має структуру (3.1), відповідне характеристичне рівняння має вигляд

$$k^2 + \omega^2 = 0, \quad (3.16)$$

та має комплексні корені

$$k = \pm \omega i. \quad (3.17)$$

Тоді згідно (3.6) маємо загальний розв'язок рівняння (3.15) у вигляді

$$q(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t), \quad (3.18)$$

де A, B – довільні сталі. За допомогою метода допоміжного кута перетворимо цей вираз:

$$q(t) = \sqrt{A^2 + B^2} \left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cos(\omega t) + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \sin(\omega t) \right). \quad (3.19)$$

Позначимо

$$\eta = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \xi = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (3.20)$$

Через те, що $\eta \in [-1, 1]$, $\xi \in [-1, 1]$, $\eta^2 + \xi^2 = 1$ приходимо до висновку, що існує кут φ такий, що $\eta = \cos \varphi$ та $\xi = -\sin \varphi$. Тоді вираз (3.19) набуде вигляду

$$q(t) = q_m \cos(\omega t + \varphi), \quad (3.21)$$

де $q_m = \sqrt{A^2 + B^2}$. Відповідно, бачимо, що розв'язок (3.21), що описує гармонічні коливання, є синусоїдою; величина q_m є **амплітудою** (тобто максимальним за модулем значенням) заряду конденсатора, а величина $\omega t + \varphi$ є **фазою** заряду конденсатора. Синусоїдальну залежність (3.21) ще називають **законом гармонічних коливань**.

У фізичних задачах реалізується не загальний розв'язок для заряду конденсатора, а частинний розв'язок, що відповідає початковим умовам

$$q(t=0) = q_0, \quad \dot{q}(t=0) = I(t=0) = I_0. \quad (3.22)$$

На основі (3.18) та (3.22) бачимо, що константи A, B набувають значень

$$A = q_0, \quad B = I_0 / \omega. \quad (3.23)$$

Відповідно, амплітуда заряду конденсатора задається виразом

$$q_m = \sqrt{q_0^2 + \frac{I_0^2}{\omega^2}}, \quad (3.24)$$

та фаза заряду конденсатора

$$\text{Фаза}(q) = \omega t + \varphi, \quad \cos \varphi = \frac{q_0 \omega}{\sqrt{q_0^2 \omega^2 + I_0^2}}, \quad \sin \varphi = -\frac{I_0}{\sqrt{q_0^2 \omega^2 + I_0^2}}. \quad (3.25)$$

Через те, що головний період функції $f(x) = \cos x$ дорівнює 2π , маємо

$$\begin{aligned} q(t) &= q_m \cos(\omega t + \varphi) = q_m \cos(\omega t + \varphi + 2\pi) = \\ &= q_m \cos\left(\omega\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) + \varphi\right) = q\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Тож величина

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (3.27)$$

є головним **періодом** функції $q(t)$, а величина ω є **кутовою частотою**, з якою змінюється функція $I(t)$. Надалі для простоти головний період функції просто називатимемо періодом. На основі (3.21), (3.10), (3.11) та того факту, що $I(t) = \dot{q}(t)$ можна впевнитись, що період та кутова частота всіх величин, що описують коло, є однаковими. Відповідно, T та ω є періодом та кутовою частотою електромагнітних коливань в LC-контурі. На основі (3.27) та (3.14) бачимо, що період коливань в LC-контурі описується формулою

$$T = 2\pi\sqrt{LC}. \quad (3.28)$$

Вираз (3.28) носить назву **формули Томсона**.

Відповідно, також вводять поняття **частоти** коливань. За визначенням, частота f є величиною, оберненою до періоду:

$$f = 1/T. \quad (3.29)$$

На основі (3.29) та (3.27) бачимо, що зв'язок між частотою та кутовою частотою є таким:

$$\omega = 2\pi f. \quad (3.30)$$

На основі (3.21) розглянемо вираз для напруги на конденсаторі (3.10):

$$U_C(t) = \frac{q_m}{C} \cos(\omega t + \varphi), \quad (3.31)$$

звідки амплітуда та фаза напруги на конденсаторі виражаються як

$$U_{Cm} = \frac{q_m}{C}, \quad \text{Фаза}(U_C) = \text{Фаза}(q) = \omega t + \varphi. \quad (3.32)$$

На основі того, що $I(t) = \dot{q}(t)$ розглянемо з урахуванням (3.21) вираз для струму в контурі:

$$I(t) = -q_m \omega \sin(\omega t + \varphi) = q_m \omega \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right), \quad (3.33)$$

звідки амплітуда та фаза струму

$$I_m = q_m \omega, \quad \text{Фаза}(I) = \omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}. \quad (3.34)$$

На основі (3.32) та (3.34) бачимо, що між характеристиками напруги на конденсаторі та струму через конденсатор виконуються такі співвідношення:

$$U_{Cm} = \frac{1}{\omega C} \cdot I_m, \quad \text{Фаза}(U_C) - \text{Фаза}(I) = -\frac{\pi}{2}. \quad (3.35)$$

За аналогією з законом Ома бачимо, що величина

$$X_C = \frac{1}{\omega C} \quad (3.36)$$

має фізичний зміст опору конденсатора. Цю величину X_C назвали **реактивним опором конденсатора**. Також показано, що на конденсаторі струм випереджає напругу за фазою на $\pi/2$. Зауважимо, що аналогічними до виведення фактів (3.35) міркуваннями можна показати, що ці факти є справедливими не лише для LC-контурі, а для будь-якого усталеного режиму роботи кіл синусоїдального змінного струму.

Розглянемо тепер напругу на котушці згідно (3.33) та (3.11):

$$U_L(t) = -q_m \omega^2 L \cos(\omega t + \varphi) = q_m \omega^2 L \cos(\omega t + \varphi + \pi), \quad (3.37)$$

звідки амплітуда та фаза напруги на котушці

$$U_{Lm} = q_m \omega^2 L, \quad \text{Фаза}(U_L) - \text{Фаза}(I) = \omega t + \varphi + \pi. \quad (3.38)$$

На основі (3.38) та (3.34) бачимо, що

$$U_{Lm} = \omega L \cdot I_m, \text{ Фаза}(U_L) - \text{Фаза}(I) = \frac{\pi}{2}. \quad (3.39)$$

За аналогією з законом Ома бачимо, що величина

$$X_L = \omega L \quad (3.40)$$

має фізичний зміст опору котушки. Цю величину X_L назвали **реактивним опором котушки**. Також показано, що *на котушці напруга випереджає струм за фазою на $\pi/2$* . Зауважимо, що аналогічними до виведення фактів (3.39) міркуваннями можна показати, що ці факти є справедливими не лише для LC-контур, а для будь-якого усталеного режиму роботи кіл синусоїдального змінного струму.

На останок введемо поняття діяльного значення струму. Як відомо з математичного аналізу, середнє значення від функції $f(x)$ на проміжку $x \in [a, b]$ за визначенням вводиться як

$$\langle f(x) \rangle = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx. \quad (3.41)$$

За умовчанням, середнє значення від періодичної функції завжди береться за період. Відповідно, бажано задати якусь усереднену характеристику струму в колах синусоїдального змінного струму, але середнє значення від струму не підходить для такої характеристики, бо воно дорівнює нулю:

$$\langle I(t) \rangle = \frac{I_m}{T} \int_0^T \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) dt = 0, \quad (3.42)$$

див. (3.34); при обчисленні інтегралу (3.42) використовувався вираз (3.27). Тож в якості усередненої характеристики обирають характеристику, що базується на *середньоквадратичному* значенні струму. Середньоквадратичне значення обчислюється як

$$\langle I^2(t) \rangle = \frac{I_m^2}{T} \int_0^T \cos^2\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) dt = \frac{I_m^2}{2}, \quad (3.43)$$

інтеграл (3.43) легко обчислити на основі виразу (3.27) та тригонометричної формули зниження ступеня. Відповідно, в якості вище обговореної

характеристики обирають корінь з середньоквадратичного значення струму. Таку характеристику назвали *діяльним значенням* струму:

$$I_d = \sqrt{\langle I^2(t) \rangle} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}. \quad (3.44)$$

Тож діяльне значення струму є в $\sqrt{2}$ разів меншим за амплітудне. Слід зауважити, що амперметри змінного струму вимірюють саме діяльне, а не амплітудне значення струму. Аналогічним чином (як корінь з середньоквадратичного значення) вводяться діяльні значення й інших величин в колах синусоїдального змінного струму (напруги, ЕРС, тощо). Відповідні діяльні значення теж в $\sqrt{2}$ разів менші за амплітудні. Зокрема, вольтметри, налаштовані на роботу в колах змінного струму, вимірюють саме діяльне (не амплітудне) значення напруги.

3.2.2. Згасаючі електромагнітні коливання

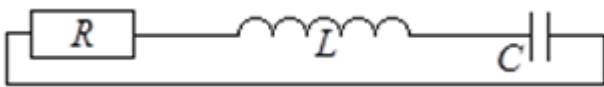


Рисунок 3.2

Розглянемо послідовний RLC-контур, див. рис. 3.2. Цей контур складається з ідеальних котушки та

конденсатора, а також резистора. Згідно другого закону Кірхгофа маємо

$$U_L(t) + U_C(t) + U_R(t) = 0, \quad (3.45)$$

та згідно закону Ома та визначенню сили струму

$$U_R(t) = RI(t) = R\dot{q}(t), \quad (3.46)$$

тут $q(t)$ – заряд конденсатору. Також тут враховано, що через послідовність з'єднання струм у контурі співпадає зі струмом через конденсатор. На основі (3.46), (3.10) та (3.11) перепишемо (3.45) у вигляді

$$\ddot{q}(t) + \frac{R}{L}\dot{q}(t) + \frac{1}{LC}q(t) = 0. \quad (3.47)$$

Введемо позначення

$$2\beta = \frac{R}{L}, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \Leftrightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}, \quad (3.48)$$

зауважимо, що $\beta > 0$ та $\omega_0 > 0$. Фактично, ω_0 – кутова частота коливань, які виникли в контурі при відсутності резистора. В термінах цих позначень матимемо

$$\ddot{q}(t) + 2\beta\dot{q}(t) + \omega_0^2 q(t) = 0. \quad (3.49)$$

Отримане рівняння є рівнянням структури (3.1), неважко отримати, що корені його характеристичного рівняння мають вигляд

$$k_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}. \quad (3.50)$$

Надалі можливі такі випадки.

Випадок 1: $\beta > \omega_0$. В цьому випадку $k_{1,2} \in \mathbb{R}$ та $k_{1,2} < 0$. Відповідно, згідно (3.3) матимемо

$$q(t) = Ae^{k_1 t} + Be^{k_2 t} = Ae^{-|k_1|t} + Be^{-|k_2|t}, \quad (3.51)$$

константи A , B можуть бути знайдені на основі початкових умов. Тож матимемо не коливання, а згасаючий експоненційний процес. Схематичний графік представлено на рис. 3.3.

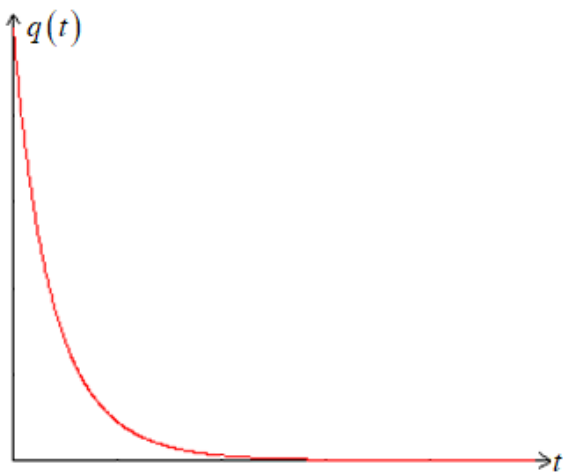


Рисунок 3.3

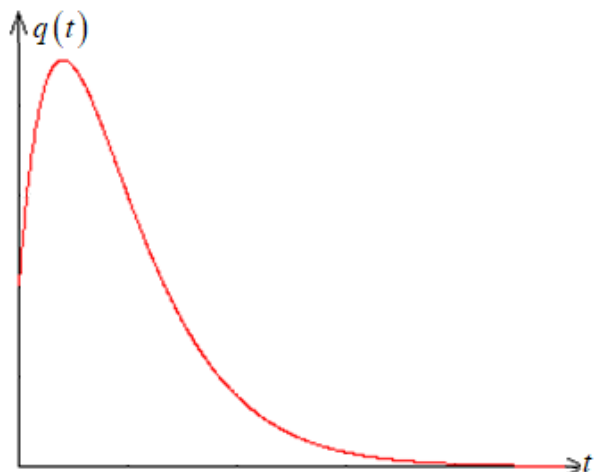


Рисунок 3.4

Випадок 2: $\beta = \omega_0$. В цьому випадку $k_1 = k_2 = -\beta \in \mathbb{R}$ та $k_1 < 0$. Відповідно, згідно (3.4) матимемо

$$q(t) = Ae^{-\beta t} + Bte^{-\beta t}, \quad (3.52)$$

константи A , B можуть бути знайдені на основі початкових умов. Очевидно, що

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (Ae^{-\beta t} + Bte^{-\beta t}) = 0, \quad (3.53)$$

тож у випадку 2 теж маємо *згасаючий процес*, та, очевидно, цей процес не є *коливальним*. Один з можливих випадків зображено на рис. 3.4. При малих часах можливе навіть короткотривале зростання заряду, однак потім все одно процес згасне.

Випадок 3: $\beta < \omega_0$. В цьому випадку $k_{1,2} \notin \mathbb{R}$,

$$k_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} i. \quad (3.54)$$

Тоді згідно (3.6) отримаємо

$$q(t) = e^{-\beta t} \left(A \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} t\right) + B \sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} t\right) \right), \quad (3.55)$$

константи A , B можуть бути знайдені на основі початкових умов. Очевидно, що цей процес також є *згасаючим*, і, формально кажучи, *неперіодичним*. Але його можна інтерпретувати як процес *згасаючих коливань*. Покажемо, чому це так. Згідно методу допоміжного кута матимемо

$$q(t) = e^{-\beta t} \sqrt{A^2 + B^2} \left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} t\right) + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} t\right) \right), \quad (3.56)$$

позначимо

$$q_{m0} = \sqrt{A^2 + B^2}, \quad \eta = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \xi = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (3.57)$$

Через те, що $\eta \in [-1, 1]$, $\xi \in [-1, 1]$, $\eta^2 + \xi^2 = 1$ приходимо до висновку, що існує кут φ такий, що $\eta = \cos \varphi$ та $\xi = -\sin \varphi$. Тоді вираз (3.56) набуде вигляду

$$q(t) = e^{-\beta t} q_{m0} \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} t + \varphi\right). \quad (3.58)$$

Відповідно, вираз (3.58) описує коливання зі **сталю кутовою частотою**

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \quad (3.59)$$

та *згасаючою з часом амплітудою*

$$q_m(t) = q_{m0} e^{-\beta t} \quad (3.60)$$

Схематичний графік зображено на рис. 3.5, зелена крива – залежність заряду конденсатора від часу $q(t)$, синя крива – залежність амплітуди від часу $q_m(t)$.

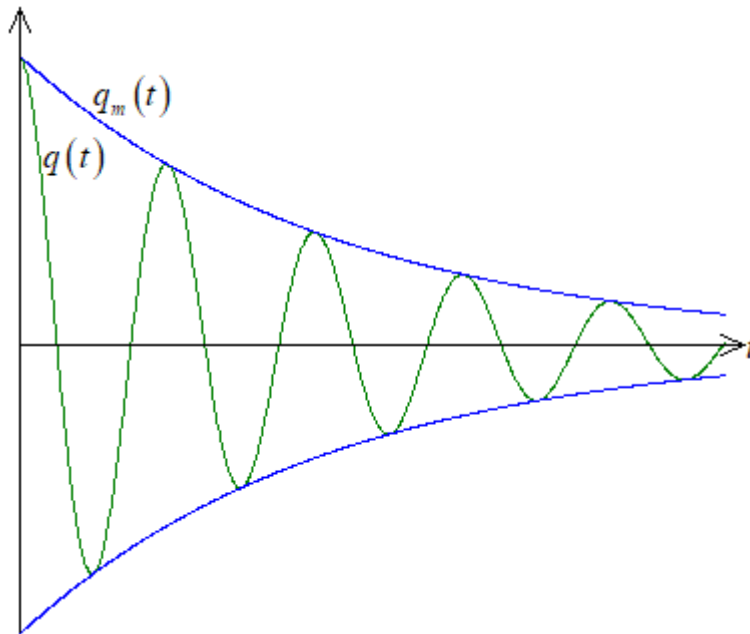


Рисунок 3.5

Період відповідних згасаючих коливань

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \quad (3.61)$$

є часом між двома сусідніми максимумами, але заряд конденсатора в цих максимумах через наявність згасання не буде однаковий.

Час релаксації згасаючих коливань (позначення τ) – час, за який амплітуда впаде в e разів. Згідно (3.60) маємо

$$q_m(\tau) = \frac{q_{m0}}{e} = q_{m0} e^{-1} = q_{m0} e^{-\beta\tau} \Rightarrow -\beta\tau = -1 \Rightarrow \tau = \frac{1}{\beta}. \quad (3.62)$$

Логарифмічний декремент згасання (позначення λ) – натуральний логарифм відношення амплітуд, що йдуть одна за одною через проміжок часу, що дорівнює періоду:

$$\lambda = \ln \frac{q_m(t)}{q_m(t+T)} = \ln \frac{q_{m0} e^{-\beta t}}{q_{m0} e^{-\beta(t+T)}} = \ln \frac{1}{e^{-\beta T}} = \beta T, \quad (3.63)$$

з урахуванням (3.62) матимемо

$$\lambda = \frac{T}{\tau}. \quad (3.64)$$

Позначимо N_e – кількість коливань, за яку амплітуда впаде в e разів. Очевидно, що N_e дорівнює відношенню часу, за який амплітуда впаде в e разів до часу одного коливання, тож

$$N_e = \frac{\tau}{T} = \frac{1}{\lambda}. \quad (3.65)$$

Добротністю коливальної системи називають відношення

$$Q = \frac{\pi}{\lambda}. \quad (3.66)$$

Чим більше добротність, тим менше логарифмічний декремент згасання, і тим повільніше згасають коливання.

3.2.3. Вимушені коливання в послідовному RLC-контурі

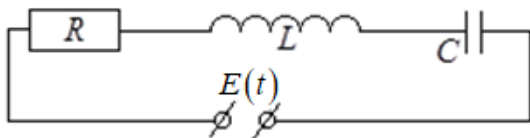


Рисунок 3.6

Розглянемо послідовний RLC-контур, підключений до генератора синусоїдальної ЕРС, див. рис. 3.6. Нехай ЕРС генератора змінюється з часом за законом

$$E(t) = E_m \cos(\omega t). \quad (3.67)$$

Згідно другого закону Кірхгофа маємо

$$U_L(t) + U_C(t) + U_R(t) = E(t). \quad (3.68)$$

Згідно (3.67), (3.10), (3.11) перепишемо (3.68) як

$$\ddot{q}(t) + 2\beta\dot{q}(t) + \omega_0^2 q(t) = \gamma \cos(\omega t), \quad (3.69)$$

де

$$\gamma = \frac{E_m}{L}, \quad (3.70)$$

а позначення β та ω_0 введені у (3.48). Рівняння (3.69) є неоднорідним диференціальним рівнянням другого порядку з постійними коефіцієнтами, воно має структуру (3.8). Нас цікавить незгасаючий розв'язок рівняння (3.69), бо саме

незгасаючий розв'язок реалізовується в усталеному режимі роботи кіл синусоїдального змінного струму. Загальний розв'язок неоднорідного рівняння (3.69) дорівнює сумі частинного розв'язку неоднорідного рівняння (3.69) та загального розв'язку відповідного однорідного рівняння (3.49), див. теорему наприкінці підрозділу 3.1.

Загальний розв'язок рівняння (3.49) досліджено у підрозділі 3.2.2 (досліджено всі можливі три випадки). В усіх випадках розв'язок рівняння (3.49) є згасаючою функцією, а нас цікавить незгасаючий розв'язок. Відповідно, внески, що описують розв'язок рівняння (3.49), не увійдуть до шуканого розв'язку, який описуватиме усталений режим роботи кола.

Тож просто шукаємо частинний розв'язок рівняння (3.69). Шукатимемо його у вигляді

$$q(t) = \alpha \cos(\omega t) + \kappa \sin(\omega t), \quad (3.71)$$

константи α , κ треба знайти. Підставимо (3.71) у (3.69), та після певних перетворень отримаємо

$$\begin{aligned} (-\alpha\omega^2 + 2\beta\kappa\omega + \alpha\omega_0^2)\cos(\omega t) + (-\kappa\omega^2 - 2\beta\alpha\omega + \kappa\omega_0^2)\sin(\omega t) = \\ = \gamma \cos(\omega t) + 0\sin(\omega t), \end{aligned} \quad (3.72)$$

звідки матимемо систему рівнянь на невідомі константи α , κ :

$$-\alpha\omega^2 + 2\beta\kappa\omega + \alpha\omega_0^2 = \gamma, \quad -\kappa\omega^2 - 2\beta\alpha\omega + \kappa\omega_0^2 = 0, \quad (3.73)$$

розв'язком якої є

$$\alpha = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\beta\omega)^2} \gamma, \quad \kappa = \frac{2\beta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\beta\omega)^2} \gamma. \quad (3.74)$$

Відповідно, отримаємо вираз для часової залежності заряду конденсатора в усталеному режимі роботи кола:

$$q(t) = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\beta\omega)^2} \gamma \cos(\omega t) + \frac{2\beta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\beta\omega)^2} \gamma \sin(\omega t). \quad (3.75)$$

В електротехніці важливим є отримати вирази для опору контуру та для зсуву фаз між загальними струмом і напругою на контурі. Тобто треба виразити

загальні напругу та струм. Загальна напруга на контурі є напругою на послідовному з'єднанні, тобто сумою напруг на елементах контуру:

$$U_{\text{зар}}(t) = U_L(t) + U_C(t) + U_R(t) = E(t) \Rightarrow U_{\text{зар}}(t) = E_m \cos(\omega t). \quad (3.76)$$

Загальний струм – це ж і струм через конденсатор, бо всі елементи з'єднані послідовно:

$$I(t) = \dot{q}(t) = -\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\beta\omega)^2} \omega\gamma \sin(\omega t) + \frac{2\beta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\beta\omega)^2} \omega\gamma \cos(\omega t). \quad (3.77)$$

Скористаємось методом допоміжного кута:

$$I(t) = \frac{\gamma\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\beta\omega)^2}} \left[\frac{2\beta\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\beta\omega)^2}} \cos(\omega t) - \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\beta\omega)^2}} \sin(\omega t) \right], \quad (3.78)$$

позначимо

$$\eta = \frac{2\beta\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\beta\omega)^2}}, \quad \xi = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\beta\omega)^2}}. \quad (3.79)$$

Через те, що $\eta \in (0,1]$, $\xi \in (-1,1)$, $\eta^2 + \xi^2 = 1$ приходимо до висновку, що існує кут φ такий, що $\eta = \cos \varphi$ та $\xi = \sin \varphi$. Тоді вираз (3.78) набуде вигляду

$$I(t) = I_{\text{зар}}(t) = \frac{\gamma\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\beta\omega)^2}} \cos(\omega t + \varphi). \quad (3.80)$$

Згідно (3.80) та (3.76) маємо

$$\text{Фаза}(I_{\text{зар}}) = \omega t + \varphi, \quad \text{Фаза}(U_{\text{зар}}) = \omega t, \quad \text{Фаза}(I_{\text{зар}}) - \text{Фаза}(U_{\text{зар}}) = \varphi. \quad (3.81)$$

Через те, що $\eta = \cos \varphi > 0$ отримуємо

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{\xi}{\eta}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\beta\omega}\right), \quad (3.82)$$

що з урахуванням (3.48), (3.36), (3.40) дає

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{X_C - X_L}{R}\right) = -\operatorname{arctg}\left(\frac{X_L - X_C}{R}\right). \quad (3.83)$$

Тож остаточно

$$\text{Фаза}(U_{\text{заг}}) - \text{Фаза}(I_{\text{заг}}) = \operatorname{arctg}\left(\frac{X_L - X_C}{R}\right), \quad (3.84)$$

вираз (3.84) є широко відомим виразом для різниці фаз між загальними напругою та струмом при вимушених коливаннях у послідовному RLC-контурі.

Згідно (3.80) маємо, що амплітуда загального струму

$$I_{\text{загм}} = \frac{\gamma\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\beta\omega)^2}} = \frac{E_m}{\sqrt{(X_L - X_C)^2 + R^2}}, \quad (3.85)$$

при виведенні виразу (3.85) враховано результати (3.48), (3.70), (3.36) та (3.40).

На основі (3.85) та (3.76) бачимо, що опір контуру

$$Z = \frac{U_{\text{загм}}}{I_{\text{загм}}} = \frac{E_m}{I_{\text{загм}}} = \sqrt{(X_L - X_C)^2 + R^2}, \quad (3.86)$$

вираз (3.86) є широко відомим виразом для опору послідовного RLC-контуру при вимушених коливаннях.

На основі (3.84) бачимо, що при $X_L > X_C \Leftrightarrow \omega L > \frac{1}{\omega C} \Leftrightarrow \omega > \omega_0$ загальна напруга випереджає струм за фазою, а при $X_L < X_C \Leftrightarrow \omega < \omega_0$ загальна напруга відстає від загального струму за фазою. Коли $X_L = X_C \Leftrightarrow \omega = \omega_0$, то фази напруги і струму співпадають, більше того, на основі (3.86) бачимо, що при $\omega = \omega_0$ опір контуру просто дорівнює R . Відповідно, при $\omega = \omega_0$ контур поводить себе як **резистор**. Таку фізичну ситуацію назвали **резонансом напруг**. Відповідно, коли частота ЕРС генератора співпадає з власною частотою коливань контуру у випадку відсутності резистора, настає резонанс напруг. На основі (3.85) та (3.86)

бачимо, що у випадку резонансу напруг амплітуда коливань струму в контурі є найбільш можливою, а опір контуру є найменш можливим.

3.2.4. Вимушені коливання в паралельному RLC-контурі

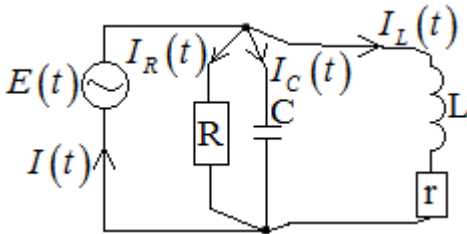


Рисунок 3.7

Розглянемо паралельний RLC-контур, підключений до синусоїдальної ЕРС, див. рис. 3.7. Нехай ЕРС залежить від часу за законом (3.67). Також врахуємо резистивний опір котушки r . Як буде показано далі, хоч він

малий i , фактично, не відіграє ролі при описі усталеного режиму роботи кола, він є дуже вадливим для опису перехідного процесу.

Згідно першого закону Кірхгофа

$$I(t) = I_R(t) + I_C(t) + I_L(t). \quad (3.87)$$

Контур є паралельним, тож напруга на всіх паралельно з'єднаних ділянках однакова:

$$U_R(t) = U_C(t) = U_L(t) + U_r(t). \quad (3.88)$$

Вирази для відповідних напруг є такими:

$$U_L(t) = L \frac{dI_L(t)}{dt}, \quad U_r(t) = rI_L(t), \quad U_R(t) = RI_R(t), \quad (3.89)$$

$$U_C(t) = \frac{q(t)}{C} \Rightarrow \frac{dU_C(t)}{dt} = \frac{1}{C} \frac{dq(t)}{dt} \Rightarrow I_C(t) = C \frac{dU_C(t)}{dt},$$

тут враховано, що струм через конденсатор є похідною по часу від заряду конденсатора. На основі (3.88) маємо

$$C \frac{dU_C(t)}{dt} = C \frac{dU_L(t)}{dt} + C \frac{dU_r(t)}{dt}, \quad (3.90)$$

звідки з урахуванням (3.89) матимемо

$$I_C(t) = LC \frac{d^2 I_L(t)}{dt^2} + Cr \frac{dI_L(t)}{dt}. \quad (3.91)$$

На основі (3.88) матимемо

$$\frac{1}{R}U_R(t) = \frac{1}{R}U_L(t) + \frac{1}{R}U_r(t), \quad (3.92)$$

звідки з урахуванням (3.89) матимемо

$$I_R(t) = \frac{L}{R} \frac{dI_L(t)}{dt} + \frac{r}{R} I_L(t). \quad (3.93)$$

Відповідно, виразами (3.91) та (3.93) струми $I_C(t)$ та $I_R(t)$ виражено через струм $I_L(t)$. Тож для повного математичного опису роботи кола достатньо знайти струм $I_L(t)$.

Другий закон Кірхгофа для контуру через джерело та котушку має вигляд

$$U_L(t) + U_r(t) = E_m \cos(\omega t), \quad (3.94)$$

звідки з урахуванням (3.89) матимемо диференційне рівняння для струму через котушку:

$$\frac{dI_L(t)}{dt} + \frac{r}{L} I_L(t) = \frac{E_m}{L} \cos(\omega t). \quad (3.95)$$

Це рівняння є лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням першого порядку. Як відомо з теорії диференціальних рівнянь, такі рівняння розв'язуються, наприклад, методом варіації сталої. Спершу знайдемо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння

$$\frac{dI_L(t)}{dt} + \frac{r}{L} I_L(t) = 0 \Rightarrow I_L(t) = B e^{-\frac{r}{L}t}, \quad (3.96)$$

B – довільна стала, таке рівняння, розв'язане, зокрема, при описі задачі розмикання RL-кола, див. підрозділ 2.9. Надалі стала варіюється, тобто розв'язок рівняння (3.95) шукається у вигляді

$$I_L(t) = B(t) \cdot e^{-\frac{r}{L}t}. \quad (3.97)$$

Підставляємо (3.97) у (3.95), отримаємо

$$\frac{dB(t)}{dt} \cdot e^{-\frac{r}{L}t} - \frac{r}{L} B(t) e^{-\frac{r}{L}t} + \frac{r}{L} B(t) \cdot e^{-\frac{r}{L}t} = \frac{E_m}{L} \cos(\omega t). \quad (3.98)$$

Звернемо увагу на те, що члени, які не містять похідної $dB(t)/dt$, скоротилися.

