

Міністерство освіти і науки України
Державний вищий навчальний заклад
«Національний гірничий університет»

І.П.Гаркуша, В.П.Курінний

Фізика

Навчальний посібник у 7 частинах.

Частина. 3. Електрика і магнетизм

Дніпро
НГУ
2018

УДК 53 (075.4)
ББК 22.3я72
Г46

Затверджено Вченою радою Державного ВНЗ «НГУ» як навчальний посібник для бакалаврів та магістрів спеціальностей 184 «Гірництво» і 192 «Будівництво та цивільна інженерія». (Протокол № 3 від 26 лютого 2018 року)

Гаркуша І.П., Курінний В.П.

Г 46 Фізика. Навчальний посібник у 7 частинах. Ч. 3. Електрика і магнетизм. [Електронне видання]: - Д. Національний гірничий університет, 2018. - 165 с. -

Посібник складено у відповідності до програми нормативної дисципліни «Фізика» і є третьою з семи частин курсу лекцій тих же авторів, призначених для бакалаврів та магістрів спеціальностей 184 «Гірництво» і 192 «Будівництво та цивільна інженерія». Виклад супроводжується прикладами розв'язання задач, які полегшують розуміння теоретичного матеріалу.

Може бути корисним студентам денних і заочних відділень інших технічних напрямків підготовки, а також викладачам вищих технічних навчальних закладів.

ЕЛЕКТРИКА І МАГНЕТИЗМ

Глава 1. Електричне поле в вакуумі	5
§ 1. Електричний заряд	5
§ 2. Закон Кулона	6
§ 3. Електричне поле. Напруженість електричного поля	7
§ 4. Лінії вектора напруженості. Потік вектора напруженості	11
§ 5. Теорема Гаусса для електростатичного поля в вакуумі	13
§ 6. Застосування теореми Гаусса для визначення напруженості деяких полів у вакуумі	14
§ 7. Робота переміщення заряду в електростатичному полі. Потенціал поля	20
§ 8. Еквіпотенціальні поверхні. Зв'язок між напруженістю і потенціалом	24
§ 9. Обчислення різниці потенціалів за напруженістю поля	27
Глава 2. Електричне поле в діелектриках	30
§ 10. Диполь в зовнішньому електричному полі	30
§ 11. Типи діелектриків. Поляризація діелектриків	31
§ 12. Поляризованість. Діелектрична сприйнятливість	34
§ 13. Електричне зміщення. Діелектрична проникність	35
Глава 3. Провідники в електричному полі	39
§ 14. Рівновага зарядів на провіднику	39
§ 15. Електричне поле зарядженого провідника	40
§ 16. Електроємність відокремленого провідника	41
§ 17. Конденсатори	43
§ 18. З'єднання конденсаторів	46
Глава 4. Енергія електричного поля	48
§ 19. Енергія взаємодії точкових електричних зарядів	48
§ 20. Енергія зарядженого провідника і системи провідників. Енергія зарядженого конденсатора	48
§ 21. Густина енергії електростатичного поля	51
Глава 5. Постійний електричний струм	53
§ 22. Постійний електричний струм, його характеристики і умови існування	53
§ 23. Сторонні сили, ЕРС і напруга	55
§ 24. Закон Ома для однорідної ділянки кола. Електричний опір провідника	58
§ 25. Послідовне і паралельне з'єднання провідників	61
§ 26. Робота, потужність і теплова дія струму. Закон Джоуля - Ленца	63
§ 27. Закон Ома для неоднорідної ділянки кола	65
§ 28. Закон Ома для замкненого кола	66
§ 29. Правила Кірхгофа	68
§ 30. Елементи класичної електронної теорії електропровідності металів	71

Глава 6. Магнітне поле у вакуумі	79
§ 31. Магнітне поле. Вектор магнітної індукції	79
§ 32. Закон Біо-Савара-Лапласа і його застосування до розрахунку полів прямого і кругового струмів	83
§ 33. Магнітне поле рухомого заряду	89
§ 34. Дія магнітного поля на провідник зі струмом. Закон Ампера	90
§ 35. Взаємодія двох паралельних струмів. Визначення одиниці сили струму - ампера.....	91
§ 36. Дія магнітного поля на рухомий заряд. Сила Лоренца	92
§ 37. Рух заряджених частинок в магнітному полі	94
§ 38. Ефект Холла	99
§ 39. Циркуляція вектора магнітної індукції у вакуумі	101
§ 40. Магнітне поле соленоїда і тороїда	104
§ 41. Потік вектора магнітної індукції	106
§ 42. Робота, що здійснюється при переміщенні провідника зі струмом в магнітному полі ...	107
§ 43. Момент сил, що діють на контур зі струмом в однорідному магнітному полі	109
Глава 7. Магнітне поле в речовині	112
§ 44. Намагнічення речовини	112
§ 45.1. Опис магнітного поля в речовині. Циркуляція вектора магнітної індукції в речовині. На- пруженість магнітного поля. Магнітна сприйнятливість і магнітна проникливість.....	113
§ 45.2. Граничні умови на межі поділу двох магнетиків	117
§ 46. Природа молекулярних струмів. Магнітні властивості атомів	120
§ 47. Діа- і парамагнетизм	121
§ 48. Магнітовпорядковані речовини (феро -, антиферро-, феримагнетики)	124
Глава 8. Електромагнітна індукція	130
§ 49. Явище електромагнітної індукції. Закон Фарадея. Визначення закону електромагнітної ін- дукції з закону збереження енергії. Правило Ленца	130
§ 50. Природа ЕРС індукції. Визначення закону електромагнітної індукції на основі електронної теорії	135
§ 51. Явище самоіндукції. Індуктивність. Явище взаємної індукції	138
§ 52. Струм при замиканні і розмиканні кола	141
§ 53. Енергія магнітного поля	144
§ 54. Релятивістське тлумачення магнітної взаємодії рухомого заряду і прямолінійного провід- ника зі струмом. Відносний характер електричного і магнітного полів	145
§ 55. Перетворення Лоренца для електромагнітного поля	150
Глава 9. Рівняння Максвелла.....	153
§ 56. Вихровий електричне поле. Перше рівняння Максвелла	153
§ 57. Струм зміщення. Друге рівняння Максвелла	155
§ 58. Третє і четверте рівняння Максвелла	159
§ 59. Повна система рівнянь Максвелла для електромагнітного поля	160

Глава 1. ЕЛЕКТРИЧНЕ ПОЛЕ У ВАКУУМІ

§ 1. Електричний заряд

Всі тіла в природі утворені з атомів і молекул, які, в свою чергу, складаються з ядер і електронів, що мають електричний заряд.

Електричний заряд, подібно до маси, є властивістю елементарних частинок, їх внутрішньою характеристикою. **Електричний заряд – величина, що визначає інтенсивність електромагнітної взаємодії заряджених частинок.**

Розрізняють два види електричних зарядів, умовно названих *позитивними і негативними*. Електрони є негативно зарядженими частинками, а протони, що входять до складу атомного ядра, – позитивними. Однойменні заряди (заряди одного знака) відштовхуються один від одного, різнойменні (заряди різних знаків) – притягуються.

Найменший за величиною експериментально виявлений в природі заряд – це заряд електрона

$$q_e = -e; \quad e \approx 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл.} \quad (1.1)$$

Електричний заряд, що дорівнює e , називається *елементарним зарядом*. Носіями елементарних зарядів і нейтральними, тобто такими, заряд яких дорівнює нулю, є такі елементарні частинки (таблиця 1):

Таблиця 1.

$+e$	протон, позитрон , позитивний мюон μ^+ , позитивний піон π^+
$-e$	електрон, антипротон, негативний мюон μ^- , негативний пион π^-
0	нейтрон, нейтрино, фотон, нейтральний піон π^0

В кожному атомі сумарний позитивний і негативний заряди однакові, тому в будь-якому елементарному об'ємі тіла алгебраїчна сума зарядів дорівнює нулю. Внаслідок цього тіла є електрично нейтральними або незарядженими.

Однак, якщо відірвати електрони від одних тіл і передати їх іншим тілам, то ці тіла стають відповідно позитивно і негативно зарядженими. Наприклад, якщо натирати скляну паличку шматком гуми, скло заряджається позитивно, гума в такій же кількості - негативно. Заряд пластмасової палички, що наелектризована об шерсть, є негативним.

Електричний заряд q будь-якого тіла є цілим кратним електричному заряду e , тобто змінюється дискретно, або, як кажуть, *квантується*:

$$q = \pm Ne, \quad (1.2)$$

де N - ціле число.

Експериментально встановлено, що **сумарний електричний заряд ізольованої системи залишається постійним** при всіх взаємодіях і перетвореннях частинок цієї системи. Це твердження називається **законом збереження електричного заряду**.

Електричні заряди можуть виникати і зникати, однак при цьому виникають або зникають одночасно два елементарних заряди різних знаків. Наприклад, якщо стикаються електрон із зарядом $-e$ і його античастинка позитрон з зарядом $+e$, то в результаті анігіляції народжуються два гамма-фотони:

$$e^- + e^+ = \gamma + \gamma.$$

Повний заряд до і після реакції дорівнює нулю.

І навпаки, пролітаючи поблизу атомного ядра, гамма-фотон може перетворитися в пару частинок – електрон ($-e$) і позитрон ($+e$).

Ще однією властивістю електричного заряду, що встановлена експериментально, є незалежність заряду від його швидкості. Величина заряду, що вимірюється в різних інерціальних системах відліку, є однаковою. Цю обставину називають *релятивістською інваріантністю заряду*.

§ 2. Закон Кулона

Якщо розміри заряджених тіл є значно меншими в порівнянні з відстанню між ними, тіла можна вважати матеріальними точками, або *точковими зарядами*.

Французький фізик Ш. Кулон експериментально встановив:

сила взаємодії двох точкових нерухомих зарядів у вакуумі пропорційна добутку зарядів q_1 і q_2 , обернено пропорційна квадрату відстані r між ними і спрямована вздовж прямої, що з'єднує ці заряди:

$$F = k \frac{|q_1||q_2|}{r^2}. \quad (2.1)$$

Ця формула визначає *модуль* сили. Коефіцієнт пропорційності k в СІ дорівнює:

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}, \quad (2.2)$$

де ϵ_0 – електрична стала,

$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ А}^2 \cdot \text{с}^4 / \text{м}^3 \cdot \text{кг}. \quad (2.3)$$

Зручним для розрахунків є наближене значення k :

$$k \approx 9 \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{Кл}^2.$$

Щоб формула давала не тільки значення модуля сили, а й напрям сили, закон Кулона можна виразити в векторній формі:

$$\mathbf{F} = k \frac{q_1 q_2}{r^3} \mathbf{r}, \quad (2.4)$$

Тут $\mathbf{F}$ – сила, що діє на заряд, до якої звернуто вектор $\mathbf{r}$, проведений від одного заряду до іншого (рис. 2.1). Модуль цього вектора дорівнює відстані між зарядами.

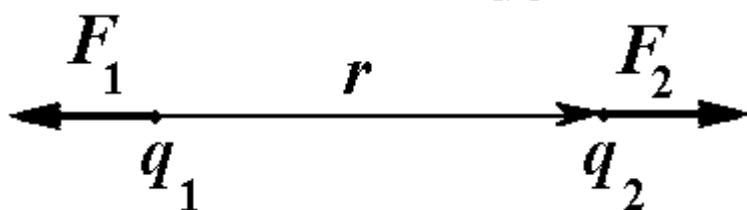


Рис. 2.1.

За будь-яких знаків зарядів формула (2.4) дає правильний напрям сили. Так, при відштовхуванні (рис. 2.1), тобто в разі однойменних зарядів $q_1 q_2 > 0$, і сила

F_2 , яка діє на заряд q_2 з боку заряду q_1 , спрямована уздовж $\mathbf{r}$.

При притяганні, тобто в разі різноименних зарядів добуток $q_1 q_2 < 0$, і вектори $\mathbf{F}_2$ і $\mathbf{r}$ спрямовані в протилежні боки (рис. 2.2).

Щоб отримати силу F_1 , що діє на перший заряд q_1 , потрібно провести вектор $\mathbf{r}$ від q_2 до q_1 , підставити його в (2.4) і повторити міркування.

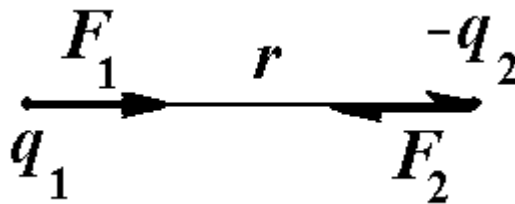


Рис. 2.2.

Якщо записати закон Кулона у вигляді

$$F_r = k \frac{q_1 q_2}{r^2}, \quad (2.5)$$

то цей вираз є *проекцією* вектора $\mathbf{F}$ на напрям вектора $\mathbf{r}$. Проекція може бути додатною або від'ємною в залежності від знака добутку $q_1 q_2$.

§ 3. Електричне поле. Напруженість електричного поля

Згідно з уявленнями класичної фізики взаємодія між зарядами здійснюється через поле. Всякий електричний заряд змінює певним чином властивості простору навколо нього - створює **електромагнітне поле**. Це поле проявляє себе в тому, що на поміщений в будь-яку його точку інший, «пробний» заряд діє деяка сила, тобто взаємодія електричних зарядів здійснюється через «посередника» - електромагнітне поле.

Електричне поле поряд з речовиною є формою існування матерії. Йому притаманні енергія і імпульс, поле є фізичною реальністю.

Поле, створюване *нерухомими електричними зарядами*, не змінюється з часом і називається *електростатичним*. (Зауважимо, що рухомі заряди, крім електричного поля створюють також магнітне поле.)

Швидкість поширення електромагнітного поля в порожнечі дорівнює

$$c = 299\,792,458 \text{ км/с} \approx 300\,000 \text{ км/с}.$$

Для вивчення поля розглядають дві його фізичні характеристики - силову і енергетичну.

Помістивши в відповідну точку поля пробний заряд, можна виявити силу, діючу на нього. Величина сили, що діє на заряд, характеризує «інтенсивність» поля. Ця сила залежить як від поля, так і від самого пробного заряду.

Наприклад, в разі поля, створеного нерухомим точковим зарядом q в точці, положення якої щодо заряду q визначається радіус-вектором $\mathbf{r}$, на пробний позитивний точковий заряд q_{np} в цьому полі буде за законом Кулона (2.4) діяти сила

$$\mathbf{F} = k \frac{q q_{np}}{r^3} \mathbf{r} \quad (3.1)$$

Сила пропорційна величині кожного з зарядів. Однак, відношення сили до величини пробного заряду $\mathbf{F}/q_{np}$ вже не залежить від величини пробного заряду, а залежить тільки від величин q і $\mathbf{r}$, що визначають поле в даній точці.

Напруженістю E електричного поля називається векторна величина, що дорівнює в кожній точці відношенню сили F , що діє на пробний заряд, поміщений в цю точку, до величини заряду q_{np} :

$$E = \frac{F}{q_{np}}. \quad (3.2)$$

Вектор E - силова характеристика електричного поля - чисельно дорівнює і збігається за напрямом з силою, що діє з боку поля на вміщений у розглянуту точку одиничний позитивний пробний заряд. Звідси випливає просте правило - для визначення напрямку вектора напруженості електричного поля в різних точках простору в ці точки треба подумки помістити плюс одиницю заряду. На рис 3.1 і 3.2 показані картини полів, створених точковим позитивним (рис. 3.1) і точковим негативним (рис. 3.2) зарядами. Вектор напруженості E має радіальний напрям: він спрямований від створюючого поле заряду q , якщо це позитивний заряд, і до заряду q , якщо він негативний.

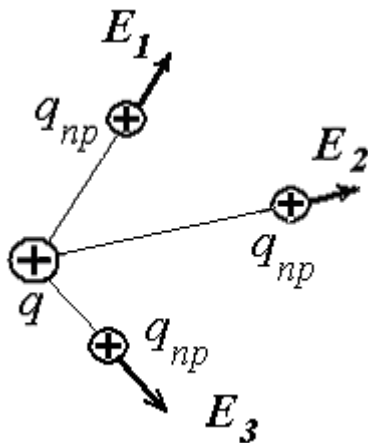


Рис. 3.1.

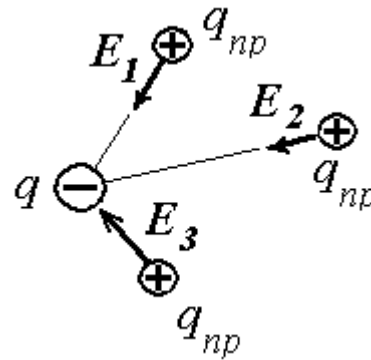


Рис. 3.2.

З формул (3.1) і (3.2) отримаємо *напруженість поля точкового заряду q в будь-якій точці поля*

$$E = k \frac{q}{r^2} \mathbf{r}, \quad (3.3)$$

де $\mathbf{r}$ - радіус-вектор, проведений з заряду в дану точку поля. Направлений вектор E уздовж радіальної прямої від заряду, якщо він позитивний, і до заряду, якщо він негативний.

Модуль E напруженості поля точкового заряду q в точці, віддаленій на відстані r від нього:

$$E = k \frac{|q|}{r^2}. \quad (3.4)$$

Одиниця вимірювання напруженості електричного поля в СІ - ньютон на кулон (Н/К) або вольт на метр (В/м) - дорівнює напруженості такого поля, в якому на заряд в 1 Кл діє сила в 1 Н.

Приклад 3.1. Користуючись формулою для напруженості електричного поля точкового заряду (3.3) і враховуючи розміри атома $r_a \sim 10^{-10}$ м, оцінимо напруженість електричного поля всередині найпростішого з атомів - атома водню. Поле створюється позитивно зарядженим ядром - протоном з зарядом $|e| = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

$$E = \frac{|e|}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 9 \cdot 10^9}{10^{-20}} \approx 1,5 \cdot 10^{11} \text{ В/м}.$$

Досягнуті на практиці електричні поля мають набагато меншу величину напруженості - близько 10^7 В/м.

Знаючи напруженість електричного поля, можна знайти силу, що діє на будь-який заряд q , поміщений в дану точку поля. Відповідно до (3.2) вираз для цієї сили має вигляд

$$F = q E \quad (3.5)$$

Принцип суперпозиції. Дослідним шляхом встановлено, що напруженість поля, створюваного декількома зарядами, дорівнює векторній сумі напруженостей полів, створених кожним зарядом окремо:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \dots = \sum \mathbf{E}_i. \quad (3.6)$$

Додавання напруженостей електричних полів за правилом додавання векторів виражає так званий *принцип суперпозиції (накладення один на одного) електричних полів*.

Це означає, що присутність інших електричних зарядів ніяк не позначається на полі, створеному даними зарядом. Окремі заряди діють незалежно, «не заважаючи» один одному, не впливають один на одного, і тому сумарне поле можна визначити як векторну суму полів від кожного з них окремо.

Принцип суперпозиції дозволяє розрахувати напруженість поля, створеного будь-яким розподілом нерухомих електричних зарядів.

Приклад 3.2. Поле диполя. Електричним диполем називається система двох однакових за модулем і протилежних за знаком точкових зарядів $+q$ і $-q$, відстань l між якими (плече диполя) є малою в порівнянні з відстанями r до тих точок, в яких розглядається поле системи. Визначимо напруженість електричного поля диполя:

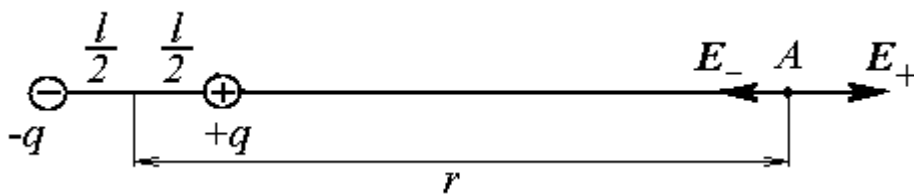


Рис. П.3.1.

- 1) в точці A , що лежить на продовженні плеча l на відстані r від його середини (при $r \ll l$) (рис. П.3.1);
- 2) в точці B на перпендикулярі до плеча диполя, проведеному через його середину (рис. П.3.2);
- 3) в довільній точці C .

- 1). За принципом суперпозиції:

$$E_A = E_+ + E_-.$$

Тут E_+ – напруженість поля, створеного зарядом $+q$, а E_- – зарядом $-q$ в точці A . Оскільки в точці A ці вектори спрямовані в протилежні боки, використовуючи формулу (3.4) можна написати:

$$E_A = E_+ - E_- = k \frac{q}{\left(r - \frac{l}{2}\right)^2} - k \frac{q}{\left(r + \frac{l}{2}\right)^2} = k \frac{2qlr}{\left(r^2 - \frac{l^2}{4}\right)^2}.$$

За умовою $r \gg l$, тому $r^2 \gg \frac{l^2}{4}$ і в знаменнику останньої формули можна знехтувати $\frac{l^2}{4}$ в порівнянні з r^2 . Тоді для напруженості поля в точці A отримаємо

$$E_A = k \frac{2ql}{r^3}. \quad (\text{П. 3.1})$$

Плечем диполя називають вектор $\mathbf{l}$, напрямлений вздовж осі диполя від негативного заряду до позитивного, і довжина якого дорівнює відстані між ними. Добуток абсолютної величини заряду на плече називають *електричним моментом диполя* $\mathbf{p} = q \cdot \mathbf{l}$. Тоді

$$E_A = k \frac{2\mathbf{p}}{r^3}.$$

2). Для точки B на прямій, перпендикулярній до осі диполя, вектори $\mathbf{E}_+$ та $\mathbf{E}_-$ мають однакові модулі, що дорівнюють

$$E_+ = E_- = k \frac{q}{r^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2} \approx k \frac{q}{r^2}. \quad (\text{П. 3.2})$$

Із подібності рівнобедрених трикутників, що спираються на відрізок l і на вектор $\mathbf{E}_B$, випливає

$$\frac{E_B}{E_+} = \frac{l}{r_+} = \frac{l}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2}} \approx \frac{l}{r}.$$

Підставивши значення E_+ (П. 3.2), отримаємо

$$E_B = k \frac{ql}{r^3} = k \frac{p}{r^3}. \quad (\text{П. 3.3})$$

Ця залежність у векторному вигляді:

$$\mathbf{E}_B = -k \frac{\mathbf{p}}{r^3}. \quad (\text{П. 3.4})$$

3). Можна показати, що напруженість поля диполя в довільній точці C визначається формулою

$$E_C = k \frac{p}{r^3} \sqrt{1 + 3\cos^2 \alpha}, \quad (\text{П. 3.5})$$

де α - кут між вектором $\mathbf{l}$ і вектором $\mathbf{r}$.

Відзначимо, що на відміну від поля одного точкового заряду, напруженість якого зменшується як $\frac{1}{r^2}$, напруженість поля диполя з відстанню зменшується як $\frac{1}{r^3}$, тобто швидше.

§ 4. Лінії вектора напруженості. Потік вектора напруженості

Для графічного зображення електричних полів використовують *лінії вектора напруженості* або

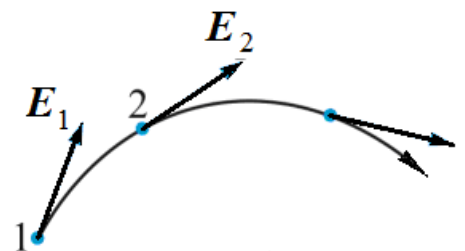


Рис. 4.1.

силові лінії. Ці лінії проводяться таким чином, щоб в кожній точці дотична до лінії збігалася за напрямом з вектором напруженості в цій точці (рис. 4.1). Силовим лініям приписують напрям: вони виходять з позитивних зарядів або приходять з нескінченності. Вони або закінчуються на негативних зарядах, або йдуть в нескінченність. На рисунках цей напрям позначають стрілками на силовій лінії.

Домовилися густоту ліній пов'язувати з модулем напруженості поля E . А саме, через одиничну площинку, перпендикулярну силовим лініям, проводять таку кількість ліній, яка чисельно дорівнює в цьому місці напруженості поля. Таким чином лінії проводять густіше в тих місцях, де напруженість поля більше, і рідше там, де вона є меншою.

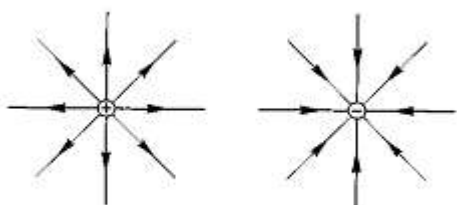


Рис. 4.2.

На рис. 4.2 показані силові лінії поля відокремлених позитивного і негативного точкових зарядів. З формули (3.3) випливає, що вони є радіальними прямими, розподіленими з однаковою густотою в усіх напрямках.

Більш складний вид має картина ліній поля, створеного двома зарядами протилежних (рис. 4.3) або однакових знаків (рис 4.4).

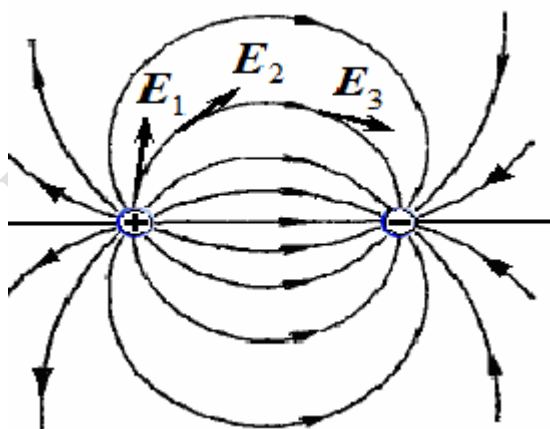


Рис. 4.3.

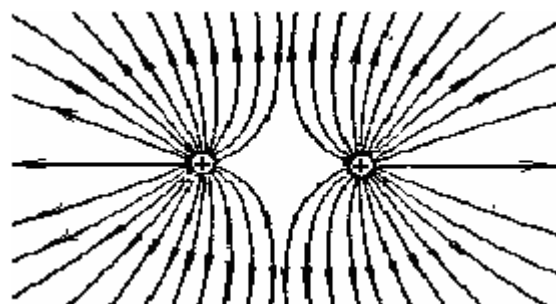


Рис. 4.4.

Поле називається *однорідним*, якщо величина і напрям вектора E однакові у всіх точках поля. Очевидно, що однорідне поле зображується прямими паралельними силовими лініями однакової густоти (рис. 4.5).

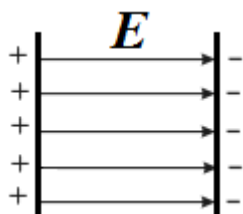


Рис. 4.5.

Введемо поняття *потіку вектора напруженості* поля через поверхню.

Розглянемо невелику площинку ΔS_0 , розміщену в однорідному електростатичному полі перпендикулярно силовим лініям (рис. 4.6).

Визначимо, яка кількість силових ліній пронизує цю площинку. За домовленістю густоту ліній, тобто кількість ліній, розраховану на одиницю площі поверхні, орієнтованої перпендикулярно до ліній, вибирають рівною модулю E напруженості поля.

Тоді кількість ліній, які пронизують площинку ΔS_0 дорівнюватиме

$$\Delta\Phi_E = E \Delta S_0 \quad (4.1)$$

Нехай тепер ΔS - інша площинка, силові лінії утворюють з нормаллю до цієї площадки кут α .

Площинка ΔS_0 є проекцією площинки ΔS на площину, перпендикулярну до силових ліній.

$$\Delta S_0 = \Delta S \cos \alpha.$$

Тут α - кут між напрямом ліній напруженості і напрямом нормалі до площинки ΔS (рис. 4.6).

Як видно з рисунка, кількість ліній, які перетинають ΔS і ΔS_0 , є однаковою. Тому кількість ліній, які пронизують площинку ΔS буде також дорівнювати

$$\Delta\Phi_E = E \Delta S_0 = E \Delta S \cos \alpha$$

Величина $E \cos \alpha$ є проекцією вектора $\mathbf{E}$ на напрям нормалі $\mathbf{n}$ до площинки ΔS :

$$E \cos \alpha = E_n.$$

Тому кількість силових ліній $\Delta\Phi$, які перетинають площадку ΔS , дорівнює

$$\Delta\Phi_E = E_n \Delta S \quad (4.2)$$

Добуток $E_n \Delta S$ носить назву *потіку вектора напруженості* поля через поверхню ΔS . Формула (4.2) показує, що потік $\Delta\Phi_E$ вектора $\mathbf{E}$ через поверхню ΔS дорівнює повному числу силових ліній, які перетинають цю поверхню.

Відзначимо, що потік вектора напруженості, як і кількість силових ліній, що проходять крізь поверхню, є скаляром - алгебраїчною величиною. Потік вважається додатним, якщо силові лінії перетинають поверхню в напрямі нормалі і від'ємним - у протилежному напрямі.

У разі замкнутих поверхонь під нормаллю до площинки dS розуміють обернену назовні, тобто зовнішню нормаль. Тоді потік, що виходить назовні з області, яка охоплюється поверхнею, буде додатним.

Якщо під $d\mathbf{S}$ розуміти вектор, спрямований перпендикулярно до площини площинки в напрямі зовнішньої нормалі і рівний за модулем площі цієї елементарної площинки, то потік вектора напруженості $\mathbf{E}$ через площинку $d\mathbf{S}$ є скалярним добутком векторів $\mathbf{E}$ і $d\mathbf{S}$:

$$d\Phi_E = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E dS \cos \alpha = E_n dS = E dS_n, \quad (4.3)$$

де $dS_n = dS \cos \alpha$ - площа проекції площинки dS на площину, перпендикулярну до вектора $\mathbf{E}$.