Відповідно, на основі (3.98) отримаємо

$$B(t) = \frac{E_m}{L} \int \cos(\omega t) e^{\frac{r}{L}t} dt + D, \quad (3.99)$$

D – довільна стала. На основі «табличного» інтегралу

$$\int \cos(\omega t) e^{at} dt = e^{at} \frac{a \cos(\omega t) + \omega \sin(\omega t)}{a^2 + \omega^2}, \quad (3.100)$$

який виписано без врахування плюс константи, з урахуванням (3.40) остаточно отримаємо

$$B(t) = E_m e^{\frac{r}{L}t} \frac{r \cos(\omega t) + X_L \sin(\omega t)}{r^2 + X_L^2} + D, \quad (3.101)$$

та

$$I_L(t) = E_m \frac{r \cos(\omega t) + X_L \sin(\omega t)}{r^2 + X_L^2} + D \cdot e^{-\frac{r}{L}t}, \quad (3.102)$$

константу D можна знайти з початкової умови. Перший доданок у правій частині виразу (3.102) описує незгасаючий процес, який матиме місце в усталеному режимі роботи кола. Другий доданок у (3.102) є згасаючим та описує перехідний процес. Як бачимо, *врахування резистивного опору котушки є дуже важливим для опису перехідного процесу.*

У колах змінного синусоїдального струму, що використовуються в електротехніці, резистивний (активний) опір котушки є набагато меншим за реактивний опір котушки: $r \ll X_L$. Не дивлячись на те, що резистивний опір котушки вкрай важливий для опису перехідного процесу, при описі усталеного режиму їм можна нехтувати. Далі будемо описувати лише усталений режим роботи кола. Будемо нехтувати величиною r порівняно з X_L . Тож в усталеному режимі з дуже хорошою точністю

$$I_L(t) = \frac{E_m}{X_L} \sin(\omega t), \quad (3.103)$$

та згідно (3.91), (3.93) і (3.103), нехтуючи резистивним опором котушки, матимемо наближені вирази, що працюють з дуже хорошою точністю

$$I_R(t) = \frac{E_m}{R} \cos(\omega t), \quad I_C(t) = -\frac{E_m}{X_C} \sin(\omega t), \quad (3.104)$$

вирази (3.103) та (3.104) є виразами в головному порядку малості по малому параметру r/X_L .

Загальна напруга на контурі є напруга між клемми, до яких приєднано контур, відповідно ця напруга дорівнює ЕРС джерела:

$$U_{\text{зар}}(t) = E(t) = E_m \cos(\omega t). \quad (3.105)$$

Загальний струм через контур

$$I_{\text{зар}}(t) = I_R(t) + I_C(t) + I_L(t) = \frac{1}{R} E_m \cos(\omega t) + E_m \sin(\omega t) \left(\frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C} \right), \quad (3.106)$$

див. (3.87), (3.103) та (3.104).

За визначенням **провідність** є величиною, оберненою до опору. Відповідно, провідності елементів:

$$B_R = \frac{1}{R}, \quad B_L = \frac{1}{X_L} = \frac{1}{\omega L}, \quad B_C = \frac{1}{X_C} = \omega C, \quad (3.107)$$

та

$$I_{\text{зар}}(t) = B_R E_m \cos(\omega t) + E_m (B_L - B_C) \sin(\omega t). \quad (3.108)$$

Скористаємось методом допоміжного кута:

$$I_{\text{зар}}(t) = E_m \sqrt{(B_L - B_C)^2 + B_R^2} \left(\frac{B_R}{\sqrt{(B_L - B_C)^2 + B_R^2}} \cos(\omega t) - \frac{B_C - B_L}{\sqrt{(B_L - B_C)^2 + B_R^2}} \sin(\omega t) \right). \quad (3.109)$$

Введемо позначення

$$\eta = \frac{B_R}{\sqrt{(B_L - B_C)^2 + B_R^2}}, \quad \xi = \frac{B_C - B_L}{\sqrt{(B_L - B_C)^2 + B_R^2}}. \quad (3.110)$$

Через те, що $\eta \in (0,1]$, $\xi \in (-1,1)$, $\eta^2 + \xi^2 = 1$ приходимо до висновку, що існує

кут φ такий, що $\eta = \cos \varphi$ та $\xi = \sin \varphi$. Тоді вираз (3.109) набуде вигляду

$$I_{\text{заг}}(t) = E_m \sqrt{(B_L - B_C)^2 + B_R^2} \cdot \cos(\omega t + \varphi). \quad (3.111)$$

Через те, що $\eta = \cos \varphi > 0$, маємо

$$\varphi = \arctg \frac{\xi}{\eta} = \arctg \frac{B_C - B_L}{B_R}. \quad (3.112)$$

Згідно (3.105) та (3.111) маємо

$$\text{Фаза}(I_{\text{заг}}) = \omega t + \varphi, \text{ Фаза}(U_{\text{заг}}) = \omega t, \text{ Фаза}(I_{\text{заг}}) - \text{Фаза}(U_{\text{заг}}) = \varphi, \quad (3.113)$$

тож

$$\text{Фаза}(I_{\text{заг}}) - \text{Фаза}(U_{\text{заг}}) = \arctg \frac{B_C - B_L}{B_R}. \quad (3.114)$$

Вираз (3.114) є широко відомим виразом для різниці фаз між загальними струмом та напругою при вимушених коливаннях у паралельному RLC-контурі.

Згідно (3.105) та (3.111) маємо, що амплітуди загального струму та напруги на контурі

$$I_{\text{загм}} = E_m \sqrt{(B_L - B_C)^2 + B_R^2}, U_{\text{загм}} = E_m, \quad (3.115)$$

та їх відношення є провідністю контуру:

$$B = \frac{I_{\text{загм}}}{U_{\text{загм}}} = \sqrt{(B_L - B_C)^2 + B_R^2}. \quad (3.116)$$

вираз (3.116) є широко відомим виразом для провідності паралельного RLC-контурі при вимушених коливаннях.

На основі (3.114) бачимо, що при $B_L > B_C \Leftrightarrow \frac{1}{\omega L} > \omega C \Leftrightarrow \omega < \omega_0$ загальна напруга випереджає струм за фазою, а при $B_L < B_C \Leftrightarrow \omega > \omega_0$ загальна напруга відстає від загального струму за фазою. Коли $B_L = B_C \Leftrightarrow \omega = \omega_0$, то фази напруги і струму співпадають, більше того, на основі (3.116) бачимо, що при $\omega = \omega_0$ опір контуру просто дорівнює R . Відповідно, при $\omega = \omega_0$ контур поводить себе як резистор. Таку фізичну ситуацію назвали **резонансом струмів**.

3.3. Рівняння Максвелла. Електромагнітні хвилі

3.3.1. Визначення градієнта, дивергенції та ротора

Частинною похідною від функції багатьох змінних за визначенням є величина

$$\frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_j} = \lim_{\Delta x_j \rightarrow 0} \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_j + \Delta x_j, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n)}{\Delta x_j}. \quad (3.117)$$

Визначення (3.117) схоже до визначення похідної від функції однієї змінної, але приросту набуває лише той аргумент, по якому береться частинна похідна. Всі інші аргументи є константами. Тобто, «на пальцях кажучи», частинна похідна береться як звичайна похідна при умові, що всі інші змінні окрім x_j вважаються константами. Наприклад,

$$\frac{\partial(x^2 y^3)}{\partial x} = \frac{\partial(x^2)}{\partial x} y^3 = 2xy^3, \quad \frac{\partial(x^2 y^3)}{\partial y} = x^2 \frac{\partial(y^3)}{\partial y} = 3x^2 y^2, \quad (3.118)$$

тобто коли беремо частинну похідну по x , змінну y вважаємо сталою, і навпаки.

Частинні похідні мають таку властивість:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}, \quad (3.119)$$

тобто порядок слідування частинних похідних можна міняти місцями, це не вплине на результат.

Нехай дано *скалярну* величину, що залежить від координат $\varphi(x, y, z)$. Тоді за визначенням *градієнтом* цієї величини є *векторна* величина

$$\text{grad} \varphi(x, y, z) = \frac{\partial \varphi(x, y, z)}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial \varphi(x, y, z)}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial \varphi(x, y, z)}{\partial z} \vec{e}_z. \quad (3.120)$$

Так як залежність від трьох координат по суті є залежністю від радіус-вектору, то часто пишуть $\varphi(x, y, z) = \varphi(\vec{r})$.

Нехай задана *векторна* величина, що залежить від координат

$$\vec{A}(\vec{r}) = \vec{A}(x, y, z) = A_x(x, y, z) \vec{e}_x + A_y(x, y, z) \vec{e}_y + A_z(x, y, z) \vec{e}_z. \quad (3.121)$$

Фактично, задано вектор, кожна компонента якого залежить від координат.

Дивергенцією векторної величини називають *скалярну* величину, що за визначенням задається таким чином:

$$\operatorname{div}\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\partial A_x(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial A_y(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial A_z(x, y, z)}{\partial z}. \quad (3.122)$$

Ротом векторної величини називають *векторну* величину, що за визначенням задається:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\vec{A}(\vec{r}) &= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \\ &= \vec{e}_x \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \vec{e}_y \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \vec{e}_z \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (3.123)$$

Поняття дивергенції та ротора вводять, зокрема, для того, щоб вихрове поле відрізнити від невихрового (наприклад, електростатичного). Наприклад, вихровому полю (тобто полю з замкненими силовими лініями) притаманна властивість мати нульову дивергенцію і ненульовий ротор, а електростатичному полю – навпаки.

При математичній роботі з рівняннями Максвелла корисними є такі тотожності векторного аналізу:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{a}) &= 0; \operatorname{rot}(\operatorname{grad}\varphi) = 0; \operatorname{div}[\vec{a}, \vec{b}] = (\vec{b}, \operatorname{rot}\vec{a}) - (\vec{a}, \operatorname{rot}\vec{b}); \\ \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{a} &= \operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{a}) - \Delta\vec{a}, \end{aligned} \quad (3.124)$$

де

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (3.125)$$

є оператором Лапласа.

Доведемо, наприклад, першу з цих тотожностей:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{a}) &= \operatorname{div}\left(\vec{e}_x\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right) + \vec{e}_y\left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right) + \vec{e}_z\left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\right) = \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right) = \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial a_y}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial a_z}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial a_x}{\partial y} = 0,
\end{aligned} \tag{3.126}$$

тут використано властивість (3.119). Інші тотожності доводити не будемо, зауважимо, що їх доведення теж базується на визначеннях (3.120), (3.122), (3.123) та властивості (3.120).

3.3.2. Рівняння Максвелла

Величини, в термінах яких описуються заряди і поля є такими:

- Густина заряду $\rho = dq/dV$, де dq – заряд, що міститься у об'ємі dV .

Важливо відмітити – об'єм dV є набагато меншим за об'єм системи, проте макроскопічним.

- Густина струму \vec{j} , визначення цієї величини див. у підрозділі 2.7.6.
- Напруженість електричного поля \vec{E} – силова характеристика електричного поля.
- Магнітна індукція \vec{B} – силова характеристика магнітного поля.
- Електрична індукція \vec{D} , опис цієї величини див. в підрозділі 2.4.3.
- Напруженість магнітного поля \vec{H} , опис цієї величини див. в підрозділі 2.8.10.

Рівняння Максвелла є фундаментальним постулатами, на яких ґрунтується електродинаміка. Перше з цих рівнянь має вигляд

$$\operatorname{div}\vec{D} = \rho, \tag{3.127}$$

його фізичний зміст є таким: *невихрове електричне поле створюється зарядами.*

Друге рівняння Максвелла

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0 \tag{3.128}$$

стверджує, що *магнітне поле завжди вихрове (його силові лінії завжди замкнені)*.

Третє рівняння Максвелла

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3.129)$$

стверджує, що *змінне в часі магнітне поле створює вихрове електричне поле*.

Четверте рівняння Максвелла

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j} \quad (3.130)$$

стверджує, що *магнітне поле створюється струмом або змінним в часі електричним полем*.

Величини $\rho, \vec{j}, \vec{E}, \vec{D}, \vec{B}, \vec{H}$ є функціями координат та часу. Іншими словами, вони можуть бути різними в різних точках простору та в різні моменти часу. Індукції та напруженості полів пов'язані між собою так званими **матеріальними рівняннями**. В найпростіших середовищах (однорідних та ізотропних) у випадку полів, які не змінюються у просторі і часі швидко, матеріальні рівняння мають вигляд

$$\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}, \quad (3.131)$$

де ε – діелектрична проникність середовища (показує, в скільки разів сила кулонівської взаємодії між точковими зарядами в середовищі менша, ніж у вакуумі), ε – стала безрозмірна величина; μ – магнітна проникність середовища (показує, в скільки разів зовнішнє магнітне поле може бути посилене в середовищі), μ – стала безрозмірна величина; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнітна

стала, $\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2} \Rightarrow \varepsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2}$ – електрична стала, $c = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ – швидкість світла у

вакуумі. У вакуумі $\varepsilon = \mu = 1$.

3.3.3. Хвильове рівняння

Розглянемо середовище без струмів з нульовою густиною заряду. Наприклад, таким середовищем може бути вакуум або ідеальний діелектрик, в

якому густина заряду нульова в кожній малій області всередині діелектрика через електронейтральність системи. В такому середовищі рівняння Максвела набудуть вигляду

$$\operatorname{div} \vec{D} = 0, \operatorname{div} \vec{B} = 0, \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (3.132)$$

Вважатимемо, що для розглянутого середовища справедливими є матеріальні рівняння (3.131). На основі третього рівняння (3.132) матимемо

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = -\operatorname{rot} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (3.133)$$

Ротор – операція, що містить лише частинні похідні по координатам. Тому без різниці, спочатку брати похідну по часу, потім – по координаті, чи навпаки, результат не зміниться. Тож rot та $\partial/\partial t$ можна змінити місцями:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{B}. \quad (3.134)$$

На основі (3.131) рівняння (3.134) перепишемо як

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = -\mu\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{H}, \quad (3.135)$$

тут враховано, що $\mu, \mu_0 = \text{const}$. На основі четвертого рівняння (3.132) та (3.131) бачимо, що

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = -\mu\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2} = -\mu\epsilon\mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \quad (3.136)$$

На основі останньої з тотожностей (3.124), (3.131) та першого рівняння (3.132) маємо

$$\Delta \vec{E} - \mu\epsilon\mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (3.137)$$

З урахуванням того, що $\epsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}$ остаточно отримуємо

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0, \quad (3.138)$$

де

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}. \quad (3.139)$$

Аналогічно розглянувши величину $\text{rot rot } \vec{H}$, на основі (3.131), (3.132) та (3.124) отримаємо

$$\Delta \vec{H} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0, \quad (3.140)$$

Рівняння (3.137) та (3.140) є, відповідно, *хвильовими рівняннями для напруженостей електричного та магнітного поля, відповідно. В будь-якій електромагнітній хвилі поля є розв'язками хвильових рівнянь.* В рамках цього курсу для простоти обмежимося лише розглядом плоскої електромагнітної хвилі у необмеженому середовищі.

3.3.4. Плоска електромагнітна хвиля у відкритому середовищі

Фазовий фронт хвилі – поверхня, всі точки якої мають однакову фазу. Якщо фазовий фронт є площиною, то хвилю називають *плоскою*. Для плоскої електромагнітної хвилі у відкритому середовищі розв'язками хвильових рівнянь (3.138) та (3.140), що фізично реалізуються, є

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos\left(\omega t - \omega \frac{z}{v}\right), \quad \vec{H} = \vec{H}_0 \cos\left(\omega t - \omega \frac{z}{v}\right), \quad (3.141)$$

де \vec{E}_0 та \vec{H}_0 – постійні вектори (незмінні в часі, їх декартові координати є константами), що є *амплітудами* полів; $\omega = \text{const}$ – кутова частота хвилі; систему координат спрямовано таким чином, що хвиля поширюється в додатному напрямку Oz .

Спершу покажемо, що ці вирази – дійсно розв'язки хвильових рівнянь. Підставляючи перший з виразів у ліву частину рівняння (3.138), отримаємо

$$\begin{aligned} \Delta \left(\vec{E}_0 \cos\left(\omega t - \omega \frac{z}{v}\right) \right) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\vec{E}_0 \cos\left(\omega t - \omega \frac{z}{v}\right) \right) = \\ = -\vec{E}_0 \frac{\omega^2}{v^2} \cos\left(\omega t - \omega \frac{z}{v}\right) + \frac{\omega^2}{v^2} \vec{E}_0 \cos\left(\omega t - \omega \frac{z}{v}\right) = 0, \end{aligned} \quad (3.142)$$

див. визначення оператора Лапласа у (3.125). Тобто, дійсно приходимо до тотожності. Аналогічно прийдемо до тотожності, підставивши другий з виразів (3.141) у рівняння (3.140).

Далі покажемо, що ці вирази описують плоску хвилю, що «біжить» в додатному напрямку Oz . Рівнянням фазового фронту є

$$\begin{aligned} \text{Фаза}(\vec{E}) = \text{Фаза}(\vec{H}) = \text{const} &\Rightarrow \omega t - \omega \frac{z}{v} = \text{const} \Rightarrow d\left(\omega t - \omega \frac{z}{v}\right) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \omega dt - \frac{\omega}{v} dz = 0 \Rightarrow \frac{dz}{dt} = v, \end{aligned} \quad (3.143)$$

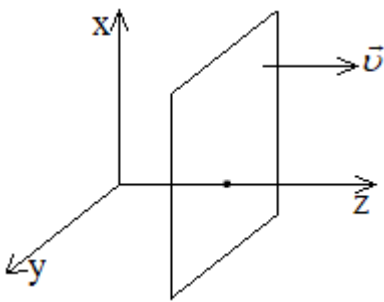


Рисунок 3.8

тут враховано, що $\omega, v = \text{const}$. Тож, дійсно, фазовий фронт є площиною, що рухається зі швидкістю v в додатному напрямку осі Oz , див. рис. 3.8. Швидкістю руху фазового фронту v називається **фазовою швидкістю хвилі**. Тож щойно з'ясовано фізичний зміст константи v . *Фазова швидкість*

плоскої електромагнітної хвилі, що поширюється у необмеженому діелектричному середовищі з діелектричною проникністю ε та магнітною проникністю μ , задається виразом (3.139).

У вакуумі $\mu = \varepsilon = 1 \Rightarrow v = c$, тож у **вакуумі електромагнітна хвиля поширюється зі швидкістю світла**.

Розглянемо третє та четверте рівняння (3.132) з урахуванням того, що поля в досліджуваній хвилі не залежать від координат x та y . Розпишемо ротори згідно визначення (3.123) та скористаємось матеріальними рівняннями (3.131):

$$\begin{aligned} -\frac{\partial E_y}{\partial z} \vec{e}_x + \frac{\partial E_x}{\partial z} \vec{e}_y &= -\mu\mu_0 \left(\vec{e}_x \frac{\partial H_x}{\partial t} + \vec{e}_y \frac{\partial H_y}{\partial t} + \vec{e}_z \frac{\partial H_z}{\partial t} \right), \\ -\frac{\partial H_y}{\partial z} \vec{e}_x + \frac{\partial H_x}{\partial z} \vec{e}_y &= \varepsilon\varepsilon_0 \left(\vec{e}_x \frac{\partial E_x}{\partial t} + \vec{e}_y \frac{\partial E_y}{\partial t} + \vec{e}_z \frac{\partial E_z}{\partial t} \right). \end{aligned} \quad (3.144)$$

Розпишемо вирази (3.144) покомпонентно:

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = \mu\mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t}, \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t}, \quad -\frac{\partial H_y}{\partial z} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t}, \quad \frac{\partial H_x}{\partial z} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t},$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial E_z}{\partial t} = 0.$$
(3.145)

Через те, що

$$\vec{H} = \vec{H}_0 \cos\left(\omega t - \omega \frac{z}{v}\right) \Rightarrow \vec{H} = (H_{0x}\vec{e}_x + H_{0y}\vec{e}_y + H_{0z}\vec{e}_z) \cos\left(\omega t - \omega \frac{z}{v}\right)$$
(3.146)

Матимемо

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(H_{0z} \cos\left(\omega t - \omega \frac{z}{v}\right) \right) \Rightarrow -H_{0z} \omega \sin\left(\omega t - \omega \frac{z}{v}\right) = 0,$$
(3.147)

тотожна рівність нулю можлива лише при $H_{0z} = 0 \Rightarrow H_z = 0$. Аналогічно можна показати, що для досліджуваних полів на основі останнього виразу з (3.145) можна показати, що $E_z = 0$. Тож хвиля поширюється вздовж Oz , а поля в ній не мають z – компонент. Тож обидва поля є перпендикулярними до напрямку поширення хвилі. Хвилі, в яких коливання відбуваються в напрямку, перпендикулярному до напрямку поширення хвилі, називають поперечними. Тож **плоска електромагнітна хвиля у відкритому середовищі є поперечною.**

З урахуванням цього факту розпишемо вектори (3.141):

$$\vec{H} = (H_{0x}\vec{e}_x + H_{0y}\vec{e}_y) \cos\left(\omega t - \omega \frac{z}{v}\right), \quad \vec{E} = (E_{0x}\vec{e}_x + E_{0y}\vec{e}_y) \cos\left(\omega t - \omega \frac{z}{v}\right).$$
(3.148)

Підставляючи (3.148) у перші 2 рівняння (3.145), після певних перетворень отримаємо

$$E_{0y} = -\nu\mu\mu_0 H_{0x}, \quad E_{0x} = \nu\mu\mu_0 H_{0y}.$$
(3.149)

Хвиля «біжить» в додатному напрямку Oz , тож орт осі Oz є **одичним вектором в напрямку розповсюдження хвилі: $\vec{n} = \vec{e}_z$** . Розглянемо векторний добуток $[\vec{n}, \vec{E}_0]$:

$$[\vec{n}, \vec{E}_0] = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & 0 & 1 \\ E_{0x} & E_{0y} & 0 \end{vmatrix} =$$
(3.150)

$$= -E_{0y}\vec{e}_x + E_{0x}\vec{e}_y = \nu\mu\mu_0(H_{0x}\vec{e}_x + H_{0y}\vec{e}_y) = \nu\mu\mu_0\vec{H}_0,$$

тут враховано вирази (3.149). Введемо величину

$$W = \nu\mu\mu_0 = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\mu\mu_0, \quad (3.151)$$

див. (3.139). На основі того, що $\varepsilon_0\mu_0 = 1/c^2$ перепишемо (3.151) як

$$W = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\sqrt{\varepsilon\mu}}\mu\mu_0 = \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}}. \quad (3.152)$$

З'ясуємо розмірність цієї величини. $[\varepsilon] = [\mu] = 1$, $[\mu_0] = \frac{\Gamma_{\text{H}}}{\text{M}}$. Згадавши, наприклад

формулу (3.11), бачимо, що $B = \Gamma_{\text{H}} \cdot \frac{\text{A}}{c} \Rightarrow \Gamma_{\text{H}} = \frac{B \cdot c}{\text{A}}$, тож $[\mu_0] = \frac{\Gamma_{\text{H}}}{\text{M}} = \frac{\text{Ом} \cdot \text{с}}{\text{M}}$.

$\varepsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2} \Rightarrow [\varepsilon_0] = \frac{1}{\frac{\text{Ом} \cdot \text{с}}{\text{M}} \cdot \frac{\text{M}^2}{\text{с}^2}} = \frac{\text{с}}{\text{Ом} \cdot \text{M}}$, тож $[W] = \sqrt{\frac{\text{Ом} \cdot \text{с}}{\text{M}} : \frac{\text{с}}{\text{Ом} \cdot \text{M}}} = \text{Ом}$. Величина

W вимірюється в Омах, тож її назвали **хвильовим опором простору**. На основі (3.150) бачимо, що

$$[\vec{n}, \vec{E}_0] = W\vec{H}_0, \quad (3.153)$$

звідки на основі (3.141)

$$[\vec{n}, \vec{E}(t)] = W\vec{H}(t). \quad (3.154)$$

В кожен момент часу вектори $\vec{n}, \vec{E}(t), W\vec{H}(t)$ утворюють праву трійку. В плоскій електромагнітній хвилі, яка поширюється у необмеженому середовищі, в кожен момент часу вектори $\vec{n}, \vec{E}(t), \vec{H}(t)$ є взаємно перпендикулярними.

3.3.5. Вектор Пойнтінга

На основі рівнянь Максвела та векторних тотожностей (3.124) можна показати, що густиною потоку енергії є вектор

$$\vec{\Pi} = [\vec{E}, \vec{H}], \quad (3.155)$$

який назвали **вектором Пойнтінга**. Цей вектор за модулем дорівнює енергії, що передається в одиницю часу через одиничну площадку: $[\Pi] = \frac{\text{Дж}}{\text{с} \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$. Його напрям співпадає з напрямом, в якому передається енергія.

В цьому курсі ми не будемо детально виводити результат (3.155), проте обмежимося ілюстрацією вище вказаних властивостей. Щодо розмірності,

$$[E] = \frac{\text{Н}}{\text{Кл}}, [H] = \frac{\text{А}}{\text{м}}, \text{ тож дійсно } [\Pi] = [E][H] = \frac{\text{Н}}{\text{Кл}} \cdot \frac{\text{А}}{\text{м}} = \frac{\text{Н}}{\text{А} \cdot \text{с}} \cdot \frac{\text{А}}{\text{м}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{с} \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{Дж}}{\text{с} \cdot \text{м}^2}.$$

Зрозуміло, що хвиля, яка «біжить» в додатному напрямку Oz , передає енергію в цьому ж напрямку, тож для неї $\vec{\Pi} \uparrow \uparrow \vec{e}_z$. Для неї

$$\vec{\Pi} = [\vec{E}, \vec{H}] = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ E_x & E_y & 0 \\ H_x & H_y & 0 \end{vmatrix} = \vec{e}_z (E_x H_y - E_y H_x) = \quad (3.156)$$

$$= \vec{e}_z (E_{0x} H_{0y} - E_{0y} H_{0x}) \cos^2 \left(\omega t - \omega \frac{z}{v} \right) = W H_0^2 \cos^2 \left(\omega t - \omega \frac{z}{v} \right) \vec{e}_z,$$

де $H_0^2 = H_{0x}^2 + H_{0y}^2$, при виведенні (3.156) використовувались вирази (3.149) та (3.151). Тож дійсно $\vec{\Pi} \uparrow \uparrow \vec{e}_z$, бо множник перед \vec{e}_z є невід'ємним.

На основі того, що для розглянутої хвилі $\vec{E} \perp \vec{H}$, модуль вектору Пойнтінга як модуль векторного добутку перпендикулярних векторів

$$|\vec{\Pi}| = |\vec{E}| |\vec{H}| = E_0 H_0 \cos^2 \left(\omega t - \omega \frac{z}{v} \right), \quad (3.157)$$

з урахуванням напрямку

$$\vec{\Pi} = E_0 H_0 \cos^2 \left(\omega t - \omega \frac{z}{v} \right) \vec{e}_z, \quad (3.158)$$

E_0, H_0 – модулі векторів \vec{E}_0 та \vec{H}_0 , відповідно.

Інтенсивність електромагнітної хвилі – модуль середнього за період значення вектору Пойнтінга: $I = \langle |\vec{\Pi}| \rangle$. **Період хвилі** $T = 2\pi/\omega$. Відповідно, згідно визначення (3.41) середній за період вектор Пойнтінга

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T E_0 H_0 \cos^2 \left(\omega t - \omega \frac{z}{v} \right) \vec{e}_z dt = \frac{E_0 H_0}{2} \vec{e}_z, \quad (3.159)$$

обчислення інтегралу (3.159) є аналогічним до обчислення інтегралу (3.43). Відповідно, інтенсивність плоскої хвилі у необмеженому просторі

$$I = \left| \langle \vec{\Pi} \rangle \right| = \frac{E_0 H_0}{2}, \quad (3.160)$$

На останок зазначимо, що вище розглянуто хвилю, яка «біжить» в додатному напрямку Oz . Хвиля, що «біжить» у від'ємному напрямку Oz , поля мають вигляд

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos \left(\omega t + \omega \frac{z}{v} \right), \quad \vec{H} = \vec{H}_0 \cos \left(\omega t + \omega \frac{z}{v} \right), \quad (3.161)$$

а її властивості ідентичні до властивостей хвилі, яка «біжить» в додатному напрямку Oz .

3.4. Механічні коливання

Механічні коливання виникають тоді і тільки тоді, коли при будь-якому малому відхиленні від положення рівноваги виникає сила, яка повертає тіло в положення рівноваги. Такі коливання виникають лише в околі стану стійкої рівноваги, який відповідає є мінімумом потенціальної енергії.

3.4.1. Пружинний маятник



Рисунок 3.9

Розглянемо тіло, яке закріплене на пружині на ідеально гладкому столі. Стан стійкої рівноваги відповідає положенню, в якому пружина є недеформованою.

Відхилимо тіло від положення стійкої рівноваги, див. рис. 3.9. Сила, яка повертає тіло в положення рівноваги, є силою пружності. На основі другого закону Ньютона матимемо

$$ma = -kx \Rightarrow \ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0, \quad (3.162)$$

де

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (3.163)$$

тут враховано, що прискорення є другою похідною координати та той факт, що сила пружності спрямована до положення рівноваги, який спричиняє знак «-» перед kx .

Рівняння (3.162) є математично ідентичним до рівняння (3.15). Розв'язком рівняння (3.15) є (3.21), константи q_m , φ можуть бути знайдені з початкових умов. Відповідно, розв'язком рівняння (3.162) є гармонічні коливання

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi), \quad (3.164)$$

константи A , φ можуть бути знайдені з початкових умов; константа A є амплітудою коливань. Величина (3.163) є **кутовою частотою** коливань пружинного маятника. Відповідно, **період коливань** пружинного маятника задається виразом

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (3.165)$$

Покажемо, що виконується закон збереження енергії:

$$\begin{aligned} E(t) &= E_k(t) + E_p(t) = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \\ &= \frac{mA^2\omega^2 \sin^2(\omega t + \varphi)}{2} + \frac{kA^2 \cos^2(\omega t + \varphi)}{2} = \frac{kA^2}{2} = \text{const}, \end{aligned} \quad (3.166)$$

тут враховано (3.163) та основну тригонометричну тотожність.

3.4.2. Математичний маятник

Розглянемо тіло, що підвішене ниткою до стелі, див. рис. 3.10. Маса нитки нехтовно мала порівняно з масою тіла, а лінійний розмір тіла нехтовно малий порівняно з довжиною нитки. Тож тіло на кінці нитки можна вважати точковим, але можна вважати, що вся маса маятника зосереджена саме в цьому точковому тілі. Очевидно, стан стійкої рівноваги відповідає вертикальному положенню нитки. Якщо ж тіло на натягнутій нитці відхилити від положення рівноваги, воно

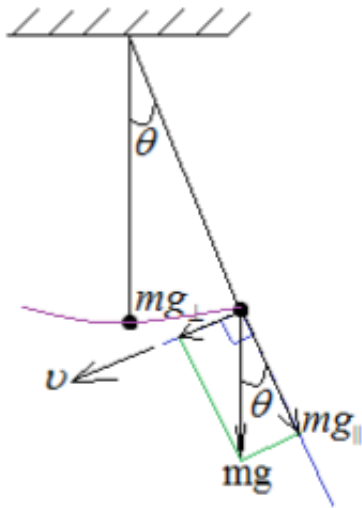


Рисунок 3.10

почне коливатись внаслідок дії на нього сили тяжіння, траєкторією тіла буде дуга кола. Сила тяжіння, що діє на тіло, спрямована вниз, див. рис. 3.10. Її можна розкласти на дві складові, одна з яких буде перпендикулярною до нитки, а інша – паралельною, див. рис. 3.10. Очевидно, що на модуль швидкості тіла впливатиме лише перпендикулярна до нитки (тангенціальна до траєкторії) складова сили тяжіння. Слід зауважити, що, безумовно, на тіло що діятиме сила натягу нитки, але так як вона є

перпендикулярною до траєкторії, вона не змінюватиме модуль швидкості тіла.

Матимемо

$$mg_{\perp} = mg \sin \theta, \quad mg_{\parallel} = mg \cos \theta, \quad (3.167)$$

закон зміни модуля швидкості тіла має вигляд

$$m \frac{dv}{dt} = mg_{\perp} = mg \sin \theta, \quad (3.168)$$

де v – модуль швидкості. Як відомо, зв'язок модулів лінійної та кутової швидкостей є таким:

$$v = \omega l = -\dot{\theta} l, \quad (3.169)$$

знак « \rightarrow » взято, бо при відповідному русі, що розглянуто на рис. 3.10, модуль швидкості тіла збільшується, кут θ зменшується, і його похідна від'ємна. На основі (3.168) та (3.169) після певних перетворень матимемо

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0. \quad (3.170)$$

Рівняння (3.170) є точним рівнянням незгасаючих коливань математичного маятника, проте воно не є рівнянням гармонічних коливань. Однак, якщо впродовж усього коливального руху кут θ є малим, то коливання математичного маятника можуть бути описані як гармонічні. Дійсно, якщо в радіанах $|\theta| \ll 1$, то згідно розвиненню в ряд Тейлора

$$\sin \theta = \theta + O(\theta^3), \quad (3.171)$$

позначення $O(\theta^3)$ означає певну величину порядку θ^3 . Якщо цією малою величиною знехтувати порівняно з θ , то отримаємо наближене рівняння

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0, \quad (3.172)$$

де

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad (3.173)$$

яке описує гармонічні коливання. Розв'язком рівняння (3.172) є

$$\theta(t) = A \cos(\omega t + \varphi), \quad (3.174)$$

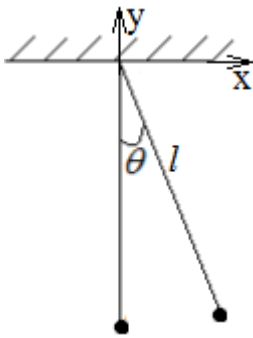


Рисунок 3.11

константи A , φ можуть бути знайдені з початкових умов; константа A є кутовою амплітудою коливань. Відповідно, вираз (3.173) є **кутовою частотою** малих гармонічних коливань математичного маятника (для справедливості цього твердження кутова амплітуда, виражена в радіанах, має бути малою: $A \ll 1$). Відповідно, **період** малих гармонічних коливань математичного маятника описується виразом

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (3.175)$$

Покажемо, що при незгасаючих коливаннях математичного маятника виконується закон збереження енергії. Див. рис. 3.11. Маємо

$$\begin{aligned} v_x(t) &= \frac{dx}{dt} = \frac{dl \sin \theta}{dt} = l \frac{d \sin \theta}{dt} = l \cos \theta \frac{d\theta}{dt} = l \dot{\theta} \cos \theta, \\ v_y(t) &= \frac{dy}{dt} = -\frac{dl \cos \theta}{dt} = -l \frac{d \cos \theta}{dt} = l \sin \theta \frac{d\theta}{dt} = l \dot{\theta} \sin \theta, \end{aligned} \quad (3.176)$$

тож

$$E(t) = E_k(t) + E_p(t) = \frac{m}{2} l^2 \dot{\theta}^2(t) - mgl \cos \theta(t). \quad (3.177)$$

На основі (3.170) отримаємо похідну повної енергії по часу:

$$\begin{aligned} \frac{dE(t)}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{m}{2} l^2 \dot{\theta}^2 - mgl \cos \theta \right) = \frac{ml^2}{2} 2\dot{\theta} \frac{d\dot{\theta}}{dt} + mgl \sin \theta \frac{d\theta}{dt} = \\ &= ml^2 \dot{\theta} \ddot{\theta} + mgl \dot{\theta} \sin \theta = ml \dot{\theta} (l \ddot{\theta} + g \sin \theta) = 0, \end{aligned} \quad (3.178)$$

тож дійсно $E(t) = \text{const}$. При відсутності тертя (саме тоді і будуть реалізовуватись незгасаючі коливання) повна механічна енергія системи зберігається.

3.4.3. Фізичний маятник

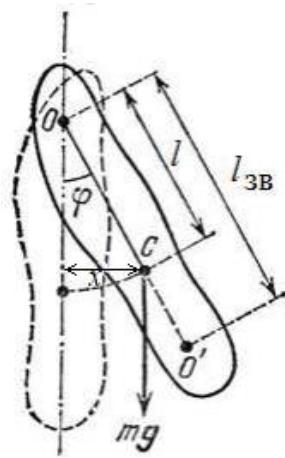


Рисунок 3.12

Будь-яке тіло, підвішене в точці, що лежить вище його центра мас, може коливатися і являє собою фізичний маятник. У положенні стійкої рівноваги фізичного маятника його центр мас C знаходиться на одній вертикалі з точкою підвісу O , але нижче неї, див. рис. 3.12. Згідно основного рівняння динаміки обертального руху:

$$I \ddot{\varphi} = M = -mgx = -mgl \sin \varphi, \quad (3.179)$$

де I – момент інерції тіла, l – відстань від точки підвісу до центру мас, m – маса тіла, φ – кут між вертикаллю та прямою OC , див. рис. 3.12. Знак « $-$ » взято через те, що на рис. 3.12 внаслідок дії моменту сили тяжіння на тіло кут φ зменшується. Відповідно, маємо *точне* рівняння незгасаючих коливань фізичного маятника, яке не описує гармонічні коливання

$$\ddot{\varphi} + \frac{mgl}{I} \sin \varphi = 0. \quad (3.180)$$

Проте у випадку, коли кут φ , виражений в радіанах, є малим під час всього коливального руху, коливання з хорошою точністю будуть гармонічними. Дійсно, в цьому випадку $|\varphi| \ll 1$, $\sin \varphi = \varphi + O(\varphi^3) \approx \varphi$, та наближене диференціальне рівняння, що описує коливання фізичного маятника, набуває вигляду

$$\ddot{\varphi} + \frac{mgl}{I} \varphi = 0. \quad (3.181)$$

Відповідно, кутова частота та період таких малих гармонічних коливань фізичного описуються виразами

$$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{I}}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgl}}. \quad (3.182)$$

При описі фізичного маятника вводять такий параметр як *зведена довжина*:

$$l_{\text{зв}} = \frac{I}{ml}, \quad (3.183)$$

тоді

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l_{\text{зв}}}{g}}. \quad (3.184)$$

Тобто зведена довжина фізичного маятника – це довжина математичного маятника, який має точно такий же період малих коливань, як і даний фізичний маятник.

Продемонструємо, що виконується закон збереження енергії:

$$E(t) = E_{\text{к}}(t) + E_{\text{п}}(t) = \frac{I}{2} \dot{\varphi}^2(t) - mgl \cos \varphi(t), \quad (3.185)$$

див. рис. 3.12, відлік потенціальної енергії ведеться від точки підвісу.

Продиференціювавши (3.185), на основі (3.180) матимемо

$$\frac{dE(t)}{dt} = \frac{I}{2} 2\dot{\varphi}\ddot{\varphi} + mgl \sin \varphi \dot{\varphi} = \dot{\varphi}(I\ddot{\varphi} + mgl \sin \varphi) = 0, \quad (3.186)$$

звідки $E(t) = \text{const}$.

3.4.4. Фігури Ліссажу

Нехай тіло одночасно бере участь у двох гармонічних коливаннях, що відбуваються в двох взаємно перпендикулярних напрямках, наприклад, вздовж осей Ox і Oy . Оберемо відлік часу так, щоб початкова фаза першого коливання була нульовою:

$$x(t) = A_1 \cos(\omega_1 t), \quad y(t) = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi). \quad (3.187)$$

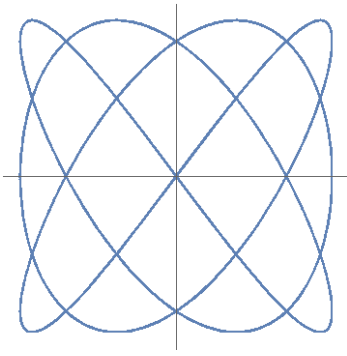


Рисунок 3.13

Тоді криві, які є можливими траєкторіями тіла, називають **фігурами Ліссажу**. Фігури Ліссажу – криві $y(x)$, параметрично задані рівняннями (3.187). Наприклад, фігура Ліссажу при однакових амплітудах, $\varphi = \pi/2$ та $\omega_1/\omega_2 = 3/4$ має вигляд як на рис. 3.13. Вигляд фігури Ліссажу залежить від амплітуд, зсуву фаз φ , та від відношення кутових частот ω_1/ω_2 .

Детальніше розглянемо фігури Ліссажу, що виникають при однакових частотах.

У випадку $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ перепишемо (3.187) як

$$x(t) = A_1 \cos(\omega t), \quad y(t) = A_2 (\cos(\omega t) \cos \varphi - \sin(\omega t) \sin \varphi), \quad (3.188)$$

звідки

$$\cos(\omega t) = \frac{x}{A_1}, \quad A_2 \sin(\omega t) \sin \varphi = A_2 \frac{x}{A_1} \cos \varphi - y. \quad (3.189)$$

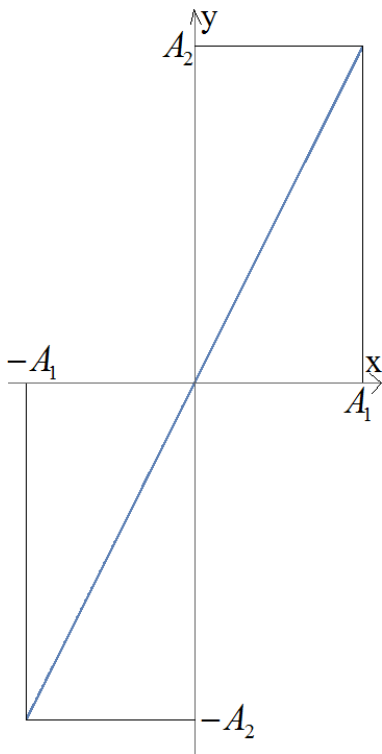


Рисунок 3.14

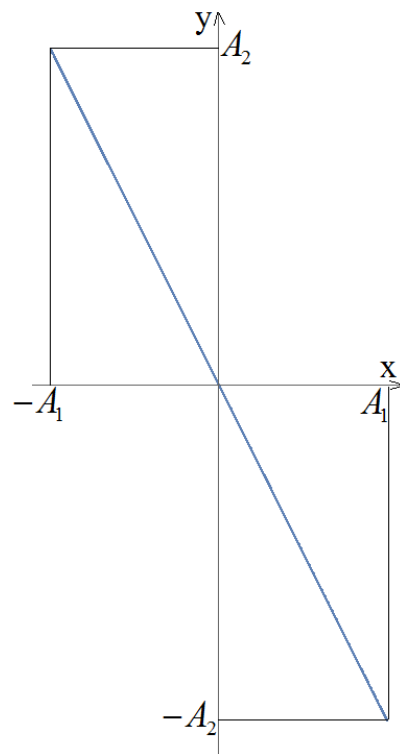


Рисунок 3.15

Нас цікавлять зсуви фаз $\varphi \in (-\pi, \pi]$, якщо додати 2π до зсуву фаз, отримаємо фізично еквівалентний зсув фаз. Можливі такі випадки.

Випадок 1: $\sin \varphi = 0$. Тоді згідно (3.189)

$$A_2 \frac{x}{A_1} \cos(\varphi) - y = 0, \quad (3.190)$$

звідки або реалізується випадок $y = \frac{A_2}{A_1} \cdot x$ (при $\varphi = 0$, див. рис. 3.14), або

реалізується випадок $y = -\frac{A_2}{A_1} \cdot x$ (при $\varphi = \pi$, див. рис. 3.15). В обох цих випадках

фігура Ліссажу є відрізком прямої.

Випадок 2: $\sin \varphi \neq 0$. Тоді перепишемо (3.189) як

$$\cos(\omega t) = \frac{x}{A_1}, \quad \sin(\omega t) = \frac{x}{A_1 \operatorname{tg} \varphi} - \frac{y}{A_2 \sin \varphi}, \quad (3.191)$$

звідки згідно основної тригонометричної тотожності

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \left(\frac{x}{A_1 \operatorname{tg} \varphi} - \frac{y}{A_2 \sin \varphi} \right)^2 = 1. \quad (3.192)$$

Розкриємо дужки та зберемо подібні:

$$\frac{x^2}{A_1^2} \left(1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \varphi} \right) - 2 \frac{xy}{A_1 A_2 \operatorname{tg} \varphi \sin \varphi} + \frac{y^2}{A_2^2 \sin^2 \varphi} = 1, \quad (3.193)$$

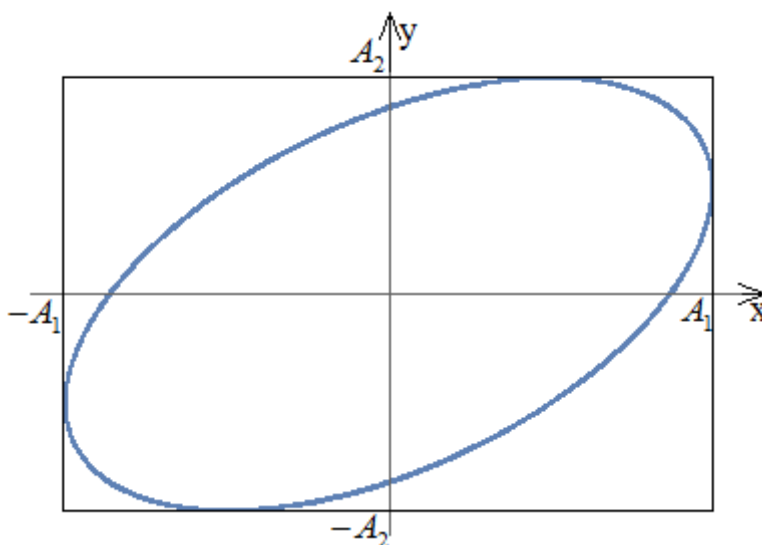


Рисунок 3.16

звідки шляхом нескладних перетворень отримаємо

$$\frac{x^2}{A_1^2} - 2\frac{xy \cos \varphi}{A_1 A_2} + \frac{y^2}{A_2^2} = \sin^2 \varphi. \quad (3.194)$$

Отримана крива (3.194) є еліпсом, вписаним у прямокутник зі сторонами $2A_1$ та $2A_2$. Наприклад, у випадку $A_1/A_2 = 3/2$ та $\varphi = \pi/3$ відповідну фігуру Ліссажу зображено на рис. 3.16.

Зокрема, при $\varphi = \pi/2$ осі Ox та Oy будуть осями канонічної системи координат для такого еліпсу, цей випадок зображено на рис. 3.17.

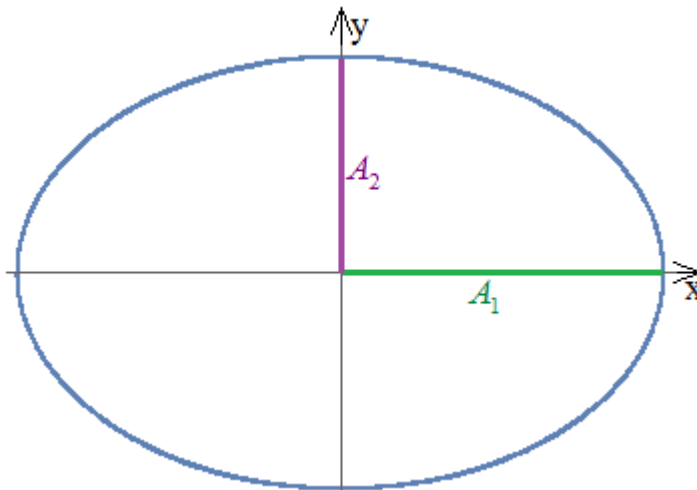


Рисунок 3.17

Зокрема, при $\varphi = \pi/2$ та $A_1 = A_2$ матимемо частинний випадок, коли еліпс перетворюється на коло.

Тож у випадку однакових частот фігура Ліссажу може бути або відрізком прямої, або еліпсом, або колом. Детальний опис цих випадків наведено вище.

3.4.5. Биття. Додавання коливань з близькими частотами

Розглянемо випадок, коли коливання, що додаються, відбуваються в одному напрямку та мають однакові амплітуди, але різні, хоч і дуже близькі, частоти:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= A \cos(\omega_1 t), \quad x_2(t) = A \cos(\omega_2 t), \\ \omega_1 &= \omega_0 + \Omega, \quad \omega_2 = \omega_0 - \Omega, \quad \Omega \ll \omega_0. \end{aligned} \quad (3.195)$$

Розглянемо результат додавання цих коливань:

$$s(t) = x_1(t) + x_2(t) = A\cos(\omega_0 t + \Omega t) + A\cos(\omega_0 t - \Omega t) =$$

$$= 2A\cos(\Omega t) \cdot \cos(\omega_0 t),$$
(3.196)

для отримання цього результату достатньо розписати формули косинуса суми та косинуса різниці, а потім зібрати подібні. Величина $\cos(\Omega t)$ змінюється в часі набагато повільніше за $\cos(\omega_0 t)$. Тож можна вважати, що отримана фізична величина $s(t)$ є синусоїдою з кутовою частотою ω_0 , амплітуда якої повільно змінюється в часі за законом

$$s_m(t) = 2A|\cos(\Omega t)|.$$
(3.197)

Схематичний графік наведено на рис. 3.18.

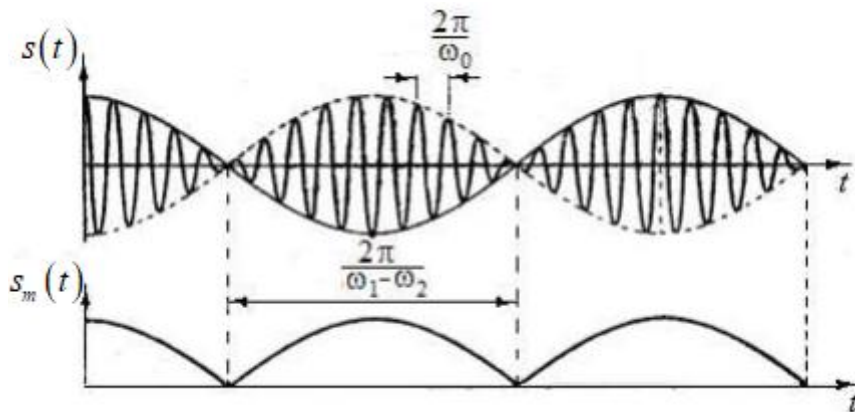


Рисунок 3.18

Відповідне додавання двох гармонічних коливань з близькими частотами називаються *биттям*.

3.4.6. Згасаючі та вимушені коливання

Коротко оглянемо згасаючі коливання. Позначимо через x зміщення тіла зі стану стійкої рівноваги. На тіло, по-перше, діє повертаюча сила $F = -kx$. В пружинному маятнику безпосередньо $F = -kx$, в складніших системах така сила лінійно залежить від x лише при малих коливаннях, але зазвичай саме малі коливання і досліджуються. По-друге, нехай на тіло діє гальмівна (дисипативна) сила з боку середовища $F = -rx$, наприклад, сила в'язкого тертя. Така сила завжди спрямована проти швидкості та при малих швидкостях ця сила зазвичай

пропорційна до модуля швидкості. Тоді згідно другого закону Ньютона матимемо

$$m\ddot{x} = -r\dot{x} - kx \Rightarrow \ddot{x}(t) + 2\beta\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0, \quad (3.198)$$

де

$$2\beta = \frac{r}{m}, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}. \quad (3.199)$$

Рівняння (3.198) є повністю ідентичним до рівняння (3.49), тож математичний опис згасаючих механічних коливань є повністю ідентичним до опису згасаючих електромагнітних коливань; більше того, визначення логарифмічного декременту згасання та добротності повністю ідентичні для згасаючих механічних та згасаючих електромагнітних коливань. Тому детально описувати згасаючі механічні коливання в цьому курсі ми не будемо. Єдино що зауважимо – очевидно, що повна механічна енергія системи при згасаючих коливаннях не зберігається, втрата повної енергії дорівнює модулю роботи дисипативної сили.

Тепер розглянемо вимушені механічні коливання. Розглянемо систему, всередині якої та тіло, що коливається, діють повертаюча та дисипативна сила, а також на тіло діє зовнішня періодична сила

$$F_{\text{зовн}} = F_0 \cos(\omega t). \quad (3.200)$$

Тоді згідно другого закону Ньютона

$$m\ddot{x} = -r\dot{x} - kx + F_0 \cos(\omega t) \Rightarrow \ddot{x}(t) + 2\beta\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \gamma \cos(\omega t), \quad (3.201)$$

де величини β та ω_0 введені у (3.199), та

$$\gamma = \frac{F_0}{m}. \quad (3.202)$$

Рівняння (3.201) є математично повністю ідентичним до (3.69), тож його розв'язок в усталеному режимі

$$x(t) = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\beta\omega)^2} \gamma \cos(\omega t) + \frac{2\beta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\beta\omega)^2} \gamma \sin(\omega t), \quad (3.203)$$

див. (3.75). Виділимо амплітуду та фазу цього розв'язку, скориставшись методом допоміжного кута:

$$x(t) = \frac{\gamma}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\beta\omega)^2}} \left(\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\beta\omega)^2}} \cos(\omega t) + \frac{2\beta\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\beta\omega)^2}} \sin(\omega t) \right). \quad (3.204)$$

Введемо величини

$$\xi = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\beta\omega)^2}}, \quad \eta = \frac{2\beta\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\beta\omega)^2}}. \quad (3.205)$$

Через те, що $\eta \in (0,1]$, $\xi \in (-1,1)$, $\eta^2 + \xi^2 = 1$ приходимо до висновку, що існує кут φ такий, що $\eta = \sin \varphi$ та $\xi = \cos \varphi$. Тоді вираз (3.204) набуде вигляду

$$x(t) = \frac{\gamma}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\beta\omega)^2}} \cos(\omega t - \varphi). \quad (3.206)$$

Розглянемо амплітуду A величини $x(t)$:

$$A = A(\omega) = \frac{\gamma}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\beta\omega)^2}}. \quad (3.207)$$

Очевидно, що

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} A(\omega) = 0, \quad (3.208)$$

тож при дуже великій частоті зовнішньої амплітуду коливань в системі є дуже малою.

Частота зовнішньої періодичної сили, за якої амплітуду коливань досягає локального максимуму, називається **резонансною частотою**. Очевидно, що максимальне значення $A(\omega)$ буде досягатись, коли

$$A \rightarrow \max \Leftrightarrow (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\beta\omega)^2 = \omega^4 + (4\beta^2 - 2\omega_0^2)\omega^2 + \omega_0^4 \rightarrow \min. \quad (3.209)$$

Відповідне значення ω можна знайти навіть без похідної, бо досліджуваний вираз є параболою від ω^2 . Вершина параболи:

$$\omega_{\text{рез}}^2 = \frac{-4\beta^2 + 2\omega_0^2}{2} = \omega_0^2 - 2\beta^2 \Rightarrow \omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}, \quad (3.210)$$

Тож резонансна кутова частота описується виразом (3.210). Зауважимо, що про резонансну кутову частоту є сенс говорити лише у випадку $\omega_0 > \sqrt{2}\beta$. При незначному згасанні, тобто при $\omega_0 \gg \beta$, резонансна частота $\omega_{\text{рез}} \approx \omega_0$. Тобто якщо згасання є незначним, то максимальне значення амплітуди коливань досягається у випадку, коли частота зовнішньої сили є дуже близькою до частоти власних коливань системи. Таке явище носить назву **явища резонансу**. На основі (3.210) та (3.207) шляхом нескладних перетворень отримаємо, що при $\omega_0 > \sqrt{2}\beta$

$$A_{\text{max}} = A(\omega_{\text{рез}}) = \frac{\gamma}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \quad (3.211)$$

У випадку $\omega_0 \leq \sqrt{2}\beta$ залежність $A(\omega)$ є просто спадною функцією. Для числових значень $\gamma = 1 \text{ м/с}^2$, $\omega_0 = 5 \text{ с}^{-1}$ деякі графіки залежності $A(\omega)$ наведені на рис. 3.19.

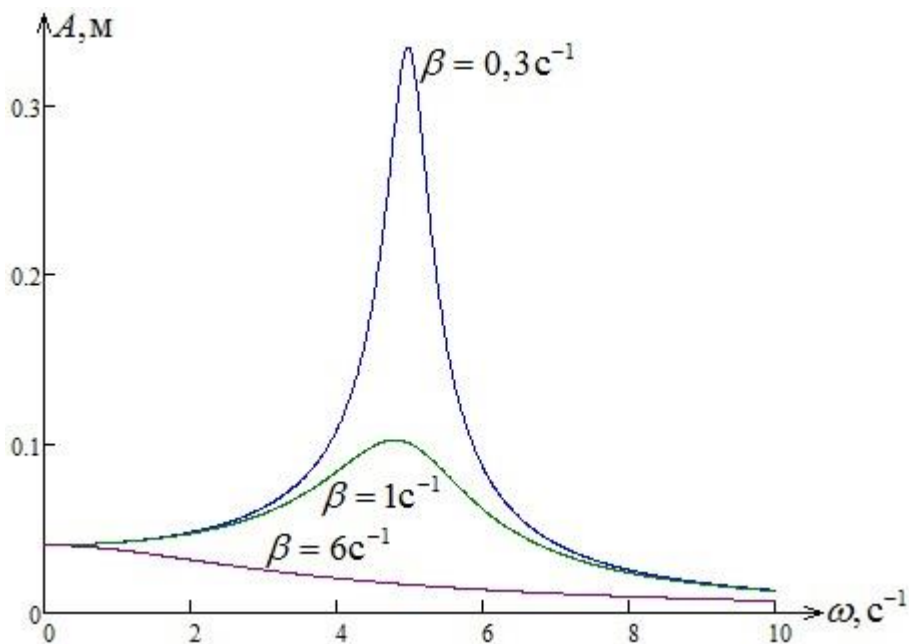


Рисунок 3.19

На основі (3.211) та (3.207) бачимо, що випадку малого згасання $\omega_0 \gg \beta$ відношення максимально можливої амплітуди до амплітуди при постійній зовнішній силі

$$\frac{A_{\max}}{A(\omega=0)} = \frac{\omega_0^2}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \approx \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{\omega_0 T}{2\beta T} = \frac{2\pi}{2\lambda} = Q \quad (3.212)$$

співпадає з добротністю системи, див. (3.63) та (3.66).