Повний потік Φ_E вектора напруженості електричного поля через довільну поверхню S дорівнює алгебраїчній сумі потоків через всі малі ділянки цієї поверхні - інтегралу по поверхні

$$\Phi_E = \int_S E dS \cos \alpha = \int_S E_n dS = \int_S E dS_n. \quad (4.4)$$

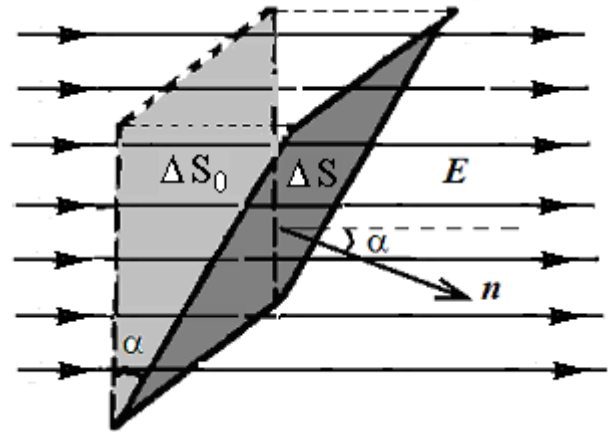


Рис. 4.6.

§ 5. Теорема Гаусса для електростатичного поля в вакуумі

Розглянемо картину силових ліній електричного поля нерухомого точкового позитивного заряду (рис. 5.1). Вони являють собою симетрично розміщені радіальні прямі.

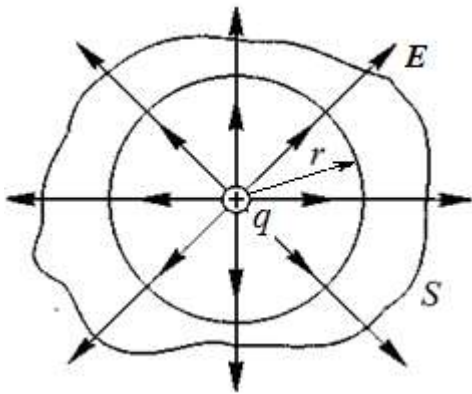


Рис. 5.1.

Обчислимо потік вектора $\mathbf{E}$ через замкнену сферичну поверхню, яка охоплює цей заряд і має центр в точці знаходження заряду. Повне число Φ_E ліній, які перетинають сферичну поверхню радіуса r , буде дорівнювати добутку густоти ліній на площу поверхні сфери $4\pi r^2$.

Густота ліній має за умовою дорівнювати модулю вектора $\mathbf{E}$:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}.$$

Тут враховано, що $|q| = q$, тому що $q > 0$. З цієї формули випливає, що на всій поверхні сфери напруженість поля, а отже, і густота ліній, буде однаковою за величиною. Напруженість спрямована уздовж радіуса, тобто за нормаллю до поверхні сфери, тому $E_n = E$. Отже, потік вектора напруженості крізь сферичну поверхню, що охоплює заряд, дорівнює

$$\Phi_E = \oint_S \mathbf{E}_n dS = E_n S = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad (5.1)$$

Знак потоку збігається зі знаком заряду.

Якщо замінити сферу довільною замкненою поверхнею S , що охоплює заряд q (рис. 5.2), то є очевидним, що кожна силова лінія, яка перетинає сферу, перетне і цю поверхню. Отже, потік Φ_E вектора $\mathbf{E}$ і для поверхні будь-якої іншої форми, якщо вона замкнена і містить в собі точковий заряд q , також буде дорівнювати q/ϵ_0 .

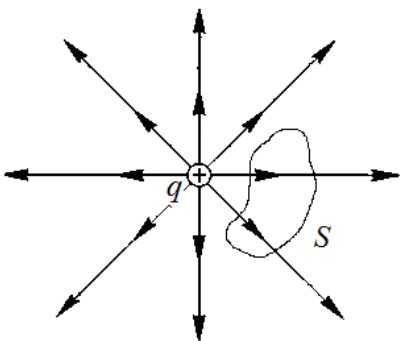


Рис. 5.2.

$$\Phi_E = \oint_S \mathbf{E}_n dS = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

Якщо всередині замкненої поверхні міститься кілька зарядів, то в силу принципу суперпозиції полів сумарна напруженість поля буде являти собою векторну суму напруженостей полів кожного із зарядів

$$\Phi_E = \oint_S \mathbf{E}_n dS = \oint_S (\mathbf{E}_{1n} + \mathbf{E}_{2n} + \dots) dS = \Phi_{1E} + \Phi_{2E} + \dots \quad (5.2)$$

і, отже,

$$\Phi_E = \sum_i \frac{q_i}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i \quad (5.3)$$

Якщо замкнена поверхня не охоплює заряду (рис. 5.2), то потік вектора E крізь цю поверхню дорівнює нулю, оскільки кількість силових ліній, що входять крізь поверхню, дорівнює кількості ліній, що виходять з неї.

Доведене твердження називається **теоремою Гаусса** для електростатичного поля в вакуумі:

потік Φ_E вектора напруженості електростатичного поля у вакуумі крізь довільну замкнену поверхню S дорівнює алгебраїчній сумі тих точкових зарядів q_i , які охоплюються поверхнею S , поділений на електричну сталу ϵ_0 .

$$\Phi_E = \oint_S E_n dS = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i \quad (5.4)$$

Зауважимо, що теорема Гаусса тісно пов'язана зі справедливістю закону Кулона. Виведення теореми Гаусса використовує скорочення r^2 , а це можливо через те, що сила взаємодії зарядів, що описується законом Кулона, обернено пропорційна квадрату відстані між зарядами.

Закон Кулона і теорема Гаусса фактично представляють один і той же закон природи. Крім того, пропорційність площі поверхні квадрату лінійних розмірів - це відмінна риса евклідової геометрії в тривимірному просторі. Таким чином, теорема Гаусса свідчить про нескривленість тривимірного фізичного простору, тобто про те, що його геометрія є евклідовою.

§ 6. Застосування теореми Гаусса для визначення напруженості деяких полів у вакуумі

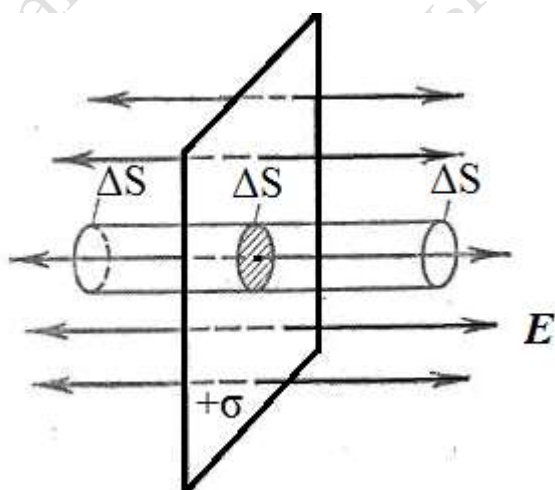


Рис. 6.1.

1. Поле нескінченної рівномірно зарядженої площини.

Нехай нескінченна площина заряджена з постійною поверхневою густиною зарядів $+\sigma$, яка визначається формулою

$$\sigma = \frac{dq}{dS}, \quad (6.1)$$

де dq - заряд, розміщений на малій ділянці поверхні площею dS .

Для визначеності виберемо позитивний заряд ($\sigma > 0$).

Оскільки площина є нескінченною і заряд її поверхні є однорідним, то з міркувань симетрії слід вважати, що напруженість в будь-якій точці поля має бути перпендикулярною до площини ($E = E_n$), спрямованою від неї (обраний випадок позитивно зарядженої площини), а густота ліній є всюди однією і тією ж (рис. 6.1).

Ця площина є площиною симетрії поля, в симетричних відносно площини точках напруженість повинна бути однаковою за величиною і протилежною за напрямом.

Для застосування теореми Гаусса виберемо замкнену поверхню у вигляді циліндричної поверхні з твірними, перпендикулярними до площини, і основами ΔS , паралельними площині і розміщеними на однаковій відстані від неї.

Потік вектора напруженості поля крізь циліндричну частину поверхні дорівнює нулю, оскільки лінії напруженості поля ковзають уздовж цієї поверхні і не перетинають її.

Усередині побудованої таким чином замкненої поверхні перебуває ділянка зарядженої площини ΔS , на який міститься заряд

$$\Delta q = \sigma \Delta S. \quad (6.2)$$

При обчисленні потоку вектора $\mathbf{E}$ крізь замкнену поверхню необхідно враховувати, що силові лінії пронизують дві площинки ΔS – ті, що лежать вправо і вліво від площини. Отже, потік через них дорівнює

$$\Phi_E = E \cdot 2\Delta S. \quad (6.3)$$

З іншого боку, той же потік за теоремою Гаусса дорівнює заряду всередині, поділеному на ϵ_0 :

$$2E\Delta S = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma \Delta S,$$

звідки напруженість поля з кожного боку від рівномірно зарядженої площини в вакуумі

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}. \quad (6.4)$$

Отже, поле нескінченної зарядженої площини не залежить від відстані до неї і перпендикулярно до площини.

Якщо записати отриманий результат у вигляді $E_n = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$, де E_n – проекція вектора $\mathbf{E}$ на нормаль $\mathbf{n}$ до зарядженої площини, причому вектор $\mathbf{n}$ спрямований від цієї площини, то ця формула буде справедливою і для негативно зарядженої площини.

Якщо $\sigma > 0$, то і $E_n > 0$, вектор $\mathbf{E}$ спрямований від зарядженої площини, як на рис. 6.1, якщо ж $\sigma < 0$, то $E_n < 0$, і вектор $\mathbf{E}$ спрямований до зарядженої площини.

2. Напруженість поля двох нескінченних паралельних площин, заряджених різноіменно з поверхневими густинами зарядів $+\sigma$ і $-\sigma$ (модель плоского конденсатора).

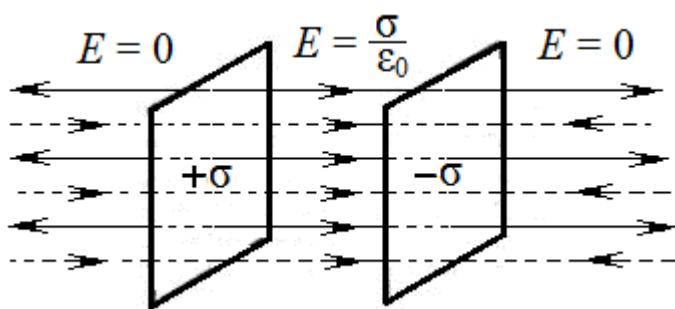


Рис. 6.2.

Зобразимо на рис. 6.2 суцільними силові лінії, що починаються на позитивних зарядах лівої поверхні, і штриховими – ті, що входять в праву поверхню, яка несе негативний заряд.

Напруженість поля кожної окремої площини дорівнює за модулем $\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$. У просторі між площинами на-

пруженості збігаються за напрямком,

за принципом суперпозиції напруженості полів додаються і загальна напруженість дорівнює

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \quad (6.5)$$

Тут під σ мається на увазі модуль поверхневої густини заряду.

Напруженість поля поза пластин дорівнює нулю, оскільки за абсолютним значенням напруженості є рівними, а за напрямом є протилежними – поля взаємно знищуються.

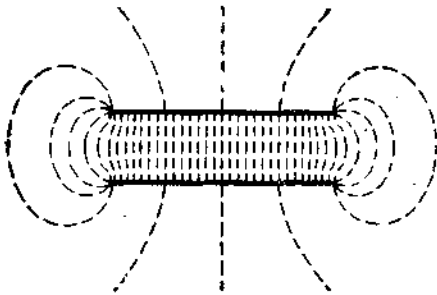


Рис. 6.3.

Таким чином, поле виявляється зосередженим між пластинами. Напруженість поля у всіх точках цієї області є однаковою за величиною і за напрямком. Вона спрямована від позитивно зарядженої площини до негативної за нормаллю до них. Таке поле є однорідним, а лінії напруженості являють собою сукупність паралельних рівновіддалених прямих. Подібним до розглянутого

випадку є поле зарядженого плоского конденсатора (рис. 6.3), хоча він має кінцеві розміри. Однорідність поля порушується тільки поблизу країв пластин.

3. Напруженість поля рівномірно зарядженої нитки.

Розглянемо нескінченну прямолінійну нитку, вздовж якої рівномірно розподілений заряд з лінійною густиною

$$\tau = \frac{dq}{dl}. \quad (6.6)$$

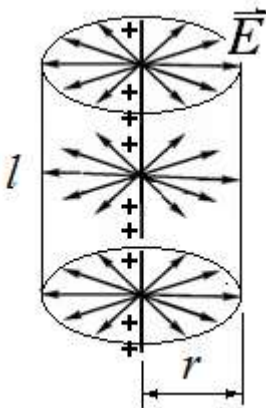


Рис. 6.4.

З міркувань симетрії випливає, що поле нескінченної рівномірно зарядженої нитки має осьову симетрію – вектор $\vec{E}$ в кожній точці спрямований перпендикулярно до нитки і радіально від неї (якщо $\tau > 0$, рис. 6.4) або до неї (якщо $\tau < 0$). Модуль вектора $\vec{E}$ залежить тільки від відстані r до нитки. Лінії напруженості є радіальними прямими, що лежать в площинах, перпендикулярних до нитки.

Щоб скористатися теоремою Гаусса і визначити напруженість електричного поля на відстані r від нитки, оточимо її замкненою циліндричною поверхнею так, щоб сама нитка була віссю циліндра.

З огляду на те, що силові лінії пронизують тільки бічну поверхню циліндра і ковзають по його основам, визначимо потік вектора $\vec{E}$ простим множенням E_r на площу бічної поверхні:

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E}_n dS = E_r S_{\text{біч}} = E_r \cdot 2\pi r l, \quad (6.7)$$

де E_r – проекція вектора $\vec{E}$ на радіус-вектор $\vec{r}$, проведений від нитки до точки поля, в якій визначають $\vec{E}$, і спрямований перпендикулярно до осі.

Оскільки заряд, що охоплюється замкненою поверхнею, в даному випадку дорівнює

$$q = \tau l,$$

застосуємо теорему Гаусса:

$$\Phi_E = \frac{q}{\varepsilon_0}, \text{ или } E_r \cdot 2\pi r l = \frac{\tau \cdot l}{\varepsilon_0}.$$

Звідки

$$E_r = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}. \quad (6.8)$$

При $\tau > 0$ $E_r > 0$, тобто вектор $\mathbf{E}$ спрямований від зарядженої нитки, при $\tau < 0$ $E_r < 0$, вектор $\mathbf{E}$ спрямований до нитки.

Такий самий вигляд має поле нескінченного рівномірно зарядженого по поверхні циліндра (рис. 6.5). Якщо радіус циліндра R , поверхнева густина заряду σ , то заряд, що припадає на елемент довжини dl циліндра дорівнює

$$dq = \sigma \cdot 2\pi R dl,$$

а кількість заряду, що припадає на одиницю довжини циліндра – лінійна густина заряду τ :

$$\tau = \frac{dq}{dl} = \frac{\sigma 2\pi R dl}{dl} = \sigma 2\pi R.$$

Тоді

$$E_r = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0 r} \quad (r \geq R) \quad (6.9).$$

Якщо $r < R$, то гауссова замкнена циліндрична поверхня радіуса r , що є коаксіальною із зарядженою поверхнею, не охоплює зарядів, внаслідок чого $E_r = 0$. Тобто всередині зарядженої нескінченно довгої циліндричної поверхні поле відсутнє.

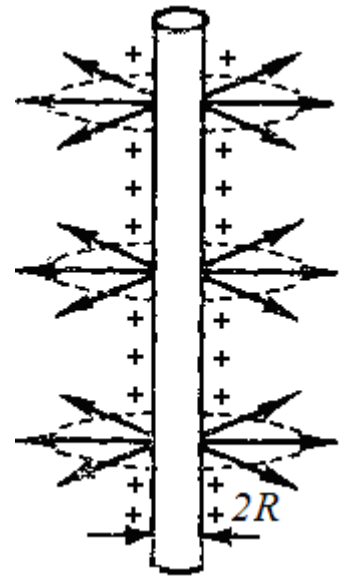


Рис. 6.5.

4. Напруженість поля рівномірно зарядженої сферичної поверхні.

Нехай заряд q рівномірно розподілений в вакуумі на поверхні сфери радіуса R (рис. 6.6) з поверхневою густиною зарядів σ :

$$\sigma = \frac{q}{S_{\text{сфери}}} = \frac{q}{4\pi R^2}.$$

Поле такої зарядженої сфери буде симетричним відносно центра сфери.

Це означає, що вектори напруженості $\mathbf{E}$ будуть напрямлені радіально, а величина напруженості залежить тільки від відстані r від центра сфери.

В якості замкненої гауссової поверхні виберемо також сферичну поверхню радіуса $r > R$, описану навколо зарядженої сфери з тим же цент-

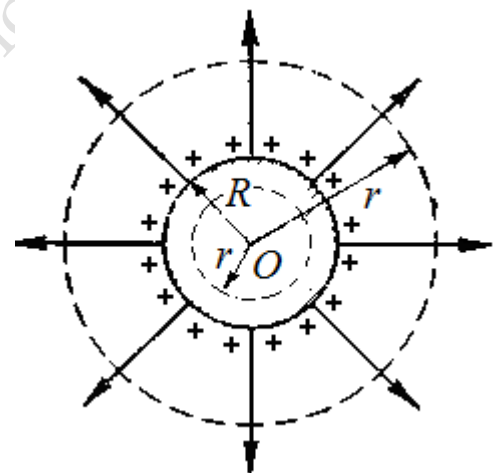


Рис. 6.6.

ром.

Оскільки для всіх точок поверхні напруженість поля $\mathbf{E}$ є перпендикулярною до поверхні, потік вектора $\mathbf{E}$ визначиться так:

$$\Phi_E = E_r \cdot 4\pi r^2 \quad (6.10)$$

За теоремою Гаусса потік дорівнює заряду всередині гауссової сфери, поділеному на ϵ_0 :

$$E_r \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0},$$

звідки

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \quad (r \geq R) \quad (6.11)$$

Ця формула збігається з формулою напруженості поля точкового заряду q , розміщеного в центрі сфери.

Якщо радіус допоміжної поверхні r є меншим, ніж радіус R зарядженої сфери, то така поверхня не буде охоплювати зарядів. Внаслідок цього з теореми Гаусса випливає, що всередині рівномірно зарядженої сферичної поверхні поле відсутнє, $E = 0$.

5. Напруженість поля рівномірно зарядженої за об'ємом кулі.

Нехай заряд q рівномірно розподілений в вакуумі за об'ємом кулі радіуса R з об'ємною густиною зарядів ρ :

$$\rho = \frac{q}{V_{\text{шара}}} = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3}.$$

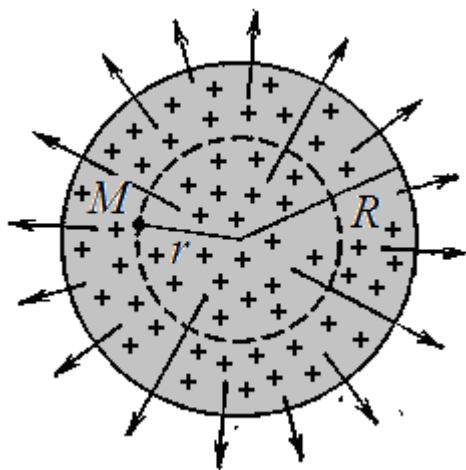


Рис. 6.7.

Визначимо напруженість електричного поля всередині кулі в точці M (рис. 6.7) на відстані $r < R$ від центра. Для цього проведемо через точку M допоміжну концентричну сферу радіуса r . Допоміжна поверхня охоплює заряд

$$q_1 = \rho V_1 = \rho \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Тільки цей заряд q_1 створює потік вектора напруженості Φ_E крізь поверхню допоміжної сфери площею $S = 4\pi r^2$. Тому

$$\Phi_E = E_r \cdot S = E_r \cdot 4\pi r^2 = \frac{q_1}{\epsilon_0} = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi r^3}{\epsilon_0}.$$

Звідси

$$E_r = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho}{4\pi r^2 \epsilon_0} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r = \frac{qr}{4\pi\epsilon_0 R^3}. \quad (r < R) \quad (6.12)$$

Для точок, що лежать поза кулею ($r > R$), допоміжна поверхня охоплює весь заряд q , і поле рівномірно зарядженої кулі збігається з полем точкового заряду, поміщеного в центр кулі:

$$E_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (r \geq R). \quad (6.13)$$

§ 7. Робота переміщення заряду в електростатичному полі. Потенціал поля

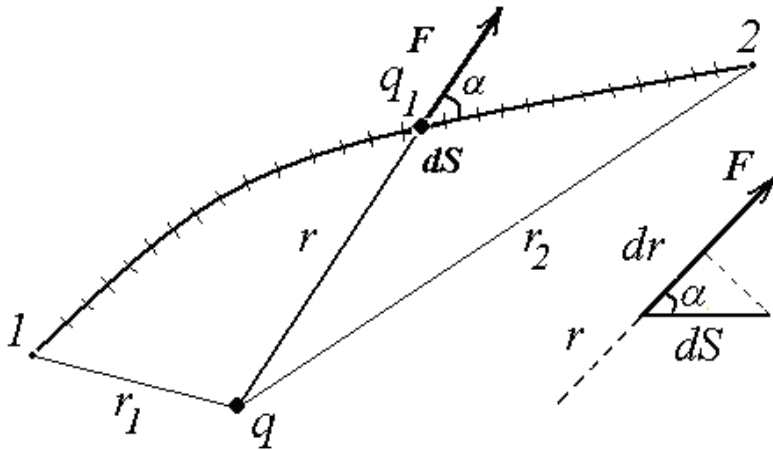


Рис. 7.1.

Нехай електростатичне поле створюється нерухомим точковим зарядом q . Визначимо, яку роботу виконують сили поля при переміщенні заряду q_1 з точки 1 в точку 2 цього поля (рис. 7.1).

Сила F , що діє з боку поля на заряд q_1 , є різною в різних точках поля. Тому розіб'ємо подумки криволінійний шлях $1 \rightarrow 2$ на елементарні прямолінійні ділянки dS , в межах яких силу можна вва-

жати постійною.

За визначенням елементарна робота сили на елементарному шляху dS дорівнює

$$dA = F \cdot dS \cdot \cos \alpha,$$

де α - кут між напрямом сили F і елементарного переміщення dS .

Тоді повна робота електричних сил на всьому шляху виразиться сумою елементарних робіт, тобто криволінійним інтегралом

$$A = \int_{1 \rightarrow 2} F dS \cos \alpha.$$

Як видно з рисунка

$$dS \cdot \cos \alpha = dr,$$

де dr - проекція елемента довжини контура dS на напрям радіус-вектора r .

Виразимо силу F через напруженість E електричного поля

$$F = Eq_1.$$

Тоді елементарна робота на ділянці dS

$$dA = F \cdot dS \cdot \cos \alpha = E \cdot q_1 \cdot dr = kqq_1 \frac{dr}{r^2}, \quad (7.1)$$

і повна робота

$$A = kqq_1 \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = kqq_1 \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right). \quad (7.2)$$

З формули (7.2) випливає:

- *робота не залежить від форми шляху, по якому відбувається переміщення заряду q_1 , а залежить тільки від початкового і кінцевого положень зарядів (від r_1 і r_2);*
- *в тому випадку, коли рух заряду відбувається по замкнутому шляху, тобто кінцева точка переміщення збігається з початковою, робота дорівнює нулеві.*

Роботу, що здійснюється силами поля над зарядом q_1 при обході по замкнутому контуру, можна зобразити як криволінійний інтеграл .

$$\oint_L q_1 E dl \cos \alpha = 0.$$

Кружечок у знака інтеграла вказує на інтегрування по замкнутому контуру L . Після скорочення на постійну величину q_1 , отримаємо

$$\oint_L E_l dl = 0. \quad (7.3)$$

Тут через E_l позначена проекція вектора $\mathbf{E}$ на напрям елементарного переміщення $d\mathbf{S}$.

Інтеграл, що входить до виразу (7.3), називається *циркуляцією вектора напруженості вздовж замкнутого контура L* .

Таким чином, ***циркуляція вектора напруженості електростатичного поля по довільному замкнутому контуру дорівнює нулеві.***

Поля, які задовольняють ці умови, називаються *потенціальними*.

У таких полях робота сил поля відбувається за рахунок зменшення потенціальної енергії. Тому роботу (7.2) можна подати як різницю значень потенціальної енергії W , які має заряд q_1 в точках 1 і 2:

$$A_{12} = k \frac{qq_1}{r_1} - k \frac{qq_1}{r_2} = W_{p1} - W_{p2}. \quad (7.4)$$

Звідси для потенціальної енергії заряду q_1 в полі заряду q отримуємо

$$W_p = k \frac{qq_1}{r} + \text{const} \quad (7.5)$$

Як і в механіці, потенціальна енергія визначається неоднозначно, а з точністю до довільної сталої const . Це пов'язано з тим, що фізичний зміст має тільки різниця потенціальних енергій в двох точках простору, що виражає роботу, здійснену при переході з однієї точки в іншу. При знаходженні ж цієї різниці довільна стала виключається.

Значення const зазвичай вибирається таким чином, щоб при віддаленні заряду на нескінченність ($r = \infty$) потенціальна енергія (7.5) перетворювалась на нуль. Для цього необхідно покласти довільну сталу $\text{const} = 0$.

За цієї умови виходить, що

$$W_p = k \frac{qq_1}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_1}{r} \quad (7.6)$$

Потенціальна енергія (7.6) є взаємною енергією. Обидва взаємодіючих заряди входять у вираз (7.6) симетрично. Тому з однаковим правом можна вважати,

що або заряд q_1 знаходиться в електричному полі заряду q , або заряд q знаходиться в електричному полі заряду q_1 .

При однойменних зарядах q і q_1 , тобто при відштовхуванні, потенціальна енергія є додатною і убиває при розведенні зарядів. При різнойменних зарядах, тобто при притягуванні потенціальна енергія є від'ємною і зростає при розведенні зарядів.

Величина

$$\varphi = \frac{W_p}{q_1}, \quad (7.7)$$

що чисельно дорівнює *потенціальній енергії, яку має в даній точці поля позитивний одиничний заряд*, називається **потенціалом поля в цій точці**. Потенціал є енергетичною характеристикою поля.

Підставляючи в (7.7) значення потенціальної енергії (7.6), отримуємо для потенціалу поля точкового заряду вираз

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}. \quad (7.8)$$

Використовуючи поняття потенціалу, вираз для роботи, яка здійснюється полем при переміщенні заряду q_1 з точки 1 в точку 2 можна записати у вигляді

$$A = q_1 (\varphi_1 - \varphi_2). \quad (7.9)$$

Робота, що здійснюється електростатичним полем при переміщенні заряду, дорівнює добутку величини заряду на різницю потенціалів початкової та кінцевої точок шляху.

Якщо заряд q_1 з точки з потенціалом φ_1 видаляється на нескінченність (де за умовою потенціал дорівнює нулю), робота сил поля буде дорівнювати

$$A_{1\infty} = q_1 \varphi_1.$$

Тоді можна дати друге визначення потенціалу.

Потенціал чисельно дорівнює роботі, яку здійснюють сили поля над позитивним одиничним зарядом при видаленні його з цієї точки на нескінченність:

$$\varphi_1 = \frac{A_{1\infty}}{q_1} \quad (7.10)$$

Таку ж за величиною роботу необхідно здійснити проти сил електростатичного поля при перенесенні позитивного одиничного заряду з нескінченності в дану точку поля.

Фізичний зміст має тільки різниця потенціалів між будь-якими точками, а не самі значення потенціалів в цих точках.

Якщо поле створюється декількома зарядами, то в силу принципу суперпозиції потенціал довільної точки поля дорівнює алгебраїчній сумі потенціалів, створюваних в цій точці усіма зарядами:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \dots = \sum_{i=1}^n \varphi_i \quad (7.11)$$

Потенціали вимірюються в вольтах. Різниця потенціалів між двома точками поля дорівнює одному вольту, якщо при перенесенні заряду в 1 Кл з однієї точки в іншу поле здійснює роботу в 1 Дж.

$$1 \text{ В} = 1 \text{ Дж} / \text{Кл.}$$

Приклад 7.1. Електричне поле створюється двома зарядами $q_1 = 4 \text{ мКл}$ і $q_2 = -2 \text{ мКл}$, які розміщені на відстані $a = 10 \text{ см}$ один від одного. Визначити роботу A сил поля при переміщенні заряду $q = 50 \text{ нКл}$ з точки 1 в точку 2 поля (рис. П. 7.1).

Робота переміщення заряду з однієї точки поля в іншу дорівнює добутку заряду на різницю потенціалів цих точок

$$A = q(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Для визначення потенціалів φ_1 і φ_2 точок 1 і 2 поля можна застосувати принцип суперпозиції електричних полів: потенціал електричного поля, створеного двома зарядами в деякій точці, дорівнює алгебраїчній сумі потенціалів, створюваних окремими зарядами q_1 і q_2 . Тоді

$$\varphi_1 = kq_1/(a/2) + kq_2/(a/2) = 2k(q_1+q_2)/a;$$

$$\varphi_2 = kq_1/(a\sqrt{2}) + kq_2/a = k(q_1/\sqrt{2}+q_2)/a.$$

Після перетворень остаточно маємо

$$A = kq(q_1(2 - \frac{1}{\sqrt{2}}) + q_2)/a \quad (\text{П. 7.1})$$

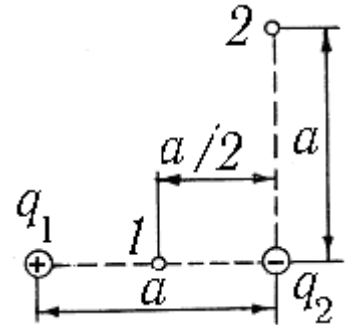


Рис. П. 7.1.

У розрахунках потенціалів знаки зарядів враховуються автоматично, тобто в останню формулу треба підставити $q_2 = -2 \cdot 10^{-6} \text{ Кл}$.