Розглянемо тепер детальніше вище введений кут φ . На основі (3.206) та (3.200) бачимо, що він є різницею фаз між зовнішньою силою та координатою тіла (різниця фаз береться в усталеному режимі роботи кола):

$$\varphi = \text{Фаза}(F_{\text{зовн}}) - \text{Фаза}(x). \quad (3.213)$$

Очевидно, що координата тіла відстає за фазою від зовнішньої сили, бо зовнішня сила є причиною руху в усталеному режимі, а наслідок не може бути раднішим за причину. Тож $\varphi > 0$. Так як $\eta = \sin \varphi \geq 0$, то приходимо до висновку, що кут φ лежить в першій або другій чверті. Тангенс цього кута

$$\text{tg} \varphi = \frac{\eta}{\xi} = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad (3.214)$$

див. (3.205). На основі (3.205) бачимо, що

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \cos \varphi = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \xi = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\beta\omega)^2}} = -1. \quad (3.215)$$

Тож коли частота зовнішньої сили дуже велика, то $\cos \varphi \rightarrow -1$, φ в першій або другій чверті, тож $\varphi \rightarrow \pi$. При дуже великій зовнішній частоті координата та зовнішня сила, фактично, будуть в протифазі. При дуже малій частоті зовнішньої сили

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \cos \varphi = \lim_{\omega \rightarrow 0} \xi = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\beta\omega)^2}} = 1, \quad (3.216)$$

тож коли частота зовнішньої сили дуже мала, то $\cos \varphi \rightarrow 1$; φ в першій або другій чверті, тож $\varphi \rightarrow 0$. При дуже малій зовнішній частоті фази координати та зовнішня сила, будуть дуже близькими.

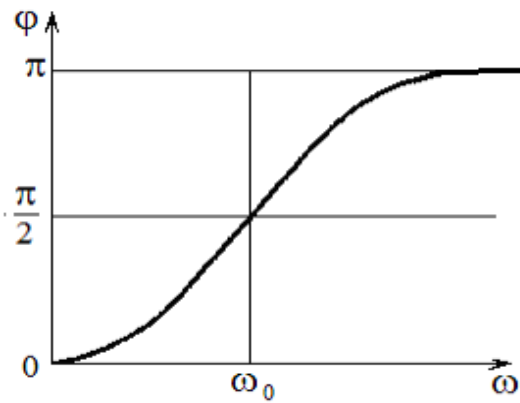


Рисунок 3.20

Нарешті, при $\omega_0 = \omega$ отримаємо $\cos \varphi = 0$; враховуючи, що $\sin \varphi > 0$, матимемо $\varphi = \pi/2$. Тож у випадку, коли частота зовнішньої сили співпадає з власною частотою незгасаючих коливань системи, координата відстає від зовнішньої сили за фазою на кут $\pi/2$. Схематичний графік залежності $\varphi(\omega)$ наведено на рис. 3.20.

3.5. Контрольні питання до розділу 3

1. Навести поняття функціонального та диференційного рівняння. Навести поняття загального та частинного розв'язку. Виписати однорідне лінійне диференційне рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами та вказати його загальний розв'язок в усіх можливих випадках. Сформулювати теорему про загальний розв'язок відповідного неоднорідного рівняння.

2. Вивести диференційне рівняння на заряд конденсатора в коливальному LC-контурі. Вивести його розв'язок при початкових умовах (3.22). Вивести вирази для кутової частоти, частоти та періоду коливань.

3. Вивести вирази для зсуву фаз між напругою та струмом на конденсаторі та на котушці. Вивести вирази для реактивного опору котушки та конденсатора. Дати визначення діяльного значення змінного синусоїдального струму, вивести зв'язок діяльного та амплітудного значень.

4. Вивести диференційне рівняння на заряд конденсатора в послідовному коливальному RLC-контурі. Виписати його загальний розв'язок в усіх можливих випадках. При якій умові можна казати про наявність згасаючого коливального процесу? Для відповідних згасаючих коливань вивести вирази для кутової частоти та періоду, а також вивести залежність амплітуди від часу. Дати визначення часу релаксації коливань, логарифмічного декременту згасання та добротності коливань. Вивести вираз для логарифмічного декременту згасання.

5. Вивести диференційне рівняння на заряд конденсатора в послідовному коливальному RLC-контурі, що підключено до джерела змінної синусоїдальної ЕРС. Вивести розв'язок цього рівняння в усталеному режимі роботи кола. Вивести вирази для загального опору контуру, а також для зсуву фаз між загальними напругою та струмом на контурі. Детально описати явище резонансу напруг.

6. В усталеному режимі роботи кола вивести часові залежності струмів на елементах паралельного коливальному RLC-контурі, підключеному до джерела змінної синусоїдальної ЕРС. Яку роль при описі контуру грає резистивний опір котушки? Вивести вирази для загальної провідності контуру, а також для зсуву фаз між загальними напругою та струмом на контурі. Детально описати явище резонансу струмів.

7. Дати визначення частинної похідної, градієнта, ротора та дивергенції. Вказати часто вживані в електродинаміці тотожності векторного аналізу.

8. Вказати величини, якими описуються заряди та поля в електродинаміці. Навести рівняння Максвелла та пояснити їх фізичний зміст. Для найпростіших середовищ вказати матеріальні рівняння.

9. На основі рівнянь Максвелла для середовищ без струмів з нульовою густиною заряду вивести хвильові рівняння для напруженостей електричного та магнітного полів.

10. Дати визначення фазового фронту та плоскої хвилі. Вказати розв'язки хвильових рівнянь для плоскої електромагнітної хвилі, що шириться у відкритому просторі, та довести правильність відповідних розв'язків. Вивести вираз для фазової швидкості електромагнітної хвилі.

11. Довести, що плоска електромагнітна хвиля у відкритому середовищі є поперечною. Навести поняття хвильового опору простору. Для хвилі, що розглядається, довести взаємну перпендикулярність напруженостей електричного та магнітного полів, а також вектору в напрямку розповсюдження хвилі.

12. Дати визначення вектору Пойнтінга і навести вираз для нього. На прикладі плоскої електромагнітної хвилі у відкритому середовищі довести адекватність відповідного виразу. Дати визначення інтенсивності електромагнітної хвилі та отримати вираз для інтенсивності плоскої електромагнітної хвилі у відкритому середовищі.

13. Вивести диференційне рівняння та формулу для періоду коливань пружинного маятника. Проілюструвати збереження повної механічної енергії при таких незгасаючих коливаннях.

14. Вивести точне диференційне рівняння для коливань математичного маятника. Навести наближене диференційне рівняння для відповідних малих коливань і вивести формулу для їх періоду. Проілюструвати збереження повної механічної енергії при таких незгасаючих коливаннях.

15. Вивести точне диференційне рівняння для коливань фізичного маятника. Навести наближене диференційне рівняння для відповідних малих коливань і вивести формулу для їх періоду. Проілюструвати збереження повної механічної енергії при таких незгасаючих коливаннях.

16. Дати визначення фігур Ліссажу і детально вивести можливі типи фігур Ліссажу для коливань однакових частот.

17. Навести поняття явища биття. В якому випадку виникає це явище? Надати детальний математичний опис.

18. Вивести диференційне рівняння для згасаючих та вимушених механічних коливань. Знайти розв'язок диференційного рівняння для вимушених механічних коливань в усталеному режимі. Вивести відповідну залежність амплітуди від кутової частоти та кутову частоту, при якій досягається максимально можливе значення амплітуди. Детально описати явище резонансу. Вивести залежність від кутової частоти зсуву фаз між зовнішньою силою та координатою тіла при таких коливаннях.

4. Оптика

Оптика є розділом фізики, що вивчає поведінку та властивості світла. Світло є електромагнітною хвилею в діапазоні частот від приблизно $3,9 \cdot 10^{14}$ Гц до приблизно $7,5 \cdot 10^{14}$ Гц. Електромагнітні хвилі цього діапазону частот здатне бачити людське око.

4.1. Геометрична оптика

4.1.1. Закони геометричної оптики

Геометрична оптика – розділ оптики, в якому вивчаються закони поширення світлових променів; світловий промінь – це лінія вздовж якої поширюється світло. Закони геометричної оптики є застосовними, коли довжина хвилі світла є набагато меншою за розміри тіл, що впливають на хід променів.

Законами геометричної оптики є:

- Закон прямолінійного поширення світла: в однорідних середовищах світло поширюється прямолінійно.
- Закон незалежності поширення світлових променів: світлові промені, поширюючись в просторі, при перетинанні не впливають один на одного.
- Закон відбивання світла: промінь падаючий, промінь відбитий і перпендикуляр до межі поділу двох середовищ у точці падіння, лежать в одній площині, а кут падіння дорівнює куту відбивання.
- Закон заломлення світла: промінь падаючий, промінь заломлений і перпендикуляр до границі розділу двох середовищ у точці падіння, лежать в одній площині; та виконується таке співвідношення:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{n_2}{n_1}, \quad (4.1)$$

α – кут падіння, γ – кут заломлення; n_2 , n_1 – показники заломлення середовищ.

Фізичний зміст відповідних величин буде розкрито нижче. Закони геометричної (як і хвильової) оптики є, фактично, наслідками властивостей

світла як електромагнітної хвилі. Детально продемонструємо виведення законів відбивання та заломлення світла.

Як відомо, напруженості електричного та магнітного полів в плоскій електромагнітній хвилі, що поширюється у відкритому середовищі в додатному напрямку осі Oz мають вигляд (3.141), де швидкість поширення хвилі ν задається виразом (3.139). Через те, що

$$z = (\vec{e}_z, \vec{r}) = (\vec{n}_0, \vec{r}), \quad (4.2)$$

де \vec{r} – радіус-вектор та \vec{n}_0 – одиничний вектор в напрямку поширення хвилі, вирази (3.141) можна узагальнити таким чином:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos\left(\omega t - \omega \frac{(\vec{n}_0, \vec{r})}{\nu}\right), \quad \vec{H} = \vec{H}_0 \cos\left(\omega t - \omega \frac{(\vec{n}_0, \vec{r})}{\nu}\right), \quad (4.3)$$

де \vec{E} , \vec{H} – напруженості електричного та магнітного полів у плоскій електромагнітній хвилі, що поширюється в напрямку одиничного вектору \vec{n}_0 у відкритому просторі.

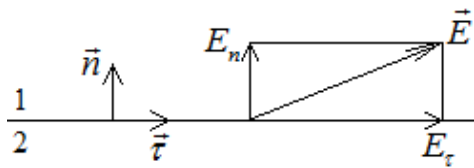


Рисунок 4.1

Розглянемо межу двох однорідних ізотропних середовищ. Вектор напруженості електричного поля можна розкласти на дві складові: тангенціальну, яка паралельна до межі

на нормальну, яка перпендикулярна до межі, див. рис. 4.1; $\vec{\tau}$ – одиничний вектор, паралельний до межі, \vec{n} – одиничний вектор, перпендикулярний до межі. На основі рівнянь Максвелла та теорем векторної алгебри можна показати, що тангенціальна компонента напруженості електричного поля є неперервною при переході через межу двох середовищ, тобто

$$E_{\tau 1} = E_{\tau 2}, \quad (4.4)$$

де $E_{\tau 1}$ та $E_{\tau 2}$ є тангенціальними компонентами напруженості електричного поля в першому та другому середовищах, взятими нескінченно близько до межі середовищ. Прийmemo цей факт без виведення, його виведення наведено в літературі з електродинаміки.

Нехай на межу середовищ падає плоска електромагнітна хвиля в напрямку вектору \vec{n}_0 в площині xOz , див. рис. 4.2. Позначимо $\vec{n}_{0в}$ – одиничний вектор, в напрямку якого поширюється відбита хвиля та $\vec{n}_{0з}$ – одиничний вектор, в напрямку якого поширюється заломлена хвиля, див. рис. 4.2. Позначимо α – кут падіння (між падаючим променем та перпендикуляром до межі середовищ), β – кут відбивання (між відбитим променем та перпендикуляром до межі середовищ), γ – кут заломлення (між заломленим променем та перпендикуляром до межі середовищ).

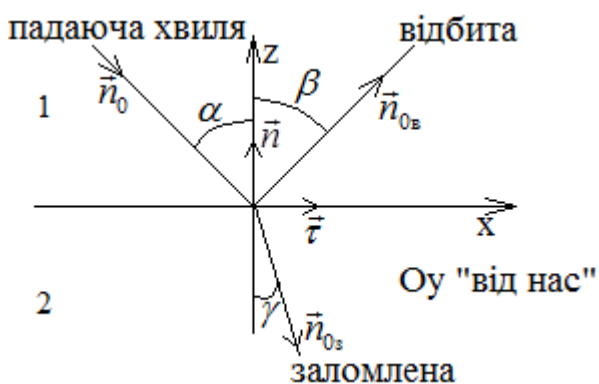


Рисунок 4.2

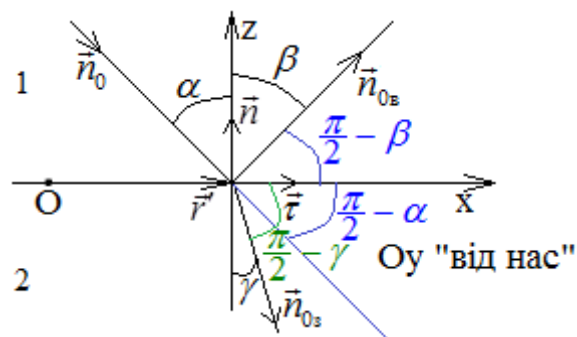


Рисунок 4.3

Напруженість електричного поля в падаючій, відбитій та заломленій хвилях згідно (4.3) описується виразами

$$\vec{E}_п = \vec{E}_{0п} \cos\left(\omega t - \omega \frac{(\vec{n}_0, \vec{r})}{v_1}\right), \quad \vec{E}_в = \vec{E}_{0в} \cos\left(\omega_b t - \omega_b \frac{(\vec{n}_{0в}, \vec{r})}{v_1}\right),$$

$$\vec{E}_з = \vec{E}_{0з} \cos\left(\omega_з t - \omega_з \frac{(\vec{n}_{0з}, \vec{r})}{v_2}\right),$$
(4.5)

де ω , ω_b , $\omega_з$ – кутова частота падаючої, відбитої та заломленої хвилі, відповідно; v_1 та v_2 – фазова швидкість хвилі в першому та другому середовищах, відповідно. В точці падіння має виконатись співвідношення (4.2), звідки для тангенціальних компонент напруженостей матимемо

$$E_{п\tau} + E_{в\tau} = E_{з\tau}. \quad (4.6)$$

Нехай точка падіння має радіус–вектор \vec{r}' . Через те, що $E_{\text{пт}} = (\vec{E}_{\text{п}}, \vec{\tau})$ та згідно (4.5) матимемо

$$E_{\text{пт}} = (\vec{E}_{0\text{п}}, \vec{\tau}) \cos \left(\omega t - \omega \frac{(\vec{n}_0, \vec{r}')}{v_1} \right). \quad (4.7)$$

Аналогічно

$$E_{\text{в}\tau} = (\vec{E}_{0\text{в}}, \vec{\tau}) \cos \left(\omega_{\text{в}} t - \omega_{\text{в}} \frac{(\vec{n}_0, \vec{r}')}{v_1} \right), \quad E_{\text{з}\tau} = (\vec{E}_{0\text{з}}, \vec{\tau}) \cos \left(\omega_{\text{з}} t - \omega_{\text{з}} \frac{(\vec{n}_{0\text{з}}, \vec{r}')}{v_2} \right), \quad (4.8)$$

та згідно (4.6) – (4.8) отримаємо

$$\begin{aligned} (\vec{E}_{0\text{п}}, \vec{\tau}) \cos \left(\omega t - \omega \frac{(\vec{n}_0, \vec{r}')}{v_1} \right) + (\vec{E}_{0\text{в}}, \vec{\tau}) \cos \left(\omega_{\text{в}} t - \omega_{\text{в}} \frac{(\vec{n}_0, \vec{r}')}{v_1} \right) =, \\ = (\vec{E}_{0\text{з}}, \vec{\tau}) \cos \left(\omega_{\text{з}} t - \omega_{\text{з}} \frac{(\vec{n}_{0\text{з}}, \vec{r}')}{v_2} \right), \end{aligned} \quad (4.9)$$

Рівність (4.9) має виконуватись в будь-який момент часу в будь-якій точці простору \vec{r}' на межі середовищ. Іншими словами, права та ліва частина виразу (4.9) мають бути тотожно рівними. Це можливо лише тоді, коли одночасно виконуються умови

$$(\vec{E}_{0\text{п}}, \vec{\tau}) + (\vec{E}_{0\text{в}}, \vec{\tau}) = (\vec{E}_{0\text{з}}, \vec{\tau}), \quad \omega_{\text{в}} = \omega_{\text{з}} = \omega, \quad \frac{(\vec{n}_0, \vec{r}')}{v_1} = \frac{(\vec{n}_{0\text{в}}, \vec{r}')}{v_1} = \frac{(\vec{n}_{0\text{з}}, \vec{r}')}{v_2}. \quad (4.10)$$

Звідси бачимо, що **частоти падаючої, заломленої та відбитої хвиль однакові**.

Розглянемо початок координат таким чином, щоб вектор \vec{r}' був паралельний до осі Oy . Тоді вектор \vec{r}' перпендикулярний площині рис. 4.2 та $(\vec{n}_0, \vec{r}') = 0$. Тоді згідно (4.10) $(\vec{n}_{0\text{в}}, \vec{r}') = (\vec{n}_{0\text{з}}, \vec{r}') = 0$ – тобто вектори $\vec{n}_{0\text{в}}$ та $\vec{n}_{0\text{з}}$ теж лежать в площині рисунку. **Тож і падаючий промінь, і відбитий промінь, і заломлений промінь, і перпендикуляр до межі середовищ, проведений в точці падіння, лежать в одній площині.**

Розглянемо початок координат на Ox (O – початок координат), див. рис. 4.3.

На основі (4.10) маємо

$$\frac{(\vec{n}_0, \vec{r}')}{v_1} = \frac{(\vec{n}_{0B}, \vec{r}')}{v_1} \Rightarrow |\vec{r}'| \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = |\vec{r}'| \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \Rightarrow \alpha = \beta, \quad (4.11)$$

тож **кут відбивання дорівнює куту падіння**; при виведенні (4.11) використано, що $|\vec{n}_0| = |\vec{n}_{0B}| = 1$. Також на основі (4.10) з урахуванням $|\vec{n}_0| = |\vec{n}_{03}| = 1$ матимемо

$$\frac{(\vec{n}_0, \vec{r}')}{v_1} = \frac{(\vec{n}_{03}, \vec{r}')}{v_2} \Rightarrow \frac{|\vec{r}'| \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{v_1} = \frac{|\vec{r}'| \cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right)}{v_2} \Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{v_1}{v_2}, \quad (4.12)$$

отриманий вираз носить назву **закону Снелліуса**.

Згідно (3.139) бачимо, що фазова швидкість хвилі

$$v = \frac{c}{n}, \quad (4.13)$$

де безрозмірна величина $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$ називається показником заломлення середовища. Вона показує, у скільки разів швидкість світла у середовищі менша за швидкість світла у вакуумі. Згідно (4.12) та (4.13) можна переписати закон Снелліуса у вигляді

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{n_2}{n_1}, \quad (4.14)$$

в якому він може бути відомим ще з курсу шкільної фізики.

4.1.2. Лінзи та зображення в лінзах

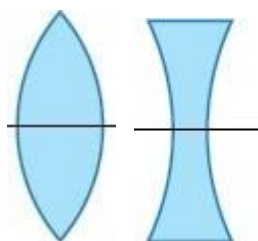


Рисунок 4.4

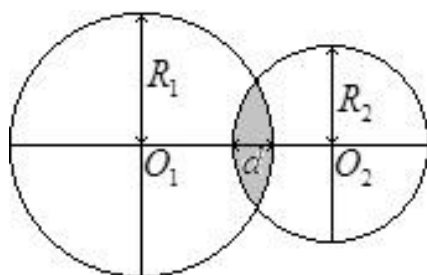


Рисунок 4.5

Лінза – деталь з прозорого однорідного матеріалу, що має дві заломлюючі відполіровані поверхні. Лінзи за формою бувають *опуклі* (ліва

частина рис. 4.4) та *увігнуті* (права частина рис. 4.4). Пряма, що проходить через центри сферичних поверхонь, які обмежують лінзу, називається **головною оптичною віссю (ГОВ)** лінзи. Нехай лінза обмежена двома сферичними поверхнями з центрами в точках O_1 і O_2 , тоді пряма O_1O_2 – ГОВ лінзи. Нехай

радіуси цих поверхонь R_1 та R_2 , d – товщина лінзи (див. рис. 4.5). Лінза називається *тонкою лінзою*, якщо $d \ll R_1$ та $d \ll R_2$.

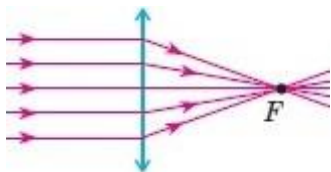


Рисунок 4.6

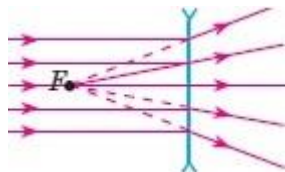


Рисунок 4.7

На головній оптичній осі лінзи є точка, через яку промені проходять, не заломлюючись. Ця точка – *оптичний центр лінзи*. Для тонкої

лінзи оптичний та геометричний центри співпадають.

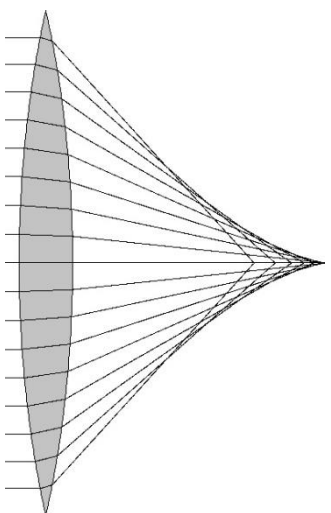


Рисунок 4.8

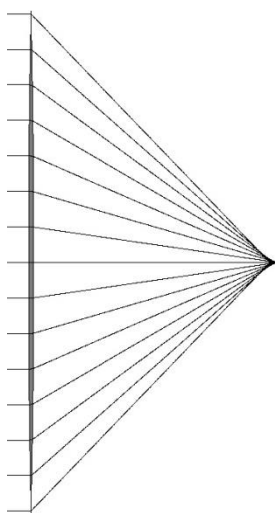


Рисунок 4.9

Розглянемо пучок променів, що падають на лінзу паралельно до ГОВ. Якщо лінза збиральна, то ці промені зберуться в точці, що називається *фокусом* лінзи, а якщо розсіювальна – то в фокусі зберуться продовження променів. Виникає питання – чому широкого застосування набули саме тонкі лінзи? Промені при проходженні лінзи заломлюються двічі, див. рис. 4.8

та рис. 4.9. На цих рисунках наведено комп'ютерну побудову ходу променів паралельного до ГОВ пучка, що впав на збиральну лінзу. При проходженні через реальну лінзу паралельний пучок не збиратиметься строго в одній точці, див. рис. 4.8. Але якщо лінза тонка, то збиратиметься майже в одній точці, див. рис. 4.9. Якщо ж лінза нескінченно тонка – то строго в одній точці. Тому *описана нижче теорія стосується лише тонких лінз*.

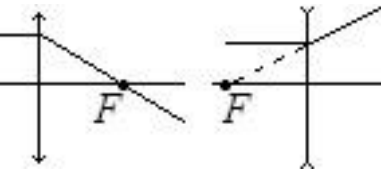
Нехай лінза знаходиться в середовищі з показником заломлення n_c , а показник заломлення матеріалу лінзи n_l . Опукла лінза при $n_c < n_l$ буде збиральною, а при $n_c > n_l$ – розсіювальною. Увігнута лінза, навпаки, буде розсіювальною при $n_c < n_l$ та збиральною при $n_c > n_l$.

Будь-яка лінза має два фокуси, що розташовані на ГОВ симетрично до оптичного центру. Відстань від оптичного центру до одного з фокусів – *фокусна*

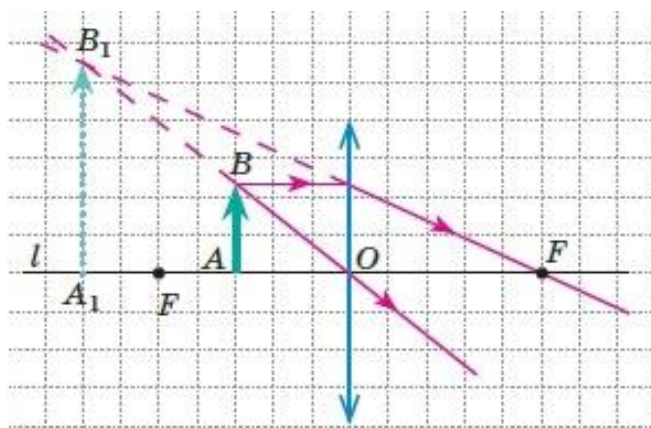
відстань лінзи (позначення F). **Оптична сила лінзи** (позначення D) – величина, обернена до фокусної відстані; оптична сила вимірюється в діоптріях: $[D] = \text{дптр} = \text{м}^{-1}$. **Оптична сила збиральної лінзи додатна, розсіювальної – від’ємна.**

Основні властивості ходу променів в лінзах наведені у табл. 4.1.

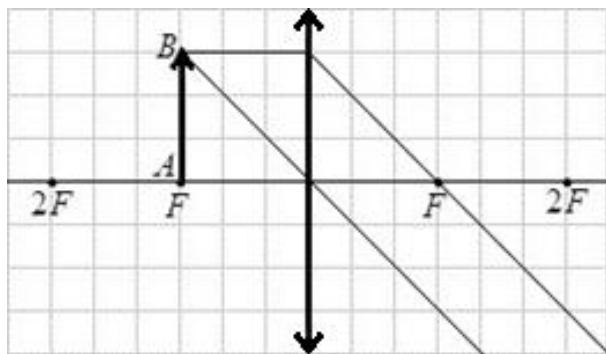
Таблиця 4.1. Основні властивості ходу променів в лінзах

	<p>Промінь, що проходить через оптичний центр, не заломлюється</p>
	<p>Промінь, що падає на збиральну лінзу паралельно до ГОВ, пройде через фокус. Продовження променя, що падає на розсіювальну лінзу паралельно до ГОВ, пройде через фокус.</p>
	<p>Промінь, що проходить через фокус збиральної лінзи, після проходження лінзи піде паралельно до ГОВ. Промінь, продовження якого проходить через фокус розсіювальної лінзи, після проходження лінзи піде паралельно до ГОВ.</p>

Таблиця 4.2. Можливі випадки зображень в збиральній лінзі

<p>Предмет між фокусом та лінзою $d < F$</p> 	<p>Зображення уявне, пряме, збільшене. Зображення за фокусом $f > F$. Зображення по той же самий бік лінзи, що і предмет.</p>
--	---

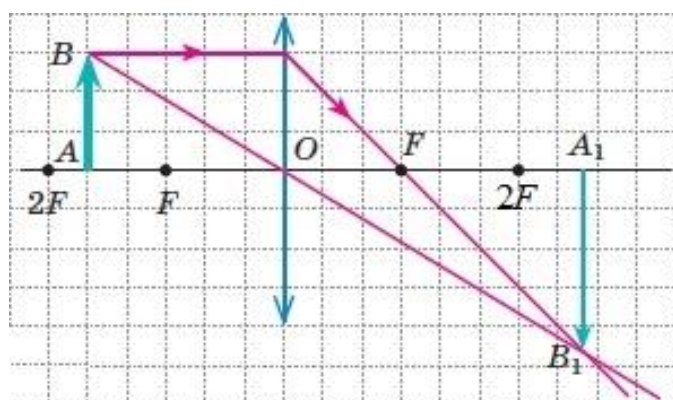
Предмет у фокусі $d = F$



Зображення не буде, бо промені після проходження лінзи є паралельними.

Або формально кажуть, що зображення знаходиться на нескінченності.

Предмет між фокусом і подвійним фокусом $d \in (F; 2F)$

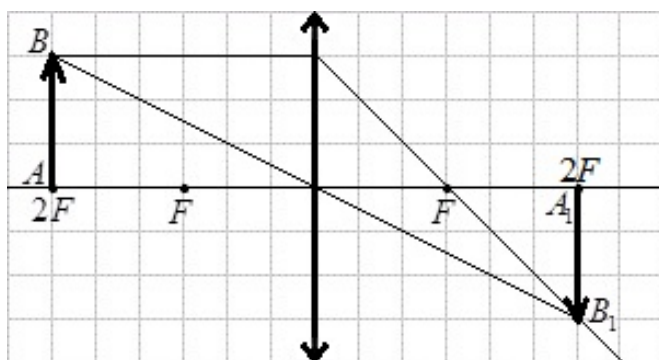


Зображення дійсне, збільшене, перевернуте.

Зображення за подвійним фокусом $f > 2F$.

Зображення по інший бік лінзи, ніж предмет.

Предмет у подвійному фокусі $d = 2F$

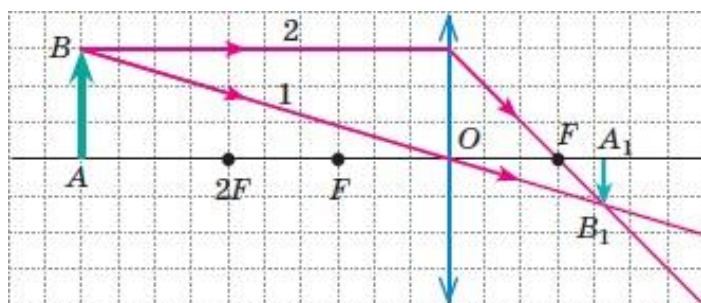


Зображення дійсне, перевернуте, однакового розміру з предметом.

Зображення в подвійному фокусі $f = 2F$.

Зображення по інший бік лінзи, ніж предмет.

Предмет за подвійним фокусом $d > 2F$



Зображення дійсне, перевернуте, зменшене.

Зображення між фокусом і подвійним фокусом $f \in (F, 2F)$.

Зображення по інший бік лінзи, ніж і предмет.

Зображення називається **дійсним**, якщо воно утворено перетином самих променів, і **уявним**, якщо продовженням променів. Позначимо d – відстань від предмета до лінзи, f – відстань від зображення до лінзи, F – фокусна відстань лінзи. Можливі випадки зображень в збиральній лінзі наведені в табл. 4.2. В розсіювальній лінзі в усіх випадках зображення уявне, пряме, зменшене, знаходиться між фокусом і лінзою ближче до лінзи, ніж предмет; зображення і предмет знаходяться по один бік лінзи, див. рис. 4.10.

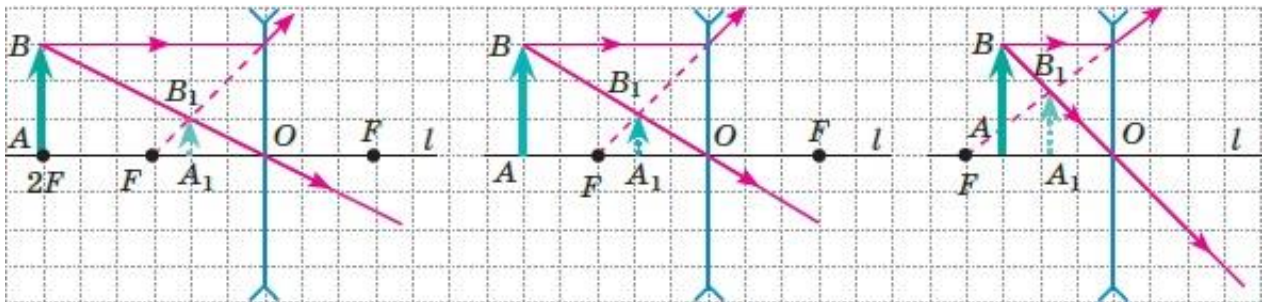


Рисунок 4.10

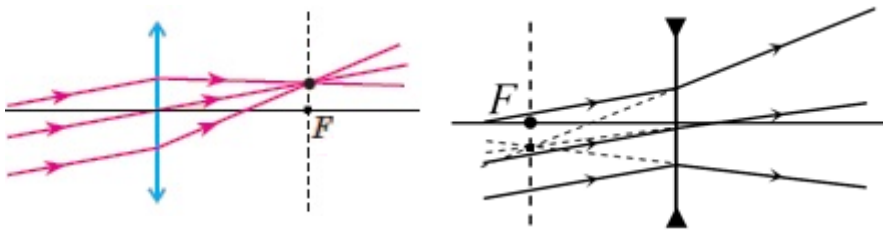


Рисунок 4.11

Якщо паралельний пучок променів падає на збиральну лінзу не паралельно до ГОВ, він збереться на

фокальній площині, а якщо на розсіювальну лінзу – то його продовження зберуться на фокальній площині, див. рис. 4.11.

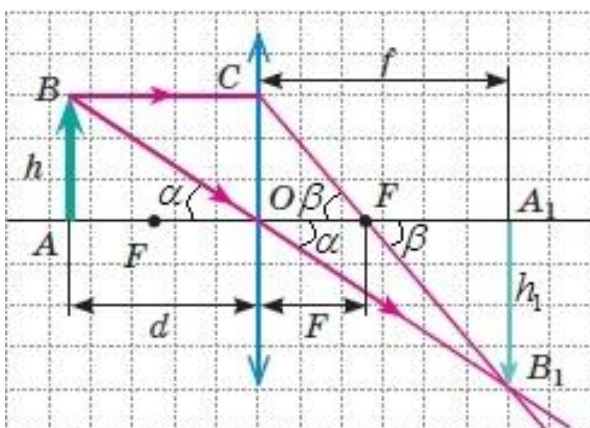


Рисунок 4.12

Розглянемо випадок, коли лінза збиральна та $2F > d > F$, див. рис. 4.12. Позначимо лінійний розмір предмета як h , лінійний розмір зображення як h_1 . З ΔBOA матимемо $\text{tg } \alpha = h/d$, з ΔB_1OA_1 матимемо $\text{tg } \alpha = h_1/f$. На основі цих двох виразів приходимо до висновку, що

$$\frac{h_1}{h} = \frac{f}{d}. \quad (4.15)$$

З $\triangle COF$ матимемо $\operatorname{tg} \beta = h/F$, з $\triangle A_1FB_1$ матимемо $\operatorname{tg} \beta = h_1/(f - F)$. На основі цих двох тверджень отримуємо

$$\frac{h_1}{h} = \frac{f - F}{F}. \quad (4.16)$$

На основі (4.15) та (4.16) отримуємо вираз

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}, \quad (4.17)$$

який називається **формулою тонкої лінзи**. Цю формулу можна довести не лише у випадку $d \in (F, 2F)$, а і в інших випадках, при цьому

- якщо зображення уявне, то f беруть зі знаком «−», інакше з «+»;
- якщо лінза розсіювальна, то F беруть зі знаком «−», інакше з «+»;
- вище розглянуто лише дійсні предмети, якщо предмет дійсний, то d беруть зі знаком «+». У випадку уявного предмету d беруть зі знаком «−».

В загальному випадку відношення лінійних розмірів предмета та зображення дається формулою

$$\frac{h_1}{h} = \frac{|f|}{|d|}. \quad (4.18)$$

Уявний предмет – ситуація в оптиці, коли на лінзу падає збіжний пучок променів, який у відсутності лінзи сформує в деякій точці простору дійсне зображення, див. рис. 4.13, A – уявний предмет, A' – дійсне зображення.

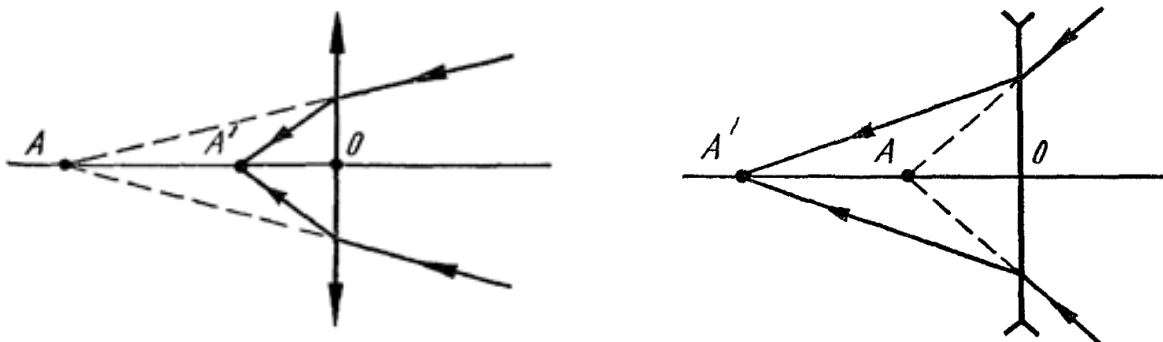


Рисунок 4.13

Зображення є дійсним, бо його утворили самі промені, а не їх продовження. Відстань від уявного предмету до лінзи береться зі знаком « \rightarrow » у формулі тонкої лінзи. У випадках, наведених на рис. 4.13, формула тонкої лінзи матиме вигляд

$$-\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}. \quad (4.19)$$

Нехай є система з n лінз та є певний предмет A перед системою лінз. Треба побудувати його зображення в системі. Побудова робиться таким чином:

1. Будуємо зображення предмета A в першій лінзі (зображення A_1).

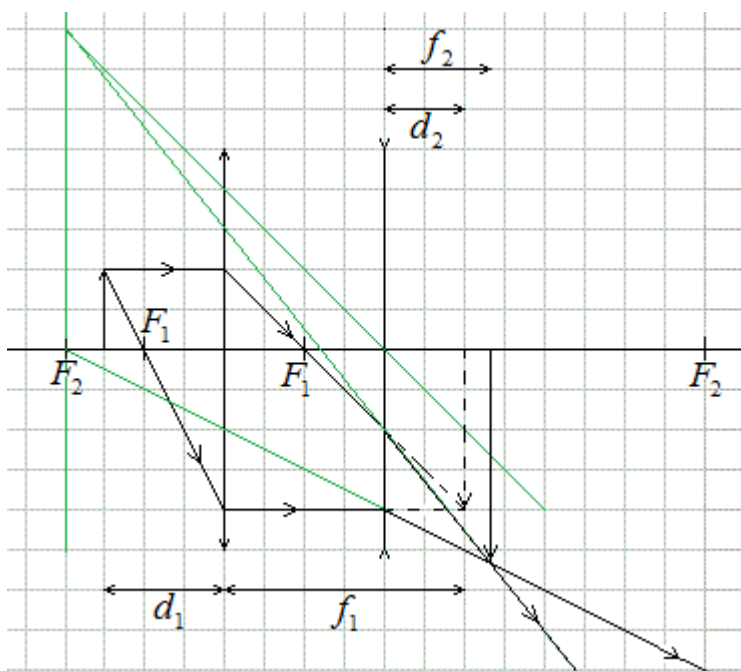


Рисунок 4.14

2. Зображення A_1 є, фактично, предметом для другої лінзи. Тобто будуємо зображення предмета A_1 в другій лінзі, отримуємо зображення A_2 . A_1 для другої лінзи може бути як дійсним предметом, так і уявним, в залежності від того, чи A_1 утворено перед другою лінзою, чи за другою лінзою.

3. Зображення A_2 є, фактично, предметом для третьої лінзи. Тобто будуємо зображення предмета A_2 в третій лінзі, отримуємо зображення A_3 .

І так далі. Зображення, отримане в попередній лінзі, виступає в ролі предмета для наступної лінзи. В якості прикладу наведена побудова зображення в системі збиральної та розсіювальної лінз, див. рис. 4.14. На рис. 4.14 побудовано реальний хід променів в системі, зображення предмета в системі лінз, а також зображення предмета в збиральній лінзі (пунктиром). Як бачимо, дійсно зображення предмета в системі є зображенням «пунктирного» зображення в розсіювальній лінзі.

4.2. Хвильова оптика

Хвильова оптика – розділ оптики, в якому вивчаються явища, які не описуються геометричною оптикою і для опису яких принципово важливою є хвильова природа світла.

4.2.1. Інтерференція світла

Нехай в певній точці простору накладаються один на одний два світлових промені. Напруженості електричного поля в них

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_{10} \cos(\omega t + \alpha_1), \quad \vec{E}_2 = \vec{E}_{20} \cos(\omega t + \alpha_2). \quad (4.20)$$

Згідно принципу суперпозиції в точці їх накладання напруженість поля $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$. Для простоти вважатимемо ці промені монохроматичними однакової частоти. Якщо різниця фаз $\alpha_1 - \alpha_2$ є постійною в часі, то такі промені називають *когерентними*, інакше – некогерентними.

Надалі розглядатимемо лише когерентні промені, і для простоти розглянемо випадок $\vec{E}_{10} \uparrow \uparrow \vec{E}_{20}$. В такому випадку

$$E = E_1 + E_2 = E_{10} \cos(\omega t + \alpha_1) + E_{20} \cos(\omega t + \alpha_2). \quad (4.21)$$

Методом допоміжного кута виділимо амплітуду величини E :

$$\begin{aligned} E &= E_{10} \cos(\omega t) \cos \alpha_1 - E_{10} \sin(\omega t) \sin \alpha_1 + \\ &+ E_{20} \cos(\omega t) \cos \alpha_2 - E_{20} \sin(\omega t) \sin \alpha_2 = \\ &= \cos(\omega t) (E_{10} \cos \alpha_1 + E_{20} \cos \alpha_2) - (E_{10} \sin \alpha_1 + E_{20} \sin \alpha_2) \sin(\omega t) = \\ &= A \left(\cos(\omega t) \frac{(E_{10} \cos \alpha_1 + E_{20} \cos \alpha_2)}{A} - \frac{(E_{10} \sin \alpha_1 + E_{20} \sin \alpha_2)}{A} \sin(\omega t) \right), \end{aligned} \quad (4.22)$$

де

$$A = \sqrt{(E_{10} \cos \alpha_1 + E_{20} \cos \alpha_2)^2 + (E_{10} \sin \alpha_1 + E_{20} \sin \alpha_2)^2}. \quad (4.23)$$

Позначимо

$$\eta = \frac{E_{10} \cos \alpha_1 + E_{20} \cos \alpha_2}{A}, \quad \xi = \frac{E_{10} \sin \alpha_1 + E_{20} \sin \alpha_2}{A}. \quad (4.24)$$

Через те, що $\eta \in [-1,1]$, $\xi \in [-1,1]$, $\eta^2 + \xi^2 = 1$ приходимо до висновку, що існує кут φ такий, що $\eta = \cos \varphi$ та $\xi = \sin \varphi$. Тоді (4.22) переписеться у вигляді

$$E = A \cos(\omega t + \varphi), \quad (4.25)$$

де за допомогою тригонометричних співвідношень амплітуду A на основі (4.23) можна представити у вигляді

$$A = \sqrt{E_{10}^2 + 2E_{20}E_{10} \cos(\alpha_1 - \alpha_2) + E_{20}^2}. \quad (4.26)$$

Інтенсивністю електромагнітної хвилі (в тому числі, світлової) є модуль середнього у часі вектору Пойнтінга. На основі (3.153) бачимо, що

$$E_0 = WH_0, \quad (4.27)$$

E_0, H_0 – модулі амплітуд напруженостей електричного та магнітного полів у хвилі, W – хвильовий опір простору. Згідно (3.160) та (4.27) бачимо, що

$$I = \frac{E_0 H_0}{2} = \frac{E_0^2}{2W} = \frac{1}{2W} E_0^2, \quad (4.28)$$

тож інтенсивність пропорційна до квадрату амплітуди електричного поля. На основі (4.26) та (4.28) отримуємо

$$\begin{aligned} A^2 &= E_{10}^2 + 2E_{20}E_{10} \cos(\alpha_1 - \alpha_2) + E_{20}^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{1}{2W} A^2 &= \frac{1}{2W} E_{10}^2 + 2 \frac{1}{\sqrt{2W}} E_{20} \frac{1}{\sqrt{2W}} E_{10} \cos(\alpha_1 - \alpha_2) + \frac{1}{2W} E_{20}^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1} \sqrt{I_2} \cos(\alpha_1 - \alpha_2), \end{aligned} \quad (4.29)$$

отриманий вираз з виразом для інтенсивності результуючої хвилі, яка виражена через інтенсивності хвиль, що накладаються одна на одну. Відповідно, якщо $\cos(\alpha_1 - \alpha_2) = 1 \Leftrightarrow \alpha_1 - \alpha_2 = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$, то

$$I = I_{\max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1} \sqrt{I_2} = (\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2})^2; \quad (4.30)$$

а якщо $\cos(\alpha_1 - \alpha_2) = -1 \Leftrightarrow \alpha_1 - \alpha_2 = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$, то

$$I = I_{\max} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1} \sqrt{I_2} = (\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2})^2. \quad (4.31)$$

Максимально можлива інтенсивність результуючої хвилі досягається, коли хвилі є в однаковій фазі, а мінімальна – коли хвилі є в протифазі.

Інтерференція світла — перерозподіл інтенсивності світла в результаті накладення (суперпозиції) декількох когерентних світлових хвиль. Інтерференція являє собою чередування «смуг» різної інтенсивності. Якщо накладаються хвилі однакової амплітуди ($I_1 = I_2$), то $I_{\max} = 4I_1$, $I_{\min} = 0$, інтерференційна картина буде чередуванням світлих і темних смуг (середина світлої смуги відповідає найбільшій інтенсивності, а середина темної смуги – нульовій інтенсивності).

Можна показати, що аналогічні результати будуть справедливими і для інших випадків взаємної орієнтації векторів \vec{E}_{10} та \vec{E}_{20} .

Для плоскої монохроматичної хвилі, що може описувати поширення світлових променів, справедливим є вираз (4.3). Розглянемо просту ситуацію, коли $\vec{n}_0 \uparrow \uparrow \vec{r}$. Тоді $(\vec{n}_0, \vec{r}) = S$ – шлях, пройдений хвилею, та

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_0 \cos\left(\omega t - \omega \frac{(\vec{n}_0, \vec{r})}{v}\right) = \vec{E}_0 \cos(\omega t + \alpha) \Rightarrow \\ \Rightarrow \alpha &= -\omega \frac{S}{v} = -\frac{\omega}{c} nS = -\frac{2\pi}{cT} nS = -\frac{2\pi}{\lambda} nS, \end{aligned} \quad (4.32)$$

де λ – довжина відповідної світлової хвилі у вакуумі, n – показник заломлення середовища; тут використано відомий вираз, $\lambda = cT$. Відповідно,

$$\alpha_1 = -\frac{2\pi}{\lambda} n_1 S_1, \quad \alpha_2 = -\frac{2\pi}{\lambda} n_2 S_2, \quad (4.33)$$

звідки

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \frac{2\pi}{\lambda} (n_2 S_2 - n_1 S_1), \quad (4.34)$$

Величина $\Delta = n_2 S_2 - n_1 S_1$ (різниця добутків пройдених шляхів на показники заломлення відповідних середовищ) називається **оптичною різницею ходу променів**. Відповідно, $\alpha_1 - \alpha_2 = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta$.

Максимум інтенсивності досягається при $\frac{2\pi}{\lambda}\Delta = 2\pi k \Rightarrow \Delta = k\lambda, k \in \mathbb{Z}$.

Максимум інтерференційної картини виникає тоді, коли оптична різниця ходу променів дорівнює цілому числу довжин хвиль у вакуумі. Мінімум

інтенсивності досягається при $\frac{2\pi}{\lambda}\Delta = 2\pi k + \pi \Rightarrow \Delta = \left(k + \frac{1}{2}\right)\lambda, k \in \mathbb{Z}$. *Мінімум*

інтерференційної картини виникає тоді, коли оптична різниця ходу променів дорівнює напівцілому числу довжин хвиль.

Зауважимо, що добитись когерентності, тобто постійності у часі величини $\alpha_1 - \alpha_2$ доволі непросто. Наприклад, світлові промені від природних або штучних джерел світла зазвичай не є когерентними, для них $\alpha_1 - \alpha_2$ залежить від часу, і $\langle \cos(\alpha_1 - \alpha_2) \rangle = 0$, що призводить до результату $I = I_1 + I_2$.

Серед поширених методів досягнення когерентності слід виділити такі: метод Юнга (з проколами в непрозорих екранах), методи Френеля (з біпризмою, з дзеркалами), метод кілець Ньютона, метод Ллойда (відбиття від плоского дзеркала), інтерференція в тонких плівках та тонких клинах та ін. В цьому посібнику детально розглянемо інтерференцію на **біпризмі Френеля**. Схематично установка з біпризмою Френеля зображена на рис. 4.15.

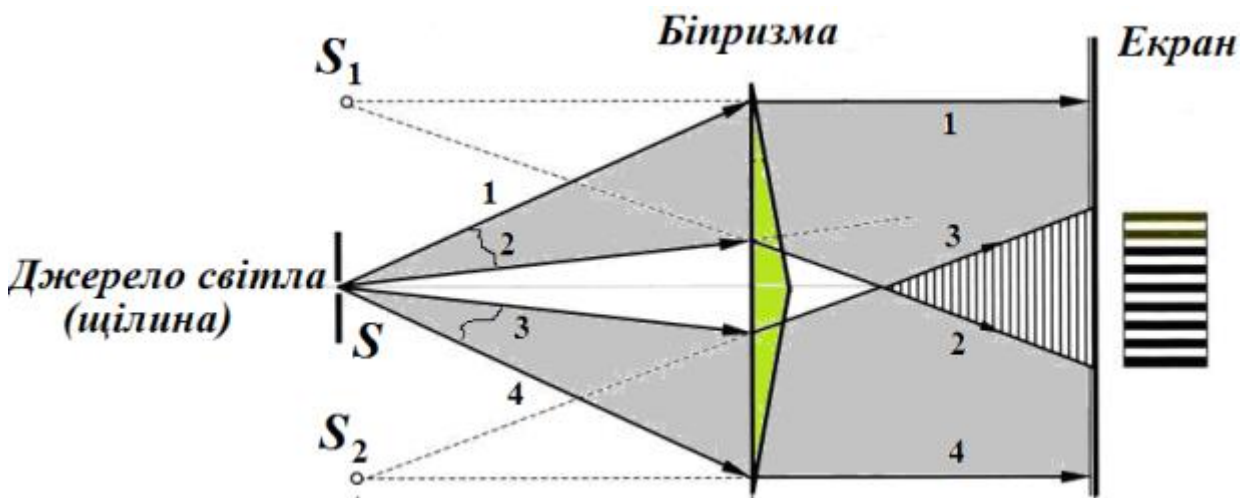


Рисунок 4.15

Розглянемо тонку щілину, розташовану на площині симетрії тонкої біпризми. На рис. 4.16 наведено комп'ютерну побудову ходу променів, що проходять крізь біпризму. Продовження променів, які пройшли через «верхню» частину біпризми, зберуться в одній точці S_1 , продовження променів, що пройшли через «нижню» частину, зберуться в одній точці S_2 . Для наглядності умовно синім позначено промені, що випромінюються «вгору», зеленим – «вниз», насправді джерело випромінює промені однакової частоти (однакового кольору).

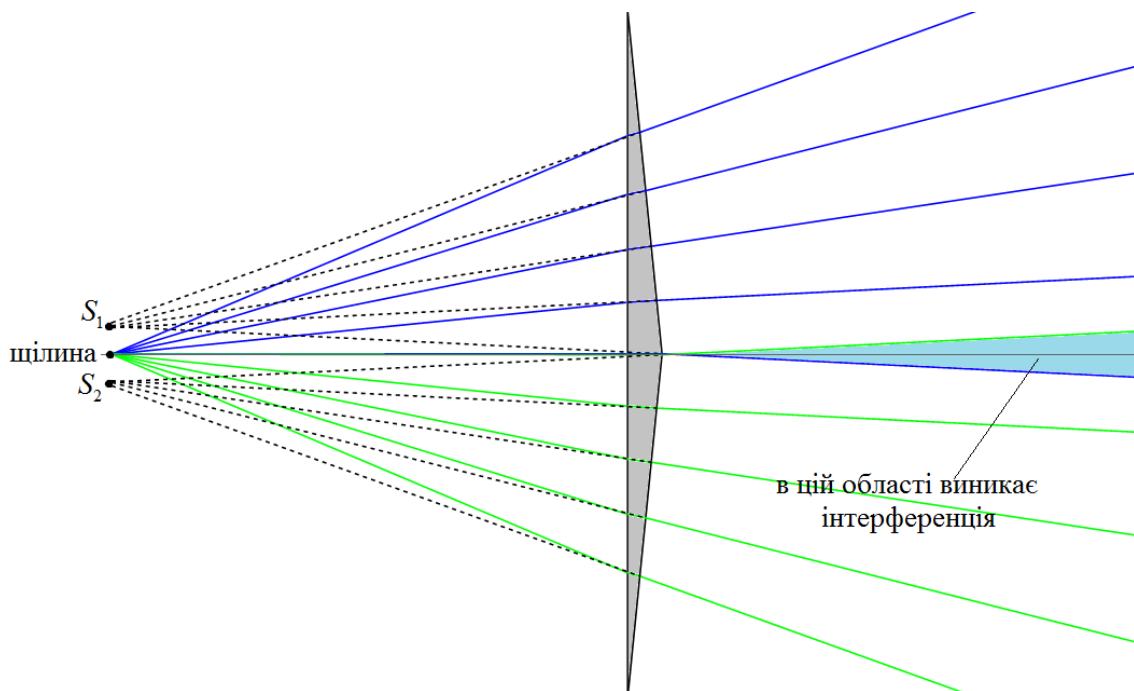


Рисунок 4.16

Області простору, що містять «сині» та «зелені» промені, перетинаються у певній вузькій зоні поблизу від площини симетрії біпризми, та утворюють там інтерференційну картину, див. рис. 4.16.

Детальний хід променів через біпризму зображено на рис. 4.17. На основі очевидних співвідношень

$$\delta = \alpha - \beta + \varphi - \gamma = \alpha - \beta + \varphi - \psi + \beta = \alpha + \varphi - \psi, \quad \beta = \arcsin\left(\frac{\sin \alpha}{n}\right), \quad (4.35)$$

$$\varphi = \arcsin(n \sin \gamma) = \arcsin\left(n \sin\left(\psi - \arcsin\left(\frac{\sin \alpha}{n}\right)\right)\right)$$

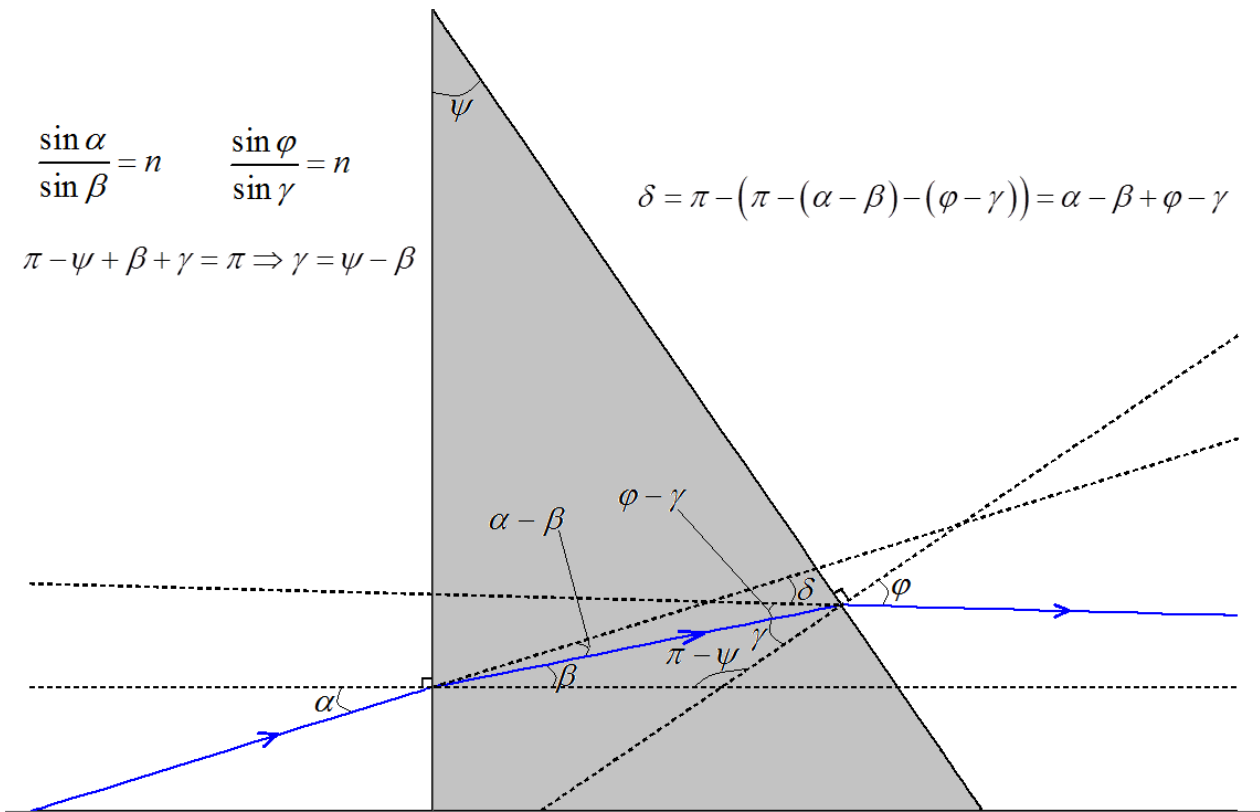


Рисунок 4.17

отримуємо вираз для кута δ , що є кутом між променем, що пройшов біпризму, та початковим напрямком руху променя до проходження біпризми:

$$\delta = \alpha - \beta + \varphi - \gamma = \alpha + \arcsin \left(n \sin \left(\psi - \arcsin \left(\frac{\sin \alpha}{n} \right) \right) \right) - \psi, \quad (4.36)$$

ψ – кут при вершині біпризми. Нас цікавить зона поблизу площини симетрії біпризми, тож нас цікавить випадок, коли кут α малий (коли промінь майже паралельний до площини симетрії біпризми). Кут заломлення біпризми теж малий, бо біпризма тонка. При малих кутах $\alpha \ll 1$, $\psi \ll 1$ маємо

$$\delta \approx \alpha + n \left(\psi - \frac{\alpha}{n} \right) - \psi = (n-1)\psi, \quad (4.37)$$

тут використано, що при $|x| \ll 1$ $\sin x = x + O(x^3)$, $\arcsin x = x + O(x^3)$, та знехтувано всіма внесками окрім головних членів. Тож промені, що утворять границі зони, де матиме місце інтерференція, відхиляться від горизонталі на кут $\delta = (n-1)\psi$, див. рис. 4.18.