Підставимо числа

$$A = 9 \cdot 10^9 50 \cdot 10^{-9} (4 \cdot 10^{-6} (2 - \frac{1}{1,41}) - 2 \cdot 10^{-6}) / 0,1 \approx 1,43 \cdot 10^{-2} (\text{Дж}) = 14,3 (\text{мДж}).$$

Приклад 7.2. До закріпленої частинки, заряд якої $q_1 = 2 \text{ нКл}$, з нескінченності зі швидкістю $v = 0,1 \text{ м/с}$ наближається заряджена частинка, маса якої $m = 40 \text{ мг}$ і заряд $q = 1 \text{ нКл}$. На яку найменшу відстань r вони зблизяться (рис. П. 7.2)?

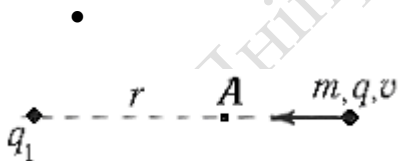


Рис. П. 7.2.

У точці А нерухомий заряд q_1 створює електричне поле з потенціалом

$$\varphi_A = k \frac{q_1}{r}.$$

Тоді потенціальна енергія взаємодії зарядів в точці А

$$W_p = q\varphi_A = \frac{kqq_1}{r}.$$

• Потенціальна енергія рухомої частинки в нескінченності дорівнює нулеві. Згідно із законом збереження енергії в момент зупинки рухомої частинки в точці А початкова кінетична енергія переходить в потенціальну енергію кулонівського відштовхування

$$\bullet \frac{mv^2}{2} = \frac{kqq_1}{r}, \quad (\text{П. 7.2})$$

$$\bullet r = \frac{2kqq_1}{mv^2}. \quad (\text{П. 7.3})$$

Підставляючи числа, знайдемо

$$r = \frac{2 \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-9} \cdot 2 \cdot 10^{-9}}{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot (0,1)^2} = 9 \cdot 10^{-2} (\text{м}) = 9 (\text{см}).$$

§ 8. Еквіпотенціальні поверхні. Зв'язок між напруженістю і потенціалом

Для графічного зображення поля поряд із силовими лініями використовують *еквіпотенціальні поверхні*. Геометричне місце точок, що мають однаковий потенціал, називається поверхнею рівного потенціалу або еквіпотенціальною поверхнею $\varphi = \text{const}$.

У разі відокремленого точкового заряду, як випливає з формули (7.8) $\varphi = \text{const}$ при $r = \text{const}$, тобто еквіпотенціальні поверхні являють собою концентричні сфери.

На площині ці поверхні вироджуються в концентричні кола (рис. 8.1).

При переміщенні заряду з однієї точки еквіпотенціальної поверхні в іншу поле, як випливає з виразу $A = q_1 (\varphi_1 - \varphi_2)$, не виконує над ним роботи, тому що $(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$.

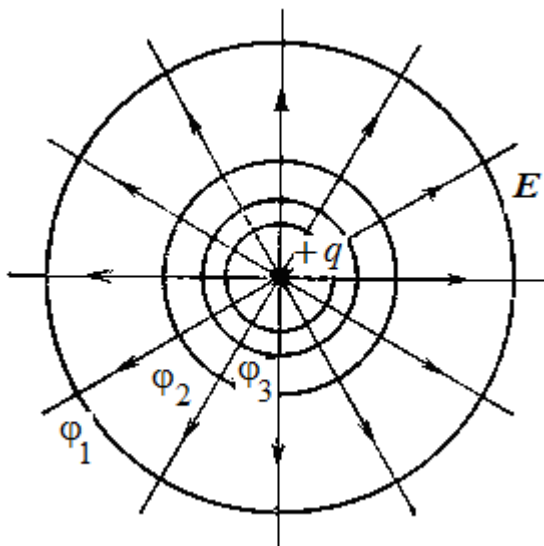


Рис. 8.1.

Тоді з формули роботи $A = F \cdot dS \cdot \cos \alpha$ слід, що $\cos \alpha = 0$, тобто силові лінії поля усюди перпендикулярні до еквіпотенціальних поверхонь.

Взаємна перпендикулярність силових ліній поля і еквіпотенціальних поверхонь є справедливою не тільки для поля точкового заряду, а й для як завгодно складних електростатичних полів.

Обидві характеристики поля - векторна (напруженість E) і скалярна (потенціал φ) пов'язані між собою.

Щоб встановити зв'язок потенціалу з напруженістю поля розглянемо дві точки поля 1 і 2, що належать двом близьким еквіпотенціальним поверхням $\varphi_1 = \text{const}$ і $\varphi_2 = \text{const}$ (рис. 8.2).

Припустимо, що пробний заряд переходить з точки 1 в точку 2 уздовж прямолінійного відрізка Δl . Обидві точки потрібно вибрати досить близько одна від одної, щоб можна було вважати напруженість поля, і, отже, силу, що діє на пробний заряд, на відрізку Δl постійною.

Для роботи сил електростатичного поля по переміщенню пробного заряду $q_{\text{пр}}$ на шляху Δl можна написати два вирази.

З одного боку, робота сили $F = q_{\text{пр}} E$ на переміщенні Δl дорівнює

$$A = q_{\text{пр}} E \Delta l \cos \alpha = q_{\text{пр}} E_l \Delta l.$$

Як видно з рис. 8.2

$$E_l = E \cos \alpha$$

- проекція вектора E на напрям відрізка Δl .

З іншого боку, робота переміщення заряду в електростатичному полі

$$A = q_{\text{пр}} (\varphi_1 - \varphi_2).$$

Прирівнюємо обидва вирази для роботи.
Після скорочення на величину пробного заряду отримаємо

$$E_l \Delta l = (\varphi_1 - \varphi_2).$$

Звідси

$$E_l = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\Delta l} = -\frac{\Delta \varphi}{\Delta l} \quad (8.1)$$

Мінус в цій формулі обумовлений тим, що $\Delta \varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ - це *приріст* потенціалу (від кінцевого значення віднімається початкове), а $\varphi_1 - \varphi_2 = -\Delta \varphi$ - це *зменшення* потенціалу (від початкового значення віднімається кінцеве).
Переходячи в виразі (8.1) до границі за умови, що переміщення Δl прагне до нуля, отримаємо

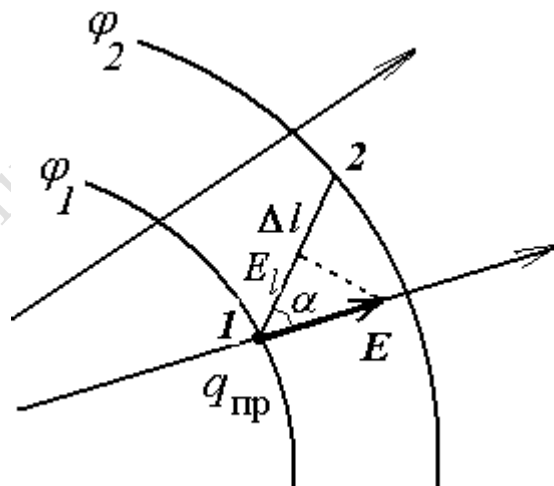


Рис. 8.2.

$$E_l = -\frac{\partial \varphi}{\partial l} \quad (8.2)$$

Похідна $\frac{\partial \varphi}{\partial l}$ виражає *швидкість зміни потенціалу в даному напрямі*. Отже, *проекція вектора напруженості електростатичного поля на довільний напрям чисельно дорівнює швидкості убавання потенціалу поля на одиницю довжини в цьому напрямі*.

Символ частинної похідної показує, що диференціювання проводиться тільки по l , вважаючи інші змінні постійними.

Уздовж силової лінії $\cos \alpha = 1$, в цьому випадку E_l і $\left| \frac{\partial \varphi}{\partial l} \right|$ досягають максимального значення, що дорівнює $|E|$. Якщо $\mathbf{n}$ - нормаль до еквіпотенціальної поверхні, то

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}}. \quad (8.3)$$

Таким чином, потенціал змінюється найшвидше в напрямі силової лінії. Знак мінус в рівняннях (8.2) і (8.3) вказує на те, що вектор $\mathbf{E}$ напруженості поля спрямований в бік найбільш швидкого зменшення потенціалу.

Оскільки напрям переміщення можна вибирати довільно, проекції вектора напруженості на координатні осі будуть мати вигляд:

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (8.4)$$

Виразимо вектор $\mathbf{E}$ через його складові:

$$\mathbf{E} = E_x \mathbf{i} + E_y \mathbf{j} + E_z \mathbf{k} = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \mathbf{k} \right). \quad (8.5)$$

Тут $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ - одиничні вектори координатних осей. Вектор, що визначається виразом (8.5), називається *градієнтом* потенціалу і позначається як

$\text{grad } \varphi$.

Градiєнтом деякої скалярної величини, що є функцією просторових координат, є вектор, спрямований у бік найбільш швидкого зростання цієї величини і чисельно рівний швидкості її зростання в цьому напрямі. Тому зв'язок між напруженістю і потенціалом електростатичного поля можна представити як

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi. \quad (8.6)$$

Напруженість в будь-якій точці електростатичного поля дорівнює градієнту потенціалу в цій точці, взятому з протилежним знаком.

Формула (8.2) дозволяє за відомими значеннями φ знайти напруженість поля в кожній точці. Можна вирішити і зворотню задачу - за заданим значенням $\mathbf{E}$ в кожній точці знайти різницю потенціалів між двома довільними точками поля. З (8.2) випливає

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{1 \rightarrow 2} \mathbf{E}_l d\mathbf{l}. \quad (8.7)$$

Інтеграл можна брати вздовж будь-якої лінії, що з'єднує точки 1 і 2, оскільки робота сил поля не залежить від форми шляху переміщення.

§ 9. Обчислення різниці потенціалів за напруженістю поля

1. Поле відокремленого точкового заряду.

Напруженість поля відокремленого точкового заряду у вакуумі дається формулою (3.4)

$$E_r = k \frac{q}{r^2}.$$

Зв'язок між напруженістю і потенціалом запишеться у вигляді

$$E_r = -\frac{d\varphi}{dr}.$$

Тоді потенціал поля точкового заряду

$$\varphi = -\int E_r dr = -kq \int \frac{dr}{r^2} = k \frac{q}{r} + \text{const}.$$

На нескінченності потенціал прийнято вважати рівним нулеві ($\varphi = 0$ для $r = \infty$), і сталу інтегрування слід покласти рівною нулеві, тобто потенціал поля точкового заряду

$$\varphi = k \frac{q}{r}.$$

Звідси різниця потенціалів між двома точками, що лежать на відстанях r_1 і r_2 від точкового заряду

$$\varphi_1 - \varphi_2 = kq \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (9.1)$$

2. Поле рівномірно зарядженої площини і плоского конденсатора.

Напруженість поля рівномірно зарядженої нескінченної площини визначається формулою (6.4)

$$E_n = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0},$$

де σ - поверхнева густина заряду. Поле площини є ортогональним до неї.

Якщо направити вісь Ox перпендикулярно до цієї площини, то відповідно до виразу (8.7) різниця потенціалів між точками, що відстоять від площини на відстанях x_1 і x_2 , дорівнює

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{x_1}^{x_2} E_x dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} dx = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} (x_2 - x_1). \quad (9.2)$$

Для електростатичного поля у вакуумі між двома паралельними площинами, зарядженими різнойменно (поле плоского конденсатора) (рис. 9.1) отримаємо різницю потенціалів (або напругу) між двома нескінченними зарядженими пластинами (обкладинками конденсатора)

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_0^d \frac{\sigma}{\varepsilon_0} dx = \frac{\sigma d}{\varepsilon_0} \quad (9.3)$$

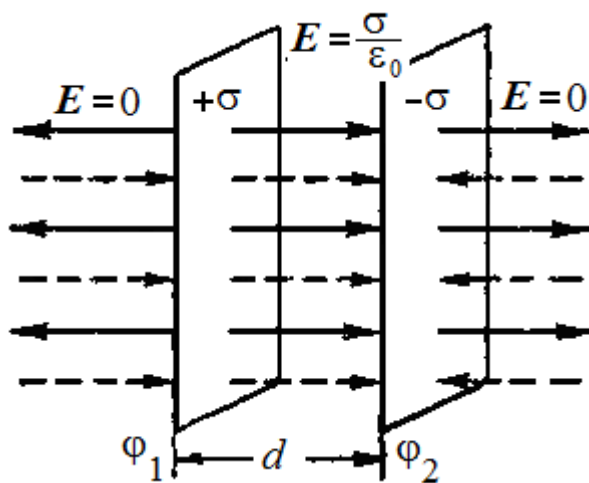


Рис. 9.1.

3. Поле рівномірно зарядженої нескінченної нитки.

Вектор напруженості поля $\mathbf{E}$ в будь-якій точці спрямований уздовж радіальної прямої, перпендикулярної до нитки (рис. 9.2), а його проекція на цю пряму дається формулою (6.8)

$$E_r = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

Оскільки напруженість поля залежить тільки від r , то зв'язок між напруженістю і потенціалом (формула (8.2)) запишеться у вигляді

$$E_r = -\frac{d\varphi}{dr}.$$

Звідки випливає, що різниця потенціалів між двома точками, що лежать на відстанях r_1 і r_2 від нитки, дорівнює

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} E_r dr = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}. \quad (9.4)$$

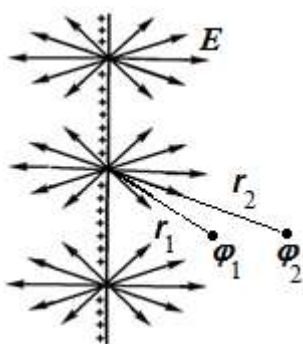


Рис. 9.2.

Приклад 9.1. Електростатичне поле створюється позитивно зарядженою нескінченною ниткою з лінійною густиною заряду $\tau = 1$ нКл/м. Якої швидкості набуде електрон, що наближується під дією поля до нитки вздовж лінії напруженості від відстані $r_1 = 1,5$ см до $r_2 = 1$ см? Початкова швидкість електрона дорівнює нулю.

Поле нескінченної рівномірно зарядженої нитки є симетричним: лінії напруженості є радіальними прямими, що лежать в площинах, перпендикулярних до нитки (рис. П 9.1).

Робота сил поля дорівнює приросту кінетичної енергії електрона:

$$A = W_{k2} - W_{k1}, \text{ або}$$

$$e(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}, \quad (\text{П. 9.1})$$

де W_{k1} і W_{k2} - кінетичні енергії електрона до і після проходження прискорювального поля, v_1 і v_2 - початкова і кінцева швидкості електрона, e - заряд, m - маса електрона, φ_1 і φ_2 - потенціали початкової і кінцевої точок шляху. Скористаємося (9.4)

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

З урахуванням того, що $v_1 = 0$ і $W_{k1} = 0$, отримаємо

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{e\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1} \quad \text{и} \quad v = \sqrt{\frac{e\tau}{m\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}}. \quad (\text{П. 9.2})$$

Підставивши числові значення, визначимо $v = 1,6$ Мм/с.

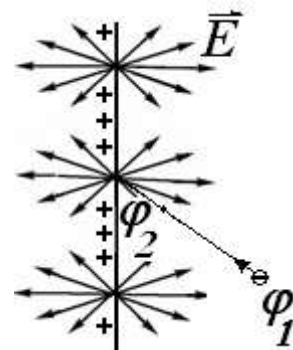


Рис. П.9.1.

Приклад 9.2. В якості детектора α -, β - и γ - радіоактивних випромінювань застосовують газорозрядні лічильники. Такий лічильник являє собою провідний циліндр 3 (рис. П. 9.2) з натягнутою вздовж осі циліндра тонкою металевою ниткою 2.

Між ниткою 2 і циліндром 3 створюється висока різниця потенціалів порядку 400 В. Частинки, пройшовши крізь циліндр лічильника, потрапляють в простір 1 між електродами і викликають іонізацію газу. Іони, що утворилися в газі, притягуються до електродів. Оскільки поле є неоднорідним і сильно зростаючим поблизу нитки, рухомі вторинні електрони на довжині вільного пробігу набувають кінетичної енергії, достатньої для ударної іонізації атомів. Виникає лавинний процес іонізації, в результаті якого на нитку потрапляє значна кількість електронів, потенціал нитки змінюється, що фіксується приладом як одиничний розрядний імпульс.

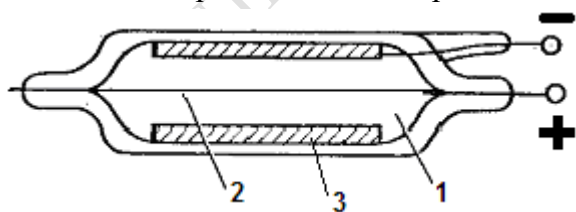


Рис. П. 9.2.

Контрольні питання

1. Чи може змінитися заряд елементарної частинки в результаті ядерної реакції?
2. Чому оточуючі нас макроскопічні тіла як правило є незарядженими?
3. Чи буде закон Кулона мати однаковий вид для визначення сили взаємодії як точкових зарядів, так і протяжних заряджених тіл?
4. Яким чином за картиною силових ліній поля можна зробити висновки щодо напрямку і чисельному значенню напруженості електричного поля?
5. Чи збігаються лінії напруженості з траєкторією руху позитивного пробного заряду? Чи можуть перетинатися силові лінії електростатичного поля?
6. Чи може замкнена поверхня охоплювати заряди, а потік вектора $\vec{E}$ крізь неї дорівнювати нулю?

7. Зобразіть графічно однорідне і неоднорідне електростатичні поля.
8. Як змінюється напруженість поля нескінченної рівномірно зарядженої пластини у разі віддалення від неї?
9. Якими є одиниці вимірювання напруженості електричного поля?
10. Побудуйте графік зміни напруженості електростатичного поля з відстанню для: а) рівномірно зарядженої площини; б) рівномірно зарядженої по об'єму сфери.
11. Яким є зв'язок потенціалу електричного поля з роботою сил поля при переміщенні заряду?
12. Чому напруженість електричного поля спрямована в бік найбільш швидкого убуття потенціалу?
13. Яка умова є необхідною і достатньою для того, щоб електростатичне поле було потенціальним?
14. Як довести, що електростатичне поле, створюване точковим зарядом, є потенціальним?
15. Яким є зв'язок напруженості з потенціалом електростатичного поля у випадку однорідного поля в плоскому конденсаторі?
16. Чи може існувати електростатичне поле, силові лінії якого є паралельними, але мають різну густину в різних частинах поля?

Глава 2. ЕЛЕКТРИЧНЕ ПОЛЕ В ДІЕЛЕКТРИКАХ

§ 10. Диполь у зовнішньому електричному полі

Розглянемо поведінку жорсткого електричного *диполя* (див. § 3), вміщеного в однорідне електричне поле.

Нехай вектор $\mathbf{p}$ дипольного моменту спрямований під кутом α до напрямку зовнішнього поля $\mathbf{E}$ (рис. 10.1). Диполь називають жорстким, якщо в електричному полі відстань l між його зарядами не змінюється. Електричний момент диполя дорівнює чисельно $p = ql$ і спрямований від негативного заряду до позитивного.

На позитивний заряд $+q$ діє сила, що збігається за напрямом із вектором $\mathbf{E}$ і яка дорівнює $F_1 = qE$, а на негативний заряд $-q$ протилежного напрямку $F_2 = -qE$.

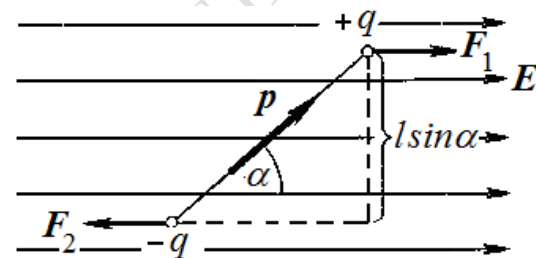


Рис. 10.1.

Ці сили є рівними за величиною і спрямованими в протилежні боки, вони утворюють пару сил. Механічний крутний момент цієї пари чисельно дорівнює добутку модуля сили на плече пари $l \sin \alpha$:

$$M = Fl \sin \alpha = qEl \sin \alpha = pE \sin \alpha. \quad (10.1)$$

Вектор $\mathbf{M}$ моменту дорівнює векторному добутку векторів $\mathbf{p}$ і $\mathbf{E}$

$$\mathbf{M} = [\mathbf{pE}]. \quad (10.2)$$

Момент сил $\mathbf{M}$ прагне повернути диполь так, щоб його електричний момент $\mathbf{p}$ встановився у напрямі зовнішнього поля $\mathbf{E}$.

Для того, щоб повернути диполь на малий кут $d\alpha$ проти годинникової стрілки навколо осі, перпендикулярної до напрямку поля, зовнішні сили мають виконати певну роботу.

$$dA = M d\alpha = pE \sin \alpha d\alpha. \quad (10.3)$$

Ця робота витрачається на збільшення потенціальної енергії W , яку має диполь в електричному полі

$$dW = dA = pE \sin \alpha d\alpha. \quad (10.4)$$

Інтегруючи, отримуємо

$$W = -pE \cos \alpha + \text{const} = -\mathbf{pE} + \text{const} \quad (10.5)$$

Якщо покласти $\text{const} = 0$, то енергія диполя буде дорівнювати нулю тоді, коли диполь встановиться перпендикулярно до поля ($\alpha = \pi/2$). Мінімальне значення енергії, що дорівнює $-\mathbf{pE}$, виходить, коли $\alpha = 0$, тобто коли диполь орієнтований своїм моментом уздовж поля.

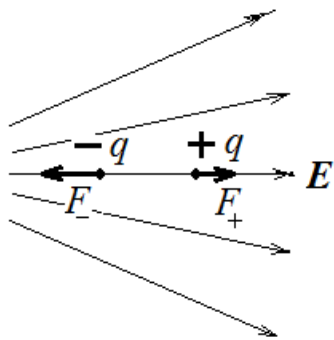


Рис.10.2

Це відповідає положенню стійкої рівноваги. При відхиленні диполя від цього положення знову виникає механічний момент зовнішніх сил, який повертає диполь в початкове положення.

У неоднорідному електричному полі на диполь, крім обертового моменту, діє також сила, яка прагне втягнути диполь в область сильнішого поля. На рис. 10.2 зображений диполь в неоднорідному електричному полі у випадку, коли дипольний момент $\mathbf{p}$ направлений вздовж поля. Сила F_- (за модулем) більше ніж сила F_+ , результуюча сила $F_- - F_+$ прагне перемістити диполь в область більшої напруженості електричного поля.

Цією поведінкою диполя, зокрема, пояснюється прилипання легких діелектричних предметів («диполів») - шматочків паперу, пінопласту - до наелектризованих тіл.

Приклад 10.1. Якою є мінімальна і максимальна потенціальна енергія диполя з електричним моментом $p = 4 \cdot 10^{-9}$ Кл·м, який міститься в зовнішньому однорідному електричному полі напруженістю $E = 300$ В/м?

Відповідно до формули (10.5) потенціальна енергія диполя

$$W = -pE \cos \alpha.$$

Мінімальна енергія при $\alpha = 0^\circ$ $W = -pE = -4 \cdot 10^{-9} \cdot 300 = -1,2 \cdot 10^{-6}$ (Дж) відповідає положенню стійкої рівноваги. Максимальна енергія $\alpha = 180^\circ$ $W = pE = 4 \cdot 10^{-9} \cdot 300 = 1,2 \cdot 10^{-6}$ (Дж) відповідає положенню нестійкої рівноваги.

§ 11. Типи діелектриків. Поляризація діелектриків

Всі речовини в природі можна умовно розділити на дві категорії: провідники, що добре пропускають електричний струм, і діелектрики (ізолятори), які практично не пропускають струм. Проміжне становище займають напівпровідники, які пропускають струм за певних умов.

З точки зору класичної фізики в металевих провідниках існує багато так званих вільних електронів, що відірвалися від іонів кристалічної ґратки. Вмикання як завгодно малого зовнішнього електричного поля викликає спрямований рух електронів - електричний струм.

Діелектрики - це речовини, що погано проводять електричний струм. Це пояснюється тим, що в діелектриках, на відміну від металів, практично відсутні вільні електрони, всі електрони пов'язані з атомами. Електричне поле не відриває електрони від атомів, а тільки зміщує їх на малі (порядку міжатомних) відстані, тобто на відстані порядку 10^{-7} - 10^{-8} см.

Всі діелектрики можна поділити на такі три групи.

1. Діелектрики з полярними молекулами.

Молекули деяких речовин, наприклад рідин - води H_2O , соляної кислоти HCl , бензолу C_6H_6 та ін., твердих тіл - H_2S , газів - SO_2 , мають власний дипольний момент.

Це означає, що в таких молекулах «центри тяжіння» позитивних і негативних зарядів зміщені відносно один одного. Подібні молекули називаються **полярними**.

Електричне поле полярної молекули можна представити як поле деякого еквівалентного електричного диполя з постійним дипольним моментом $p = ql$, де l - відстань між електричними центрами.

Коли зовнішнє електричне поле відсутнє, дипольні моменти молекул в полярних діелектриках через наявність теплового руху орієнтовані хаотично (рис. 11.1). На рис. 11.1 позитивно заряджена частина молекули зафарбована в чорний колір, негативна - в білий.

За наявності зовнішнього поля найбільш стійким є стан, що відповідає мінімуму потенціальної енергії, тобто стан, при якому дипольні моменти молекул p були б паралельні напруженості поля E .

Внаслідок сумісної дії обох факторів (сил поля і хаотичного теплового руху) в діелектрику встановлюється орієнтація дипольних моментів полярних молекул в напрямку поля (рис. 11.1).

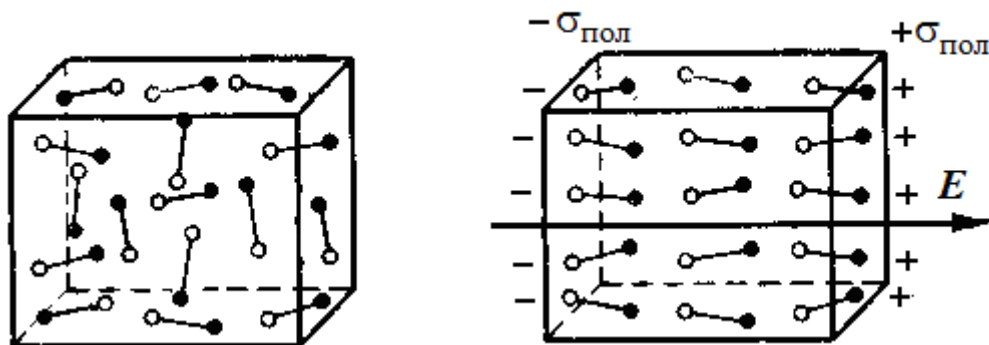


Рис. 11.1.

Процес зміщення зв'язаних заряджених частинок діелектрика під дією зовнішнього електричного поля називається **поляризацією діелектрика**.

В розглянутому випадку зовнішнє поле спричиняє поляризацію, вишиковуючи, орієнтуючи дипольні моменти молекул у напрямі поля. Така поляризація називається **орієнтаційною**.

На торцеві поверхні діелектричного зразка виступають некомпенсовані позитивні і негативні заряди - кінці молекул-диполів. Їх називають *поляризаційними або зв'язаними зарядами* (на рис. 11.1 $+\sigma_{\text{пол}}$ і $-\sigma_{\text{пол}}$).

Тепловий рух, зрозуміло, заважає вишикуванню молекул, так що орієнтаційна поляризація зменшується з ростом температури.

2. Діелектрик з неполярними молекулами

Кожна молекула (або атом) діелектрика має позитивно заряджені ядра і негативно заряджені електрони, які рухаються навколо ядер. Позитивні заряди всіх ядер дорівнюють за абсолютною величиною заряду всіх електронів, і тому молекула речовини є в цілому електрично нейтральною.

До другої групи можна віднести діелектрики, в молекулах яких «центри тяжіння» позитивних і негативних частинок співпадають (рис. 11.2).

Молекули таких діелектриків називаються **неполярними**. Зокрема, до діелектриків цієї групи належать водень H_2 , азот N_2 , кисень O_2 , окис вуглецю CO , CCl_4 , парафін, бензол і ряд інших вуглеводнів. У відсутності зовнішнього електричного поля дипольний момент таких молекул дорівнює нулеві.

Якщо у зовнішнє поле внести діелектрик з неполярними молекулами, то електронні орбіти деформуються, і тому зміщується «центр тяжіння» електронів щодо «центра тяжіння» атомних ядер.

Молекули стають електричними диполями, орієнтованими позитивно зарядженими кінцями в напрямку електричного поля - неполярні молекули стають полярними (рис. 11.2). У цьому полягає механізм **електронної** поляризації.

Такі наведені диполі називають пружними (квазіпружними), на відміну від жорстких полярних молекул.

При внесенні неполярного діелектрика в електричне поле всі наведені дипольні моменти розміщуються ланцюжками вздовж ліній напруженості. Внаслідок цього грані діелектрика набувають різнойменних зарядів - діелектрик поляризується.

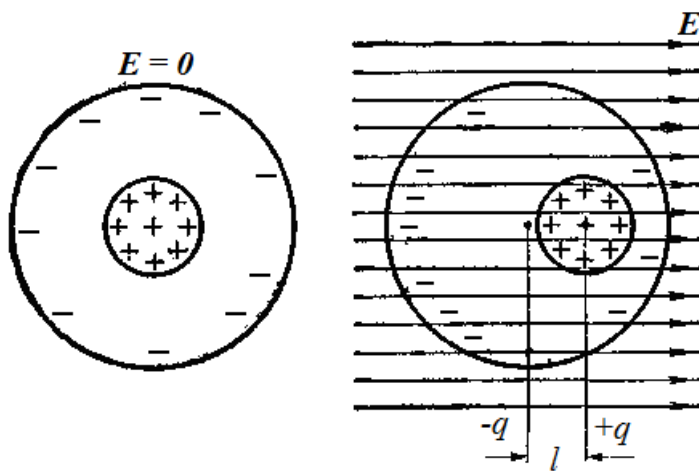


Рис. 11.2.