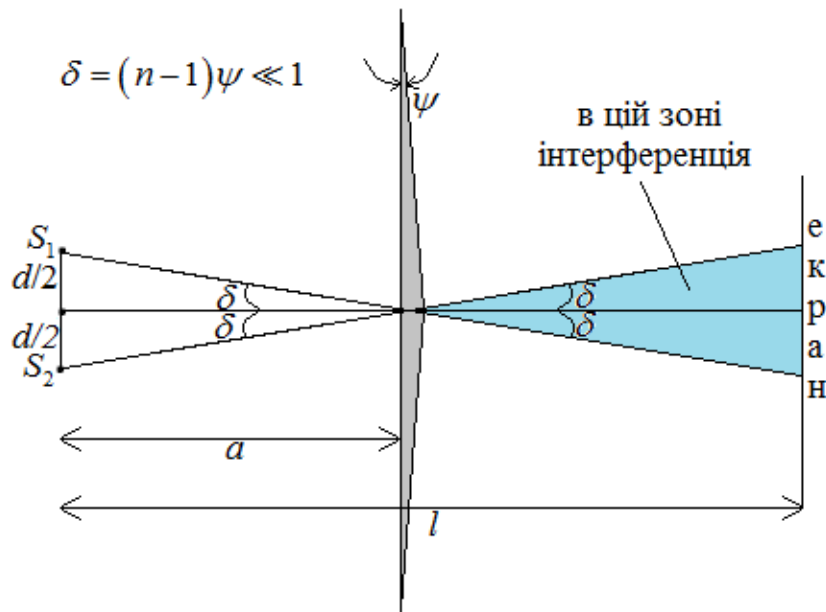


Рисунок 4.18

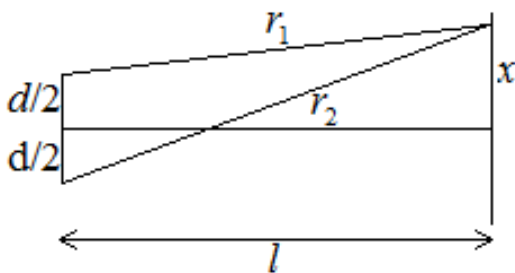


Рисунок 4.19

Можна вважати, що інтерференційна картина утворена двома уявними точковими джерелами світла S_1 та S_2 , що знаходяться на тій же відстані від біпризми, що і щілина. Згідно рис. 4.18 бачимо, що відстань між цими джерелами

$$d = 2a \operatorname{tg} \delta \approx 2a\delta = 2a(n-1)\psi, \quad (4.38)$$

тут враховано вираз (4.37) та те, що $\operatorname{tg} \delta = \delta + O(\delta^3)$ при $|\delta| \ll 1$. Тож задача звелась до задачі опису інтерференційної картини від двох точкових джерел світла, див. рис. 4.19. Різниця ходу променів на екрані в точці, що на відстані x від площини симетрії біпризми

$$\begin{aligned} \Delta r = r_2 - r_1 &= \sqrt{\left(x + \frac{d}{2}\right)^2 + l^2} - \sqrt{\left(x - \frac{d}{2}\right)^2 + l^2} = \\ &= l\sqrt{1 + \left(\frac{x + 0,5d}{l}\right)^2} - l\sqrt{1 + \left(\frac{x - 0,5d}{l}\right)^2} \approx \\ &\approx l\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{x + 0,5d}{l}\right)^2\right) - l\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{x - 0,5d}{l}\right)^2\right) = \frac{l}{2} \frac{4 \cdot x \cdot 0,5d}{l^2} = \frac{xd}{l}, \end{aligned} \quad (4.39)$$

тут використано, що $\frac{|x \pm 0,5d|}{l} \ll 1$ та $\sqrt{1+y} = 1 + \frac{y}{2} + O(y^2)$ при $|y| \ll 1$.

Якщо різниця ходу променів дорівнює цілому числу довжин хвиль, то спостерігається інтерференційний максимум, якщо напівцілому – інтерференційний мінімум. Тож згідно (4.39) виразимо координати центрів сусідніх світлих смуг на екрані:

$$\frac{x_2 d}{l} = (k+1)\lambda, \quad \frac{x_1 d}{l} = k\lambda, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (4.40)$$

звідки відстань між ними

$$\Delta x = x_2 - x_1 = \frac{\lambda l}{d} \Rightarrow \lambda = \frac{\Delta x \cdot d}{l} \Rightarrow \lambda = \frac{2a(n-1)\psi \cdot \Delta x}{l}, \quad (4.41)$$

при виведенні (4.41) використано вираз (4.38). Остаточний вираз у (4.41) є робочою формулою визначення довжини хвилі світла через параметри експериментальної установки з біпризмою Френеля; тут Δx – відстань між центрами сусідніх світлих смуг на екрані, a – відстань від щілини до біпризми, ψ – кут при вершині біпризми, l – відстань між щілиною і екраном, n – показник заломлення матеріалу біпризми.

4.2.2. Дифракція світла

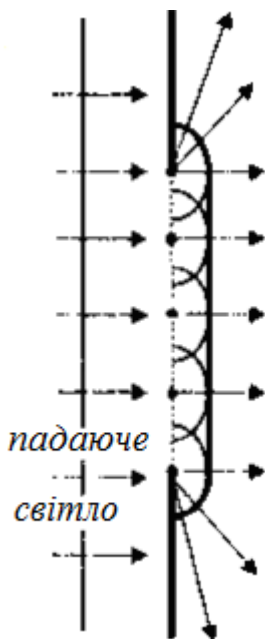


Рисунок 4.20

Без детального математичного опису коротко опишемо сутність поняття дифракції світла.

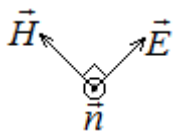
Під **дифракцією** світла розуміють будь-яке відхилення світлових променів від прямих ліній, яке виникає при проходженні світла поблизу країв непрозорих тіл, а також при поширенні світла через малі отвори і щілини.

Дифракцією світла називають огинання світловими хвилями перешкод і проникнення світла в область геометричної тіні. Дифракція має місце, коли розміри цих перешкод одного порядку з довжиною хвилі. Як і при інтерференції, при дифракції відбувається перерозподіл

інтенсивності світла в результаті суперпозиції хвиль. Однак, якщо при інтерференції відбувається перерозподіл інтенсивності в результаті суперпозиції хвиль від скінченного числа дискретних когерентних джерел, то при дифракції – від джерел, розташованих безперервно, див. рис. 4.20. В основі ідеї математичного опису дифракції лежить так званий принцип Гюйгенса. Згідно нього передбачається, що при поширенні хвилі кожна точка хвильового фронту є джерелом вторинних сферичних хвиль.

Наприклад, при дифракції на щілині кожену точку щілини можна розглянути як джерело вторинної хвилі, а дифракційна картина буде суперпозицією (інтегралом) таких хвиль.

4.2.3. Поляризація світла



Розглянемо плоску електромагнітну хвилю, що поширюється у відкритому просторі, див. рис. 4.21. Якщо

напрямок та модуль вектору \vec{E} у площині рисунку може бути будь-яким, то таке світло називається неполяризованим. Якщо ж кінець вектору \vec{E} може займати лише певні фіксовані положення, то таке світло називають поляризованим.

На рис. 4.22 одиничний вектор \vec{n} в напрямку розповсюдження хвилі спрямований «на нас», а лінії показують можливе розташування кінця вектору \vec{E} , початок вектору \vec{E} в початку координат.

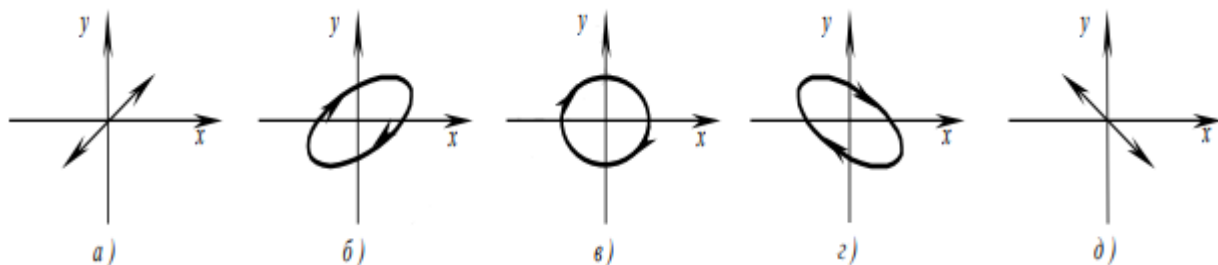


Рисунок 4.22

На рис. 4.22.а та 4.22.д зображено лінійну поляризацію (коливання вектору \vec{E} можуть проходити лише в одній площині); на рис. 4.22.б та 4.22.г – еліптичну поляризацію, на рис. 4.22.в – кругову поляризацію.

Пристрої, які можуть поляризувати світло, називаються *поляроїдами* (неполяризоване світло, що падає на поляроїд, після його проходження становиться поляризованим; поляроїди роблять з певного типу кристалів, що мають відповідні властивості).

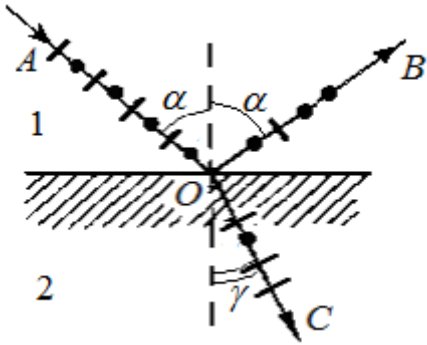


Рисунок 4.23

Розглянемо неполяризований промінь світла, що падає на поверхню розділу двох середовищ, див. рис. 4.23. «Рисочка» позначає коливання вектору \vec{E} в площині рисунку, «кружечок» – в площині, перпендикулярній до площини рисунку. Як відомо, у відбитому промені будуть здебільшого «кружечки», а у заломленому – здебільшого «рисочки». Тобто обидва ці промені будуть частково поляризовані.

Кут Брюстера – це такий кут падіння, при якому відбитий промінь буде повністю поляризованим (в ньому будуть лише «кружечки»). Як відомо, кут Брюстера задається виразом

$$\operatorname{tg} \alpha_B = \frac{n_2}{n_1}, \quad (4.42)$$

Якщо кут падіння дорівнює куту Брюстера, то виконуються співвідношення

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{n_2}{n_1}, \quad \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{n_2}{n_1}, \quad (4.43)$$

звідки

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} \Rightarrow \cos \alpha = \sin \gamma \Rightarrow \gamma = \frac{\pi}{2} - \alpha, \quad (4.44)$$

тож у випадку, коли кут падіння дорівнює куту Брюстера, заломлений та відбитий промені є перпендикулярними.

4.3. Контрольні питання до розділу 4

1. Сформулювати закони геометричної оптики. Вивести закони відбивання та заломлення світла.

2. Дати визначення лінзи та тонкої лінзи. Чому максимального поширення набули саме тонкі лінзи? Дати визначення оптичного центру, фокусної відстані та оптичної сили тонкої лінзи. Навести основні властивості ходу променів та класифікацію зображень в тонких лінзах.

3. Дати визначення уявного предмету. Вивести (на одному конкретно взятому прикладі) формулу тонкої лінзи. Описати принцип побудови зображень в системі тонких лінз.

4. Навести визначення інтерференції світла. Вивести вираз для інтенсивності результуючої хвилі при накладанні двох когерентних променів. Дати визначення оптичної різниці ходу променів, сформулювати умови максимуму та мінімуму інтенсивності в інтерференційній картині.

5. Описати установку з біпризмою Френеля. Вивести робочу формулу для довжини хвилі світла в даній установці.

6. Дати визначення та коротко словами описати явище дифракції світла.

7. Дати визначення поляризованого та неполяризованого світла. Дати визначення кута Брюстера та вказати вираз для нього. Знайти кут між заломленим та відбитим променями, якщо кут падіння дорівнює куту Брюстера.

5. Термодинаміка та статистична фізика

5.1. Розподіл частинок газу за швидкостями

5.1.1. Випадкова величина, випадкова подія

Випадкова подія – подія, яка може відбутись або ні з певною ймовірністю.

Ймовірність випадкової події A за визначенням є

$$P(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_1}{N}, \quad (5.1)$$

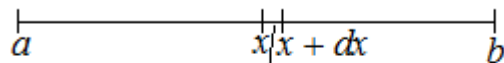
де N – кількість дослідів, в кожному з яких подія A може відбутись або ні, N_1 – кількість дослідів, в яких подія A відбулась.

Ймовірність одночасного трапляння подій A , B , C обчислюється за формулою

$$P(ABC) = P(A)P(B/A)P(C/AB), \quad (5.2)$$

де $P(B/A)$ – ймовірність події B при умові, що трапилась подія A ; $P(C/AB)$ – ймовірність події C при умові, що трапились події A та B одночасно. Якщо всі ці події незалежні, то

$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C). \quad (5.3)$$



Ймовірність потрапити в цей проміжок дорівнює $f(x)dx$

Рисунок 5.1

Випадкова величина –

величина, яка може приймати різні значення з різною ймовірністю.

Нехай випадкова величина x неперервна (тобто може приймати

значення на неперервному проміжку $x \in [a, b]$). Тоді **густиною ймовірності** даної величини за визначенням є функція $f(x)$ така, що

$$P(x \in (x, x + dx)) = f(x)dx, \quad (5.4)$$

де $P(x \in (x, x + dx))$ – ймовірність випадкової величини потрапити в проміжок $x \in (x, x + dx)$, див. рис. 5.1. Відповідно, ймовірність потрапити в інтервал $x \in (a_1, a_2)$ – сума ймовірностей потрапити в нескінченно малі проміжки, на які розбито цей інтервал, тобто інтеграл:

$$P(x \in (a_1, a_2)) = \int_{a_1}^{a_2} f(x) dx. \quad (5.5)$$

Якщо величина визначена на проміжку $x \in [a, b]$, то величина гарантовано потрапить в цей проміжок, тож ймовірність потрапити в цей проміжок дорівнює 1, що зумовлює умову нормування:

$$P(x \in [a, b]) = \int_a^b f(x) dx = 1. \quad (5.6)$$

За визначенням, *середнє значення* від деякої функції від випадкової величини

$$\langle g(x) \rangle = \int_a^b g(x) f(x) dx. \quad (5.7)$$

Наприклад, середнє значення випадкової величини

$$\langle x \rangle = \int_a^b x f(x) dx, \quad (5.8)$$

Та середньоквадратичне значення випадкової величини

$$\langle x^2 \rangle = \int_a^b x^2 f(x) dx. \quad (5.9)$$

5.1.2. Закон розподілу частинок ідеального газу за швидкостями

Ідеальний газ являє собою теоретичну модель газу, в якій передбачається, що:

- потенціальною енергією взаємодії матеріальних часток, що складають газ, можна знехтувати в порівнянні з їх кінетичною енергією;
- сумарний об'єм частинок газу дуже малий порівняно з об'ємом посудини, що займає газ; сумарним об'ємом частинок газу можна знехтувати;
- між частинками немає далекодіючих сил притягання або відштовхування, зіткнення часток між собою і зі стінками посудини абсолютно пружні;
- час взаємодії (зіткнення) між частинками нехтовно малий в порівнянні із середнім часом між зіткненнями.

Модель ідеального газу є добре застосовною до опису реальних газів при не дуже малих і не дуже великих тисках та температурах, тобто в доволі широкому інтервалі тисків та температур, за порядком величини тиск та температура не повинні надто сильно відрізнятись від так званих нормальних умов (тиск 10^5 Па, температура 273 К). Ідеальний газ при заданій фіксованій температурі в рівновазі підпорядковується розподілу Максвелла за швидкостями.

З огляду на дуже велику кількість числа частинок ми не можемо, користуючись законами механіки, провести динамічний опис системи (наприклад, як відомо, 1 моль містить $6,02 \cdot 10^{23}$ частинок; не існує такої комп'ютерної потужності, яка дозволить розв'язати систему з $6,02 \cdot 10^{23}$ рівнянь). Тож необхідно користуватися статистичними закономірностями, заснованими на теорії ймовірностей.

В рівноважному стані всі напрями швидкостей частинок газу є рівноймовірними. Інакше б теплових рух частинок газу був би не повністю хаотичним. Модулі швидкостей частинок газу не можуть бути однаковими. Навіть якщо б в деякий момент часу модулі всіх швидкостей частинок газу були б однаковими, нецентральні зіткнення між частинками порушили б такий стан. А статистичний розподіл частинок за швидкостями має не змінюватись у часі.

Визначення **температури** газу (абсолютної, в кельвінах): середня кінетична енергія *поступального* руху однієї частинки газу

$$\langle E_k \rangle = \frac{3}{2} kT, \quad (5.10)$$

k – константа Больцмана, $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К; T – абсолютна температура газу (тобто температура в Кельвінах).

Спершу розглянемо ймовірність того, що x -складова швидкості частинки лежить в малому діапазоні від v_x до $v_x + dv_x$, а y -складова та z -складова можуть бути будь-якими. Така ймовірність має бути пропорційною до ширини інтервалу dv_x , тож

$$dP_x = \varphi(v_x) dv_x, \quad (5.11)$$

де $\varphi(v_x)$ – коефіцієнт пропорційності – по суті є густиною ймовірності випадкової величини v_x .

Аналогічно ймовірність того, що y -складова швидкості частинки лежить в малому діапазоні від v_y до $v_y + dv_y$, а x -складова та z -складова можуть бути будь-якими

$$dP_y = \varphi(v_y) dv_y. \quad (5.12)$$

Аналогічно ймовірність того, що z -складова швидкості частинки лежить в малому діапазоні від v_z до $v_z + dv_z$, а x -складова та y -складова можуть бути будь-якими

$$dP_z = \varphi(v_z) dv_z. \quad (5.13)$$

Густини ймовірності в dP_x , dP_y та dP_z є однаковими залежностями від швидкості, бо всі напрямки є рівноправними (простір ізотропний – в ньому немає виділених напрямків).

Тепер розглянемо ймовірність того, що одночасно $v_x \in (v_x, v_x + dv_x)$, $v_y \in (v_y, v_y + dv_y)$, $v_z \in (v_z, v_z + dv_z)$. Припустимо, що ці три події *незалежні*. Тоді згідно (5.3) та (5.11) – (5.13)

$$dP = dP_x dP_y dP_z = \varphi(v_x) \varphi(v_y) \varphi(v_z) dv_x dv_y dv_z. \quad (5.14)$$

Добуток $\varphi(v_x) \varphi(v_y) \varphi(v_z)$ запишемо у вигляді

$$\varphi(v_x) \varphi(v_y) \varphi(v_z) = f(v_x, v_y, v_z) = f(\vec{v}), \quad (5.15)$$

так можна писати, бо функція від всіх трьох компонент швидкості є функцією від вектору швидкості.

Так як додатний та від'ємний напрямки вздовж кожної осі еквівалентні, то $\varphi(v_i) = \varphi(-v_i)$. Відповідно, $f(\vec{v})$ залежить лише від модуля швидкості: $f(\vec{v}) = f(v)$.

Фактично, $f(\vec{v}) = f(v)$ – густина ймовірності випадкової величини, яка собою являє вектор швидкості однієї частини газу.

На основі (5.15) бачимо, що

$$\ln f(v) = \ln \varphi(v_x) + \ln \varphi(v_y) + \ln \varphi(v_z), \quad (5.16)$$

звідки частинна похідна

$$\frac{\partial \ln f(v)}{\partial v_x} = \frac{\partial \ln \varphi(v_x)}{\partial v_x}. \quad (5.17)$$

З іншого боку, за правилом взяття похідної від складеної функції

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln f(v)}{\partial v_x} &= \frac{1}{f(v)} \frac{df(v)}{\partial v_x} = \frac{1}{f(v)} \frac{df(v)}{dv} \frac{\partial v}{\partial v_x} = \frac{f'(v)}{f(v)} \frac{\partial \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}{\partial v_x} = \\ &= \frac{f'(v)}{f(v)} \frac{1}{2\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} \frac{\partial (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{\partial v_x} = \frac{f'(v)}{f(v)} \frac{2v_x}{2v} = \frac{f'(v)}{f(v)} \frac{v_x}{v}, \end{aligned} \quad (5.18)$$

тут використане позначення $f'(v) = \frac{df(v)}{dv}$ та той факт, що $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$.

Також за правилом взяття похідної від складеної функції

$$\frac{\partial \ln \varphi(v_x)}{\partial v_x} = \frac{1}{\varphi(v_x)} \frac{\partial \varphi(v_x)}{\partial v_x} = \frac{1}{\varphi(v_x)} \frac{d\varphi(v_x)}{dv_x} = \frac{\varphi'(v_x)}{\varphi(v_x)}, \quad (5.19)$$

тут використане позначення $\varphi'(v_x) = \frac{d\varphi(v_x)}{dv_x}$. На основі (5.17) – (5.19) матимемо

$$\frac{1}{v} \frac{f'(v)}{f(v)} = \frac{1}{v_x} \frac{\varphi'(v_x)}{\varphi(v_x)}. \quad (5.20)$$

Аналогічно якщо від обох частин виразу (5.16) взяти частинну похідну по v_y ,

отримаємо

$$\frac{1}{v} \frac{f'(v)}{f(v)} = \frac{1}{v_y} \frac{\varphi'(v_y)}{\varphi(v_y)}, \quad (5.21)$$

та якщо від обох частин виразу (5.16) взяти частинну похідну по v_z , отримаємо

$$\frac{1}{v} \frac{f'(v)}{f(v)} = \frac{1}{v_z} \frac{\varphi'(v_z)}{\varphi(v_z)}. \quad (5.22)$$

На основі (5.20) – (5.22) випишемо

$$\frac{1}{v_x} \frac{\varphi'(v_x)}{\varphi(v_x)} = \frac{1}{v_y} \frac{\varphi'(v_y)}{\varphi(v_y)} = \frac{1}{v_z} \frac{\varphi'(v_z)}{\varphi(v_z)} = \frac{1}{v} \frac{f'(v)}{f(v)}. \quad (5.23)$$

Ця рівність може виконатись лише, коли кожна з цих функцій дорівнює одній і тій же константі, бо це функції від різних аргументів. Позначимо цю константу як $-\alpha$, чому саме знак « $-$ » зручний, побачимо далі:

$$\frac{1}{v_x} \frac{\varphi'(v_x)}{\varphi(v_x)} = -\alpha, \quad \frac{1}{v_y} \frac{\varphi'(v_y)}{\varphi(v_y)} = -\alpha, \quad \frac{1}{v_z} \frac{\varphi'(v_z)}{\varphi(v_z)} = -\alpha. \quad (5.24)$$

Проінтегруємо перше рівняння (5.24):

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_x} \frac{\varphi'(v_x)}{\varphi(v_x)} = -\alpha &\Rightarrow \frac{1}{v_x} \frac{1}{\varphi} \frac{d\varphi}{dv_x} = -\alpha \Rightarrow \frac{d\varphi}{\varphi} = -\alpha v_x dv_x \Rightarrow \\ &\Rightarrow \int \frac{d\varphi}{\varphi} = -\alpha \int v_x dv_x \Rightarrow \ln \varphi = -\frac{\alpha v_x^2}{2} + C, \end{aligned} \quad (5.25)$$

C – константа інтегрування. Перетворимо отриманий вираз:

$$e^{\ln \varphi} = e^{-\frac{\alpha v_x^2}{2}} e^C \Rightarrow \varphi = A e^{-\frac{\alpha v_x^2}{2}} \Rightarrow \varphi(v_x) = A e^{-\frac{\alpha v_x^2}{2}}, \quad (5.26)$$

$A = e^C = \text{const}$. Аналогічно з (5.24) отримаємо

$$\varphi(v_y) = A e^{-\frac{\alpha v_y^2}{2}}, \quad \varphi(v_z) = A e^{-\frac{\alpha v_z^2}{2}}. \quad (5.27)$$

Згідно (5.26), (5.27), (5.15) матимемо

$$f(v) = \varphi(v_x) \varphi(v_y) \varphi(v_z) = B e^{-\frac{\alpha(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2}} = B e^{-\frac{\alpha v^2}{2}}, \quad (5.28)$$

де $B = A^3 = \text{const}$. На основі (5.14), (5.15) та (5.28) отримаємо, що ймовірність того, що одночасно $v_x \in (v_x, v_x + dv_x)$, $v_y \in (v_y, v_y + dv_y)$, $v_z \in (v_z, v_z + dv_z)$

$$dP = dP_x dP_y dP_z = f(v) dv_x dv_y dv_z = B e^{-\frac{\alpha v_x^2}{2}} e^{-\frac{\alpha v_y^2}{2}} e^{-\frac{\alpha v_z^2}{2}} dv_x dv_y dv_z. \quad (5.29)$$

Умова нормування відображає той факт, що ймовірність того, що одночасно $v_x \in (-\infty, \infty)$, $v_y \in (-\infty, \infty)$, $v_z \in (-\infty, \infty)$ дорівнює 1. Нескінченні швидкості розглядати, на перший погляд, фізично не зовсім коректно через те, що швидкість матеріального об'єкту не перевищує швидкості світла. Але

ймовірність потрапляння в діапазон надсвітлових швидкостей буде мізерно малою, через це такий розгляд є коректним:

$$B \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{av_x^2}{2}} e^{-\frac{av_y^2}{2}} e^{-\frac{av_z^2}{2}} dv_x dv_y dv_z = 1. \quad (5.30)$$

Як відомо, «табличними» інтегралами є

$$\int_0^{+\infty} x^{2n} e^{-px^2} dx = \frac{(2n-1)!!}{2(2p)^n} \sqrt{\frac{\pi}{p}}, \quad \int_0^{+\infty} x^{2n+1} e^{-px^2} dx = \frac{n!}{2p^{n+1}}. \quad (5.31)$$

Зокрема, на основі (5.31) отримаємо, що

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{av_x^2}{2}} dv_x = 2 \int_0^{+\infty} e^{-\frac{av_x^2}{2}} dv_x = 2 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}} = \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}}, \quad (5.32)$$

тут використано, що $e^{-\frac{av_x^2}{2}}$ є парною функцією від v_x . Згідно (5.32) обчислимо константу B на основі (5.30):

$$B \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{av_x^2}{2}} dv_x \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{av_y^2}{2}} dv_y \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{av_z^2}{2}} dv_z = 1 \Rightarrow B = \left(\frac{\alpha}{2\pi} \right)^{3/2}. \quad (5.33)$$

Константу α можна виразити через температуру газу. Згідно визначення (5.10) матимемо

$$\langle E_k \rangle = \frac{3}{2} kT \Rightarrow \left\langle \frac{mv^2}{2} \right\rangle = \frac{3}{2} kT \Rightarrow \langle v^2 \rangle = \frac{3kT}{m}. \quad (5.34)$$

Згідно визначення середнього квадрату (5.9) маємо

$$\langle v^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} v^2 f(v) dv_x dv_y dv_z. \quad (5.35)$$

На основі (5.28) та (5.33) випишемо

$$\begin{aligned} \langle v^2 \rangle &= \left(\frac{\alpha}{2\pi} \right)^{3/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) e^{-\frac{av_x^2}{2}} e^{-\frac{av_y^2}{2}} e^{-\frac{av_z^2}{2}} dv_x dv_y dv_z = \\ &= \left(\frac{\alpha}{2\pi} \right)^{3/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} v_x^2 e^{-\frac{av_x^2}{2}} e^{-\frac{av_y^2}{2}} e^{-\frac{av_z^2}{2}} dv_x dv_y dv_z + \end{aligned} \quad (5.36)$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{\alpha}{2\pi} \right)^{3/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} v_y^2 e^{-\frac{av_x^2}{2}} e^{-\frac{av_y^2}{2}} e^{-\frac{av_z^2}{2}} dv_x dv_y dv_z + \\
& + \left(\frac{\alpha}{2\pi} \right)^{3/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} v_z^2 e^{-\frac{av_x^2}{2}} e^{-\frac{av_y^2}{2}} e^{-\frac{av_z^2}{2}} dv_x dv_y dv_z.
\end{aligned}$$

Обчислимо перший з отриманих трьох інтегралів. На основі (5.31) маємо

$$\int_{-\infty}^{+\infty} v_x^2 e^{-\frac{av_x^2}{2}} dv_x = 2 \int_0^{+\infty} v_x^2 e^{-\frac{av_x^2}{2}} dv_x = \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}}, \quad (5.37)$$

звідси та з урахуванням (5.32) отримуємо

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} v_x^2 e^{-\frac{av_x^2}{2}} e^{-\frac{av_y^2}{2}} e^{-\frac{av_z^2}{2}} dv_x dv_y dv_z &= \int_{-\infty}^{+\infty} v_x^2 e^{-\frac{av_x^2}{2}} dv_x \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{av_y^2}{2}} dv_y \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{av_z^2}{2}} dv_z = \\
&= \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}} \cdot \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}} \cdot \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}} = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{2\pi}{\alpha} \right)^{3/2}.
\end{aligned} \quad (5.38)$$

Аналогічно

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} v_y^2 e^{-\frac{av_x^2}{2}} e^{-\frac{av_y^2}{2}} e^{-\frac{av_z^2}{2}} dv_x dv_y dv_z = \\
& = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} v_z^2 e^{-\frac{av_x^2}{2}} e^{-\frac{av_y^2}{2}} e^{-\frac{av_z^2}{2}} dv_x dv_y dv_z = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{2\pi}{\alpha} \right)^{3/2}.
\end{aligned} \quad (5.39)$$

та

$$\langle v^2 \rangle = \frac{3}{\alpha}. \quad (5.40)$$

Тоді з урахуванням (5.34) матимемо

$$\alpha = \frac{m}{kT}, \quad (5.41)$$

та на основі (5.41), (5.33) та (5.28) остаточно «зберемо» результат:

$$\begin{aligned}
f(\vec{v}) = f(v) &= \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} e^{-\frac{mv_y^2}{2kT}} e^{-\frac{mv_z^2}{2kT}} = \\
&= \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2kT}} = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}}.
\end{aligned} \quad (5.42)$$

Тож густина ймовірності випадкової величини, яка собою являє вектор швидкості однієї частинки газу являє собою вираз (5.42), де m – маса однієї частинки (атому, якщо газ атомарний та молекули, якщо газ молекулярний), k – константа Больцмана, $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К; T – абсолютна температура газу. **Цей результат носить назву розподілу Максвелла.**

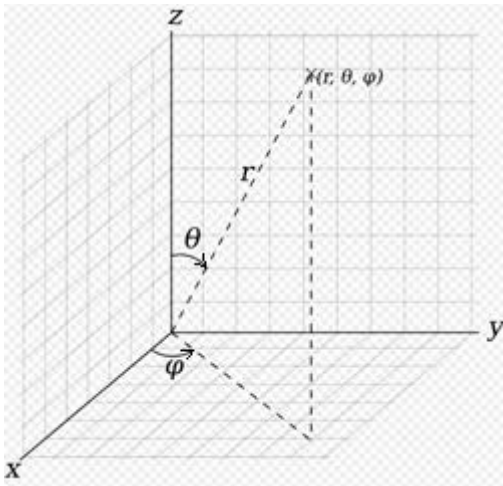


Рисунок 5.2

На основі цього розподілу можна отримати розподіл одновимірної випадкової величини, що являє собою модуль швидкості частинки. Скористаємося сферичною системою координат, див. рис. 5.2. В сферичній системі координат положення точки задається такими координатами: r – відстань від точки до початку координат (по суті, модуль радіус-вектора точки); θ – кут, що відкладено від Oz до радіус-вектора точки; φ – кут, що відкладено від Ox до проекції точки на площину xOy .