3. Іонні діелектрики

До третьої групи діелектриків належать **іонні кристали**, у яких в просторових ґратках правильно чергуються позитивні і негативні іони (наприклад, NaCl, KCl, CsCl). У таких кристалах не можна виділити окремі молекули, їх можна розглядати як сукупність двох іонних ґраток, вставлених одна в одну (рис. 11.3). Одна ґратка побудована з позитивних іонів, інша - з негативних.

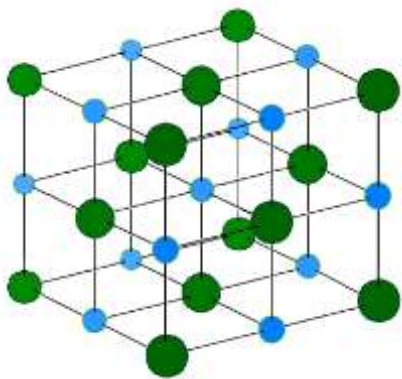


Рис. 11.3

На рис. 11.3 зображена схема кристалічної ґратки кухонної солі NaCl; тут маленькі кулі - позитивні іони натрію, великі - негативні іони хлору. Всі кристали кухонної солі мають однакову кубічну форму

Коли зовнішнє електричне поле відсутнє, електричні сили взаємодії заряджених іонів у вузлах ґратки взаємно врівноважуються, і на кожній грані кристала розміщується однакова кількість позитивних і негативних іонів. Якщо такий кристал внести в електричне поле, то під дією сил поля позитивні іони зміщуються в напрямі вектора напруженості, а всі негативні іони - в протилежному напрямі. Тому на протилежних гранях кристала переважають іони одного знака, і кристал буде поляризованим.

Таким чином, для всіх трьох типів діелектрика характерною ознакою поляризації є виникнення електричного дипольного моменту в будь-якому макроскопічно малому об'ємі діелектрика.

Приклад 11.1. На явищі поляризації, а точніше, переполіризації заснована робота НВЧ-печі (мікрохвильової печі), призначеної для швидкого приготування або розігрівання їжі. Нагрівання в печі засноване на принципі так званого «дипольного зсуву».

Молекулярний дипольний зсув під дією електричного поля відбувається в матеріалах, що містять полярні молекули. Кращим полярним діелектриком є вода, яка міститься практично у всіх продуктах харчування.

У змінному електричному полі високочастотного електромагнітного випромінювання молекули води періодично змінюють напрямок. Стикаючись і передаючи енергію сусіднім молекулам, молекули води збільшують середню кінетичну енергію молекул речовини, а отже, збільшують його температуру.

Приклад 11.2. У деяких кристалічних діелектриках стиснення зразка у певному напрямку призводить до його поляризації - до появи на протилежних гранях поляризаційних зарядів протилежного знака. Навпаки, подача різниці потенціалів на протилежні грані веде до стискання (або розширення) зразка. Таке явище називається **п'єзоелектричним ефектом**. Цей ефект проявляють кварц, титанат барію, сегнетова сіль і ін. Поляризація в напрямку механічної дії обумовлена структурною перебудовою, зміщенням іонів і деформацією електронних оболонок.

П'єзоелектричні матеріали широко використовують у техніці для перетворення механічних коливань в електричні і навпаки. З них виготовляють різні датчики для вимірювання частоти і амплітуди вібрацій конструкцій, двигунів, турбін, літаків, датчики механічних напружень, датчики тиску рідин і газів; чутливі елементи в мікрофонах і т.п. Для перетворення електричних коливань в звукові використовують п'єзоелектрики як акустичні генератори (ультразвукові ви-

проміньовачі, випромінювачі гідролокаторов - сонарів і т.д.). Найпоширенішим приладом, в якому використовується п'єзоефект, є запальничка.

§ 12. Поляризованість. Діелектрична сприйнятливість

Для кількісної оцінки поляризації діелектрика вводиться поняття **вектора поляризації (поляризованості)**. Під поляризованістю розуміють суму електричних дипольних моментів молекул одиниці об'єму поляризованого діелектрика, іншими словами, поляризованість визначається *електричним дипольним моментом одиниці об'єму поляризованого діелектрика*.

$$\mathbf{P} = \frac{\sum \mathbf{p}_i}{\Delta V}, \quad (12.1)$$

де $\mathbf{p}_i$ - дипольний момент i -ї молекули, а підсумовування здійснюється по всім молекулам, що містяться в об'ємі ΔV .

Дослід показує, що зовнішнє електричне поле або створює дипольні моменти, які орієнтовані по полю (пружна поляризація), або орієнтує дипольні моменти молекул (орієнтаційна поляризація), внаслідок чого діелектрик набуває макроскопічний дипольний момент

Отже, поляризованість $\mathbf{P}$ має бути пропорційною напруженості зовнішнього поля

$$\mathbf{P} = \kappa \epsilon_0 \mathbf{E}, \quad (12.2)$$

де коефіцієнт κ носить назву *діелектричної сприйнятливості*. Ця величина характеризує здатність середовища до поляризації.

Знаючи величину поляризованості, можна визначити поверхневу густину надлишкових, так званих *поляризаційних зарядів*, що з'являються в зовнішньому електричному полі на поверхні діелектрика.

Розглянемо зразок діелектрика у вигляді похилої призми з площею основи S і ребром l . Зразок поміщений в електричне поле, що є паралельним його бічному ребру (рис. 12.1). На одній з основ призми з'являються негативні заряди з поверхневою густиною $-\sigma'$, а на іншій - позитивні заряди з поверхневою густиною $+\sigma'$. Очевидно, що повний дипольний момент призми дорівнює добутку величини поляризаційного заряду $q' = \sigma' S$, що виникає на її торцях, на відстань між ними l :

$$P = \sigma' S l.$$

Згідно з визначенням можна записати, що поляризованість (електричний момент одиниці об'єму) дорівнює

$$P = \frac{q' l}{V} = \frac{\sigma' S l}{V}.$$

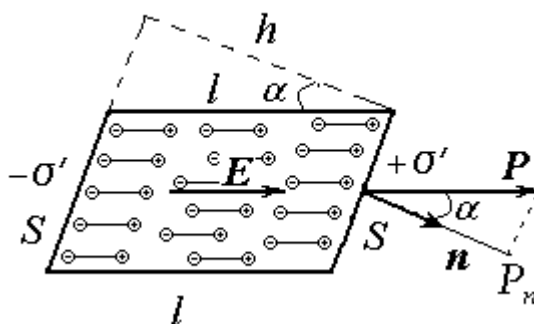


Рис. 12.1.

Якщо α - кут між напрямом нормалі до основи призми і вектором $\mathbf{P}$, то об'єм призми дорівнює

$$V = Sh = Sl \cos \alpha$$

Підставивши значення об'єму призми, отримаємо

$$P = \frac{\sigma' Sl}{Sl \cos \alpha},$$

звідки

$$\sigma' = P \cos \alpha = P_n \quad (12.3)$$

Поверхнева густина зв'язаних (поляризаційних) зарядів дорівнює проекції вектора поляризованості $\mathbf{P}$ на зовнішню нормаль $\mathbf{n}$ до розглянутої поверхні діелектрика.

§ 13. Електричне зміщення. Діелектрична проникність

Розглянемо поле, що створене в вакуумі двома нескінченними різнойменно зарядженими пластинами, зарядженими з поверхневою густиною вільних зарядів $+\sigma$ і $-\sigma$.

Припустимо, що між ними поміщений шар однорідного діелектрика (рис. 13.1).

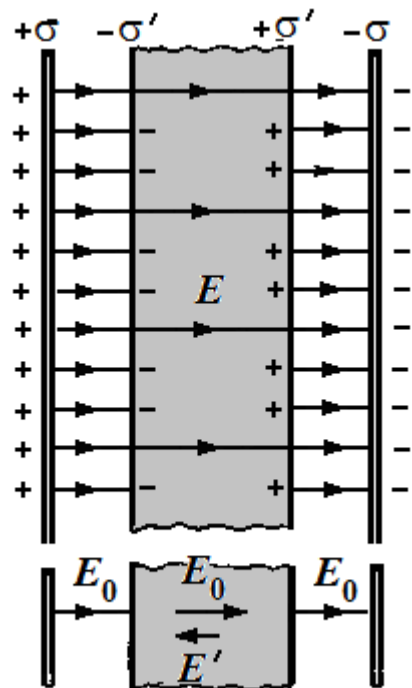


Рис. 13.1.

Під дією поля діелектрик поляризується, тобто відбувається зміщення позитивних зарядів по полю і негативних – проти поля.

В результаті поляризації поверхні діелектрика також набувають поверхневих зарядів $+\sigma'$ і $-\sigma'$, причому біля позитивної зарядженої площини буде міститися негативно заряджена поверхня діелектрика.

З рис. 13.1 видно, що електричне поле $\mathbf{E}'$ зв'язаних зарядів направлено протилежно зовнішньому полю $\mathbf{E}_0$, створеному вільними зарядами.

Згідно з принципом суперпозиції напруженість поля $\mathbf{E}$ всередині діелектрика є сума цих двох полів:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}', \quad (13.1)$$

або в проекціях

$$E = E_0 - E'. \quad (13.2)$$

Обидва поля створюються двома нескінченними зарядженими площинами і дорівнюють відповідно

$$E_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \text{ і } E' = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0}.$$

$$E = \frac{\sigma - \sigma'}{\varepsilon_0}. \quad (13.3)$$

Оскільки напруженість поля всередині діелектрика менше, ніж поза ним, то частина ліній вектора напруженості, що починаються (або закінчуються) на віль-

них зарядах, закінчуються (відповідно, починаються) на зв'язаних зарядах (рис. 13.1).

Таким чином, вектор напруженості E , проходячи через повітряний зазор між площинами і діелектриком, зазнає стрибкоподібної зміни. Це створює незручність при розрахунку електростатичних полів.

Зв'язані заряди з'являються на поверхнях діелектрика під дією поля, створеного вільними зарядами. Тому первинним джерелом поля в діелектрику є саме вільні заряди.

Результуюче поле в діелектрику E дорівнює векторній сумі поля вільних зарядів і поля поляризаційних зв'язаних зарядів. Але поверхнева густина зв'язаних зарядів, що визначає поле зв'язаних зарядів, в свою чергу залежить від напруженості результуючого поля в діелектрику

$$\sigma' = P_n = \kappa \epsilon_0 E_n.$$

Виникає утруднення, розв'язати яке можна шляхом введення допоміжної величини D , джерелами якої є тільки вільні заряди.

Цю векторну величину D називають **електричним зміщенням** (іноді – **індукцією**) **електричного поля** і визначають за формулою:

$$D = \epsilon_0 E + P \quad (13.4)$$

З урахуванням співвідношення $P = \kappa \epsilon_0 E$ вираз для електричного зміщення набуває вигляду

$$D = \epsilon_0 E + \kappa \epsilon_0 E = \epsilon_0 (1 + \kappa) E = \epsilon \epsilon_0 E, \quad (13.5)$$

де безрозмірна величина

$$\epsilon = 1 + \kappa \quad (13.6)$$

називається **діелектричною проникністю** даної речовини.

У вакуумі $\kappa = 0$, $\epsilon = 1$.

Через діелектричну проникність поляризованість P запишеться тепер як

$$P = \epsilon_0 (\epsilon - 1) E \quad (13.7)$$

Як було показано раніше, поверхнева густина зв'язаних зарядів дорівнює проекції вектора поляризації на зовнішню нормаль до поверхні діелектрика:

$$\sigma' = P_n = \kappa \epsilon_0 E_n.$$

Оскільки поле всередині діелектрика в даному випадку є перпендикулярним до його поверхні, $E_n = E$ і $\sigma' = \kappa \epsilon_0 E$. Підставляючи це значення в формулу (13.3), отримаємо

$$E = E_0 - \frac{\sigma'}{\epsilon_0} = E_0 - \kappa E,$$

звідки

$$E = \frac{E_0}{1 + \kappa} = \frac{E_0}{\epsilon}. \quad (13.8)$$

Таким чином, в даному випадку *величина діелектричної проникності показує, у скільки разів напруженість електричного поля в діелектрику менше, ніж напруженість поля, яке створюється тим самим розміщенням вільних зарядів у вакуумі.*

Всі формули, що описують електричні поля і взаємодію електричних зарядів і отримані в попередніх параграфах, залишаються справедливими і для одно-

рідного та ізотропного діелектрика, якщо замість електричної постійної ϵ_0 ввести добуток $\epsilon_0\epsilon$. Наприклад, в закон Кулона

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2}$$

діелектрична проникність ϵ входить як величина, що показує, у скільки разів сила взаємодії двох вільних зарядів у діелектрику є меншою, ніж у вакуумі. Ослаблення взаємодії відбувається через екранізацію вільних зарядів зв'язаними, що утворюються внаслідок поляризації середовища.

Аналогічно напруженість і потенціал електричного поля точкового заряду

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2}, \varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r}$$

і т.д.

У газів діелектрична проникність близька до одиниці, у твердих діелектриків не перевищує 10, а у рідких діелектриків не перевищує 100. Особливий клас діелектриків - *сегнетоелектрики* - мають аномально великі значення $\epsilon \sim 10^4$.

Помноживши (13.8) на $\epsilon\epsilon_0$, отримаємо електричне зміщення $\mathbf{D}$ всередині діелектрика:

$$\mathbf{D} = \epsilon\epsilon_0\mathbf{E} = \epsilon_0\mathbf{E}_0. \quad (13.9)$$

Отже, всередині діелектрика електричне зміщення збігається з електричним зміщенням зовнішнього поля.

Якщо записати співвідношення (13.9) для модулів векторів $D = \epsilon_0 E_0$, а також врахувати, що напруженість поля між двома паралельними нескінченними площинами, зарядженими з поверхневою густиною зарядів $+\sigma$ і $-\sigma$ у вакуумі дорівнює $E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$, то отримаємо

$$D_0 = \sigma. \quad (13.10)$$

Електричне зміщення $\mathbf{D}$ описує поле, що створюється вільними зарядами. Однак зв'язані заряди, які виникають в діелектрику, можуть викликати перерозподіл вільних зарядів, що створюють поле. Тому вектор $\mathbf{D}$ характеризує електростатичне поле, створюване вільними зарядами (тобто у вакуумі), але при такому їх розподілі в просторі, яке існує при наявності діелектрика.

Поле вектора $\mathbf{D}$ графічно зображується лініями вектора зміщення, так само як і поле вектора $\mathbf{E}$. Проте, якщо лінії вектора $\mathbf{E}$ починаються і закінчуються на будь-яких – як вільних, так і зв'язаних зарядах, і тому на межі діелектрика густина цих ліній змінюється стрибком, то лінії вектора $\mathbf{D}$ починаються і закінчуються тільки на вільних зарядах, і їх густина на межі діелектрика залишається незмінною.

Математичний запис *електростатичної теореми Гаусса для поля в діелектрику* в інтегральній формі має вигляд:

$$\Phi_D = \oint_S \mathbf{D}_n dS = \sum_i q_i, \quad (13.11)$$

тобто *потік вектора електричного зміщення через довільну замкнену поверхню дорівнює алгебраїчній сумі вільних зарядів, що містяться усередині цієї поверхні.*

Приклад 13.1. Плоский конденсатор, відстань між пластинами якого $d = 8$ мм, заряджений до різниці потенціалів $U_0 = 500$ В і відключений від джерела напруги. Після зарядки конденсатора між його пластинами вставили порцелянову пластину ($\epsilon = 6,5$). Визначити:

- 1.) модулі векторів напруженості поля E і електричного зміщення D ;
- 2.) модуль поляризованості P діелектрика;
- 3.) поверхневу густину зв'язаних зарядів $\pm \sigma$ на порцеляновій пластині;
- 4.) діелектричну сприйнятливість κ порцеляни.

Напруженість поля зарядженого конденсатора у відсутності пластини діелектрика

$$E_0 = \frac{U_0}{d}, \text{ напруженість поля в пластині } \epsilon \text{ в } \epsilon \text{ разів меншою:}$$

$$E = \frac{E_0}{\epsilon} = \frac{U_0}{\epsilon d} = \frac{500}{6,5 \cdot 0,008} = 9,62 \frac{\text{кВ}}{\text{м}}.$$

Зміщення при переході межі діелектрика не змінюється і має однакове значення всередині і поза пластини:

$$D = \epsilon_0 \epsilon E = D_0 = \epsilon_0 E_0 = \frac{\epsilon_0 U_0}{d} = \frac{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 500}{0,008} \approx 5,53 \cdot 10^{-7} \left(\frac{\text{Кл}}{\text{м}^2} \right) \approx 0,55 \frac{\text{мкКл}}{\text{м}^2}.$$

Модуль поляризованості

$$P = \kappa \epsilon_0 E = (\epsilon - 1) \epsilon_0 \frac{E_0}{\epsilon} = \frac{(\epsilon - 1) \epsilon_0 U_0}{\epsilon d} = \frac{(6,5 - 1) 8,85 \cdot 10^{-12} 500}{6,5 \cdot 0,008} \approx 0,47 \left(\frac{\text{мкКл}}{\text{м}^2} \right).$$

Поляризованість є перпендикулярною до поверхні пластини, тому поверхнева густина зв'язаних зарядів

$$\sigma' = P_n = \pm P = \pm \frac{(\epsilon - 1) \epsilon_0 U}{\epsilon d} = \pm 0,47 \left(\frac{\text{мкКл}}{\text{м}^2} \right).$$

$$\kappa = \epsilon - 1 = 6,5 - 1 = 5,5.$$

Контрольні питання

1. Електричний диполь поміщений у зовнішнє однорідне електричне поле. Скільки існує положень рівноваги диполя? Яке з них є стійким, і яке - нестійким, і чому?
2. У чому полягає схожість і в чому відмінність між вільними і поляризаційними зарядами?
3. Чи можна відокремити один від одного поляризаційні заряди, розрізавши в електричному полі діелектрик на частини?
4. Чи можна передати поляризаційні заряди іншому тілу шляхом стикання тіл?
5. Прямокутний зразок однорідного діелектрика розміщений перпендикулярно до зовнішнього електричного поля. Чи виникатимуть поляризаційні заряди на: а) торцевих поверхнях; б) на бічних поверхнях діелектрика?
6. Як впливає діелектрик на напруженість електростатичного поля? Який фізичний зміст має діелектрична проникність ϵ ?
7. Як пояснити зменшення сили взаємодії двох точкових зарядів в однорідному діелектрику?

8. Пластина однорідного ізотропного діелектрика поміщена в однорідне електростатичне поле перпендикулярно до поля. Як змінюється густина ліній векторів $\mathbf{E}$ і $\mathbf{D}$ під час перетинання пластини?

Глава 3. ПРОВІДНИКИ В ЕЛЕКТРИЧНОМУ ПОЛІ

§ 14. Рівновага зарядів на провіднику

Тіла, в яких є великою кількістю вільних зарядів, називаються провідниками. У провідниках електричні заряди можуть вільно переміщатися під дією як завгодно малої сили. Рідини і гази в звичайному стані є поганими провідниками електрики. Якщо ж газ іонізувати, а в рідині розчинити будь-яку сіль, кислоту або луг (такий розчин, що є провідним, називається *електролітом*), то провідність їх збільшується.

Якщо провідниками є рідини і гази, то в них рухаються як позитивні, так і негативні заряджені частинки: позитивні і негативні іони і електрони.

У металах же, які є кращими провідниками, ніж рідини і гази, провідність обумовлена тільки рухом електронів. Позитивно заряджені іони металу утворюють кристалічну ґратку і утримуються поблизу положень рівноваги силами взаємодії з «газом вільних електронів». Електронний газ утворюється за рахунок одного або декількох електронів, відданих кожним атомом.

Розглянемо незаряджений металевий провідник, внесений у зовнішнє електричне поле (рис. 14.1).

Під дією поля вільні заряди почнуть переміщатися і будуть продовжувати рухатися до тих пір, поки додаткове поле $\mathbf{E}'$, викликане розділенням зарядів всередині провідника (рис. 14.2), не компенсує повністю зовнішнє поле $\mathbf{E}_0$ так, щоб

$$\mathbf{E}' + \mathbf{E}_0 = 0. \quad (14.1)$$

Тільки в цьому випадку буде відсутня сила, що діє на заряди, а отже, припиниться їх напрямлений рух. При рівновазі зарядів їх напрямлений рух всередині провідника припиняється.

У стані рівноваги напруженість електричного поля всередині провідника дорівнює нулеві.

Оскільки всередині провідника $\mathbf{E} = 0$, зі співвідношення

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{1 \rightarrow 2} \mathbf{E}_l dl$$

випливає, що для довільних точок 1 і 2, узятих всередині провідника, $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$. Іншими словами, в стані рівноваги потенціал всіх точок всередині провідника є однаковим:

$$\varphi = \text{const} \quad (14.2)$$

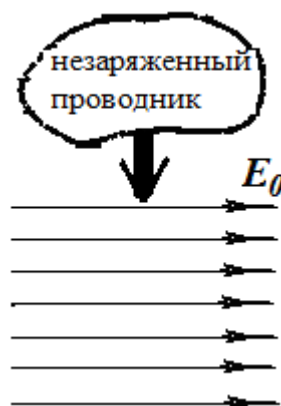


Рис. 14.1.

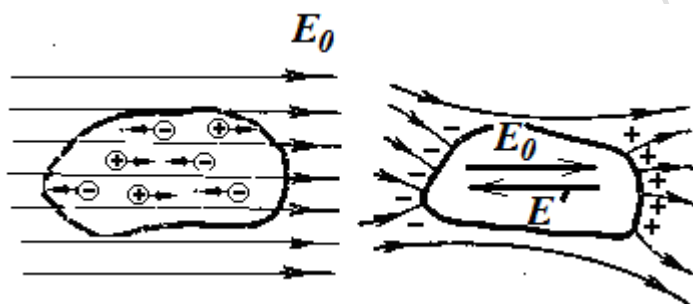


Рис. 14.2.

Зауважимо, що час, протягом якого в провіднику відбувається переміщення зарядів і встановлюється рівновага, для металів є надзвичайно малим.

Наступна умова рівноваги зарядів на провіднику: *напруженість поля на поверхні провідника має бути в кожній точці спрямована за нормаллю до поверхні,*

$$\mathbf{E} = E_n. \quad (14.3)$$

У протилежному випадку під дією дотичної складової напруженості електрони продовжували б переміщатися уздовж поверхні, що також суперечить умові рівноваги.

З огляду на те, що силові лінії є завжди перпендикулярними до екіпотенційної поверхні, робимо висновок, що в разі рівноваги зарядів поверхня провідника буде екіпотенціальною.

Перерозподіл зарядів в провіднику під впливом зовнішнього електричного поля називається **електростатичною індукцією**. Заряди, що виникають при цьому на провіднику, які чисельно доівнюють один одному, але є протилежними за знаками, називаються *індукованими* або *наведеними* зарядами.

§ 15. Електричне поле зарядженого провідника

Якщо провіднику надати деякого заряду q , то він розподіляється так, щоб дотримувалися умови рівноваги.

Уявімо собі довільну замкнену поверхню, яка повністю знаходиться в межах тіла. Оскільки при рівновазі зарядів поле в кожній точці всередині провідника відсутнє, потік вектора напруженості $\mathbf{E}$ крізь цю поверхню дорівнює нулю. Згідно з теоремою Гаусса алгебраїчна сума зарядів всередині поверхні також буде дорівнювати нулю. Це справедливо для довільної поверхні. Отже, при рівновазі *ні в якому місці усередині провідника не може бути надлишкових зарядів* - усі вони розміщуються на поверхні провідника з деякою поверхневою густиною σ .

Це відбувається тому, що однойменні заряди відштовхуються і прагнуть розташуватися якомога далі один від одного.

Отже, видалення речовини з деякого об'єму всередині провідника ніяк не вплине на рівноважний розподіл зарядів.

Практичним застосуванням цієї властивості провідників є електростатичний захист (екранування) чутливих приладів і людей від дії зовнішніх електричних полів, за якого вони оточуються провідною оболонкою (зазвичай її виконують у вигляді густої металевий сітки).

Розглянемо невелику циліндричну поверхню, утворену нормаллями до поверхні провідника і основами dS , одна з яких розміщена всередині, а інша - поза провідника (рис. 15.1).

Потік напруженості крізь внутрішню частину поверхні дорівнює нулю, тому що всередині провідника поле $\mathbf{E} = 0$. Поза провідника в безпосередній близькості до нього напруженість поля $\mathbf{E}$ спрямова-

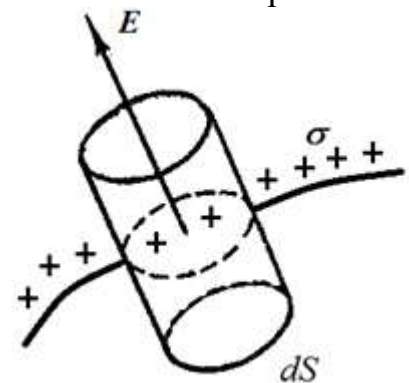


Рис. 15.1.

на за нормаллю до поверхні. Всередину циліндра потрапляє вільний заряд σdS . Застосовуючи до циліндричної поверхні теорему Гаусса, отримаємо для напруженості поля поблизу поверхні провідника

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon \epsilon_0}. \quad (15.1)$$

Густина зарядів на поверхні провідника залежить від кривизни поверхні, вона зростає на виступах і вістрях і убуває на увігнутих ділянках. На вістрі зарядженого провідника поверхнева густина може стати настільки великою, що заряди починають «стікати», утворюючи так званий електричний вітер.

§ 16. Електроємність відокремленого провідника

Розглянемо провідник, заряд якого дорівнює q , а потенціал поверхні (однаковий у всіх її точках) дорівнює ϕ . Заряд q розподіляється на поверхні таким чином, щоб усюди всередині провідника виконувалися умови рівноваги – напруженість поля мала б дорівнювати нулю.

Надамо провіднику додатково ще такий самий заряд q . Оскільки всередині провідника поле, як і раніше, має залишитися рівним нулю, додатковий заряд розподіляється на поверхні **точно таким же чином**, як і попередній, створить всюди точно таке ж поле і змінить потенціал кожної точки на таку ж величину ϕ

Необхідно при цьому, щоб провідник був відокремленим, віддаленим від інших тіл. Інакше переміщення зарядів поза провідником може привести до перерозподілу зарядів і в ньому самому.

Таким чином, заряд і потенціал відокремленого провідника пропорціональні один одному: $\phi \sim q$. Отже, для кожного відокремленого провідника відношення заряду до потенціалу провідника є величиною постійною

$$C = \frac{q}{\phi} \quad (16.1)$$

Коефіцієнт C називається електроємністю відокремленого провідника.

Електроємність відокремленого провідника чисельно дорівнює величині заряду, який потрібно надати цьому провіднику, щоб змінити його потенціал на одиницю:

В СІ одиницею електроємності є *фарад* (Ф) - ємність провідника, потенціал якого змінюється на 1 В, якщо надати йому заряд в 1 Кл.

Електроємність - характеристика провідника, кількісна міра його здатності утримувати електричний заряд. Чим більше електроємність, тим більший заряд може накопичити провідник при даному ϕ . Електроємність визначається геометричними розмірами провідника, його формою і електричними властивостями довколишнього середовища (його діелектричною проникливістю) і не залежить від матеріалу провідника.

Як приклад визначимо електроємність відокремленої провідної кулі радіуса R , яка поміщена в середовище з діелектричною проникністю ϵ .

Поле зарядженої провідної кулі є центрально симетричним відносно центра кулі.

Вектор напруженості $\mathbf{E}$ такого поля в будь-якій точці поза кулею ($r \geq R$) направлений уздовж радіальної прямої, тому проекція E_r вектора $\mathbf{E}$ на радіальний напрямок дорівнює

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{q}{r^2}.$$

З формули (18.3), що зв'язує напруженість з потенціалом, випливає, що

$$E_r = -\frac{d\varphi}{dr}.$$

Тоді для різниці потенціалів точок поля справедливий вираз

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} E_r dr.$$

Вважаючи $\varphi = 0$ при $r \rightarrow \infty$, отримуємо для потенціалу відокремленої зарядженої кулі

$$\varphi = \int_R^{\infty} E_r dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \int_R^{\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{1}{R}, \quad (16.2)$$

так що

$$C = \frac{q}{\varphi} = 4\pi\epsilon\epsilon_0 R. \quad (16.3)$$

Ємність відокремленої кулі пропорційна її радіусу і діелектричній проникності оточуючого середовища.

Приклад 16.1. Обчислимо електроємність Землі, вважаючи її відокремленим сферичним провідником радіусом $R \approx 6400$ км. Діелектрична проникність ϵ навколишнього середовища практично дорівнює одиниці. За формулою (16.3)

$$C = 4\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 6,4 \cdot 10^6 \text{ Ф} \approx 7,1 \cdot 10^{-6} \text{ Ф} = 710 \text{ мкФ}.$$

Відокремлені провідники розумних розмірів мають значно меншу електроємність. Отже, фарад - дуже велика величина. Ємність в 1 фарад мала би електропровідна куля радіусом $9 \cdot 10^6$ км! Тому на практиці користуються частками цієї одиниці ємності: від мікрофарад ($1 \text{ мкФ} = 10^{-6} \text{ Ф}$) до пікофарад ($1 \text{ пФ} = 10^{-12} \text{ Ф}$).

Поняття електроємності може бути застосовано тільки до провідників, оскільки для них існує рівноважний розподіл зарядів на поверхні тіла, за якого всі точки провідника мають один і той же потенціал. Якщо ж заряд надається ізолятору, то він не розтікається по ньому, і тому в різних місцях ізолятора потенціал різний (залежно від відстаней до того місця, де знаходиться підведений заряд).

§ 17. Конденсатори

Наявність поблизу провідника інших тіл змінюють його електроємність, тому що потенціал провідника залежить і від електричних полів, що створюються зарядами, наведеними в навколишніх тілах внаслідок електростатичного індукції.

Розглянемо заряджений, наприклад, позитивно $+q$, провідник A і наблизимо до нього незаряджений провідник B (рис. 17.1).

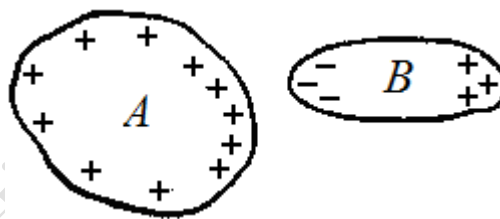


Рис. 17.1.

Під дією поля, створеного зарядженим провідником A , в провіднику B виникнуть індуковані заряди. На ближньому кінці провідника B виникне індукований заряд іншого знака, ніж заряд провідника A , в даному випадку негативний $-q$. Однойменний з q позитивний заряд $+q$ виникне на дальньому кінці провідника B (рис. 17.1).

Тепер потенціал провідника A будуть створювати не тільки його власні заряди $+q$, а й індуковані в провіднику B . Обидва індукованих заряди $-q$ і $+q$ є рівними за абсолютним значенням. Вони обидва будуть впливати на потенціал провідника A , але більший вплив чинять ті заряди, які розташовані ближче до нього, в даному випадку $-q$.

Оскільки ближчими виявляються негативні заряди, то при піднесенні до зарядженого провідника A незарядженого провідника B потенціал провідника A спадає. Відповідно до формули ємності $C = \frac{q}{\phi}$ це означає збільшення ємності провідника A .

Система двох провідників, ємність яких збільшена за рахунок їх взаємного розташування, називається конденсатором.

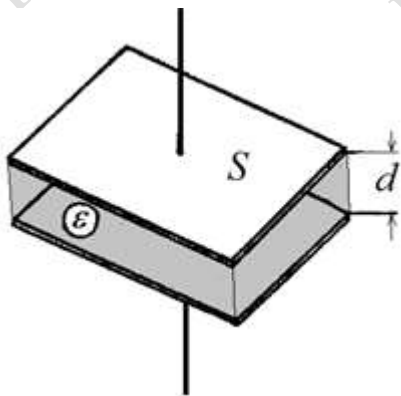


Рис. 17.2.

Конденсатори виготовляють у вигляді двох провідників, які називаються обкладками, розділених тонким шаром діелектрика. Обкладки несуть однакові за величиною, але протилежні за знаком заряди.

Обкладкам надають таку форму, щоб поле було зосереджено всередині конденсатора. Електроємність конденсатора (взаємна ємність його обкладок)

$$C = \frac{q}{\phi_1 - \phi_2}, \quad (17.1)$$

де q - заряд однієї з обкладок, $\phi_1 - \phi_2$ - різниця потенціалів (напруга) між обкладками. Електроємність конденсатора практично не залежить від наявності навколишніх тіл і може досягати дуже великої величини за малих геометричних розмірів.

Визначимо ємність **плоского конденсатора**. Він складається з двох паралельних металевих пластин, розділених шаром діелектрика (рис. 17.3). Пластины заряджені рівними за абсолютним значенням зарядами протилежного знака. Отримати

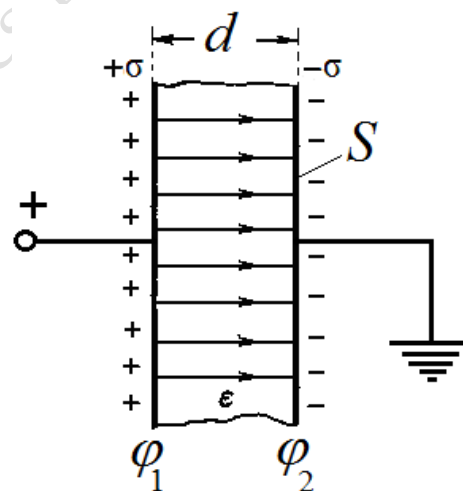


Рис. 17.3.

такі заряди можна, або з'єднавши на короткий час пластини з полюсами джерела, або зарядивши одну пластину і заземливши іншу (рис. 17.3). У цьому випадку на внутрішній поверхні другої пластини індукується заряд, рівний за абсолютним значенням, але протилежний за знаком заряду першої пластини, а однойменний заряд, який виник на зовнішній поверхні другої пластини, піде в Землю.

Якщо відстань d між пластинами є малою в порівнянні з їх розмірами, можна знехтувати крайовими ефектами і вважати поле всередині конденсатора однорідним і скористатися виразом для напруженості поля двох нескінченних різноіменно заряджених площин. Враховуючи, що діелектрик ослаблює поле в ϵ разів, для напруженості поля в плоскому конденсаторі отримаємо

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon\epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon\epsilon_0 S}, \quad (17.2)$$

де S - площа обкладки. Раніше було виведено вираз (9.3) для різниці потенціалів (напруги) між обкладками

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\sigma d}{\epsilon\epsilon_0} = \frac{qd}{\epsilon\epsilon_0 S}.$$

Отже, ємність плоского конденсатора

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{\epsilon\epsilon_0 S}{d}. \quad (17.3)$$

Циліндричний конденсатор складається з двох розміщених один усередині іншого коаксіальних (із спільною віссю) провідних циліндрів, розділених діелектриком (рис. 17.4). Можна, користуючись формулами (9.4) і (17.1), аналогічно показати для циліндричного конденсатора, що має довжину l і радіуси коаксіальних циліндрів R_1 і R_2 :

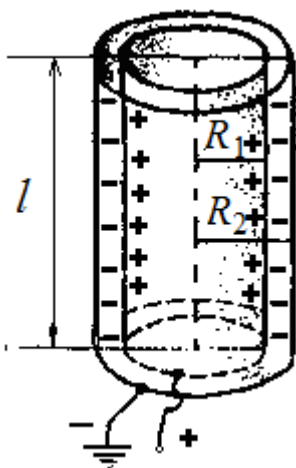


Рис. 17.4.

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{2\pi\epsilon\epsilon_0 l}{\ln \frac{R_2}{R_1}}. \quad (17.4)$$

В електролітичних циліндричних конденсаторах в якості діелектрика використовують тонку оксидну плівку, що утворюється на поверхні одного з електродів (металевого) - анода, а в ролі другого електрода - катода - виступає електроліт. За рахунок дуже малої товщини оксидної плівки радіуси циліндрів близькі за значенням, тобто $R_2/R_1 \rightarrow 1$,

$\ln \frac{R_2}{R_1} \rightarrow 0$, і, як випливає з формули (17.4), ємність цилінд-

ричного конденсатора C досягає значної величини.

Існують мініатюрні танталові електролітичні конденсатори. Вони мають досить малі розміри і призначені для монтажу на друкованих платах мініатюрних плеєрів, мобільних телефонів, материнських платах ноутбуків та комп'ютерів.

Приклад 17.1. Плоский повітряний конденсатор був заряджений до напруги $U_0 = 600 \text{ В}$ і відключений від джерела живлення. Площа пластин конденсатора $S = 200 \text{ см}^2$, відстань між ними $d = 2 \text{ мм}$. Після відключення конденсатора від джерела напруги між обкладками конденсатора помістили діелектричну пластину ($\epsilon = 6$). Визначити різницю потенціалів U_1 між пластинами після внесення діелектрика. Визначити також ємності конденсатора C_0 і C_1 до і після внесення діелектрика.

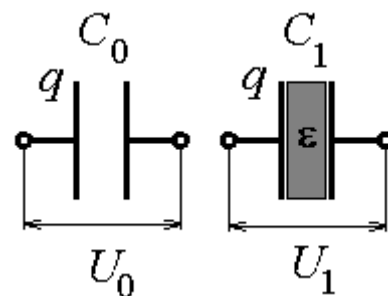


Рис. П. 17.1

Вперше М.Фарадей дослідним шляхом встановив, що ємність конденсатора з діелектриком (рис. П. 17.1) збільшується в ϵ раз, тобто

$$C_1 = \epsilon C_0$$

Оскільки заряд відключеного від джерела конденсатора не змінюється при вміщенні в нього діелектрика $q_0 = q_1 = q = \text{const}$, справедливі наступні співвідношення:

$$q_0 = C_0 U_0 \quad \text{і} \quad q_1 = C_1 U_1.$$

Звідси $C_0 U_0 = C_1 U_1$ або

$$U_1 = U_0 \frac{C_0}{C_1} = \frac{U_0}{\epsilon} = \frac{600}{6} = 100(\text{В}).$$

Ємності конденсатора:

$$C_0 = \frac{\epsilon_0 S}{d} = \frac{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 200 \cdot 10^{-4}}{0,002} = 88,5 \cdot 10^{-12} \text{ Ф} = 88,5 \text{ нФ},$$

$$C_1 = \epsilon C_0 = 6 \cdot 88,5 = 531 \text{ нФ}.$$

Приклад 17.2. Як зміниться заряд на обкладках конденсатора, якщо діелектрична пластину вноситься в простір між пластинами конденсатора при включеному джерелі живлення?

На відміну від першого випадку, тепер постійною виявляється напруга U_0 на обкладках конденсатора до і після внесення діелектрика, а заряди на обкладках є різними.

$$U_0 = U_1 = U = \text{const}; \quad C_1 = \epsilon C_0; \quad q_0 = C_0 U;$$

$$q_1 = C_1 U = \epsilon C_0 U = \epsilon q_0; \quad \frac{q_1}{q_0} = \epsilon.$$

Тоді додатковий заряд, який натікає на пластини конденсатора від джерела живлення

$$\Delta q = q_1 - q_0 = \epsilon q_0 - q_0 = q_0(\epsilon - 1) = C_0 U (\epsilon - 1).$$

$$\Delta q = 88,5 \cdot 10^{-12} \cdot 600 \cdot (6 - 1) \approx 0,27 \text{ мкКл}.$$

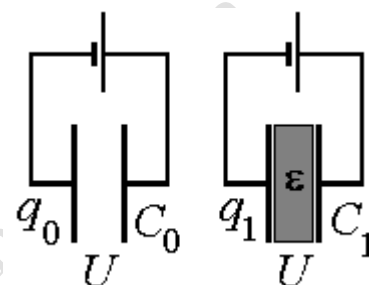


Рис. П. 17.2

§ 18. З'єднання конденсаторів

При практичному використанні конденсатори часто об'єднують в батареї.

При **паралельному** з'єднанні обкладки конденсаторів з'єднують в дві групи, потенціали яких φ_1 і φ_2 (рис. 18.1).

Різниця потенціалів між обкладками всіх конденсаторів є однаковою і рівною $\varphi_1 - \varphi_2$. При заряджанні такої батареї на-

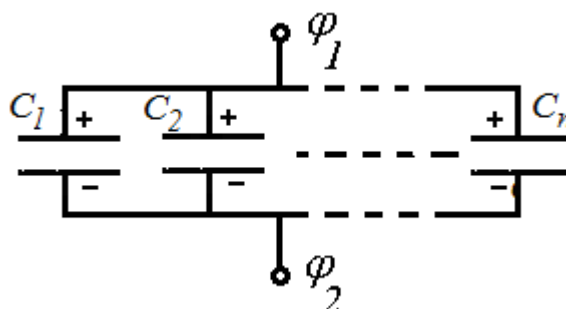


Рис. 18.1.

даний їй заряд q частково потрапляє на обкладки всіх конденсаторів.

Сумарний заряд батареї дорівнює сумі зарядів окремих конденсаторів:

$$q = q_1 + q_2 + q_3 + \dots + q_n \quad (18.1)$$

Таким чином, в разі паралельного з'єднання конденсаторів

$$C_{\text{пар}} = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{q_1}{\varphi_1 - \varphi_2} + \frac{q_2}{\varphi_1 - \varphi_2} + \dots + \frac{q_n}{\varphi_1 - \varphi_2} = C_1 + C_2 + \dots + C_n \quad (18.2)$$

При паралельному з'єднанні ємність батареї дорівнює сумі ємностей окремих конденсаторів.

Паралельне з'єднання застосовують для того, щоб отримати більшу ємність, ніж ємність одного конденсатора.

При **послідовному** з'єднанні конденсаторів (рис. 18.2) обкладки окремих конденсаторів мають заряди, які є чисельно рівними, але протилежними за знаком.

Якщо першій обкладці надати заряду $+q$, то на другій обкладці батареї з'явиться індукований заряд $-q$. Оскільки ця обкладка з'єднана з першою обкладкою другого конденсатора і утворює з нею єдиний провідник, то відповідно до закону збереження заряду, на останній з'явиться заряд $+q$. У свою чергу, це призведе до появи заряду $-q$ на другій обкладці другого конденсатора і т.д. В результаті всі послідовно з'єднані конденсатори будуть заряджені однаково. При цьому батареї надано тільки заряду q .

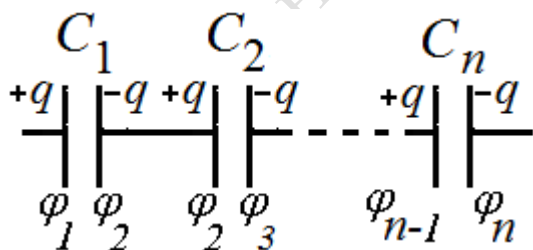


Рис. 18.2

Повна різниця потенціалів на клеммах всієї батареї $\varphi_1 - \varphi_n$ дорівнює сумі різниць потенціалів між обкладками кожного з конденсаторів

$$\varphi_1 - \varphi_n = (\varphi_1 - \varphi_2) + (\varphi_2 - \varphi_3) + \dots + (\varphi_{n-1} - \varphi_n). \quad (18.3)$$

Згідно з визначенням ємності

$$C_{\text{посл}} = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_n}.$$

або

$$\frac{1}{C_{\text{посл}}} = \frac{\varphi_1 - \varphi_n}{q} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{q} + \frac{\varphi_2 - \varphi_3}{q} + \dots + \frac{\varphi_{n-1} - \varphi_n}{q} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}. \quad (18.4)$$

При послідовному з'єднанні конденсаторів додаються обернені величини ємностей.

Зокрема, для двох послідовно з'єднаних конденсаторів

$$C_{\text{посл}} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}. \quad (18.5)$$

Приклад 18.1. Два конденсатора, ємності яких $C_1 = 0,2$ мкФ і $C_2 = 0,4$ мкФ, з'єднані послідовно і підключені до джерела напруги $U = 300$ В. Визначити заряди q_1 і q_2 і напруги U_1 і U_2 на конденсаторах.

При послідовному з'єднанні конденсатори заряджаються однаковим зарядом $q_1 = q_2 = q = \text{const}$. Оскільки ємності конденсаторів є різними, то напруги на кожному з них також є різними, а повна напруга

$$U = U_1 + U_2 \quad (\text{П. 18.1})$$

розподіляється між конденсаторами відповідно їх ємностям

$$U_1 = \frac{q}{C_1}; \quad U_2 = \frac{q}{C_2}.$$

З цих рівностей виходить:

$$C_1 U_1 = C_2 U_2. \quad (\text{П. 18.2})$$

Розв'язуючи систему рівнянь (П. 18.1) і (П. 18.2), отримаємо

$$U_1 = \frac{C_2}{C_1 + C_2} U = \frac{0,4}{0,2 + 0,4} 300 = 200 \text{ В}. \quad U_2 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} U = \frac{0,2}{0,2 + 0,4} 300 = 100 \text{ В}.$$

$$\begin{aligned} q_1 = q_2 &= C_1 U_1 = C_2 U_2 = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} U = \\ &= \frac{0,2 \cdot 0,4}{0,2 + 0,4} 10^{-6} \cdot 300 = 4 \cdot 10^{-5} \text{ Кл} = 40 \text{ мкКл} \end{aligned}$$

Приклад 18.2. Плоский повітряний конденсатор був заряджений до різниці потенціалів $U_0 = 300$ В і відключений від джерела напруги. Відстань між обкладками конденсатора $d = 2$ см. Після цього в конденсатор паралельно його обкладкам ввели провідну пластину завтовшки $d_{\text{пл}} = 1$ см, розміри якої дорівнюють розмірам обкладок (рис. П. 18.1). Як зміняться ємність конденсатора і напруга на ньому?

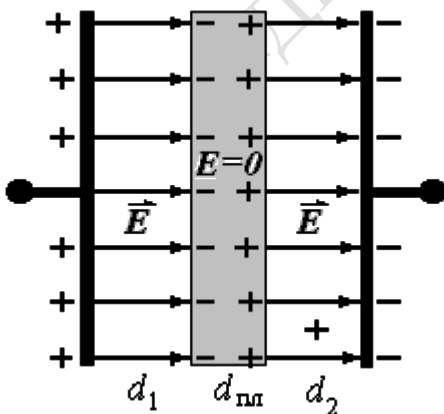


Рис. П. 18.1

При внесенні незарядженого провідника в електричне поле носії заряду починають рухатися: позитивні в напрямку зовнішнього поля, негативні - в протилежний бік. Внаслідок цього на зовнішніх поверхнях пластини виникають заряди протилежного знака, що звуться індукованими. Поле цих зарядів направлено протилежно зовнішньому полю. За принципом суперпозиції електричне поле всередині пластини є сумою поля конденсатора і поля, створеного індукованими зарядами.

Напруженість поля в будь-якій точці всередині пластини стає рівною нулю (умова рівноваги зарядів). Всі лінії напруженості електричного поля в зазорі конденсатора розриваються, вони закінчуються на негативних індукованих зарядах і знову починаються на позитивних зарядах.

Потенціал всередині пластини є постійним. Це дозволяє розглядати

конденсатор з провідною пластиною всередині як систему двох послідовно включених конденсаторів C_1 і C_2 (рис. П. 18.2) ..



Рис. П. 18.2

а). Якщо товщина пластини $d_{\text{пл}}$ є набагато меншою, ніж d , то $d \approx d_1 + d_2$, а ємності відповідно дорівнюють (для повітря $\epsilon = 1$)

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 S}{d_1}, C_2 = \frac{\varepsilon_0 S}{d_2}.$$

Загальна ємність C визначиться зі співвідношення

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{d_1}{\varepsilon_0 S} + \frac{d_2}{\varepsilon_0 S} = \frac{d}{\varepsilon_0 S} = \frac{1}{C_0},$$

де C_0 - ємність конденсатора без пластини. Таким чином, за будь-якого положення *тонкої* пластини *ємність конденсатора не змінюється*, $C = C_0$.

б) Якщо провідна пластина має певну товщину $d_{пл}$, то $d = d_1 + d_{пл} + d_2$.

Загальна ємність двох послідовно з'єднаних конденсаторів, що утворилися, може бути знайдена із співвідношення

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{d_1}{\varepsilon_0 S} + \frac{d_2}{\varepsilon_0 S} = \frac{d - d_{пл}}{\varepsilon_0 S}.$$

Звідки

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d - d_{пл}} > C_0.$$

Таким чином, *ємність зросла*. У той же час *заряд конденсатора*, відключеного від джерела напруги, не змінюється.

$$q = C_0 U_0 = CU.$$

Тоді $U = \frac{C_0}{C} U_0 = \frac{d - d_{пл}}{d} U_0 < U_0.$

Отже, *напруга зменшилася*. $U = 150$ В.

Контрольні питання

1. Як розподіляються заряди на поверхні відокремленого зарядженого сферичного провідника? Провідника довільної форми? Яким буде потенціал точок поверхні в цих двох випадках?
2. Чи будуть однаковими потенціали точок поверхні незарядженого провідника, який поміщений в електричне поле? Потенціали точок всередині провідника?
3. Є два однаково заряджених провідника, ємності яких є різними. Чи будуть переміщатися заряди, якщо привести провідники в контакт?
4. Є два заряджених провідника: у одного заряд менший, але потенціал вищий, ніж в другого. Як будуть переміщатися електричні заряди при стиканні цих провідників?
5. Чому ємність конденсатора, який складається з двох провідників (A і B), є більшою, ніж ємність кожного з відокремлених провідників (A або B)? У чому полягають переваги конденсатора, що складається з двох провідників?
6. Як зміниться ємність плоского конденсатора, якщо в повітряний зазор між обкладками ввести: дуже тонку металеву пластину? Металеву пластину кінцевої товщини?
7. Чи зміниться напруга між пластинами зарядженого плоского конденсатора, якщо одну з них заземлити?
8. Чи залежить напруженість поля зарядженого і відключеного від джерела напруги конденсатора від відстані між його пластинами? Підключеного до джерела?
9. Як і чому зміняться ємність, напруженість електричного поля, напруга, якщо помістити діелектрик між обкладками зарядженого конденсатора?
10. Між обкладками плоского конденсатора всовується пластина діелектрика. Як зміняться характеристики конденсатора в двох випадках: 1) конденсатор заряджений і відключений від джерела напруги; 2) конденсатор не відключається від джерела напруги?

Глава 4. ЕНЕРГІЯ ЕЛЕКТРИЧНОГО ПОЛЯ

§ 19. Енергія взаємодії точкових електричних зарядів

Розглянемо систему, що складається з розміщених на відстані r один від одного двох точкових зарядів q_1 і q_2 . Величина

$$W = q_1 \frac{q_2}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r} = q_1\varphi_1 \quad (19.1)$$

(через φ_1 позначений потенціал поля заряду q_2 в тій точці, де знаходиться заряд q_1), як відомо, дорівнює потенціальній енергії першого заряду q_1 в полі другого заряду q_2 . Очевидно, що цей вираз можна також записати у вигляді потенціальної енергії другого заряду в полі першого

$$W = q_2 \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r} q_1 = q_2\varphi_2. \quad (19.2)$$

Тут φ_2 - потенціал поля заряду q_1 в точці, де знаходиться заряд q_2 .

Щоб підкреслити той факт, що енергію має не кожен заряд окремо, а енергія належить одразу двом зарядам, енергію W називають *енергією взаємодії*. Отже, потенціальна енергія взаємодії двох зарядів дорівнює

$$W = q_1\varphi_1 = q_2\varphi_2.$$

Вираз для потенціальної енергії взаємодії двох зарядів зручно записати в симетричному вигляді

$$W = \frac{1}{2}(q_1\varphi_1 + q_2\varphi_2). \quad (19.3)$$

У загальному випадку системи, що складається з n зарядів, енергія їх взаємодії

$$W = \frac{1}{2}(q_1\varphi_1 + q_2\varphi_2 + \dots + q_n\varphi_n) = \frac{1}{2} \sum_i q_i\varphi_i, \quad (19.1)$$

де φ_i - потенціал, створюваний в тій точці, де знаходиться заряд q_i , усіма зарядами, крім q_i .

Для нерухомих зарядів енергія взаємодії зарядів є енергією електричного поля.

§ 20. Енергія зарядженого провідника і системи провідників. Енергія зарядженого конденсатора

Розглянемо відокремлений провідник з зарядом q , потенціалом φ і електроємністю C . Щоб збільшити заряд цього провідника на dq , необхідно перенести з нескінченності на поверхню провідника додатковий заряд dq , виконавши проти сил кулонівського відштовхування між однойменними зарядами роботу

$$dA = (\varphi - \varphi_\infty) dq = \varphi dq = C \varphi d\varphi. \quad (20.1)$$

Щоб зарядити провідник від нульового потенціалу до потенціалу, рівному φ , треба виконати повну роботу

$$A = \int_0^{\varphi} C \varphi d\varphi = \frac{C \varphi^2}{2}. \quad (20.2)$$

В силу закону збереження енергії збільшення потенціальної енергії провідника дорівнює роботі, що виконана над ним. Якщо вважати потенціальну енергію незарядженого провідника рівною нулю, ми отримуємо для енергії зарядженого відокремленого провідника вираз

$$W = \frac{C \varphi^2}{2} = \frac{q \varphi}{2} = \frac{q^2}{2C}. \quad (20.3)$$

Формулу (20.3) можна отримати інакше, розглядаючи заряд q , що міститься на провіднику, як систему точкових зарядів q_i . Поверхня провідника є екіпотенціальною. Тому потенціал точок, в яких знаходяться точкові заряди q_i , однаковий і дорівнює потенціалу φ провідника. З формули (19.4) для енергії взаємодії зарядів отримаємо для енергії зарядженого провідника вираз

$$W = \frac{1}{2} \varphi \sum_i q_i = \frac{q \varphi}{2},$$

где $q = \sum_i q_i$ – заряд провідника.

Розглянемо тепер систему k заряджених провідників. Оскільки всі заряди на поверхні одного провідника мають однаковий потенціал, який дорівнює потенціалу φ_k провідника, замість суми за всіма точковими зарядами отримаємо суму за всіма провідниками

$$W = \frac{1}{2} \sum_k Q_k \varphi_k. \quad (20.4)$$

Тут W – енергія електростатичної взаємодії системи заряджених провідників, k – номер провідника, φ_k – потенціал k -го провідника, Q_k – повний заряд на k -му провіднику.

Застосуємо формулу (20.4) до конденсатора. Конденсатор – це два провідника. Враховуючи, що заряди обкладок є рівними за величиною і протилежними за знаком, отримаємо

$$W = \frac{1}{2} ((+q)\varphi_1 + (-q)\varphi_2) = \frac{1}{2} q(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{1}{2} qU, \quad (20.5)$$

де U – різниця потенціалів між обкладками конденсатора.

Використовуючи формулу (20.5) і беручи до уваги, що $q = CU$, отримуємо для електричної енергії зарядженого конденсатора

$$W = \frac{qU}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{CU^2}{2}. \quad (20.6)$$

У разі плоского конденсатора напруженість поля всередині нього не залежить від відстані між пластинами. Це дозволяє отримати вираз для енергії зарядженого конденсатора інакше.

Нехай пластини конденсатора, що несуть рівні і протилежні за знаком заряди, розміщені на відстані d одна від одної. Оскільки різнойменно заряджені пластини конденсатора притягуються, дамо можливість одній з пластин переміщатися в напрямку до іншої пластини аж до їх повного суміщення. При цьому заряди пла-

стин компенсуються, і конденсатор із запасеної в ньому енергії зникає. Очевидно, що робота діючої на пластину електричної сили дорівнює початковому запасу енергії конденсатора.

Сила, що діє на пластину, дорівнює добутку її заряду q на напруженість однорідного електричного поля, створеного нерухомою пластиною. Ця напруженість, як показано в § 6, дорівнює половині повної напруженості E електричного поля всередині конденсатора. Тому робота, що здійснюється за рахунок запасеної в конденсаторі енергії, дорівнює

$$A = W = Fd = q \left(\frac{E}{2} \right) d = \frac{qU}{2},$$

де $U = Ed$ - напруга між пластинами.

Приклад 20.1. Конденсатор ємністю $C_1 = 2$ мкФ заряджають до напруги $U_1 = 110$ В, після чого його замикають на незаряджений конденсатор невідомої ємності. Визначити ємність другого конденсатора, якщо після замикання на ньому встановилася напруга $U_2 = 44$ В. Яка кількість теплоти виділяється внаслідок замикання?

Після замикання утворюється батарея з двох паралельно з'єднаних конденсаторів. Тому напруга на кожному з них буде однаковою U_2 . Заряд першого конденсатора до замикання $q_1 = C_1 U_1$ розподіляється між обома конденсаторами

$$q_1 = q'_1 + q'_2; \quad q'_1 = C_1 U_2, \quad q'_2 = C_2 U_2, \text{ або } C_1 U_1 = C_1 U_2 + C_2 U_2, \text{ звідки } C_2 = C_1 \left(\frac{U_1}{U_2} - 1 \right).$$

$$\text{Енергія до з'єднання } W = \frac{C_1 U_1^2}{2}, \text{ після з'єднання } W' = \frac{(C_1 + C_2) U_2^2}{2}. \text{ Звідси}$$

$$Q = W - W' = \frac{C_1 U_1 (U_1 - U_2)}{2}.$$

Підставляючи числа, отримаємо $C_2 = 3$ мкФ, $Q = 7,26$ мДж

Приклад 20.2. Ємність плоского конденсатора $C_0 = 200$ пФ. Діелектрик - скло ($\epsilon = 7$). Конденсатор зарядили до різниці потенціалів $U_0 = 700$ В і відключили від джерела напруги. Яку роботу потрібно виконати, щоб вийняти скляну пластину з конденсатора?

$$\text{Початкова енергія поля в конденсаторі } W_0 = \frac{C_0 U_0^2}{2}. \text{ Після видалення пластини ємність}$$

конденсатора зменшиться в ϵ раз і стане дорівнювати $C_1 = \frac{C_0}{\epsilon}$. При цьому енергія поля в кон-

денсаторі стане рівною $W_1 = \frac{q^2}{2C_1}$, де $q = C_0 U_0$ - заряд на обкладках, який не змінюється, тому

що конденсатор відключений від джерела напруги.

$$\text{Тоді } W_1 = \frac{C_0^2 U_0^2}{2C_1} = \frac{\epsilon C_0 U_0^2}{2}. \text{ Таким чином, енергія конденсатора збільшилася в } \epsilon \text{ раз. На}$$

видалення пластини зовнішні сили здійснили роботу

$$A = W_1 - W_0 = \frac{(\epsilon - 1) C_0 U_0^2}{2} = \frac{(7 - 1) \cdot 200 \cdot 10^{-12} \cdot (700)^2}{2} = 294 (\text{мкДж}).$$

§ 21. Густина енергії електростатичного поля

Енергію зарядженого конденсатора можна трактувати або як потенціальну енергію взаємодії зарядів на його обкладках, або як енергію створюваного цими зарядами електричного поля, що міститься в просторі між обкладками. Електростатичне поле невіддільне від нерухомих зарядів, які створюють його. Тому, залишаючись в рамках електростатики, не можна відповісти на питання - що є носієм енергії - заряди чи поле?

Фізичними експериментами було показано, що змінні в часі електричні і магнітні поля можуть існувати відокремлено, незалежно від зарядів, що збудили їх, і поширюються в просторі у вигляді електромагнітних хвиль. Такі хвилі здатні переносити енергію, що підтверджує висновок про те, що *носієм енергії є поле*.

Відповідно і електростатичне поле має енергію. Назвемо величину

$$w = \frac{W}{V}, \quad (21.1)$$

що дорівнює енергії однорідного електростатичного поля, яка припадає на одиницю займаного ним об'єму, об'ємною густиною енергії електростатичного поля.