В залежності від місцезнаходження точки величина r може набувати значення в діапазоні $r \in [0, \infty)$, величина θ може набувати значення в діапазоні $\theta \in [0, \pi]$, величина φ може набувати значення в діапазоні $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Елементарний об'єм в декартових координатах виражається як $dx dy dz$, а в сферичних – як $r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta$ (це можна показати або суто геометрично, або на основі так званого якобіану переходу). Відповідно, можна перейти до сферичних координат в просторі швидкостей. В просторі швидкостей декартовими осями будуть v_x, v_y, v_z , а модуль швидкості v «гратиме роль» радіальної координати r . Ймовірність того, що одночасно $v_x \in (v_x, v_x + dv_x)$, $v_y \in (v_y, v_y + dv_y)$, $v_z \in (v_z, v_z + dv_z)$

$$dP = f(v)dv_x dv_y dv_z = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv_x dv_y dv_z =$$

$$= \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 \sin\theta dv d\varphi d\theta.$$
(5.43)

Щоб отримати ймовірність того, що модуль швидкості $v \in (v, v + dv)$, треба врахувати те, що при цьому кути θ , φ можуть бути будь-якими, тож треба по ним проінтегрувати:

$$dP(v \in (v, v + dv)) = F(v)dv = \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 dv =$$

$$= 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 dv.$$
(5.44)

Відповідно,

$$F(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2$$
(5.45)

є густиною ймовірності випадкової величини, що являє собою модуль швидкості однієї частинки.

5.2. Характерні швидкості частинок газу

Характерними швидкостями частинок газу є

1. Середньоквадратична швидкість $v_{\text{СКВ}} = \sqrt{\langle v^2 \rangle}$. На основі визначення

(5.34) бачимо, що

$$v_{\text{СКВ}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}.$$
(5.46)

2. Найбільш ймовірний модуль швидкості $v_{\text{НВ}}$. Це модуль швидкості, при якій функція розподілу $F(v)$ набуває максимального значення, див. (5.45). На основі (5.45) бачимо, що

$$\lim_{v \rightarrow 0} F(v) = \lim_{v \rightarrow +\infty} F(v) = 0,$$
(5.47)

та похідна

$$F'(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v \left(2 - \frac{m}{kT} v^2 \right) e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \quad (5.48)$$

має лише один корінь на інтервалі $v \in (0, +\infty)$:

$$2 - \frac{m}{kT} v_{\text{нв}}^2 = 0 \Rightarrow v_{\text{нв}} = \sqrt{\frac{2kT}{m}}. \quad (5.49)$$

Очевидно, що $F(v_{\text{нв}}) > 0$, тож в точці $v_{\text{нв}}$ функція $F(v)$ набуває максимального значення. Відповідно, найбільш ймовірний модуль швидкості описується виразом (5.49).

3. Середнє значення модуля швидкості $\langle v \rangle$. Згідно визначення (5.8) середнє значення модуля швидкості

$$\langle v \rangle = \int_0^{\infty} F(v) v dv. \quad (5.50)$$

Обчислимо його на основі (5.45) та (5.31):

$$\langle v \rangle = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} v^3 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \frac{1}{2} \left(\frac{2kT}{m} \right)^2 = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}. \quad (5.51)$$

Зауважимо, що всі ці характерні швидкості за порядком величини є близькими до $\sqrt{kT/m}$.

5.3 Тиск ідеального газу. Рівняння стану ідеального газу

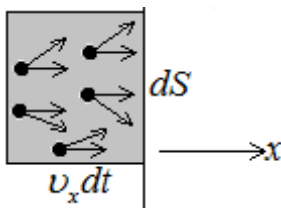


Рисунок 5.3

Розглянемо тиск газу на стінку. Нехай для визначеності стінка перпендикулярна до осі Ox . Спочатку розглянемо тиск, який чинять частинки, проекція швидкості яких на вісь Ox дорівнює v_x . Виділимо на стінці площадку dS , розглянемо імпульс, який цій площадці передають частинки за час dt . Кожна частинка при ударі змінює свою x -компоненту імпульсу з mv_x на $-mv_x$, тож передає імпульс $mv_x - (-mv_x) = 2mv_x$. За час dt в стінку ударять частинки, які були на відстані не більшій, ніж $v_x dt$ до

стінки. Тож в площадку dS за час dt ударять частинки, які були в «сірому» об'ємчику, див. рис. 5.3.

Нехай n – концентрація частинок. Кількість частинок, що ударять за час dt в площадку dS дорівнює $dN = ndV = nv_x dt dS$. За цей час стінці передається імпульс $dp = 2mv_x \cdot dN = 2mv_x \cdot nv_x dt dS$. Сила, що діє на площадку dS

$$dF = \frac{dp}{dt} = \frac{2mv_x \cdot nv_x dt dS}{dt} = 2mnv_x^2 dS, \quad (5.52)$$

тож, відповідно, тиск

$$P = \frac{dF}{dS} = 2mnv_x^2. \quad (5.53)$$

Але це внесок лише від частинок, що мають x -компоненту швидкості, рівну v_x . Очевидно, що битимуться о стінку лише частинки при $v_x > 0$ (див. рисунок). Відповідно, щоб остаточно отримати тиск газу, треба усереднити за всіма можливими $v_x > 0$, та всіма можливими $v_y, v_z \in (-\infty, +\infty)$:

$$\begin{aligned} P &= \int_0^{+\infty} dv_x \int_{-\infty}^{+\infty} dv_y \int_{-\infty}^{+\infty} dv_z 2mnv_x^2 f(\vec{v}) = \\ &= 2mn \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int_0^{+\infty} dv_x v_x^2 e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} \int_{-\infty}^{+\infty} dv_y e^{-\frac{mv_y^2}{2kT}} \int_{-\infty}^{+\infty} dv_z e^{-\frac{mv_z^2}{2kT}} = \\ &= 2mn \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \cdot \frac{2kT}{4m} \sqrt{\frac{2kT\pi}{m}} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2kT\pi}{m}} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2kT\pi}{m}} = nkT, \end{aligned} \quad (5.54)$$

при обчисленні використано «табличні» інтеграли (5.31). Отриманий вираз

$$P = nkT \Leftrightarrow P = \frac{N}{V} kT \Leftrightarrow PV = NkT \quad (5.55)$$

є **рівнянням стану ідеального газу**, P – тиск газу, V – об'єм газу, T – температура газу (в Кельвінах), k – константа Больцмана, N – кількість частинок газу (якщо газ атомарний, то це – кількість атомів, якщо молекулярний – то кількість молекул). Газ називається атомарним, якщо його частинки – атоми і молекулярним, якщо його частинки – молекули, що складаються з декількох атомів (двох або більше).

5.4. Робота й внутрішня енергія газу. Перший закон термодинаміки

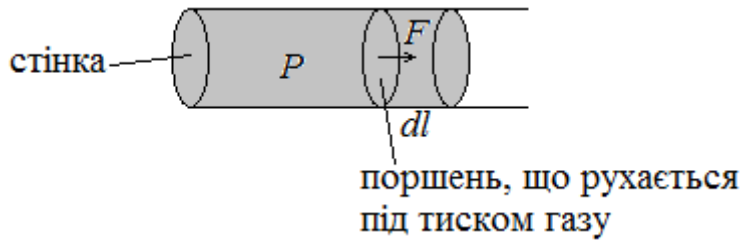


Рисунок 5.4

Нехай під тиском газу поршень змістився на малу відстань dl , див. рис. 5.4. Можна вважати, що при такому малому зміщенні характеристики газу (тиск, температура) майже не змінилися.

Тоді робота газу

$$\delta A = Fdl = PSdl \Rightarrow \delta A = PdV \Rightarrow A = \int_1^2 PdV. \quad (5.56)$$

де 1 – початковий стан, 2 – кінцевий стан газу. Якщо газ сам виконує роботу, то він розширюється та робота газу $A > 0$. Якщо над газом виконують роботу (тобто виконують роботу проти сили, яку газ чинить на перегородку), то він стискається, та робота газу $A < 0$.

Для простоти обмежимося випадком, коли кількість частинок системи (газу) є сталою. **Перший закон термодинаміки** є законом збереження енергії та формулюється таким чином:

$$\delta Q = \delta A + dE, \quad (5.57)$$

Де δQ – елементарна теплота, надана системі (якщо $\delta Q > 0$, то системі надали теплоту, якщо $\delta Q < 0$, то в системі забрали теплоту); $\delta A = PdV$ – елементарна робота (якщо система сама виконала роботу, то вона розширилась, $dV > 0$ та $\delta A > 0$; якщо над системою виконали роботу, то її стиснули, $dV < 0$ та $\delta A < 0$); dE – зміна внутрішньої енергії системи.

Внутрішня енергія – частина повної енергії системи, яка не залежить від вибору системи відліку і яка залежить від макроскопічного стану системи – від її температури, агрегатного стану і т.д. До внутрішньої енергії не включають, зокрема, ті складові, які не змінюються при зміні макроскопічного стану

системи. Зокрема, не включають механічну енергію (кінетичну та потенціальну), бо вони від стану системи (температури і т.д.) не залежать.

Кількість ступенів вільності системи – кількість незалежних параметрів, які описують систему. Як відомо, на кожен ступінь вільності ідеального газу приходить внутрішня енергія, що дорівнює $\frac{1}{2}kT$. Відповідно,

- якщо газ одноатомний, його частинки мають три ступені вільності (частинки газу – окремі атоми, їх можна вважати точковими, кожна така матеріальна точка три координати, тож три ступені вільності). Відповідно, на 1 частинку $E_{\text{НаОдну}} = \frac{3}{2}kT$, а внутрішня енергія газу $E = \frac{3}{2}NkT$.

- якщо газ двоатомний (складається з молекул, кожна з яких складається з двох атомів), то його частинки мають п'ять ступенів вільності (його частинки можна вважати жорсткими з'єднаннями двох матеріальних точок, кожна має три координати, тож всього 6 координат, але через зв'язок $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = l^2 = \text{const}$ лише 5 з них незалежні). Відповідно, на 1 частинку $E_{\text{НаОдну}} = \frac{5}{2}kT$, а внутрішня енергія газу $E = \frac{5}{2}NkT$.

- якщо газ трьох- і більше атомний, його частинки мають шість ступенів вільності. Відповідно, на 1 частинку $E_{\text{НаОдну}} = \frac{6}{2}kT = 3kT$, а внутрішня енергія газу $E = 3NkT$.

Тож внутрішня енергія ідеального газу

$$E = \frac{j}{2}NkT, \quad j = \begin{cases} 3, \text{газ одноатомний} \\ 5, \text{газ двоатомний} \\ 6, \text{газ трьох- і більше атомний} \end{cases} \quad (5.58)$$

Зауважимо, що у одноатомного газу кожна частинка має, очевидно, три ступені вільності, пов'язані саме з поступальним рухом частинки. Якщо ж газ молекулярний, то все одно на поступальний рух «приходиться» три ступені вільності частинки. Інші ступені вільності – внутрішні ступені вільності

частинки (їх пов'язують з обертальним рухом молекул навколо себе). Тож визначення температури газу з минулої лекції: «середня кінетична енергія *поступального* руху однієї частинки $\langle E_k \rangle = \frac{3}{2} kT$ » є адекватним.

5.5. Ізопроееси та робота під час ізопроеесів

Серед ізопроеесів виділяють:

1. *Ізобарний* процес (проходить при сталому тиску). При ізобарному процесі $P = \text{const} \Rightarrow \frac{V}{T} = \text{const}$, див. (5.55). Тож робота при ізобарному процесі

$$A = \int_1^2 P dV = P \int_1^2 dV = P(V_2 - V_1). \quad (5.59)$$

2. *Ізхорний* процес (проходить при сталому об'ємі). При ізохорному процесі $V = \text{const} \Rightarrow \frac{P}{T} = \text{const}$. Робота при ізохорному процесі

$$A = \int_1^2 P dV = 0, \quad (5.60)$$

бо об'єм не змінюється, та $dV = 0$.

3. *Ізотермічний* процес (проходить при сталій температурі). При ізотермічному процесі $T = \text{const} \Rightarrow PV = \text{const}$. Робота при ізотермічному процесі

$$A = \int_1^2 P dV = \int_1^2 \frac{NkT}{V} dV = NkT \int_1^2 \frac{dV}{V} = NkT \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (5.61)$$

4. *Адіабатний* процес (проходить при відсутності теплообміну). При адіабатному процесі $\delta Q = 0$. Виведемо рівняння адіабати. На основі першого закону термодинаміки (5.57) при адіабатному процесі

$$\delta Q = \delta A + dE = 0. \quad (5.62)$$

На основі (5.56), (5.58) та (5.55) маємо

$$\delta A = PdV, dE = d\left(\frac{j}{2}NkT\right) = \frac{j}{2}d(NkT) = \frac{j}{2}d(PV) = \frac{j}{2}PdV + \frac{j}{2}VdP. \quad (5.63)$$

Згідно (5.62) та (5.63) маємо

$$\frac{j+2}{2}PdV + \frac{j}{2}VdP = 0 \Rightarrow \frac{j+2}{j} \frac{dV}{V} = -\frac{dP}{P}, \quad (5.64)$$

проінтегрувавши цей вираз, отримуємо

$$\frac{j+2}{j} \ln V = -\ln P + \text{const} \Rightarrow \ln \left(PV^{\frac{j+2}{j}} \right) = \text{const} \Rightarrow PV^{\frac{j+2}{j}} = \text{const}. \quad (5.65)$$

Позначимо

$$\gamma = \frac{j+2}{j}, \quad (5.66)$$

та остаточно отримаємо *рівняння адіабати*

$$PV^\gamma = \text{const}. \quad (5.67)$$

Робота при адіабатному процесі

$$\begin{aligned} A &= \int_1^2 PdV = P_1 V_1^\gamma \int_1^2 V^{-\gamma} dV = P_1 V_1^\gamma \frac{V_1^{1-\gamma} - V_2^{1-\gamma}}{\gamma-1} = \\ &= \frac{P_1 V_1^\gamma V_1^{1-\gamma}}{\gamma-1} \left(1 - \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{1-\gamma} \right) = \frac{P_1 V_1}{\gamma-1} \left(1 - \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{1-\gamma} \right), \end{aligned} \quad (5.68)$$

тут враховано, що $PV^\gamma = P_1 V_1^\gamma \Rightarrow P = \frac{P_1 V_1^\gamma}{V^\gamma}$. На основі (5.68) можемо остаточно

виписати вираз для роботи ідеального газу при адіабатному процесі

$$A = \frac{NkT_1}{\gamma-1} \left(1 - \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{1-\gamma} \right). \quad (5.69)$$

Рівняння адіабати також можна переписати в термінах температури та об'єму.

На основі (5.67) матимемо

$$PV^\gamma = \text{const} \Rightarrow \frac{NkT}{V} V^\gamma = \text{const} \Rightarrow NkTV^{\gamma-1} = \text{const} \Rightarrow TV^{\gamma-1} = \text{const}. \quad (5.70)$$

5.6. Термодинамічні цикли. Цикл Карно

Термодинамічний цикл – замкнений круговий процес, який здійснює термодинамічна система, тобто такий процес, у якому початкові й кінцеві параметри, що визначають стан робочого тіла системи, збігаються.

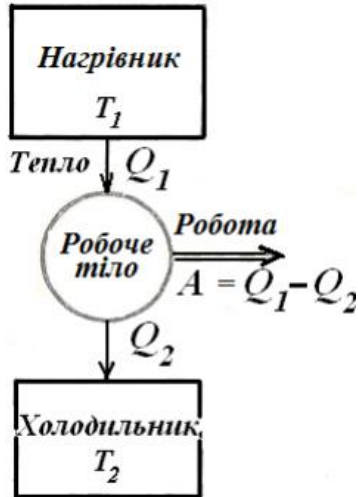


Рисунок 5.5

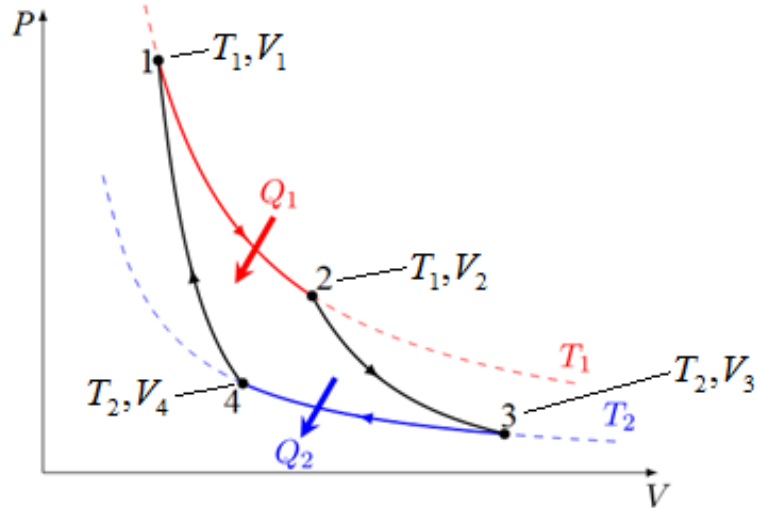


Рисунок 5.6

У кожному циклі робоче тіло теплової машини забирає деяку кількість теплоти Q_1 у нагрівника й віддає певну кількість теплоти Q_2 холодильнику, див. рис. 5.5. Робота, виконана тепловою машиною в циклі, дорівнює:

$$A = Q_1 - Q_2. \quad (5.71)$$

Відповідно, ККД термодинамічного циклу

$$\eta = \frac{A}{Q_{\text{прийнята}}} = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}. \quad (5.72)$$

Цикл Карно – термодинамічний цикл, що складається з двох ізотерм і двох адіабат, див. рис. 5.6. Виведемо формулу для ККД циклу Карно.

Процес 1 – 2 є ізотермічним розширенням, тож

$$A_{12} = \int_1^2 P dV = NkT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}, \quad (5.73)$$

та

$$\delta Q_{12} = \delta A_{12} + dE_{12} \Rightarrow Q_{12} = A_{12} + \Delta E_{12} = A_{12} + \frac{j}{2} Nk(T_1 - T_1) = NkT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}, \quad (5.74)$$

$Q_{12} > 0$, тож в процесі 1 – 2 газ отримує теплоту.

Процес 2 – 3 є адіабатичним розширенням, тож

$$A_{23} = \int_2^3 PdV = \frac{NkT_1}{\gamma-1} \left(1 - \left(\frac{V_3}{V_2} \right)^{1-\gamma} \right), \quad (5.75)$$

та $Q_{23} = 0$, бо адіабатичний процес є процесом без теплообміну.

Процес 3 – 4 є ізотермічним стисненням, тож

$$A_{34} = \int_3^4 PdV = NkT_2 \ln \frac{V_4}{V_3}, \quad (5.76)$$

$\Delta E_{34} = 0$, бо процес 3–4 проходить при сталій температурі, та

$$Q_{34} = A_{34} + \Delta E_{34} = NkT_2 \ln \frac{V_4}{V_3} < 0, \quad (5.77)$$

газ у процесі 3 – 4 втрачав теплоту.

Процес 4 – 1 є адіабатичним стисненням, тож

$$A_{41} = \int_4^1 PdV = \frac{NkT_2}{\gamma-1} \left(1 - \left(\frac{V_1}{V_4} \right)^{1-\gamma} \right), \quad (5.78)$$

та $Q_{41} = 0$, бо адіабатичний процес є процесом без теплообміну.

Робота за цикл:

$$\begin{aligned} A &= A_{12} + A_{23} + A_{34} + A_{41} = \\ &= NkT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} + \frac{NkT_1}{\gamma-1} \left(1 - \left(\frac{V_3}{V_2} \right)^{1-\gamma} \right) + NkT_2 \ln \frac{V_4}{V_3} + \frac{NkT_2}{\gamma-1} \left(1 - \left(\frac{V_1}{V_4} \right)^{1-\gamma} \right), \end{aligned} \quad (5.79)$$

На основі (5.70) $T_1V_2^{\gamma-1} = T_2V_3^{\gamma-1}$, та перетворимо другий доданок:

$$\begin{aligned} \frac{NkT_1}{\gamma-1} \left(1 - \left(\frac{V_3}{V_2} \right)^{1-\gamma} \right) &= \frac{NkT_1}{\gamma-1} \left(1 - \left(\frac{V_2}{V_3} \right)^{\gamma-1} \right) = \\ &= \frac{Nk}{\gamma-1} \left(T_1 - \frac{T_1V_2^{\gamma-1}}{V_3^{\gamma-1}} \right) = \frac{Nk}{\gamma-1} \left(T_1 - \frac{T_2V_3^{\gamma-1}}{V_3^{\gamma-1}} \right) = \frac{Nk}{\gamma-1} (T_1 - T_2). \end{aligned} \quad (5.80)$$

На основі (5.70) $T_2V_4^{\gamma-1} = T_1V_1^{\gamma-1}$, та перетворимо четвертий доданок:

$$\begin{aligned} \frac{NkT_2}{\gamma-1} \left(1 - \left(\frac{V_1}{V_4} \right)^{1-\gamma} \right) &= \frac{NkT_2}{\gamma-1} \left(1 - \left(\frac{V_4}{V_1} \right)^{\gamma-1} \right) = \\ &= \frac{Nk}{\gamma-1} \left(T_2 - \frac{T_2 V_4^{\gamma-1}}{V_1^{\gamma-1}} \right) = \frac{Nk}{\gamma-1} \left(T_2 - \frac{T_1 V_1^{\gamma-1}}{V_1^{\gamma-1}} \right) = \frac{Nk}{\gamma-1} (T_2 - T_1). \end{aligned} \quad (5.81)$$

На основі (5.79) – (5.81) матимемо

$$A = NkT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} + NkT_2 \ln \frac{V_4}{V_3}. \quad (5.82)$$

На основі рівнянь адиабати отримаємо

$$\begin{cases} T_2 V_4^{\gamma-1} = T_1 V_1^{\gamma-1} \\ T_2 V_3^{\gamma-1} = T_1 V_2^{\gamma-1} \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{V_4}{V_3} \right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \Rightarrow \frac{V_4}{V_3} = \frac{V_1}{V_2}, \quad (5.83)$$

Звідки

$$A = NkT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} + NkT_2 \ln \frac{V_1}{V_2} = Nk(T_1 - T_2) \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (5.84)$$

Прийнята теплота газом за цикл

$$Q_1 = Q_{12} = NkT_1 \ln(V_2/V_1), \quad (5.85)$$

див. (5.74). Тож згідно (5.72), (5.84) та (5.85) **ККД циклу Карно**

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \quad (5.86)$$

Можна показати, що ККД будь-якої теплової машини не може бути більшим за ККД теплової машини, яка працює за циклом Карно, з тими ж самими температурами нагрівача та холодильника. Це твердження носить назву **теорема Карно**, приймемо її без виведення. За циклом Карно працює ідеальна теплова машина. У реальних теплових машин ККД завжди менший, ніж у циклу Карно.

5.7. Теплоємність. Теплоємність ідеального газу

Теплоємність системи зі сталою кількістю частинок за визначенням є відношенням елементарної теплоти до відповідної малої зміни температури системи, що трапилась «за рахунок» отримання цієї елементарної теплоти:

$$C = \frac{\delta Q}{dT}. \quad (5.87)$$

Наприклад, коли теплоємність є сталою, то

$$\delta Q = CdT \Rightarrow \int_1^2 \delta Q = C \int_1^2 dT \Rightarrow Q = C(T_2 - T_1), \quad (5.88)$$

або через питому теплоємність c (тобто через теплоємність одиниці маси) отримана формула набуде відомого з курсу шкільної фізики вигляду

$$Q = mc(T_2 - T_1). \quad (5.89)$$

Теплоємність ідеального газу згідно (5.87) та (5.57) виражається таким чином:

$$C = \frac{\delta Q}{dT} = \frac{\delta A + dE}{dT} = \frac{PdV + d\left(\frac{jNkT}{2}\right)}{dT} = P \frac{dV}{dT} + \frac{jNk}{2}. \quad (5.90)$$

При сталому тиску згідно (5.55)

$$PV = NkT \Rightarrow V = \frac{Nk}{P}T \Rightarrow dV = \frac{Nk}{P}dT, \quad (5.91)$$

тож теплоємність при сталому тиску

$$C_P = P \frac{Nk}{P} \frac{dT}{dT} + \frac{jNk}{2} = Nk \frac{j+2}{2}. \quad (5.92)$$

При сталому об'ємі $dV = 0$, та теплоємність при сталому об'ємі

$$C_V = Nk \frac{j}{2}. \quad (5.93)$$

Відношення теплоємностей при сталому тиску та при сталому об'ємі

$$\frac{C_P}{C_V} = \frac{j+2}{j} = \gamma \quad (5.94)$$

дорівнює показнику адіабати.

5.8. Другий закон термодинаміки. Ентропія

Оборотним процесом називається така зміна стану системи, яка, будучи проведеною в зворотному напрямку, повертає її в початковий стан, так щоб система пройшла через ті ж проміжні стани, що і в прямому процесі, але в

зворотній послідовності, а стан тіл поза системою залишився незмінним. **Необоротним процесом** називаються процес, який не можна здійснити у зворотному напрямі без змін в оточуючих тілах. Прикладом оборотного процесу є адіабатне розширення або стиснення газу.

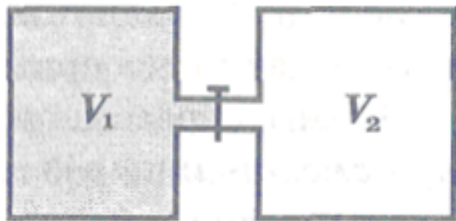


Рисунок 5.7

Приклад необоротного процесу – процес, що розпочнеться, якщо прибрати перегородку в системі, зображеній на рис. 5.7. Тоді газ розповсюдиться і рівномірно займе об’єм обох посудин. Газ сам по собі не «збереться» назад в

першу посудину, тож такий процес необоротний.

Нехай є набір незалежних змінних x_1, x_2, \dots, x_n . Диференціальною формою від цих змінних називатимемо вираз

$$\delta\omega = \sum_{i=1}^n f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_i. \quad (5.95)$$

Диференціальна форма є **повним диференціалом** деякої функції $\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ цих n змінних $\delta\omega = d\Phi$, якщо

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_i}. \quad (5.96)$$

В такому випадку має виконуватись рівність «перехресних» похідних:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_j \partial x_i} \Leftrightarrow \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}, \quad (5.97)$$

див. властивість (3.119). **Інтегрувальним множником** до диференціальної форми $\delta\omega$ є функція $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ така, що добуток $g(x_1, x_2, \dots, x_n)\delta\omega$ є повним диференціалом. В загальному випадку диференціальна форма від двох змінних завжди має інтегруючий множник, диференціальна форма від трьох і більше змінних – не завжди.

δQ – елементарна теплота, отримана системою, є в загальному випадку диференціальною формою від багатьох змінних (в найпростішому випадку однокомпонентного ідеального газу – від трьох змінних: температура, об’єм,

кількість частинок). Але вона не є повним диференціалом. Згідно **другого закону термодинаміки** елементарна теплота як диференціальна форма для *оборотних процесів* завжди має інтегруючий множник, що дорівнює $1/T$, T – абсолютна температура. Відповідна функція $S(T, V, N)$, повним диференціалом якої є

$$dS = \frac{\delta Q}{T}, \quad (5.98)$$

називається **ентропією**. *Ентропія ізольованої системи не може зменшуватись. Якщо замкнута (тобто теплоізолювана) система в деякий момент часу знаходиться в нерівноважному стані, то процеси, що протікають в ній, призводять до зростання ентропії. Якщо система в рівновазі – ентропія не зростає.*

У випадку сталої кількості частинок для ідеального газу на основі (5.98), (5.90) та (5.55) матимемо

$$dS = \frac{\delta A + dE}{T} = \frac{P}{T} dV + \frac{jNk}{2} \frac{dT}{T} = \frac{NkT}{TV} dV + \frac{jNk}{2} \frac{dT}{T} = \frac{Nk}{V} dV + \frac{jNk}{2T} dT, \quad (5.99)$$

звідки на основі (5.96) одночасно мають виконатись рівності

$$\frac{\partial S}{\partial V} = \frac{Nk}{V}, \quad \frac{\partial S}{\partial T} = \frac{jNk}{2T}. \quad (5.100)$$

Проінтегрувавши першу з них, отримаємо

$$S = Nk \ln V + f(T), \quad (5.101)$$

де $f(T)$ – деяка функція від температури. Підставляючи (5.101) у друге рівняння (5.100), отримаємо

$$\frac{\partial f(T)}{\partial T} = \frac{jNk}{2T} \Rightarrow f(T) = \frac{j}{2} Nk \ln T + B, \quad (5.102)$$

B – стала інтегрування.