Для того щоб визначити, чому дорівнює густина енергії електростатичного поля, розглянемо плоский конденсатор. З урахуванням того, що електроємність плоского конденсатора

$$C = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 S}{d},$$

а різниця потенціалів між його обкладками

$$U = Ed,$$

де E – напруженість (за модулем) поля між обкладками, вираз (20.6) для енергії зарядженого конденсатора можна представити у вигляді

$$W = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon \varepsilon_0 S}{d} (Ed)^2 = \frac{1}{2} \varepsilon \varepsilon_0 E^2 Sd = \frac{1}{2} \varepsilon \varepsilon_0 E^2 V. \quad (21.2)$$

Таким чином, енергія електростатичного поля конденсатора прямо пропорційна об'єму, що міститься між його обкладками, і енергія електричного поля розподілена в просторі з густиною

$$w = \frac{W}{V} = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 E^2}{2}. \quad (21.3)$$

Можна показати, що цей вираз справедливий не тільки для поля конденсатора, а й в загальному випадку довільного електричного поля.

Приклад 21.1. Площа обкладок плоского повітряного конденсатора дорівнює $S = 100 \text{ см}^2$, відстань між ними $d = 2 \text{ мм}$. Яка різниця потенціалів була прикладена між обкладками, якщо при розряді конденсатора виділилася кількість теплоти $Q = 90 \text{ мкДж}$?

Кількість теплоти, що виділилася, дорівнює енергії електростатичного поля зарядженого конденсатора

$$Q = W = wV = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} Sd$$

Звідки

$$E = \sqrt{\frac{2Q}{\varepsilon_0 \varepsilon Sd}},$$

і різниця потенціалів

$$U = Ed = \sqrt{\frac{2Qd}{\varepsilon_0 \varepsilon S}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9 \cdot 10^{-5} \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{-2}}} \approx 2 \cdot 10^3 \text{ В}.$$

Приклад 21.2. Визначити силу притягання пластин зарядженого плоского конденсатора. Площа пластин S , заряд на кожній пластині q . Конденсатор заряджений і відключений від джерела електричної енергії.

Під час зближення пластин на відстань Δd сила притягання F виконує роботу

$$\Delta A = F \cdot \Delta d.$$

Внаслідок зближення пластин конденсатора об'єм його поля зменшується. Об'ємна гу-

стина енергії поля $w = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 E^2}{2}$ при цьому не змінюється, тому що напруженість поля E не залежить від відстані між обкладками, а залежить тільки від густини зарядів на обкладках. Отже, енергія поля конденсатора зменшується на величину

$$\Delta W = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 E^2}{2} S \Delta d.$$

Із закону збереження енергії випливає, що $\Delta A = \Delta W$, або

$$F \Delta d = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 E^2}{2} S \Delta d,$$

звідки

$$F = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 E^2}{2} S.$$

Підставляючи значення напруженості електричного поля плоского конденсатора

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon \varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon \varepsilon_0 S},$$

отримаємо

$$F = \frac{q^2}{2 \varepsilon \varepsilon_0 S}. \quad (\text{П. 21.1})$$

Контрольні питання

1. Чому дорівнює максимальна потенціальна енергія системи зарядів, що притягуються?
2. Де локалізована енергія зарядженого конденсатора?
3. У якому випадку запасється більша енергія при підключенні батареї конденсаторів до джерела напруги: а) при їх послідовному з'єднанні; б) при їх паралельному з'єднанні?
4. У поле зарядженого конденсатора потрапляє заряджена частинка. Її кінетична енергія в поле змінюється. За рахунок якої енергії виконується робота?

5. При з'єднанні зарядженого конденсатора з незарядженим енергія системи зменшується. Вона витрачається на утворення іскри, нагрівання провідників і т.д. Від чого залежать втрати енергії? Чи можуть втрати енергії бути рівними нулю, якщо, наприклад, використовувати надпровідники?

6. Чому дорівнює енергія поля зарядженого провідника?

7. Що відбувається з енергією плоского конденсатора, який був заряджений і відключений від джерела напруги, під час розсовування його пластин?

8. Як зміниться енергія зарядженого і відключеного плоского повітряного конденсатора, якщо між його обкладками вставити діелектричну пластину? Якщо енергія зміниться, то хто виконує роботу?

9. Яка розмірність густини енергії електричного поля?

Глава 5. ПОСТІЙНИЙ ЕЛЕКТРИЧНИЙ СТРУМ

§ 22. Постійний електричний струм, його характеристики і умови існування

Електричним струмом називається впорядкований рух електричних зарядів. Носіями струму можуть бути електрони, а також позитивні і негативні іони.

Впорядкований рух вільних електричних зарядів, що відбувається в провіднику, називається струмом *провідності* (струм в металах, в електролітах, в газах). Впорядкований рух зарядів при русі зарядженого тіла в просторі, називається *конвекційним* струмом.

Силою струму називається скалярна величина, яка дорівнює заряду, що проходить за одну секунду через будь-який поперечний переріз провідника. Якщо за час dt через переріз провідника переноситься заряд dq , то сила струму

$$I = \frac{dq}{dt}. \quad (22.1)$$

Таким чином, сила струму визначається як швидкість переносу заряду через розглянутий переріз провідника.

За напрям електричного струму за традицією приймається напрям, в якому переміщаються позитивні заряди. Точніше, переміщалися б, оскільки електропровідність більшості провідників (металів, напівпровідників, плазми) обумовлена рухом негативно заряджених вільних електронів (рис. 22.1).

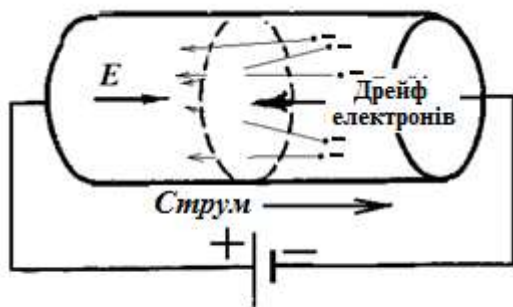


Рис. 22.1.

Якщо сила і напрям струму не змінюються з часом, струм називається *постійним*. Для постійного струму, очевидно, справедливо співвідношення

$$I = \frac{q}{t} \quad (22.2)$$

Одиницею сили струму в системі СІ є ампер (А). Ампер входить в число основних одиниць системи СІ і вводиться на основі магнітної взаємодії струмів. При силі постійного струму, що дорівнює 1 А, через перетин провідника за 1 с переноситься заряд, рівний 1 Кл.

Струм може бути нерівномірно розподілений по перетину провідника (наприклад, змінний струм високої частоти майже не проникає вглиб провідника), так що необхідно ввести величину, яка характеризує розподіл сили струму за перерізом провідника. Це вектор густини струму $\mathbf{j}$.

Густина струму $\mathbf{j}$ визначається зарядом, що проходить за одиницю часу через одиничну площадку, перпендикулярну напрямку упорядкованого руху зарядів. Модуль густини струму

$$j = \frac{dI}{dS_{\perp}}, \quad (22.3)$$

а напрям вектора $\mathbf{j}$ збігається з напрямом швидкості упорядкованого руху позитивних зарядів.

Якщо малий елемент площиною dS розташований так, що нормаль $\mathbf{n}$ до нього становить з вектором $\mathbf{j}$ кут α , то сила струму через площадку $dS_{\perp}$ згідно з (22.3) дорівнює

$$dI = j dS_{\perp}.$$

Як видно з рис. 22.2:

$$dS_{\perp} = dS \cos \alpha.$$

Тому

$$dI = j dS_{\perp} = j dS \cos \alpha = j_n dS,$$

де $j_n = j \cos \alpha$ – проекція вектора $\mathbf{j}$ на нормаль $\mathbf{n}$.

Таким чином, через площадку dS проходить такий самий струм, як і через площадку $dS_{\perp}$. Сила струму крізь довільну поверхню S виходить підсумовуванням за всіма елементами:

$$I = \int_{(S)} j_n dS. \quad (22.4)$$

Якщо переріз провідника є перпендикулярним до вектору густини струму, то густина струму є однаковою по всьому перерізу, а напрям нормалі збігається з напрямом руху позитивних зарядів, то сила струму

$$I = j \cdot S.$$

Нехай в одиниці об'єму провідника міститься n носіїв струму, заряд кожного з яких q . Позначимо швидкість упорядкованого руху носіїв струму через $\mathbf{u}$ (рис. 22.4). Через одиничну площину пройдуть за секунду тільки ті носії, які на початку цієї секунди знаходилися всередині циліндра з основою одиничної площини і висотою (довжиною бічної поверхні), що чисельно дорівнює швидкості спрямованого руху u . Об'єм циліндра дорівнює u , кількість носіїв – nu , а сумарний заряд – nqu . Отже, для густини струму виходить формула

$$\mathbf{j} = nq\mathbf{u}. \quad (22.5)$$

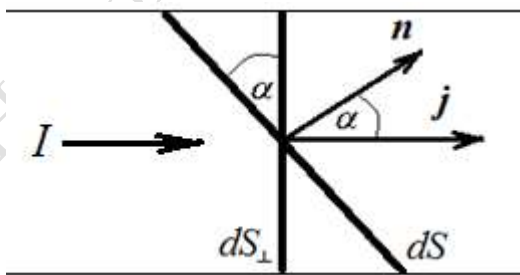


Рис. 22.2.

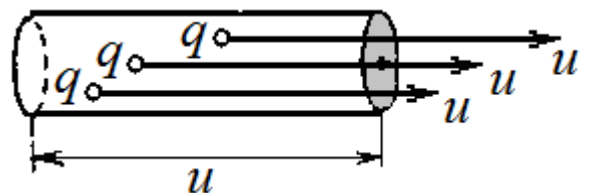


Рис. 22.4.

Якщо електричний струм створюється одночасно як позитивними, так і негативними носіями, повна густина струму дорівнює векторній сумі вкладів окремих сортів носіїв.

Як впливає з виразу (22.3), густина струму в системі СІ вимірюється в амперах на квадратний метр (А/м^2). У техніці використовується вимірювання густини струму в амперах на квадратний міліметр (А/мм^2).

Для появи і існування електричного струму провідності мають виконуватися *дві умови*.

1. У даному середовищі повинні існувати *носії струму* - здатні вільно переміщатися заряджені частинки. Такими носіями струму в металах є вільні електрони, в напівпровідниках - електрони провідності і дірки, в електролітах - позитивні і негативні іони, в газах - протилежно заряджені іони і електрони.

2. У даному середовищі повинно існувати *електричне поле*, енергія якого витрачається на переміщення електричних зарядів. Для існування постійного струму енергія поля повинна весь час поповнюватися, тобто необхідне *джерело енергії* електричного поля.

§ 23. Сторонні сили, ЕРС і напруга

Нехай на кінцях провідника AB (рис 23.1) створена різниця потенціалів $\varphi_A - \varphi_B$, яка створює усередині нього електричне поле E , спрямоване в бік падіння потенціалу. Для зручності міркувань будемо припускати, що носіями струму є позитивні заряди. У реальності в металевих провідниках струм провідності створюється рухом електронів, що, однак, не змінює суті міркувань.

Протягом дуже короткого часу буде відбуватися переміщення зарядів від A до B до тих пір, поки в провіднику встановиться однаковий потенціал; при цьому напруженість електричного поля всередині провідника стане рівною нулю, і струм I припиниться. Таким чином, провідник, в якому діють тільки електростатичні сили, з часом переходить в рівноважний стан.

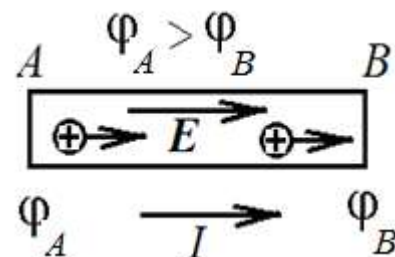


Рис. 23.1.

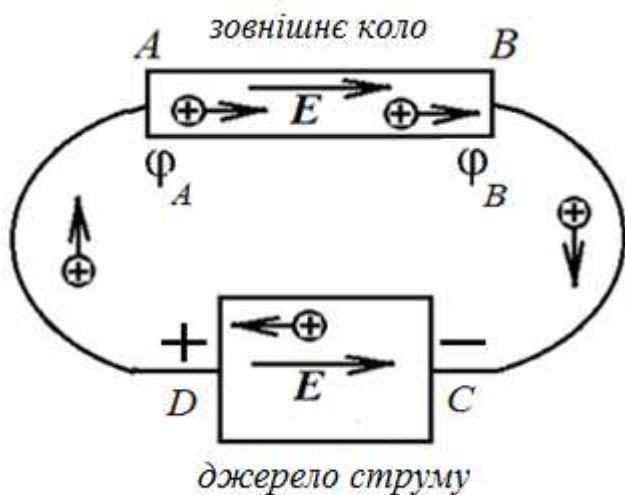


Рис. 23.2.

Для того щоб підтримувати струм тривалий час, потрібно від кінця провідника B з меншим потенціалом φ_B безперервно відводити принесені сюди струмом заряди, а до кінця A з великим потенціалом φ_A безперервно їх підводити (рис. 23.2). Іншими словами, необхідно здійснити круговорот зарядів, при якому вони рухалися б по замкнутому шляху.

У замкненому колі поряд з ділянкою AB , на якій позитивні заряди руха-

ються в бік зменшення потенціалу ϕ , повинна бути ділянка, на якій перенесення позитивних зарядів відбувається в напрямку зростання ϕ , тобто проти сил електростатичного поля з напруженістю E , існуючого між полюсами джерела (частина кола CD на рис. 23.2).

Переміщення носіїв струму на ділянці CD (проти поля E) можливо лише за допомогою сил неелектростатичного (не кулонівського) походження, які називаються **сторонніми силами**.

Пристрій, що створює і підтримує різницю потенціалів $\Delta\phi = \phi_A - \phi_B$ на кінцях провідника за рахунок роботи сторонніх сил, називається **джерелом струму**.

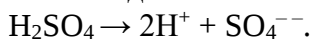
Джерело струму замикає електричне коло, вздовж якого здійснюється безперервний рух зарядів. Струм проходить по зовнішній частині кола – по провіднику і по внутрішній – джерелу струму. Джерело струму має два полюси (рис. 23.2): позитивний, з більш високим потенціалом, і негативний, з більш низьким потенціалом. При розімкненому зовнішньому колі на негативному полюсі утворюється надлишок електронів, а на позитивному – недолік.

У зовнішньому колі струм проходить від позитивного полюса до негативного, а всередині джерела струму – від негативного полюса до позитивного. Всередині джерела струму сторонні сили спрямовані проти електричних сил.

Таким чином, **джерело струму** повинно забезпечувати колоподібний рух носіїв струму, подібно до того, як насос забезпечує циркуляцію рідини в якій-небудь замкнутій системі

Походження сторонніх сил може бути різним. Сторонні сили рухають заряджені частинки всередині генераторів, гальванічних елементів, акумуляторів. В генераторах сторонні сили – це або сили, що діють на електрони провідності з боку вихрового електричного поля, що виникає при зміні магнітного поля з часом, або лоренцеві сили, що діють з боку магнітного поля на електрони в рухомому провіднику; в гальванічних елементах і акумуляторах – це хімічні сили і т. д.

Приклад 23.1. Розглянемо механізм виникнення ЕРС в найпростішому хімічному джерелі струму – елементі Вольта (рис. П. 23.1). У водний розчин сірчаної кислоти опускають дві металевих пластини: з цинку Zn і міді Cu . При розчиненні цинку в електроліт переходять позитивно заряджені іони цинку Zn^{++} . У цинковій пластині залишаються надлишкові електрони. Молекула сірчаної кислоти у воді розпадається на два іони H^+ і один іон SO_4^{--} :



Позитивно заряджені іони цинку Zn^{++} , переходячи в розчин, відштовхують позитивні іони водню H^+ і відтісняють їх до мідної пластини. Тут кожен водневий іон H^+ забирає у мідної пластини електрон, перетворюючись в нейтральний атом. Атом водню, з'єднуючись з іншим таким же атомом, утворює молекулу газоподібного водню H_2 . Оскільки мідна пластина втрачає електрони, вона заряджається позитивно. (Відмітимо, що на мідній пластині відбуваються подібні реакції, проте цинкова пластина розчиняється швидше мідної).

В результаті між цинковою і мідною пластинами виникає різниця потенціалів 1,1 В. Якщо замкнути коло, вільні електрони, що утворюються, будуть переходити по зовнішньому колу до позитивного електрода. У колі буде проходити постійний струм, джерелом енергії для якого будуть хімічні реакції.

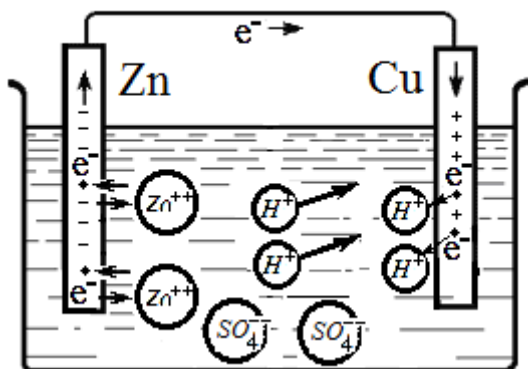


Рис. П. 23.1.

Переміщаючи електричні заряди, сторонні сили здійснюють роботу за рахунок енергії, що витрачається в джерелі струму. Величина, що чисельно дорівнює роботі сторонніх сил по переміщенню одиничного позитивного заряду, називається **електрорушійною силою** (ЕРС) ε , яка діє в замкнутому колі або на його ділянці. Отже, якщо робота сторонніх сил над зарядом q дорівнює $A_{ст}$, то

$$\varepsilon = \frac{A_{ст}}{q} \quad (23.1)$$

Із зіставлення цієї формули з формулою роботи сил поля над зарядом ($A = q(\varphi_1 - \varphi_2)$) випливає, що розмірність ЕРС збігається з розмірністю потенціала. Вимірюється ЕРС в тих же одиницях, що і потенціал, тобто у вольтах (В).

За аналогією з напруженістю електричного поля введемо поняття *напруженості поля сторонніх сил* $\mathbf{E}^{ст}$, під якою будемо розуміти векторну величину, рівну відношенню сторонньої сили $\mathbf{F}^{ст}$, що діє на електричний заряд q , до величини цього заряду.

$$\mathbf{E}^{ст} = \frac{\mathbf{F}^{ст}}{q} \quad (23.2)$$

Сторонню силу, що діє на заряд q , можна представити у вигляді добутку заряду на напруженість поля сторонніх сил $\mathbf{E}^{ст}$:

$$\mathbf{F}^{ст} = q \mathbf{E}^{ст} \quad (23.3)$$

Тоді робота сторонніх сил на ділянці 1-2 кола дорівнюватиме сумі елементарних робіт, тобто криволінійному інтегралу вздовж ділянки кола 1-2

$$A^{ст} = \int_{12} \mathbf{F}_l^{ст} d\mathbf{l} = q \int_{12} \mathbf{E}_l^{ст} d\mathbf{l} \quad (23.4)$$

Тут $\mathbf{F}_l^{ст}$ і $\mathbf{E}_l^{ст}$ - проекції векторів сторонньої сили і напруженості поля сторонніх сил на напрям елементарного переміщення $d\mathbf{l}$. Відповідно, ЕРС, яка діє на ділянці 1-2 кола

$$\varepsilon_{12} = \int_{12} \mathbf{E}_l^{ст} d\mathbf{l}. \quad (23.5)$$

ЕРС, яка діє в замкнутому колі, визначається криволінійним інтегралом по замкнутому шляху L

$$\varepsilon = \oint_L \mathbf{E}_l^{ст} d\mathbf{l} \quad (23.6)$$

Інтеграл (23.6) називається *циркуляцією напруженості* по замкнутому контуру L . Таким чином, ЕРС, яка діє в замкнутому колі, дорівнює циркуляції вектора напруженості поля сторонніх сил.

Крім сторонніх сил, на носії струму діють також кулонівські сили електростатичного поля. Всередині провідника зі струмом напруженість $\mathbf{E}$ електричного поля за принципом суперпозиції дорівнює

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^{кул} + \mathbf{E}^{ст}, \quad (23.7)$$

де, відповідно, $\mathbf{E}^{кул}$ і $\mathbf{E}^{ст}$ - напруженості електростатичного поля кулонівських сил і поля сторонніх сил.

Отже, результуюча сила, що діє в кожній точці кола на заряд q , дорівнює

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E}^{кул} + \mathbf{E}^{ст}). \quad (23.8)$$

Робота, що здійснюється результуючою силою над зарядом q на ділянці 1—2 кола, визначається формулою

$$A_{12} = \int_{12} E_l^{кул} dl + \int_{12} E_l^{см} dl = q(\varphi_1 - \varphi_2) + q\varepsilon_{12}. \quad (23.9)$$

Величина, що чисельно дорівнює роботі, яка здійснюється як електростатичними, так і сторонніми силами при переміщенні вздовж кола з точки 1 в точку 2 одиничного позитивного заряду називається **напругою** U на даній ділянці кола.

Відповідно до формули (23.9)

$$U_{12} = (\varphi_1 - \varphi_2) + \varepsilon_{12}. \quad (23.10)$$

Ділянка кола, на якій не діють сторонні сили, називається *однорідною*. Ділянка, на якій діють сторонні сили, називається *неоднорідною*. Для однорідної ділянки

$$U_{12} = (\varphi_1 - \varphi_2) \quad (23.11)$$

тобто напруга збігається з різницею потенціалів на кінцях ділянки кола.

§ 24. Закон Ома для однорідної ділянки кола. Електричний опір провідника

Розглянемо однорідну ділянку кола, тобто ділянку, що не містить ЕРС, потенціали кінців якої дорівнюють відповідно φ_1 і φ_2 (рис. 24.1).

Відповідно до закону, експериментально встановленому німецьким фізиком Г.Омом, **сила струму в однорідному металевому провіднику прямо пропорційна напрузі U на кінцях провідника:**

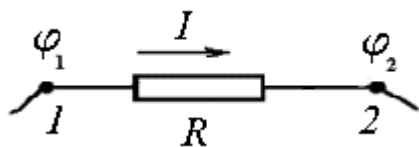


Рис. 24.1.

$$I = \frac{1}{R} U = \frac{1}{R} (\varphi_1 - \varphi_2). \quad (24.1)$$

Величина R у формулі закону Ома називається **електричним опором провідника**. Одиницею опору служить ом (Ом) – це опір такого провідника, в якому при напрузі в 1 В проходить струм силою 1 А: 1 Ом = 1 В/1 А.

Електричний опір (при не дуже великих струмах) залежить від розмірів і форми провідника, а також від властивостей матеріалу, з якого він зроблений. Для однорідного провідника з постійним перерізом

$$R = \rho \frac{l}{S}, \quad (24.2)$$

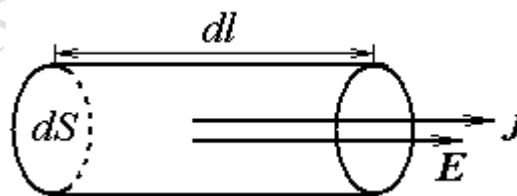


Рис. 24.2.

де l - довжина провідника, S - площа його поперечного перерізу, ρ - коефіцієнт, який залежить від властивостей матеріалу, названий *питомим електричним опором* речовини. Питомий опір ρ - це опір провідника довжиною $l = 1$ м і площею поперечного перерізу $S = 1$ м². Вимірюється ρ в ом-метрах (Ом·м).

Виділимо уявно в провіднику елементарний циліндричний об'єм з твірними, паралельними векторам $\mathbf{j}$ і $\mathbf{E}$ (рис. 24.2).

Відповідно до формули (24.2) опір циліндра дорівнює $\rho dl/dS$. Через поперечний переріз циліндра проходить струм силою $j dS$. Напруга, прикладена до циліндра, дорівнює Edl . Підстановка цих значень у формулу (24.1) дає, що

$$jdS = \frac{dS}{\rho dl} Edl,$$

звідки

$$j = \frac{1}{\rho} E. \quad (24.3)$$

Оскільки дрейфова швидкість носіїв струму створюється електричним полем, має місце пропорційність $\mathbf{u} \sim \mathbf{E}$, так що і густина струму буде пропорційною вектору напруженості.

Вектори $\mathbf{j}$ і $\mathbf{E}$ мають однаковий напрямок. Тому можна написати

$$\mathbf{j} = \frac{1}{\rho} \mathbf{E} = \sigma \mathbf{E}. \quad (24.4)$$

Ця формула виражає **закон Ома в диференціальній формі**. Він зв'язує в кожній точці провідника густину струму з напруженістю електричного поля. *Густина струму в даній точці провідника прямо пропорційна напруженості електричного поля в цій точці.*

Обернена до питомого опору ρ величина $\sigma = 1/\rho$ називається *питомою електричною провідністю (електропровідністю)* речовини. Одиниця, зворотна до Ому, називається сіменсом (См). Отже, одиницею електропровідності σ є сіменс на метр (См/м).

Зупинимось на механізмі здійснення постійного струму. Як відомо з електростатики (див. § 14), при рівновазі зарядів поле нерухомих зарядів всередині провідника дорівнює нулю, а у його поверхні вектор $\mathbf{E}$ напруженості поля спрямований по нормалі до поверхні. Наявність струму в провіднику означає, що уздовж провідника потенціал електричного поля змінюється. Отже, в провідниках при наявності струму електричне поле не дорівнює нулю, воно існує і всередині провідника зі струмом. На поверхні провідника існує тангенціальна складова напруженості електричного поля у напрямі поля. Чим же створюється це поле?

Роль джерела струму полягає в тому, щоб розділяти позитивні і негативні заряди. Після розділення заряди переміщуються до полюсів джерела і за законом Кулона діють на заряди провідника поблизу полюсів, які в свою чергу діють на інші заряди і т. д. На місце зарядів, що відходять, безперервно надходять нові.

В результаті цих колективних взаємодій в колі на поверхні провідників виникає такий **розподіл рухомих зарядів**, який забезпечує існування всередині провідників електричного поля.

Таким чином, джерелами електричного поля, яке існує в провіднику і забезпечує наявність постійного струму, є *поверхневі заряди*. Вони розподіляються на поверхні провідників під дією зарядів на полюсах джерела струму.

Оскільки взаємодія між зарядами здійснюється за допомогою електромагнітних сил, процес утворення постійного струму в колі після його замикання характеризується швидкістю поширення електромагнітних хвиль, яка залежить від розподілу ємностей, індуктивностей і інших характеристик кола. У вільному просторі швидкість поширення електромагнітних взаємодій дорівнює швидкості світла.

Дослід показує, що питомий опір, а отже, і опір металів, залежить від температури, лінійно збільшуючись для більшості металів з її зростанням:

$$\begin{aligned}\rho &= \rho_0 (1 + \alpha t), \\ R &= R_0 (1 + \alpha t),\end{aligned}\quad (24.5)$$

де ρ_0, ρ - питомі опори речовини провідника відповідно при 0°C і $t^\circ\text{C}$; R_0, R - опори провідника при 0°C і $t^\circ\text{C}$, α - температурний коефіцієнт опору, який чисельно дорівнює відносній зміні опору провідника при зміні його температури на 1 кельвін:

$$\alpha = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dT}. \quad (24.6)$$

Для чистих металів при не дуже низьких температурах $\alpha \approx (1/273) \text{ K}^{-1}$, тобто можна записати

$$R = \alpha R_0 T \quad (24.7)$$

Температурна залежність опору провідника пояснюється тим, що при підвищенні температури зростає інтенсивність розсіювання (число зіткнень) вільних електронів на іонах кристалічної ґратки.

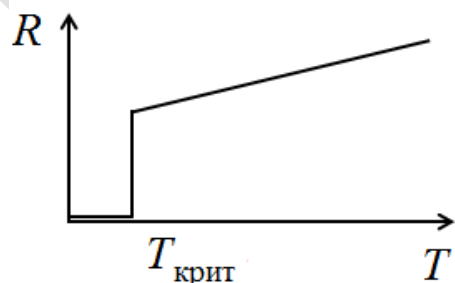


Рис.24.3

Залежність опору металів від температури використовують в термометрах опору. Зазвичай в якості термометричного тіла такого термометра беруть платиновий дріт, залежність опору якого від температури достатньо вивчена. Про зміни температури судять по зміні опору дроту, яку можна виміряти. Такі термометри дозволяють вимірювати дуже низькі і дуже високі температури, коли звичайні рідинні термометри непридатні.

При певних температурах ($0,012 - 20 \text{ K}$), названих «критичними», і при значеннях напруженості магнітного поля (зовнішнього або супровідного струму), меншого певного «критичного» значення, опір деяких металів стрибком зменшується практично до нуля (рис. 24.3), і метал переходить в надпровідний стан. Вперше в 1911 р це виявив Г. Камерлінг-Оннес для ртуті.

Надпровідність характеризується не тільки майже повним зникненням електричного опору зразка, а й одночасною зміною його магнітних і теплових властивостей. Внаслідок відсутності опору в надпровідниках можна отримувати дуже великі струми без виділення теплоти.

В даний час надпровідність виявлена у багатьох металів, сплавів і з'єднань. Розроблено кераміки, що переходять в надпровідний стан при температурах, що перевищують 100 K , так звані високотемпературні надпровідники.

§ 25. Послідовне і паралельне з'єднання провідників

При **послідовному з'єднанні** (рис. 25.1) відповідно до закону збереження заряду через опори проходить за один і той же час однаковий заряд. Тому сила струму в усіх опорах однакова

$$I_1 = I_2 = \dots = I_n = I_1 \quad (25.1)$$

Сума падінь напруги на всіх опорах дорівнює напрузі на кінцях кола:

$$\begin{aligned} U_1 + U_2 + \dots + U_n = \\ (\varphi_1 - \varphi_2) + (\varphi_2 - \varphi_3) + \dots + (\varphi_{n-1} - \varphi_n) = \varphi_1 - \varphi_n = \\ = U. \end{aligned} \quad (25.2)$$

Для кожної з напруг за законом Ома можна записати

$$U_1 = I_1 R_1, \quad U_2 = I_2 R_2, \quad \dots, \quad U_n = I_n R_n. \quad (25.3)$$

тоді

$$U = I_1 R_1 + I_2 R_2 + \dots + I_n R_n = I (R_1 + R_2 + \dots + R_n) \quad (25.4)$$

З іншого боку, $U = I R_{\text{посл.}}$

Отже, при послідовному з'єднанні повний опір кола дорівнює сумі окремих опорів,

$$R_{\text{посл}} = \sum_{i=1}^n R_i, \quad (25.5)$$

а падіння напруги на них пропорційне цим опорам.

При **паралельному з'єднанні** (рис. 25.2) напруга на ділянці AB буде однаковою для всіх опорів

$$U_1 = U_2 = U_3 = \dots = U_n \quad (25.6)$$

Із закону збереження заряду випливає, що сила струму на вході і на виході дорівнює сумі сил струмів в окремих гілках паралельного кола

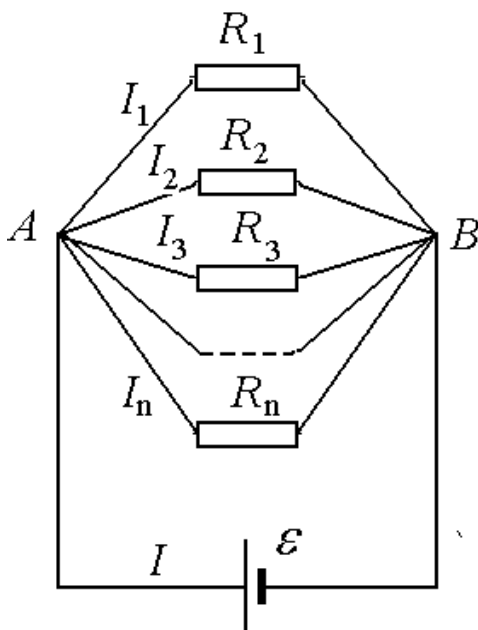


Рис.25.2.

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + \dots + I_n =$$

$$= \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \frac{U}{R_3} + \dots + \frac{U}{R_n} = U \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots + \frac{1}{R_n} \right) \quad (25.7)$$

З іншого боку, для всієї ділянки справедливе співвідношення

$$I = \frac{U}{R_{\text{парал}}},$$

де $R_{\text{парал}}$ - загальний опір кола при паралельному з'єднанні. Порівнюючи обидві формули, отримуємо

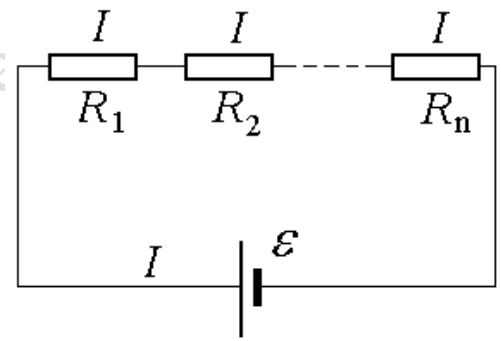


Рис. 25.1.

$$\frac{1}{R_{\text{паралл}}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i} \quad (25.8)$$

При паралельному з'єднанні провідників величина, зворотна загальному опору кола, дорівнює сумі величин, зворотних опорів паралельно включених провідників.

При цьому струм в окремих опорах обернено пропорційний цим опорам.

Приклад 25.1. Міст Уитстона. Для точного вимірювання опорів використовуються методи порівняння опорів, які не потребують вимірювань струму і напруги, в основу яких покладена мостова схема Уитстона (рис. П 25.1).

Міст складається з чотирьох опорів R_1, R_2, R_3, R_X , один з яких R_X невідомий і який необхідно виміряти.

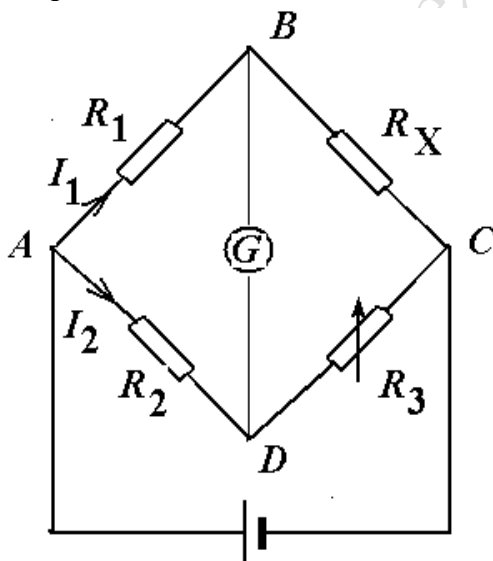


Рис. П. 25.1

На одну з діагоналей моста AC подається напруга від джерела живлення, в іншу діагональ BD включений нульовий індикатор G (чутливий гальванометр).

Регулюючи опір одного з плечей R_3 , домагаються рівноваги моста, при якій струм в діагоналі з нульовим індикатором дорівнює нулеві.

Нехай в урівноваженому мосту через опори R_1 і R_X проходить однаковий струм I_1 , а через R_2 і R_3 - теж однаковий струм I_2 . Оскільки різниця потенціалів між точками B і D дорівнює нулю, то напруги на опорах R_1 і R_2 є однаковими,

$$I_1 R_1 = I_2 R_2 \quad (\text{П.25.1})$$

і напруги на опорах R_X і R_3 є також однаковими:

$$I_1 R_X = I_2 R_3 \quad (\text{П.25.2})$$

Розділивши рівності (П.22.1) і (П.22.2) одна на одну, отримуємо

$$\frac{R_1}{R_X} = \frac{R_2}{R_3}.$$

Звідси

$$R_X = R_3 \frac{R_1}{R_2} \quad (\text{П.25.3})$$

Знаючи значення R_3 і відношення опорів R_1 і R_2 , яке відповідає умові рівноваги, можна обчислити R_X .

Для зручності врівноваження моста і спрощення обчислень за формулою (П.25.3) відношення (R_1/R_2) фіксують і заздалегідь точно вимірюють (наприклад, 0,001; 0,01; 0,1; 1; 10; 100; 1000). Балансування моста здійснюють за допомогою тільки одного змінного опору R_3 (зазвичай використовують магазини опорів). Промислові мости постійного струму дозволяють вимірювати опори від 10^{-6} до 10^{14} Ом з дуже високою точністю.

§ 26. Робота, потужність і теплова дія струму. Закон Джоуля - Ленца

При проходженні струму, тобто при упорядкованому переміщенні зарядів кулонівські і сторонні сили виконують роботу. Цю роботу називають *роботою електричного струму*.

Визначимо роботу струму в разі *однорідної ділянки* кола, тобто ділянки, що не містить ЕРС (рис. 24.1).

За визначенням напруга U між двома точками провідника у випадку однорідної ділянки кола чисельно дорівнює роботі кулонівських сил по переміщенню одиниці заряду уздовж провідника між цими точками. Тоді при перенесенні заряду $dq = I dt$ виконується *елементарна робота електричного струму*

$$dA = dq U = IU dt.$$

При постійному струмі силою I за кінцевий проміжок часу t робота електричного струму

$$A = IU \int_0^t dt = IU t = I^2 R t = \frac{U^2}{R} t. \quad (26.1)$$

Потужність струму визначається роботою, яка здійснюється за одиницю часу:

$$P = \frac{dA}{dt} = IU = I^2 R = \frac{U^2}{R} \quad (26.2)$$

Стикаючись з іонами кристалічної ґратки металу, носії струму - електрони - передають їм свою енергію, яку отримують від поля. Тому робота поля над зарядами переходить в енергію теплового руху іонів металу, тобто відбувається нагрівання провідника. Якщо струм проходить по нерухомому металевому провіднику, і в ньому не відбувається хімічних перетворень, то згідно із законом збереження енергії кількість теплоти Q , що виділилася, дорівнює роботі струму A :

$$Q = IU t = I^2 R t = \frac{U^2}{R} t. \quad (26.3)$$

Ця формула виражає **закон Джоуля - Ленца**, який був встановлений Дж. Джоулем і незалежно від нього Е.Х. Ленцем **дослідним шляхом**: *кількість теплоти, що виділяється в провіднику зі струмом, прямо пропорційна квадрату сили струму, опору провідника і часу проходження струму через провідник.*

Якщо сила струму змінюється з часом, тобто $I = I(t)$, то кількість теплоти, що виділилася за час t , обчислюється за формулою

$$Q = \int_0^t I^2 R dt. \quad (26.4)$$

Робота і потужність електричного струму вимірюється в тих же одиницях, що і механічна робота, тобто в СІ в джоулях:

$$\begin{aligned} 1 \text{ Дж} &= 1 \text{ В} \cdot 1 \text{ А} \cdot 1 \text{ с}, \\ 1 \text{ Вт} &= 1 \text{ Дж/с} = 1 \text{ В} \cdot 1 \text{ А}. \end{aligned}$$

Часто використовуються кратні одиниці: 1 кВт (кіловат) = 10^3 Вт, 1 МВт (мегават) = 10^6 Вт. Для роботи використовується позасистемна одиниця 1 кВт·год

(кіловат-година) - робота, що здійснюється за 1 годину при потужності, що розвивається, 1 кВт. 1 кВт-год = 3,6 МДж.

Формула (26.3) виражає сумарну кількість теплоти, яка виділилася в провіднику опором R . Ця теплота виділяється по всьому об'єму провідника. Знайдемо кількість теплоти, що виділяється в одиниці об'єму. Для цього знову розглянемо ділянку однорідного провідника у вигляді циліндра довжиною dl і незмінного поперечного перерізу dS (рис. 24.2). Відповідно до закону Джоуля - Ленца за час dt в цьому об'ємі виділиться теплота

$$dQ = I^2 R dt = (jdS)^2 \frac{\rho dl}{dS} dt = \rho j^2 dV dt, \quad (26.2)$$

де $dV = dS dl$ – величина елементарного об'єму. Розділивши останній вираз на $dV dt$, знайдемо кількість теплоти, що виділилася в одиниці об'єму в одиницю часу (густину теплової потужності)

$$w = \rho j^2 \quad (26.6)$$

Прийнявши до уваги закон Ома в диференціальній формі $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ і вираз для питомої електропровідності $\sigma = \frac{1}{\rho}$, формулу (26.6) можна представити у вигляді

$$w = \sigma E^2 \quad (26.7)$$

Вираз (26.7) називається **законом Джоуля - Ленца в диференціальній формі**. Густина теплової потужності прямо пропорційна квадрату напруженості електричного поля в даній точці провідника.

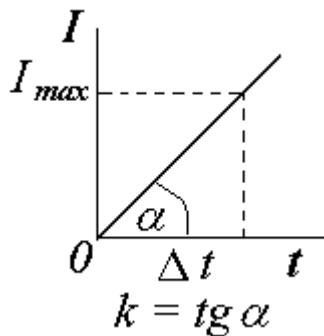


Рис. П. 26.1.

Приклад 26.1. Сила струму в провіднику опором $R = 10$ Ом рівномірно зростає за час $\Delta t = 4$ з від $I_0 = 0$ до $I_{\max} = 8$ А. Визначити: 1) кількість теплоти, яка виділилася в провіднику за перші $t_1 = 3$ с; 2) кількість електронів, які пройшли через поперечний переріз провідника за цей час.

Закон Джоуля - Ленца у вигляді $Q = I^2 R t$ справедливий для постійного струму. Якщо ж сила струму в провіднику змінюється, то цей закон справедливий тільки для нескінченно малого проміжку часу, протягом якого струм можна вважати постійним

$$dQ = I^2 R dt. \quad (\text{П.26.1})$$

За умовою задачі сила струму рівномірно збільшується, тому закон зміни сили струму можна записати у вигляді $I = kt$, де k - коефіцієнт пропорційності, чисельно рівний тангенсу кута нахилу прямої (рис. П 26.1)

$$k = \frac{I_{\max}}{\Delta t} = \frac{8 \text{ А}}{4 \text{ с}} = 2 \frac{\text{А}}{\text{с}}. \quad (\text{П. 26.2})$$

Тоді

$$dQ = k^2 t^2 R dt. \quad (\text{П. 26.3})$$

Для визначення кількості теплоти, яка виділилася за скінченний проміжок часу, вираз (П. 26.3) необхідно проінтегрувати. За перші t_1 секунд виділиться кількість теплоти

$$Q = \int_0^{t_1} k^2 t^2 R dt = k^2 R \int_0^{t_1} t^2 dt = \frac{k^2 R t_1^3}{3}. \quad (\text{П. 26.4})$$

Підставляючи числові значення, знайдемо $Q = 360$ Дж.

За визначенням сила струму дорівнює заряду, який переноситься в одиницю часу через поперечний переріз провідника:

$$I = \frac{dq}{dt}.$$

Тоді заряд q , який пройшов за час t_1 , дорівнює

$$q = \int_0^{t_1} I dt = k \int_0^{t_1} t dt = k \frac{t_1^2}{2}. \quad (\text{П. 26.5})$$

Розділимо заряд q на елементарний заряд e і отримаємо кількість електронів, що пройшли через поперечний переріз,

$$N = \frac{q}{e} = \frac{k t_1^2}{2e} = \frac{2 \cdot 3^2}{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} = 5,63 \cdot 10^{19} \text{ електронів}. \quad (\text{П. 26.6})$$

Приклад 26.2. Вздовж ніхромового провідника ($\rho = 1,1 \cdot 10^{-6}$ Ом·м) довжиною $l = 2$ м і площею поперечного перерізу $S = 0,4$ мм² проходить струм. При цьому щосекундно виділяється кількість теплоти $Q = 3,22$ Дж. Визначити густину струму.

Згідно (26.6) закон Джоуля - Ленца в диференціальній формі може бути представлений у вигляді

$$w = \rho j^2,$$

де w - густина теплової потужності, ρ - питомий опір провідника, j - густина струму.

За визначенням густина теплової потужності являє собою кількість теплоти, що виділяється в одиниці об'єму в одиницю часу:

$$w = \frac{Q}{V \cdot t} = \frac{Q}{S l t}.$$

Тоді густина струму

$$j = \sqrt{\frac{w}{\rho}} = \sqrt{\frac{Q}{S l t \rho}} = \sqrt{\frac{3,52}{0,4 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1,1 \cdot 10^{-6}}} = 2 \cdot 10^6 \left(\frac{A}{m^2} \right) = 2 \frac{A}{mm^2}.$$

§ 27. Закон Ома для неоднорідної ділянки кола

Розглянемо тепер *неоднорідну*, тобто таку, на якій діють також і сторонні сили, ділянку електричного кола зі струмом. Оскільки на ділянці кола міститься джерело струму (рис. 27.1), то при перенесенні заряду dq роботу виконують як кулонівські, так і сторонні сили.

За визначенням напругою U_{12} на ділянці кола називається фізична величина,

що чисельно дорівнює роботі, яку здійснює результуюче поле кулонівських і сторонніх сил при переміщенні з точки 1 в точку 2 одиничного позитивного заряду

$$U_{12} = (\varphi_1 - \varphi_2) + \varepsilon_{12}.$$

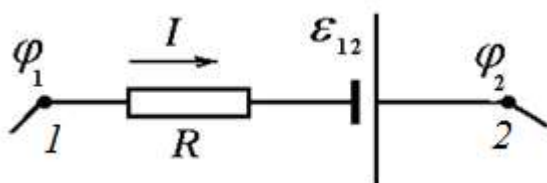


Рис. 27.1.

Тоді повна робота, що здійснюється як сторонніми, так і кулонівськими силами по переміщенню заряду $dq = Idt$ – *робота струму* на даній ділянці кола – буде дорівнювати:

$$dA = dq U_{12} = I (\varphi_1 - \varphi_2) dt + I \varepsilon_{12} dt. \quad (27.1)$$

Якщо струм постійний, а провідник нерухомий, єдиною формою енергії, в яку перетворюється виконана над зарядом робота dA , є теплота dQ , що виділилася на ділянці:

$$dQ = I^2 R dt = IR Idt = IR dq, \quad (27.2)$$

і, оскільки

$$dA = dQ,$$

отримуємо

$$(\varepsilon_{12} + (\varphi_1 - \varphi_2)) dq = IR dq,$$

звідки випливає **закон Ома для неоднорідної ділянки кола**

$$I = \frac{\varepsilon_{12} + (\varphi_1 - \varphi_2)}{R} = \frac{U_{12}}{R}. \quad (27.3)$$

Сила струму в провіднику прямо пропорційна напрузі між кінцями розглянутої ділянки кола.

У формулі (27.3) сила струму і ЕРС – величини алгебраїчні. Сила струму позитивна, якщо струм проходить в напрямку від кінця 1 провідника до кінця 2.

Скалярну величину ЕРС ε_{12} беруть зі знаком «плюс», якщо вона сприяє руху позитивних зарядів в напрямку $1 \rightarrow 2$, і зі знаком «мінус», якщо перешкоджає.

З формули (27.3) випливає, що ЕРС джерела дорівнює напрузі на його зажимах при розімкнутому колі.

§ 28. Закон Ома для замкнутого кола

Якщо з'єднати кінці 1 і 2 неоднорідної ділянки кола (рис. 27.1), то їх потенціали зрівняються ($\varphi_1 = \varphi_2$) і утворюється замкнуте коло (рис. 28.1).

Позначимо через R опір зовнішньої частини кола (опір провідника, підключеного до полюсів джерела струму), а через r – внутрішній опір джерела струму.

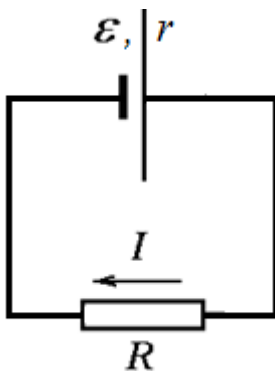


Рис. 28.1.

В цьому випадку з (27.3) отримуємо **закон Ома для замкнутого кола**

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r}. \quad (28.1)$$

Як видно з формули (28.1), падіння напруги на зовнішньому колі опором R , тобто напруга на полюсах джерела струму

$$U = IR = \varepsilon - Ir, \quad (28.2)$$

де Ir – падіння напруги всередині джерела струму.

Якщо з'єднати клеми джерела накоротко, то $R = 0$ (випадок *короткого замикання*). тоді

$$I_{к.з.} = \frac{\varepsilon}{r} = I_{\max}, U = IR = 0. \quad (28.3)$$

Якщо коло розімкнуте, зовнішній опір $R = \infty$. Тоді струм $I = \frac{\varepsilon}{\infty} = 0$ і за формулою (28.2) напруга

$$U = \varepsilon. \quad (28.4)$$

Отже, ЕРС чисельно дорівнює напрузі на клемх розімкнутого джерела.

Для замкнутого електричного кола $\varphi_1 = \varphi_2$ і робота електричних сил дорівнює нулю. Тому в замкнутому колі виконує роботу тільки прикладена ЕРС (див формулу (27.1)).

$$dA = I \varepsilon dt. \quad (28.5)$$

Використовуючи закон Ома для замкнутого кола (28.1), для роботи постійного струму за кінцевий проміжок часу t отримаємо

$$A = I \varepsilon t = \frac{\varepsilon^2}{R + r} t = I^2 (R + r) t \quad (28.6)$$

Рівняння (28.6) виражають роботу джерела струму у всьому колі. Вона складається з двох частин: роботи всередині джерела $I^2 r t$ (даремна робота) і роботи на зовнішній ділянці $I^2 R t$ (корисна робота).

Відповідно, повна потужність джерела

$$P = I \varepsilon = \frac{\varepsilon^2}{R + r} = I^2 (R + r), \quad (28.7)$$

і потужність, яку поглинає споживач (корисна)

$$P_{\text{полезн}} = IU = I^2 R = \frac{\varepsilon^2 R}{(R + r)^2}. \quad (28.8)$$

Коефіцієнт корисної дії η джерела струму визначається як відношення корисної потужності до повної

$$\eta = \frac{P_{\text{полезн}}}{P} = \frac{R}{R + r} \quad (28.9)$$

Приклад 28.1. Як видно з (28.9), режим роботи джерела при заданих значеннях ε і r залежить від опору споживача R . Досліджемо отриманий вираз.

1. При $R = 0$ (коротке замикання) $P_{\text{корисне}} = 0$, $P = \frac{\varepsilon^2}{R}$, $I = \frac{\varepsilon}{r}$, $\eta = 0$. Сила струму і загальна потужність будуть максимальними, але корисна потужність і ККД дорівнюватимуть нулю. Вся розвинута потужність витрачається на нагрівання джерела і може привести до його руйнування.

2. Існує оптимальне значення R , за якого джерело віддає максимальну потужність споживачеві. Для визначення цього опору можна дослідити на максимум функцію $P_{\text{корисн}}(R)$, що задана рівнянням (28.8).

Отримаємо

$$\frac{dP_{\text{корисн}}}{dR} = \varepsilon^2 \frac{r^2 - R_m^2}{(r + R_m)^2} = 0$$

звідки, враховуючи, що r і R завжди позитивні, маємо

$$R_m = r. \quad (\text{П.28.1})$$

Тобто оптимальне навантаження даного джерела струму дорівнює внутрішньому опору цього джерела. При цих умовах

$$P_{\text{корисн max}} = \frac{\varepsilon^2}{4r}, \quad P = \frac{\varepsilon^2}{2r}, \quad \eta = 0,2. \quad (\text{П.28.2})$$

$$3. \text{ Якщо } R \gg r, \text{ то } I \approx \frac{\varepsilon}{R},$$

$$P_{\text{корисн}} \approx \frac{\varepsilon^2}{R}, \quad P \approx \frac{\varepsilon^2}{R}, \quad \eta \rightarrow 1 \quad (\text{П.28.3})$$

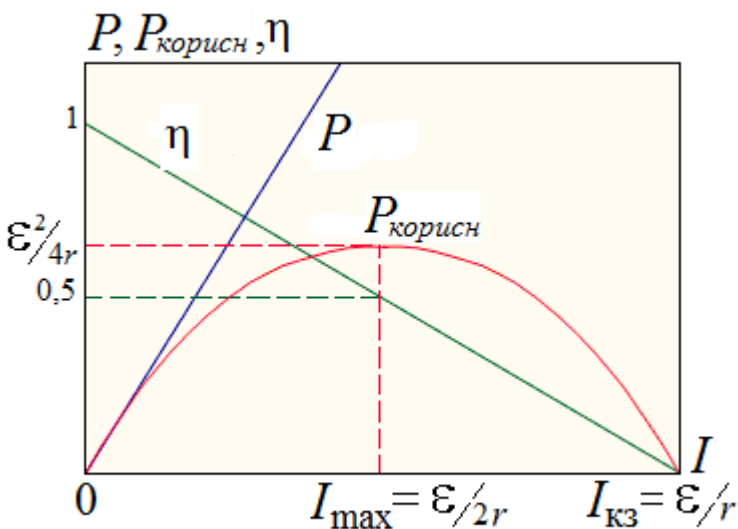


Рис. П. 28.1.

Сила струму в колі є малою, корисна і загальна потужності також малі, але ККД максимальний.

На рис. П. 28.1 показані залежності потужності джерела P , потужності у зовнішньому колі $P_{\text{корисн}}$ і ККД джерела η від сили струму I .

§ 29. Правила Кірхгофа

Правила Кірхгофа дозволяють визначати силу і напрям струму в будь-якій частині розгалуженого кола, якщо відомі опори і ЕРС.

Перше правило Кірхгофа відноситься до вузлів, тобто до таких точок в розгалуженому колі, в яких сходяться не менше трьох провідників (рис. 29.1).

Перше правило Кірхгофа є наслідком закону збереження заряду і вимоги, щоб в колі постійного струму в жодній точці провідника не накопичувалися б і не зменшувалися б заряди, а потенціал будь-якої точки кола залишався незмінним.

Якщо домовитися вважати сили струмів, які підходять до вузла, додатними, а ті, що виходять із вузла – від'ємними, то можна сказати, що **алгебраїчна сума сил струмів, що сходяться у вузлі, дорівнює нулю**, тобто

кількість зарядів, що приходять в дану точку в одиницю часу, дорівнює кількості зарядів, що виходять з даної точки за той же час:

$$\sum_{k=1}^l I_k = 0, \quad (29.1)$$

де l – кількість провідників із струмами, що сходяться в вузлі.

На рис. 29.1 у вузлі сходяться п'ять провідників зі струмами. Перше правило Кірхгофа для цього вузла:

$$I_1 - I_2 + I_3 - I_4 + I_5 = 0.$$

Розглянемо довільне розгалужене коло, частина якого зображена на рис. 29.2, A , B і C - точки розгалуження.

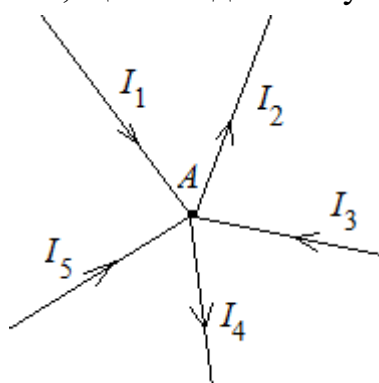


Рис. 29.1.

Друге правило Кірхгофа відноситься до довільних замкнених контурів, які можна подумки виділити в даному розгалуженому колі (наприклад, контур ABC на рис. 29.2).

Правило контурів виходить в результаті застосування закону Ома для неоднорідної ділянки кола (27.3) до різних ділянок замкненого кола. Користуючись правилом знаків, встановлених в § 27, для кожного з трьох неоднорідних ділянок кола рис. 29.2 можна записати:

$$-I_1 R_1 = \varphi_A - \varphi_B - \varepsilon_1,$$

$$I_2 R_2 = \varphi_B - \varphi_C - \varepsilon_2,$$

$$I_3 R_3 = \varphi_C - \varphi_A + \varepsilon_3.$$

Якщо скласти ці рівності, потенціали взаємно знищуються і вийде

$$-I_1 R_1 + I_2 R_2 + I_3 R_3 = -\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3.$$

У загальному випадку для будь-якого замкненого контура можна записати

$$\sum_{i=1}^n I_i R_i = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i, \quad (29.2)$$

де n - число окремих ділянок, на які контур розбивається вузлами (на рис. 29.2 $n = 3$).

Це рівняння виражає **друге правило Кірхгофа**: **в будь-якому замкненому контурі, обраному в розгалуженому електричному колі, алгебраїчна сума добутків сил струмів I_i на опори R_i відповідних ділянок контура дорівнює алгебраїчній сумі ЕРС в контурі.**

Перед складанням рівнянь за правилами Кірхгофа необхідно:

- 1) вибрати напрями струмів, вказавши їх стрілками на схемі;
- 2) вибрати напрям обходу контурів (за годинниковою стрілкою або проти неї).

Обидва напрями можна вибирати довільно, але їх слід зафіксувати і при складанні рівнянь дотримуватися.

Найбільші труднощі при складанні рівнянь викликають **правила знаків**.

1. **Додатними вважаються струми**, які збігаються з напрямом обходу, відповідні добутки IR входять в рівняння зі знаком плюс (I_2 і I_3 на рис. 29.2).

Від'ємними вважаються струми, напрями яких протилежні напрямку обходу контура (I_1 на рис. 29.2).

2. ЕРС джерел беруться **зі знаком плюс**, якщо вони створюють струми, напрям яких збігається з напрямом обходу контура (ε_3 на рис. 29.2), іншими слова-

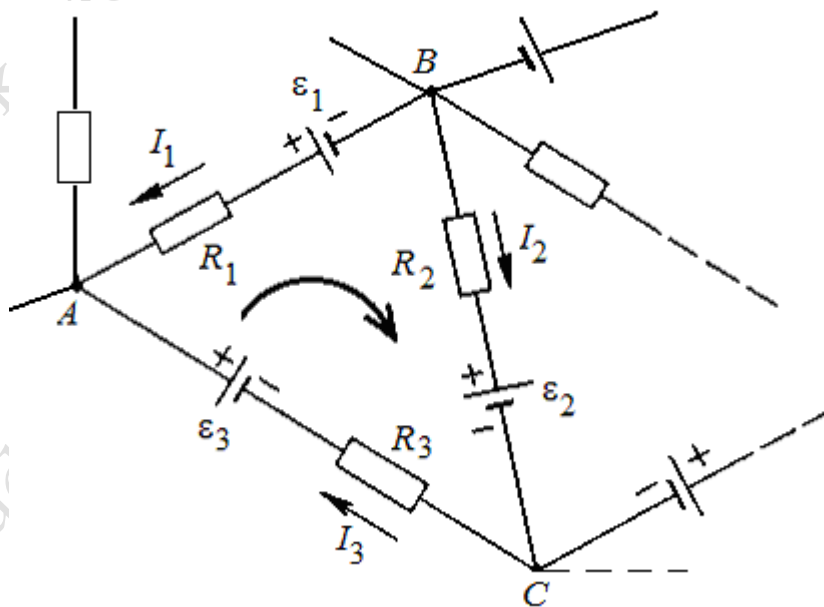


Рис. 29.2.

ми, такі, які в напрямі обходу проходяться від негативного полюса до позитивного. В іншому випадку ЕРС беруться **зі знаком мінус** (ε_1 і ε_2 на рис. 29.2).

Кількість незалежних рівнянь, що складаються за першим та другим правилами Кірхгофа, має дорівнювати кількості невідомих величин, наприклад, струмів, що проходять в різних ланках кола.

Щоб уникнути складання зайвих рівнянь, які є простою комбінацією вже складених, слід вибирати кожен новий контур таким чином, щоб він містив хоча б один елемент, який не міститься в попередніх контурах.

Тепер можна сформулювати **порядок розрахунку** складних кіл.

1. Позначити на схемі струми у всіх нерозгалужених ділянках, довільно ставлячи їм напрям.