Але тут ми вважали кількість частинок сталою, тобто тут не враховано, що взагалі кажучи ентропія ще функцією кількості частинок. Щоб це врахувати, треба розуміти, що ця стала інтегрування, реально кажучи, є функцією від кількості частинок. Дійсно,

$$S = Nk \ln V + \frac{j}{2} Nk \ln T + B(N), \quad (5.103)$$

та на основі (5.103) вирази (5.100) будуть виконуватися.

Функцію $B(N)$ підбирають таким чином:

$$B(N) = -Nk \ln N + Nk \ln b, \quad (5.104)$$

b є певною розмірною величиною, що може залежати від властивостей безпосередньо окремих частинок газу та від фундаментальних констант, але не від кількості частинок, температури та об'єму. Доданок $-Nk \ln N$ міститься в функції $B(N)$ через те, що ентропія є так званою адитивною величиною, тобто сума ентропій підсистем дорівнює ентропії всієї системи. Адитивні термодинамічні величини завжди мають структуру $Nf(V/N)$. Прикладом неадитивної величини, наприклад, є тиск – від однаковий що в системі, що в кожній її підсистемі.

Відповідно, згідно (5.103) та (5.104) отримаємо

$$S = Nk \left(\ln \frac{V}{N} + \frac{j}{2} \ln T + \ln b \right) \Rightarrow S = Nk \ln \frac{VT^{j/2}b}{N}, \quad (5.105)$$

під логарифмом обов'язково має «зібратись» безрозмірна величина, звідки

$$\left[\frac{VT^{j/2}b}{N} \right] = 1 \Rightarrow \frac{\text{м}^3 \cdot \text{К}^{j/2} \cdot [b]}{1} = 1 \Rightarrow [b] = \text{м}^{-3} \cdot \text{К}^{-j/2}. \text{ Зауважимо, що вираз (5.103)}$$

коректний лише тому, що в подальшому його можна «зібрати» в один логарифм від безрозмірного виразу.

Наприклад, отримаємо вираз для ентропії одноатомного ідеального газу, $j = 3$. Шукатимемо величину b у вигляді $b = b(m, k, h)$, де h – константа Планка, m – маса однієї частинки газу, k – константа Больцмана. Застосуємо метод розмірності, шукаємо b у вигляді

$$b = \beta m^x k^y h^z, \quad (5.106)$$

Де β – безрозмірний множник та x, y, z – показники ступенів, які будуть знайдені. Через те, що $[b] = \text{м}^{-3} \cdot \text{К}^{-3/2}$, $[k] = \frac{\text{Дж}}{\text{К}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2 \cdot \text{К}}$, $[h] = \text{Дж} \cdot \text{с} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}}$ на основі (5.106) отримаємо

$$\text{м}^{-3} \cdot \text{К}^{-3/2} = \text{кг}^x \left(\frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2 \cdot \text{К}} \right)^y \left(\frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}} \right)^z, \quad (5.107)$$

звідки прирівнявши ступені при кожній окремо взятій основній одиниці СІ, отримаємо систему рівнянь:

$$x + y + z = 0, \quad -2y - z = 0, \quad y = 3/2, \quad 2y + 2z = -3, \quad (5.108)$$

єдиним розв'язком якої є

$$x = 3/2, \quad y = 3/2, \quad z = -3. \quad (5.109)$$

Тож

$$b = \beta \frac{(mk)^{3/2}}{h^3}, \quad (5.110)$$

та *ентропія одноатомного ідеального газу* набуде вигляду

$$S = Nk \left(\frac{3}{2} \ln T + \ln \frac{V}{N} + \ln \left(\beta \frac{(mk)^{3/2}}{h^3} \right) \right), \quad (5.111)$$

де β є безрозмірною константою.

Вище розглянута класична модель ідеального не працює при низьких температурах (близьких до абсолютного нуля). При низьких температурах працює *третій закон термодинаміки*: $S|_{T=0} = 0$, щоб на його основі описувати поведінку газів при низьких температурах, треба застосовувати квантову теорію. Для прикладу, зображеному на рис. 5.7, покажемо, що ентропія зростає при необоротному процесі:

$$S_{\text{кінцева}} - S_{\text{початкова}} = Nk \ln \frac{(V_1 + V_2) T^{j/2} b}{N} - Nk \ln \frac{V_1 T^{j/2} b}{N} = Nk \ln \frac{V_2 + V_1}{V_1} > 0. \quad (5.112)$$

5.9. Барометрична формула, розподіл Больцмана

Помножимо рівняння стану ідеального газу (5.55) на масу однієї частинки газу m_0 :

$$P V m_0 = m k T \Rightarrow P m_0 = \rho k T \Rightarrow \rho = \frac{P m_0}{k T}, \quad (5.113)$$

де ρ – густина газу та $m = m_0 N$ – маса газу.

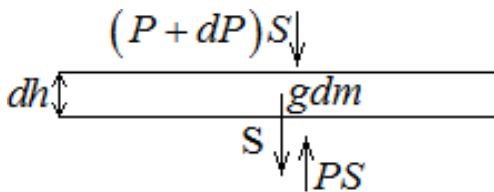


Рисунок 5.8

Отриманий вираз (5.113) є формулою для густини газу. Розглянемо повітря над поверхнею планети. Розглянемо тонкий шар такого повітря. Вважаємо, що повітря в стані рівноваги, див. рис. 5.8. $g \cdot dm$ – сила тяжіння,

що діє на цей шар; PS – сила тиску знизу, що діє на цей шар; $(P + dP)S$ – сила тиску зверху, що діє на цей шар. dP – приріст, який отримав тиск при підйомі на малу висоту dh , тиск з висотою має, очевидно, зменшуватись, тож $dP < 0$. Розглянутий шар повітря знаходиться в рівновазі, тож рівняння балансу сил, що діють на нього:

$$g \cdot dm + (P + dP)S = PS, \quad (5.114)$$

звідки отримаємо

$$\begin{aligned} g \cdot dm &= -S dP \Rightarrow g \cdot \rho dV = -S dP \Rightarrow g \cdot \rho S dh = -S dP \Rightarrow \\ \Rightarrow dP &= -g \rho dh \Rightarrow dP = -g \frac{P m_0}{k T} dh \Rightarrow \frac{dP}{P} = -\frac{g m_0}{k} \frac{dh}{T}. \end{aligned} \quad (5.115)$$

Проінтегруємо отриманий вираз:

$$\int_{P_0}^P \frac{dP}{P} = -\frac{g m_0}{k} \int_0^h \frac{dh}{T(h)} \Rightarrow \ln \frac{P}{P_0} = -\frac{g m_0}{k} \int_0^h \frac{dh}{T(h)}, \quad (5.116)$$

P_0 – тиск на поверхні, P – тиск на висоті h , тут враховано, що температура атмосфери теж падає з висотою.

В теоретично абстрактній моделі ізотермічної атмосфери $T(h) = \text{const}$ отримаємо

$$\ln \frac{P}{P_0} = -\frac{m_0 g h}{kT} \Rightarrow P = P_0 e^{-\frac{m_0 g h}{kT}}, \quad (5.117)$$

отриманий вираз носить назву **барометричної формули**.

Згідно (5.54) бачимо, що при $T = \text{const}$ $P \sim n$, тож при $T = \text{const}$

$$n = n_0 e^{-\frac{m_0 g h}{kT}}, \quad (5.118)$$

n_0 – концентрація частинок на поверхні планети (на рівні нульової потенціальної енергії). Через те, що $\varepsilon_p = m_0 g h$ є потенціальною енергією частинки газу в гравітаційному полі планети, маємо, що при $T = \text{const}$

$$n = n_0 e^{-\frac{\varepsilon_p}{kT}}, \quad (5.119)$$

отриманий вираз носить назву **розподілу Больцмана**. Щойно його виведено в гравітаційному полі планети; можна показати його адекватність і в інших силових полях.

5.10. Елементи пневматики

Пневматична машина – це пристрій, де корисну роботу виконує стиснене повітря. Стиснене повітря – повітря, тиск якого є більшим за атмосферний. Фізичною основою пневматики, фактично, є газові закони. $\delta A = PdV$, тож при більшому тиску виконується більша робота, тому чим більше тиск, тим якісніше працює пневматична машина (звісно при умові, що він не настільки великий, щоб зруйнувати саму машину).

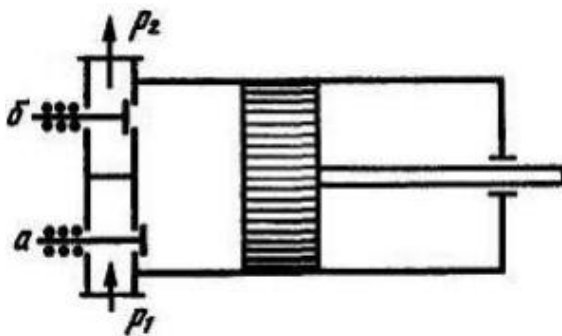


Рисунок 5.9

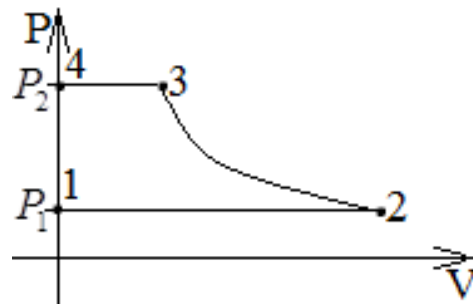


Рисунок 5.10

Пристрій, що стискає повітря та «закачує» його в потрібний трубопровід, називається *компресором*. Розглянемо принцип дії найпростішого компресора, див. рис. 5.9.

На початку циклу поршень знаходиться в крайньому лівому положенні. Відкривається клапан *a*, при тиску P_1 повітря запускається в простір, обмежений поршнем, поршень рухається в крайнє праве положення. Після цього клапан *a* закривається (процес 1–2 на рис. 5.10.).

На поршень тиснуть зовні, виконують роботу над повітрям, повітря стискають (процес 2–3 на рис. 5.10). Як тільки тиск повітря збільшується до значення P_2 , відкривається клапан *b*, і це повітря витискається через нього під тиском P_2 в потрібний трубопровід (процес 3–4 на рис. 5.10).

Це не є замкнутий цикл на діаграмі, кожен раз цикл починається в точці 1, закінчується в точці 4, а потім знову починається з точки 1. Лише на ділянці 2–3 кількість частинок газу в компресорі є сталою. Роботу, необхідну для стиснення газу в компресорі (роботу газу на ділянці 2–3, взяту зі знаком « \rightarrow », бо на газ, а над газом виконують роботу) можна обчислити на формулами, наведеними в параграфі 5.5 в залежності від типу використаного ізопроцесу.

5.11. Контрольні питання до розділу 5

1. Дати визначення випадкової величини та випадкової події. Дати визначення ймовірності та густини ймовірності. Навести умову нормування густини ймовірності та вказати її зміст. Надати визначення середнього значення та середньоквадратичного значення випадкової величини.

2. Навести визначення ідеального газу та визначення його температури. В яких умовах модель ідеального газу є застосовною? Чому при опис ідеального газу неможливо обійтися без статистичних підходів? Вивести розподіл Максвелла для вектору швидкості частинки та для модуля вектору швидкості частинки.

3. Вивести вирази для середньоквадратичної швидкості, найбільш ймовірного модуля швидкості та середнього значення модуля швидкості частинок ідеального газу.

4. Вивести вираз для тиску ідеального газу та рівняння стану ідеального газу.

5. Вивести вираз для роботи ідеального газу. Навести визначення внутрішньої енергії ідеального газу та вказати вираз для внутрішньої енергії ідеального газу в різних випадках. Сформулювати перший закон термодинаміки.

6. Дати визначення ізобарного, ізохорного, ізотермічного та адіабатного процесів. Вивести рівняння адіабати. Вивести вирази для роботи ідеального газу при кожному з вказаних вище ізопроцесів.

7. Дати визначення термодинамічного циклу. Навести вираз для ККД термодинамічного циклу. Надати визначення циклу Карно та вивести вираз для ККД циклу Карно. Сформулювати теорему Карно.

8. Навести визначення теплоємності. Отримати вираз для теплоти при сталій теплоємності. Знайти вирази для теплоємностей ідеального газу при сталому тиску та при сталому об'ємі. Знайти відношення цих теплоємностей.

9. Сформулювати поняття оборотного та необоротного процесів. Дати визначення диференціальної форми, повного диференціалу та інтегрувального множника. Навести поняття ентропії, сформулювати другий закон термодинаміки. Вивести вираз для ентропії ідеального одноатомного газу.

10. Вивести залежність тиску від висоти в атмосфері планети. Вивести барометричну формулу. Вказати розподіл Больцмана.

11. Дати визначення пневматичної машини та компресору. Описати принцип дії найпростішого компресору.

6. Елементи атомної та ядерної фізики

6.1. Модель Бора, що описує атом

Постулатами Бора, на яких ґрунтується запропонована ним модель, є:

1. Електрон в атомі може рухатися тільки по певним стаціонарним орбітам, кожній з яких можна приписати певний номер $n = 1, 2, 3, \dots$. Електрон, що рухається на стаціонарній замкнутій орбіті, всупереч законам класичної електродинаміки, не випромінює. Дозволеними стаціонарними орбітами є лише ті, для яких момент імпульсу електрона дорівнює цілому кратному значенню зведеної сталої Планка \hbar :

$$m_e v_n r_n = n\hbar, n \in \mathbb{N}, \hbar = \frac{h}{2\pi}, \quad (6.1)$$

де $h \approx 6,626 \cdot 10^{-34}$ Дж·с – стала Планка, $m_e \approx 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг – маса електрона.

2. Випромінювання або поглинання фотона відбувається при переході атома з одного стаціонарного стану в інший. При цьому енергія фотона, який випромінюється, дорівнює різниці енергій атома в двох стаціонарних станах:

$$hf_{nl} = E_l - E_n, l > n. \quad (6.2)$$

де f_{nl} – частота, з якою атом випромінює відповідний фотон, див. рис. 6.1.

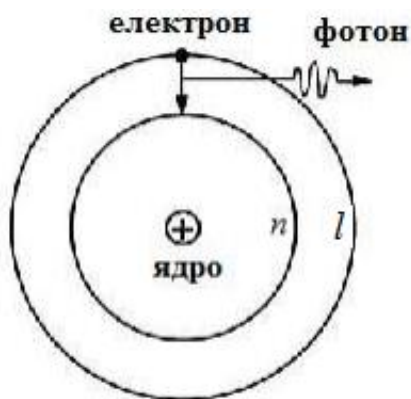


Рисунок 6.1

Можливий і зворотний процес, в якому атом переходить з квантового стану з меншою енергією в стан з більшою енергією. При цьому відбувається поглинання фотона з енергією, що дорівнює різниці енергій цих квантових станів. Інакше кажучи, атом випромінює або поглинає квант електромагнітної енергії внаслідок «перескакування» електрона з однієї стаціонарної

орбіти на іншу. Другий постулат Бора називають умовою частот, оскільки він визначає частоти випромінюваних або поглинутих фотонів.

Розглянемо воднеподібний атом, тобто такий, який складається з ядра зарядом $+ze$ та електрона зарядом $-e$, $z \in \mathbb{N}$, тут $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл – елементарний електричний заряд. Найпростіший воднеподіб

ний атом – атом водню, у якого $z = 1$.

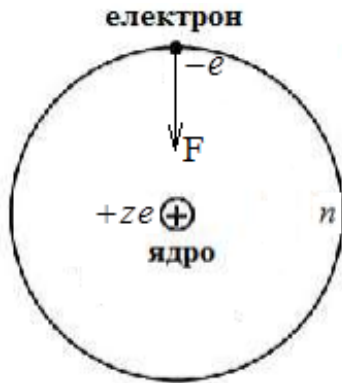


Рисунок 6.2

Розглянемо рух електрона по орбіті з номером n , див. рис. 6.2. З одного боку, кулонівська сила притягання електрона до ядра є доцентровою, тож

$$F = \frac{k \cdot ze \cdot e}{r_n^2} = \frac{ze^2 k}{r_n^2} = m_e \frac{v_n^2}{r_n} \Rightarrow ze^2 k = m_e r_n v_n^2, \quad (6.3)$$

де $k \approx 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{Кл}^2}$ – стала в законі Кулона. З іншого

боку, має справджуватись твердження (6.1). З системи

рівнянь (6.1) та (6.3) отримуємо формулу для швидкості електрона, що рухається по n -й орбіті:

$$v_n = \frac{ze^2 k}{n\hbar}. \quad (6.4)$$

На основі (6.1) та (6.4) знаходимо формулу для радіуса n -ї орбіти:

$$r_n = \frac{n^2 \hbar^2}{ze^2 k m_e}. \quad (6.5)$$

Енергія атому в стані, коли електрон знаходиться на n -й орбіті є сумою кінетичної енергії електрона та потенціальної енергії кулонівської взаємодії ядра з електроном:

$$E_n = \frac{m_e v_n^2}{2} + \frac{k \cdot ze \cdot (-e)}{r_n} = -\frac{m_e z^2 e^4 k^2}{2n^2 \hbar^2}, \quad (6.6)$$

при виведенні виразу (6.6) враховано результати (6.4) та (6.5). Вираз (6.6) є формулою для енергії атому в стані, коли електрон знаходиться на n -й орбіті. На основі (6.6), (6.1) та (6.2) отримаємо формулу, що описує частоти випромінювання фотонів атомом:

$$f_{nl} = R_f z^2 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{l^2} \right), \quad (6.7)$$

де R_f є сталою Рідберга для частоти,

$$R_f = \frac{m_e e^4 k^2}{4\pi\hbar^3} \approx 3,3 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}. \quad (6.8)$$

Виведемо формулу, що описує довжини хвиль випромінених фотонів:

$$f_{nl} = \frac{c}{\lambda_{nl}} = R_f z^2 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{l^2} \right) \Rightarrow \frac{1}{\lambda_{nl}} = \frac{R_f}{c} z^2 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{l^2} \right) = R_\lambda z^2 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{l^2} \right). \quad (6.9)$$

де R_λ – стала Рідберга для довжини хвилі,

$$R_\lambda = \frac{R_f}{c} \approx 1,1 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}. \quad (6.10)$$

Вище описані формули отримано в припущенні, що електрон рухається навколо нерухомого ядра. Це припущення є адекватним, бо ядро атому водню має масу приблизно у 1860 разів більшу за масу електрона; а ядра інших воднеподібних атомів є ще важчими. Дещо точніше було б врахувати той факт, що ядро теж рухається внаслідок кулонівської взаємодії з електронем, хоча це уточнення не дасть суттєвого внеску в числові значення отриманих результатів.

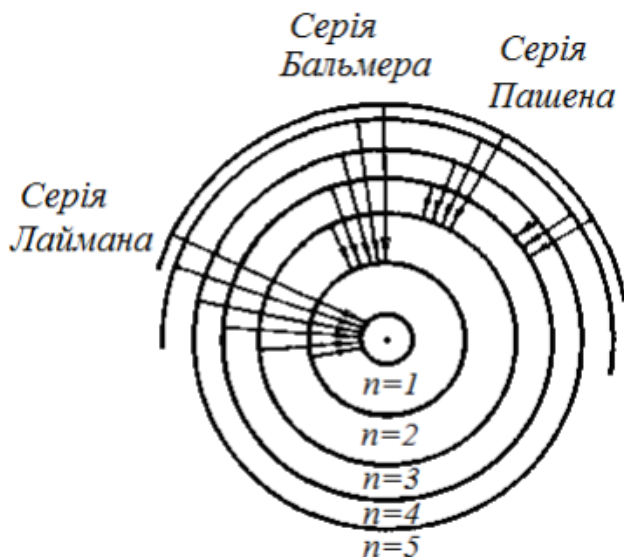


Рисунок 6.3

Сучасніший квантово-механічний опис воднеподібного атома базується на пошуку ймовірності знаходження електрона в тій чи іншій області простору в околі ядра. В його рамках показується, що орбіти, радіуси яких описуються виразами (6.5), є найбільш ймовірними положеннями електрона поблизу ядра.

Переходи у атомі водню (випадок $z=1$) наведені на рис. 6.3. Серія Лаймана описує переходи в основний стан (тобто на найближчу до ядра орбіту з $n=1$), серія Бальмера – переходи на другу орбіту ($n=2$), і т.д. Частоти випромінених

фотонів при таких переходах, передбачені моделлю Бора, добре співпадають з експериментом, через що така модель стала широкоживаною.

Опис атомів з багатьма електронами (2 і більше) є суттєво складнішим через необхідність врахування взаємодії не лише електронів з ядром, а і електронів один з одним.

6.2. Ядерні реакції, радіоактивність

Зарядовим числом ядра є відношення заряду ядра до елементарного заряду, який визначимо як $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл. **Масовим числом** ядра є кількість нуклонів в ньому (протонів та нейтронів). Зарядове число ядра співпадає з кількістю протонів в ньому.

За визначенням, α -частинка є ядром атому гелію (зарядове число 2, масове число 4, позначення ${}^4_2\text{He}$). Аналогічні визначення можна давати і елементарним частинкам. Наприклад,

- електрон (зарядове число -1 , масове число 0, ${}^0_{-1}\text{e}^-$)
- позитрон (зарядове число $+1$, масове число 0, ${}^0_1\text{e}^+$)
- протон (зарядове число $+1$, масове число $+1$, ${}^1_1\text{p}$)
- нейтрон (зарядове число 0, масове число $+1$, ${}^1_0\text{n}$)
- нейтрино (зарядове число 0, масове число 0, ${}^0_0\nu_e$)
- антинейтрино (зарядове число 0, масове число 0, ${}^0_0\tilde{\nu}_e$)
- фотон (квант світла, зарядове число 0, масове число 0, ${}^0_0\gamma$)

Ядерна реакція – реакція перетворення ядер одних хімічних елементів або елементарних частинок на ядра інших елементів або інші елементарні частинки. В ядерних реакціях зберігаються зарядове та масове числа, а також енергія і імпульс. **Радіоактивність** – явище самовільного (спонтанного) перетворення деяких ядер в інші ядра з випусканням елементарних частинок.

Основні типи радіоактивності:

1. α -розпад. При ньому «випускається» дочірнє ядро + α -частинка:

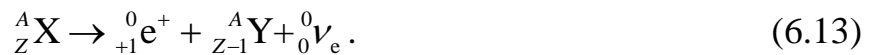


2. β -розпад.

2.1. β^- -розпад. При ньому «випускається» електрон + антинейтрино + дочірнє ядро:



2.2. β^+ -розпад. При ньому «випускається» позитрон + нейтрино + дочірнє ядро:



2.3. К-захват. При ньому ядро «захоплює» електрон, на виході реакції дочірнє ядро + нейтрино:



К-захват є наслідком реакції



3. γ -випромінювання. При ньому ядро залишається ядром з тими ж зарядовим та масовим числами, але з меншою енергією; ядро випромінює фотон:



Розглянемо певну кількість (макроскопічно велику) ядер радіоактивного елемента. dN – кількість ядер, які розпались за малий час dt , $dN \ll N$; N – кількість ядер в даний момент часу. $dN \sim N$, $dN \sim dt$, тож

$$dN = -\lambda N dt, \quad (6.17)$$

обрано знак «-», бо кількість ядер зменшується, значить приріст такої кількості від'ємний; коефіцієнт пропорційності λ називається *сталю розпаду*, $[\lambda] = \text{с}^{-1}$.

Стала розпаду залежить від самого елемента, який розпадається. Для різних елементів ця стала є різною, її значення наведені в довідниках (більше того, для різних ізотопів одного і того ж елемента вона теж різна).

Проінтегруємо вираз (6.17):

$$\begin{aligned} \frac{dN}{N} = -\lambda dt \Rightarrow \int \frac{dN}{N} = -\lambda \int dt + C \Rightarrow \ln N = -\lambda t + C \Rightarrow \\ \Rightarrow e^{\ln N} = e^{-\lambda t + C} \Rightarrow N = e^C e^{-\lambda t} \Rightarrow N(t) = B \cdot e^{-\lambda t}, \end{aligned} \quad (6.18)$$

тут C – стала інтегрування та $B = e^C = \text{const}$. Константу B можна знайти з початкової умови $N(0) = N_0$, N_0 – початкова кількість ядер:

$$N(0) = N_0 = B \cdot e^{-\lambda \cdot 0} = B \Rightarrow B = N_0, \quad (6.19)$$

звідки остаточно

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}. \quad (6.20)$$

Отриманий вираз носить назву **закону радіоактивного розпаду**.

Період напіврозпаду – час, за який кількість радіоактивних ядер певного елемента зменшується вдвічі (позначення $T_{1/2}$). За визначенням

$$N(T_{1/2}) = \frac{N_0}{2}, \quad (6.21)$$

звідки на основі (6.20) отримаємо зв'язок періоду напіврозпаду та сталої розпаду:

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}. \quad (6.22)$$

На основі (6.22) та (6.20) бачимо, що закон радіоактивного розпаду можна представити в термінах періоду напіврозпаду:

$$N(t) = N_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T_{1/2}}}. \quad (6.23)$$

Зокрема, на основі (6.23) бачимо, що справедливим є твердження

$$N(n \cdot T_{1/2}) = \frac{N_0}{2^n}, \quad (6.24)$$

тобто через період напіврозпаду після початку розпаду залишиться половина радіоактивних ядер, через два періоди – чверть ядер, через три періоди – одна восьма частина від початкової кількості ядер, і т. д.

Кількість радіоактивних розпадів в одиницю часу називають **активністю** радіоактивного препарату. Позначення активності: A , $[A] = \text{с}^{-1}$. За визначенням

$$A = -\frac{dN}{dt}, \quad (6.25)$$

знак « \leftarrow » має місце, бо активність є додатною величиною, а похідна $\frac{dN}{dt}$ є від'ємною, бо $N(t)$ – спадна функція. Згідно (6.25) та (6.20) отримуємо

$$A = \lambda N_0 e^{-\lambda t} = A_0 e^{-\lambda t}, \quad (6.26)$$

де $A_0 = \lambda N_0$ – активність в початковий момент часу. Як бачимо, активність експоненційно зменшується з часом.

6.3. Контрольні питання до розділу 6

1. Сформулювати постулати Бора. Вивести вирази для швидкості електрона на n -й орбіті воднеподібного атому та для радіуса на n -ї орбіті електрона у воднеподібному атомі. Вивести вираз для повної енергії воднеподібного атому в стані, коли електрон знаходиться на n -й орбіті. Вивести формулу для частот та довжин хвиль фотонів, що можуть випромінюватись воднеподібним атомом.

2. Дати визначення зарядового та масового чисел. Які закони збереження діють при ядерних реакціях? Дати визначення радіоактивності та вказати основні типи радіоактивності.

3. Вивести закон радіоактивного розпаду. Сформулювати визначення та вивести вираз для періоду напіврозпаду. Дати визначення активності радіоактивного препарату та вивести її часову залежність.

Список рекомендованої літератури

1. Гаркуша І. П., Курінний В. П.. Фізика : навч. посіб. у 7 частинах. Ч. 2. Молекулярна фізика і термодинаміка. Дніпро : НТУ «Дніпровська політехніка», 2021, 95 с.
2. Гаркуша І. П., Курінний В. П.. Фізика: навч. посіб. у 7 частинах. Ч. 4. Коливання і хвилі. Дніпро : Національний гірничий університет, 2018, 87 с.
3. Гаркуша І. П., Курінний В. П.. Фізика : навч. посіб. у 7 частинах. Ч. 5. Хвильова оптика. Дніпро : НТУ «Дніпровська політехніка», 2020, 56 с.
4. Гаркуша І. П., Курінний В. П.. Фізика : навч. посіб. у 7 частинах. Ч. 6. Квантова фізика. Дніпро : НТУ «Дніпровська політехніка», 2020, 90 с.
5. Гаркуша І. П., Курінний В. П.. Фізика : навч. посіб. у 7 частинах. Ч. 7. Фізика атомного ядра і елементарних частинок. Дніпро : Національний гірничий університет, 2018, 64 с.
6. Янг Г., Фрідман Р. Фізика для університетів. Львів : Наутілус, 2018, 1516 с.
7. Шкурдода Ю. О., Пасько О. О., Коваленко О. А. Фізика. Механіка, молекулярна фізика та термодинаміка. Суми : Сумський державний університет, 2021, 221 с.
8. Дідух Л. Д. Електрика та магнетизм : підручник. Тернопіль : Підручники і посібники, 2020, 464 с.

Навчальне видання

Горєв В'ячеслав Миколайович
Титаренко Валентина Василівна

ЗАГАЛЬНА ФІЗИКА

Навчальний посібник

У 2 частинах

Частина 2

Видано в авторській редакції.

Електронний ресурс
Підписано до видання 04.11.2024. Авт. арк. 6,5.

Підготовлено до видання
в Національному технічному університеті «Дніпровська політехніка».
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру ДК № 1842 від 11.06.2004.
49005, м. Дніпро, просп. Дмитра Яворницького, 19.