2. Відповідно до першого правила Кірхгофа написати рівняння (29.1) для всіх вузлів, крім одного (рівняння для останнього вузла є наслідком попередніх). Для m вузлів записується $(m - 1)$ незалежних рівнянь першого правила Кірхгофа.

3. Виділити всілякі замкнені контури. Домовитися про напрям обходу.

4. Відповідно до другого правила Кірхгофа скласти рівняння (29.2) для всіх простих контурів, які можна виділити в даному колі і які не виходять накладенням вже розглянутих. У розгалуженому колі, що містить p ділянок між сусідніми вузлами (гілок) і m вузлів, є $(p - m + 1)$ незалежних рівнянь другого правила Кірхгофа.

5. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь, загальна кількість яких дорівнює кількості невідомих (наприклад, струмів).

6. Якщо внаслідок розв'язання системи рівнянь будь-які струми виявляться від'ємними, то в дійсності їхні напрями є протилежними обраним на схемі.

Приклад 29.1. Два джерела струму з ЕРС і внутрішніми опорами, що дорівнюють відповідно $\varepsilon_1 = 10$ В, $r_1 = 1$ Ом і $\varepsilon_2 = 8$ В, $r_2 = 2$ Ом, з'єднані з реостатом ($R = 6$ Ом), як показано на рис. П. 29.1. Визначити силу струму на всіх ділянках кола.

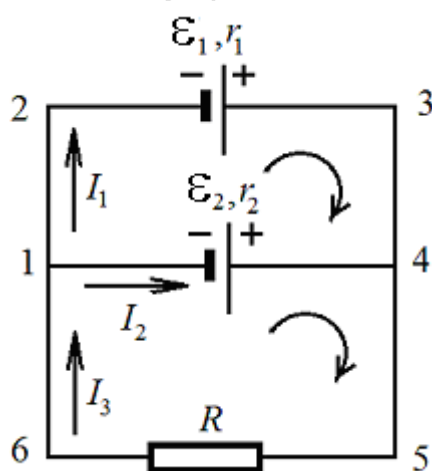


Рис. П. 29.1

Позначимо струми в нерозгалужених ділянках кола через I_1, I_2, I_3 і задамо їм здогадні напрями, як зазначено на рис. П 29.1.

Вже згадана схема має два вузли: 1 і 4. Але складати рівняння за першим правилом Кірхгофа слід тільки для одного вузла, тому що рівняння, складене для другого вузла, буде наслідком першого.

Складемо рівняння для струмів в вузлі 1, користуючись таким правилом: струм, що підходить до вузла, входить в рівняння зі знаком плюс, який відходить від вузла - зі знаком мінус.

$$-I_1 - I_2 + I_3 = 0 \quad (\text{П.29.1})$$

Тепер складемо рівняння для контурів. Виберемо два простих контури, наприклад, таким чином: 12341 і 14261.

Домовимося обходити контури за годинниковою стрілкою. Обходячи ці контури, отримуємо наступні рівняння:

$$I_1 r_1 - I_2 r_2 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \quad (\text{П.29.2})$$

$$I_2 r_2 + I_3 R = \varepsilon_2 \quad (\text{П.29.3})$$

Розглядання же контура 1234261 не вносить нічого нового, оскільки дасть рівняння, що є наслідком двох попередніх.

Ми отримали систему (П.29.1 - П.29.3) з трьох рівнянь з трьома невідомими струмами. Підставимо числові значення:

$$\begin{aligned} -I_1 - I_2 + I_3 &= 0, \\ I_1 - 2I_2 &= 10 - 8, \\ 2I_2 + 6I_3 &= 8. \end{aligned}$$

Розв'язуючи систему трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими будь-яким способом, наприклад методом виключення, отримаємо

$$I_1 = 1,6 \text{ A}, I_2 = -0,2 \text{ A}, I_3 = 1,4 \text{ A}.$$

Другий струм вийшов зі знаком мінус. Це означає, що його справжній напрям протилежний позначеному на схемі.

§ 30. Елементи класичної електронної теорії електропровідності металів

Класична (тобто неквантова) електронна теорія провідності металів була створена П.Друде і Г.Лоренцем. Вона пояснює високу електропровідність металу наявністю величезного числа електронів провідності, які хаотично переміщуються в об'ємі металу.

При утворенні кристалічної ґратки металу частина валентних електронів відривається від своїх атомів. Електрони, як прийнято говорити, стають загальними, вони не належать тепер ніякому конкретному йону металу і можуть вільно переміщатися під дією зовнішнього електричного поля, утворюючи електричний струм.

Металевий кристал можна представити у вигляді просторової ґратки з позитивних іонів, зануреної в «електронний газ» (рис. 30.1). Цей газ вільних електронів заповнює кристалічну ґратку і компенсує сили взаємного електростатичного відштовхування позитивних іонів і тим самим зв'язує їх в тверде тіло. У класичній електронній теорії металів передбачається, що рух електронів підкоряється законам класичної механіки.

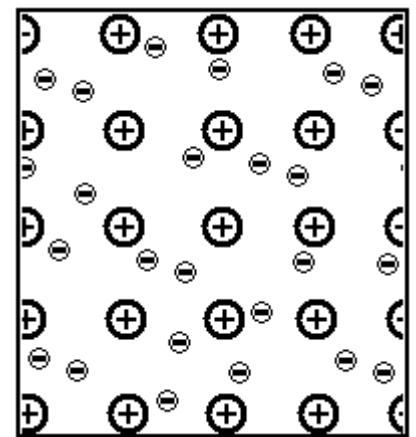


Рис. 30.1.

Електрони провідності утворюють в металі електронний газ, який має властивості одноатомного газу і підпорядковується законам статистики Максвелла-Больцмана. При хаотичному русі електрони зіштовхуються з іонами кристалічної ґратки, які, в свою чергу, здійснюють хаотичні теплові коливання навколо положень рівноваги - вузлів кристалічної ґратки (взаємодією електронів між собою нехтують). Електронний газ перебуває в термодинамічній рівновазі з іонною ґраткою.

Приклад 30.1. Мідний диск радіусом $R = 0,2$ м рівномірно обертається ($\omega = 104$ рад/с) відносно осі, перпендикулярної до площини диска, яка проходить через його центр. Визначити різницю потенціалів між центром диска і його крайніми точками.

При обертанні металевого диска електрони провідності відкидаються відцентровою силою інерції на його периферію. У центральній області диска виникає надлишок електронів, і вона заряджається позитивно. На краях диска накопичуються електрони провідності, і вона заряджається негативно. Виникає електричне поле напруженістю E , спрямоване вздовж радіусів диска від його центра. Це поле протидіє подальшому руху електронів до країв диска. Рівновага настає, коли відцентрова сила інерції $m\omega^2 r$ стане рівною електричній силі eE_r :

$$m\omega^2 r = eE_r.$$

Тут e - заряд електрона, m - його маса, E_r - проекція вектора напруженості E на радіальний напрямок. Звідси отримаємо:

$$E_r = \frac{\omega^2}{(e/m)} r.$$

Різниця потенціалів між центром диска і його краями

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_0^R E_r dr = \frac{\omega^2}{(e/m)} \int_0^R r dr = \frac{\omega^2 R^2}{2(e/m)}. \quad (\text{П. 30.1})$$

Підставивши числа, знайдемо

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{10^8 \cdot 0,25}{2 \cdot 1,76 \cdot 10^{11}} = 71 \cdot 10^{-6} (B) = 71 \mu B.$$

Можна говорити про середню довжину вільного пробігу електронів, яка за порядком величини має бути рівною періоду кристалічної ґратки металу, тобто $\langle \lambda \rangle \approx 10^{-10}$ м.

Вважаючи, що на електронний газ можуть бути поширені результати кінетичної теорії газів, можна зробити оцінку середньої **швидкості теплового руху електронів** в металах.

Згідно молекулярно-кінетичній теорії середня енергія поступального руху молекул газу залежить тільки від температури газу, але не від маси його молекул:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{3}{2} kT.$$

Тут k - постійна Больцмана, m - маса частинки, T - абсолютна температура. Звідси знаходиться середня квадратична швидкість хаотичного руху частинок

$$v = \sqrt{\frac{3kT}{m}}. \quad (30.1)$$

Якщо застосувати цю формулу до електронного газу при кімнатній температурі $T = 300$ К, то отримаємо середню квадратичну швидкість електронів:

$$v = \sqrt{\frac{3 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{9,1 \cdot 10^{-31}}} = 11,68 \cdot 10^4 = 1,17 \cdot 10^5 (m/s) = 117 км/с.$$

Такого ж порядку буде і середня арифметична швидкість теплового руху електронів $\langle v \rangle$.

Хаотичний рух електронів не створює електричного струму. При включенні електричного поля на хаотичний **тепловий рух**, що відбувається з середньою швидкістю $\langle v \rangle$, накладається **впорядкований рух** електронів із середньою швидкістю $\langle u \rangle$ (так званої **дрейфовою швидкістю**). Величину цієї швидкості можна оцінити,

виходячи з формули, що зв'язує густину струму j з числом n електронів провідності в одиниці об'єму, їх зарядом e і середньою швидкістю $\langle u \rangle$:

$$j = ne \langle u \rangle$$

Оцінимо спочатку концентрацію n електронів в металі, наприклад, в міді. Мідь знаходиться в першій групі таблиці елементів Менделєєва, атоми міді мають один валентний електрон, який може бути відданий в електронний газ провідності. Тому число вільних електронів приблизно збігається з числом атомів. Розділивши густину ρ міді на її молярну масу M , визначимо число молей в одиниці об'єму. Помноживши його потім на число Авогадро N_A , отримаємо число атомів в одиниці об'єму, тобто концентрацію електронів

$$n = N_A \frac{\rho_{Cu}}{M_{Cu}} = 6,02 \cdot 10^{23} \frac{8,9 \cdot 10^3}{63,5 \cdot 10^{-3}} = 8,4 \cdot 10^{28} (\text{м}^{-3}). \quad (30.2)$$

Для оцінки дрейфової швидкості електронів скористаємося граничною допустимою технічними нормами густиною струму j для мідних проводів, яка становить близько $10 \text{ А/мм}^2 = 10^7 \text{ А/м}^2$

Взявши для міді концентрацію електронів провідності $n = 10^{29} \text{ м}^{-3}$, напівчим оцінку дрейфової швидкості електронів

$$\langle u \rangle = \frac{j}{ne} = \frac{10^7}{10^{29} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} \approx 10^{-3} (\text{м/с}). \quad (30.3)$$

Таким чином, навіть при великих густинах струму середня швидкість упорядкованого руху електронів $\langle u \rangle \sim 1 \text{ мм/с}$ є мізерно малою (у 10^8 разів меншою) в порівнянні з тепловою швидкістю електронів $\langle v \rangle \sim 100 \text{ км/с}$. Надзвичайно мала швидкість упорядкованого руху електронів у порівнянні зі швидкістю їх теплового руху пояснюється дуже частими зіткненнями електронів з іонами кристалічної ґратки.

Яким же чином узгодити дуже малу величину швидкості упорядкованого руху електронів з практично миттєвою передачею електричних сигналів на великі відстані? Висока швидкість поширення електричного струму по колу обумовлена не швидкістю упорядкованого руху електронів, а швидкістю поширення електромагнітного поля, що обумовлює спрямований рух електронів по всьому колу. Ця швидкість в вакуумі дорівнює $c \approx 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ (швидкість світла). Тому рух електронів під дією зовнішнього електричного поля виникає на всьому протязі проводу практично одночасно з замиканням кола.

Пояснення закону Ома в класичній електронній теорії. Будемо вважати, що при кожному зіткненні електрон передає ґратці накопичену енергію повністю і тому після зіткнення починає рух без початкової швидкості. Під дією поля електрон отримає прискорення

$$a = \frac{F}{m} = \frac{eE}{m}, \quad (30.4)$$

і до кінця вільного пробігу швидкість упорядкованого руху досягне значення

$$u_{\max} = a\tau = \frac{eE}{m}\tau, \quad (30.5)$$

де τ - середній час між двома послідовними зіткненнями електрона з іонами ґратки. Якщо середня швидкість руху електронів відносно кристалічної ґратки металу дорівнює $\langle v \rangle + \langle u \rangle$, то для середнього часу вільного пробігу τ отримуємо:

$$\tau = \frac{\langle \lambda \rangle}{\langle v \rangle + \langle u \rangle} \approx \frac{\langle \lambda \rangle}{\langle v \rangle}.$$

Тут враховано, що, як було показано вище, $\langle u \rangle \ll \langle v \rangle$. Тоді швидкість в кінці пробігу

$$u_{\max} = \frac{eE}{m} \frac{\langle \lambda \rangle}{\langle v \rangle}. \quad (30.6)$$

Оскільки швидкість змінюється за час пробігу рівномірно від нуля до $u_{\max}$, її середнє (за пробіг) значення дорівнює половині максимального

$$\langle u \rangle = \frac{1}{2} u_{\max} = \frac{eE}{2m} \frac{\langle \lambda \rangle}{\langle v \rangle}.$$

Підставивши цю швидкість в вираз для густини струму $j = neu$, отримаємо

$$j = \frac{ne^2}{2m} \frac{\langle \lambda \rangle}{\langle v \rangle} E. \quad (30.7)$$

Цей вираз збігається з законом Ома

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$$

і дає теоретичне вираження емпіричної постійної, тобто питомої електропровідності металу

$$\sigma = \frac{ne^2}{2m} \frac{\langle \lambda \rangle}{\langle v \rangle}. \quad (30.8)$$

Проаналізуємо формулу (30.8). Електропровідність σ більше в тому металі, в якому більше концентрація електронів провідності n .

Якби електрони не стикалися з іонами ґратки, середня довжина вільного пробігу $\langle \lambda \rangle$, а, отже, і провідність були б нескінченно великими. Таким чином, згідно з класичними уявленнями електричний опір металів обумовлений зіткненнями вільних електронів з іонами кристалічної ґратки.

Крім того, електропровідність залежить від середньої швидкості хаотичного руху електронів, яка пропорційна квадратному кореню з температури, $\langle v \rangle \sim \sqrt{T}$. Тому формула (30.8) пояснює факт зменшення електропровідності при нагріванні металевого провідника.

Приклад 30.2. Питомий опір міді $\rho = 17$ нОм·м, концентрація вільних електронів в міді $n = 10^{29}$ м⁻³. Виходячи з класичної теорії електропровідності металів, визначити середню довжину вільного пробігу $\langle \lambda \rangle$ електронів в міді. Середню швидкість теплового руху електронів прийняти рівною $\langle v \rangle = 100$ км/с.

Користуючись виразом (60.8) для електропровідності

$$\sigma = \frac{1}{\rho} = \frac{ne^2 \langle \lambda \rangle}{2m \langle v \rangle},$$

визначимо

$$\lambda = \frac{2m \langle v \rangle}{ne^2 \rho} = \frac{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 10^5}{10^{29} \cdot (1,6 \cdot 10^{-19})^2 17 \cdot 10^{-9}} = 4,2 \cdot 10^{-9} (\text{м}) = 4,2 \text{ нм}.$$

Пояснення закону Джоуля - Ленца в класичній електронній теорії. Причиною виникнення електричного опору є взаємодія електронів з іонами кристалічної ґратки. Стикаючись з іонами, електрони передають ґратці кінетичну енергію, придбану ними під дією поля. Внаслідок цього збільшується амплітуда коливань іонів ґратки, і, отже, температура металу підвищується.

До кінця вільного пробігу електрон набуває швидкості $u_{\max}$, і, отже, додаткової кінетичної енергії

$$W_k = \frac{mu_{\max}^2}{2} = \frac{e^2 \langle \lambda \rangle E^2}{2m \langle v \rangle^2}. \quad (30.9)$$

Число зіткнень електрона в одиницю часу дорівнює

$$\langle z \rangle = \frac{\langle v \rangle}{\langle \lambda \rangle}. \quad (30.10)$$

Всі n електронів провідності, що містяться в одиниці об'єму провідника, знають $n \langle z \rangle$ зіткнень в одиницю часу і передають кристалічній ґратці енергію

$$w = n \langle z \rangle \frac{mu_{\max}^2}{2}. \quad (30.11)$$

Ця енергія перетворюється в енергію теплового руху іонів металу, тобто витрачається на нагрівання провідника. Підставляючи в формулу (30.11) вирази (30.10) і $u_{\max}$ з формули (30.6), визначимо енергію, яка перетворюється в теплоту в одиниці об'єму провідника за одиницю часу

$$w = \frac{ne^2 \langle \lambda \rangle}{2m \langle v \rangle} E^2. \quad (30.12)$$

Величина w є питомою тепловою потужністю струму, а коефіцієнт пропорційності між w і E^2 за формулою (30.8) є електропровідність σ , отже, вираз (30.12) являє собою закон Джоуля-Ленца в диференціальній формі

$$w = \sigma E^2.$$

Пояснення закону Видемана - Франца в класичній електронній теорії. З досліду відомо, що поряд з високою електропровідністю метали відрізняються такою великою теплопровідністю. Видеман і Франц встановили емпіричний закон, згідно з яким відношення коефіцієнта теплопровідності до електропровідності для всіх металів приблизно однаково і змінюється пропорційно абсолютній температурі.

$$\frac{K}{\sigma} = CT, \quad (30.13)$$

де C - деяка константа.

Здатність проводити тепло мають і неметалеві кристали. Однак теплопровідність металів значно перевершує теплопровідність діелектриків. З цього можна зробити висновок, що теплопередача в металах здійснюється в основному не кристалічною ґраткою, а електронами.

Розглядаючи електрони як одноатомний газ, для коефіцієнта теплопровідності можна привести вираз з кінетичної теорії газу

$$K = \frac{1}{3} \rho c_v \langle \lambda \rangle \langle v \rangle, \quad (30.14)$$

де $\rho = mn$ – густина газу, c_v – його питома теплоємність при постійному об'ємі. Для одноатомного ідеального газу, яким в електронній теорії є електронний газ, частинки мають три ступені свободи. Тому

$$c_v = \frac{C_v}{M} = \frac{3}{2} \frac{R}{M} = \frac{3}{2} \frac{kN_A}{M}. \quad (30.15)$$

Тут k – постійна Больцмана.

Молярна маса електронного газу $M = mN_A$, де m – маса електрона. Тоді

$$\rho c_v = mn \frac{3}{2} \frac{kN_A}{mN_A} = \frac{3}{2} nk. \quad (30.16)$$

Для теплопровідності виходить вираз

$$K = \frac{1}{2} nk \langle \lambda \rangle \langle v \rangle. \quad (30.17)$$

А відношення теплопровідності K до питомої електропровідності σ :

$$\frac{K}{\sigma} = \frac{k}{e^2} m \langle v \rangle^2. \quad (30.18)$$

В якості середньої швидкості теплового руху береться середня квадратична швидкість

$$\langle v \rangle = v_{kv} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}.$$

Тоді остаточно

$$\frac{K}{\sigma} = 3 \frac{k^2}{e^2} T. \quad (30.19)$$

Співвідношення (30.19) виражає закон Видемана – Франца (30.13), якщо значення емпіричної величини C покласти рівним

$$C = 3 \left(\frac{k}{e} \right)^2. \quad (30.20)$$

Обчислене за цією формулою значення $C = 2,23 \cdot 10^{-8} \text{ (Дж/Кл} \cdot \text{К)}^3$ дещо менше знайденого на досліді, але досить близько до нього. Таким чином, теоретичний вираз (30.19) добре узгоджується з результатами дослідів.

Недоліки класичної електронної теорії електропровідності металів. Перевагою класичної електронної теорії є її фізична наочність. Висновки теорії добре узгоджувалися з експериментальними законами Ома і Джоуля – Ленца і дозволяли пояснити природу провідності металів.

Однак класична електронна теорія не могла пояснити деякі важливі властивості металів.

1. Експериментально встановлено, що питомий опір металевих провідників прямо пропорційний абсолютній температурі, $\rho \sim T$, або електропровідність металевих провідників обернено пропорційна абсолютній температурі, $\sigma \sim \frac{1}{T}$. У кла-

сичної електронної теорії $\sigma = \frac{ne^2 \langle \lambda \rangle}{2m \langle v \rangle}$, крім того $\langle v \rangle \sim \sqrt{T}$, отже $\sigma \sim \frac{1}{\sqrt{T}}$, що суперечить дослідним даним.

2. Згідно із законом Дюлонга і Пті молярна теплоємність твердих кристалічних тіл (металів і діелектриків) дорівнює $3R$. Цей закон досить добре виконується і для діелектриків, і для металів, що є незрозумілим з точки зору електронної теорії.

У металах, з точки зору електронної теорії, молярна теплоємність повинна складатися з молярної теплоємності кристалічної ґратки ($3R$) і молярної теплоємності одноатомного електронного газу ($3R/2$) і, отже, бути близькою до $4,5 R$. Відсутність електронної складової теплоємності металів класична теорія пояснити не може.

3. Якщо підставити експериментально визначену провідність в формулу (30.8) і визначити довжину вільного пробігу $\langle \lambda \rangle$ електрона, отримаємо, що вона на два порядки перевищує період кристалічної ґратки металу. Тобто доводиться допустити, що електрон пробігає без зіткнень з іонами ґратки сотні міжвузлових відстаней, що не відповідає класичній електронній теорії.

Ці розбіжності теорії і досліду пояснюються тим, що рух електронів в металах підпорядковується законам квантової теорії.

Приклад 30.3. Як приклад наведемо ще одну невідповідність класичної теорії і досліду. Класична електронна теорія так розкриває механізм виділення тепла електричним струмом в металах. Електрони прискорюються електричним полем, стикаються з іонами кристалічної ґратки, а накопичена електронами енергія передається іонам і нагріває метал.

Нехай швидкість електрона до зіткнення з іоном ґратки дорівнює v , його маса відома: $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг. Швидкість іона до зіткнення вважаємо рівною нулю, після зіткнення позначимо через u . Маса M іона, наприклад, іона міді, теж відома:

$$M = \frac{\mu}{N_A} = \frac{64 \cdot 10^{-3}}{6,02 \cdot 10^{23}} \approx 10^{-25} \text{ кг.}$$

У класичній електронній теорії покладається, що в кінці вільного пробігу електрон стикається з іоном ґратки, віддає йому накопичену в полі енергію, і його дрейфова швидкість падає до нуля.

Теоретично можливі два типи зіткнень електронів з іоном - абсолютно пружне і абсолютно непружне. Визначимо відношення $\frac{\Delta W_e}{W_e}$ енергії, втраченої електроном при одному зіткненні, до його первісної кінетичної енергії в обох випадках.

Із законів збереження енергії та імпульсу слід [див., наприклад, «Фізика. Навчальний посібник у 7 частинах. Ч.1.Механіка. Авт.І.П. Гаркуша, В.П. Курінний», що в разі абсолютно пружного удару швидкість іона після удару

$$u = \frac{2m_e v}{m_e + M}.$$

Енергія ΔW_e , втрачена електроном при зіткненні з іоном, дорівнює енергії, яку отримав іон.

$$\Delta W_e = W_{\text{иона}} = \frac{Mu^2}{2} = \frac{2Mm_e^2 v^2}{(m_e + M)^2}.$$

$$\text{Кінетична енергія електрона } W_e = \frac{m_e v^2}{2}.$$

Шукане відношення

$$\frac{\Delta W_e}{W_e} = \frac{4m_e M}{(m_e + M)^2}. \quad (\text{П. 30.2})$$

У разі абсолютно непружного удару швидкість іона разом з електроном, що «прилипнув» до нього

$$u = \frac{2m_e v}{m_e + M}.$$

Відношення переданої йону енергії до первісної енергії електрона

$$\frac{\Delta W_e}{W_e} = \frac{(m_e + M)u^2}{2} \cdot \frac{2}{m_e v^2} = \frac{m_e}{m_e + M}. \quad (\text{П. 30.3})$$

З урахуванням того, що маса електрона набагато менша за масу іона, $m_e \ll M$, в обох випадках отримуємо

$$\frac{\Delta W_e}{W_e} \approx \frac{m_e}{M} = \frac{9,1 \cdot 10^{-31}}{10^{-25}} \approx 10^{-5}.$$

Таким чином, частка енергії, втраченої в результаті зіткнення електрона з іоном, є дуже малою і не залежить від характеру (пружного або непружного) зіткнення. Ця обставина суперечить положенням класичної електронної теорії металів.

Контрольні питання

1. Які умови необхідні для появи і існування електричного струму в провідному середовищі?
2. Як пов'язані між собою векторна характеристика струму - густина струму і скалярна характеристика - сила струму?
3. Який вигляд має електричне поле провідника зі струмом?
4. Які сили називаються сторонніми? Яка їхня роль в колі постійного струму? Чому для отримання постійного струму необхідне замкнуте електричне коло?
5. Від чого залежить точність вимірювань опорів за допомогою мосту Уитстона?
6. Як пов'язано напруга на включеному джерелі з його ЕРС? Чи можна вольтметром виміряти ЕРС джерела струму?
7. Чи збігається напруга з різницею потенціалів на неоднорідній ділянці кола?
8. Сформулюйте закон Ома для однорідної ділянки кола; для неоднорідної ділянки кола; для замкнутого кола.
9. Як із закону Ома для неоднорідної ділянки кола отримати закон Ома для замкнутого кола?
10. Робота яких сил визначає роботу електричного струму?

11. При якому навантаженні джерело струму розвиває максимальну корисну потужність?
12. Які закони використовують при виведенні правил Кірхгофа?
13. Розгалужене коло містить a вузлів, і в ньому можна виділити b простих контурів. Скільки незалежних рівнянь можна скласти, використовуючи перше правило Кірхгофа? Друге правило Кірхгофа?
14. Які основні положення класичної електронної теорії провідності металів? Які недоліки цієї теорії?
15. Якими є швидкості теплового і дрейфового руху електронів в металі?
16. Яка природа електричного опору з точки зору класичної електронної теорії провідності металів?
17. Чому при малій швидкості упорядкованого руху електронів струм до споживача доходить по проводах практично миттєво?

Глава 6. МАГНІТНЕ ПОЛЕ У ВАКУУМІ

§ 31. Магнітне поле. Вектор магнітної індукції

Понад дві тисячі років тому в Китаї вже використовувалася властивість магнітних стрілок встановлюватися в напрямку прямої, що проходить з півночі на південь.

Кінець магнітної стрілки, який вказує на північ, умовно назвали північним (N), а протилежний - південним (S) (рис. 31.1).

Якщо в деякій області простору на магнітну стрілку діють сили, які прагнуть встановити її в певному напрямку, то кажуть, що там існує *магнітне поле*.

Подібно до того, як електричне поле характеризується векторною величиною E , яка називається *напруженістю* поля, для характеристики магнітного поля вводять векторну величину B , яку слід було б теж назвати напруженістю, але з історичних причин її назвали *магнітною індукцією* поля.

Поведінка стрілки компаса в магнітному полі дозволяє ввести *лінії магнітної індукції* за аналогією з силовими лініями електричного поля.

Вектор магнітної індукції B є дотичним до силових ліній, що проходить через дану точку. Величина вектора B пропорційна силі, яка діє на північний кінець нескінченно малої магнітної стрілки, вміщеної в дану точку магнітного поля.

Більш зручним, ніж магнітна стрілка, для кількісного дослідження магнітного поля є замкнутий плоский контур зі струмом (рамка зі струмом) дуже малих розмірів (рис. 31.2).

Досліди показують, що магнітне поле повертає рамку з струмом і орієнтує її в певному напрямку.

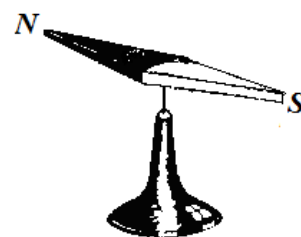


Рис. 31.1.

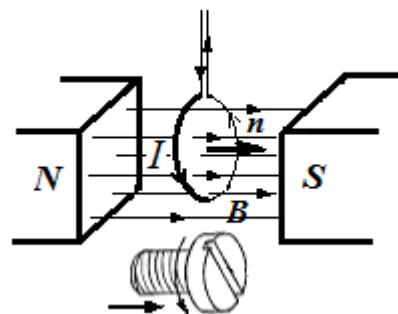


Рис. 31.2.

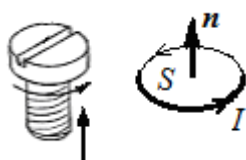


Рис. 31.3.

Орієнтацію рамки в просторі характеризують напрямом нормалі $\mathbf{n}$ до площини рамки, пов'язаної з напрямом струму I правилом правого гвинта. А саме: за напрям нормалі $\mathbf{n}$ приймають той напрям, в якому буде переміщатися гвинт з правою нарізкою, якщо обертати його у напрямі струму в рамці (рис. 31.3). Таку нормаль називають додатною.

Якщо помістити такий контур в магнітне поле, то на нього буде діяти пара сил і поле встановить контур позитивною нормаллю в певному напрямку. Цей напрямок і приймають за напрямок магнітного поля в даній точці (рис. 31.4).

Дія магнітного поля на плоский контур зі струмом визначається величиною

$$p_m = iS,$$

яку називають *магнітним моментом* контуру зі струмом. Магнітний момент слід розглядати як вектор, напрям якого збігається з напрямом додатної нормалі, тобто

$$\mathbf{p}_m = iS\mathbf{n} \quad (31.1)$$

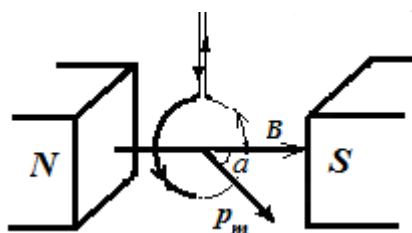


Рис. 31.4

Якщо повернути контур на деякий кут α щодо його усталеного положення, то виникає обертаючий момент, який прагне повернути контур в рівноважний стан. Як показує дослід, на контур буде діяти момент сил, пропорційний силі струму I в контурі, його площі S і синусу кута повороту:

$$M \sim IS \sin \alpha.$$

Цей обертаючий момент максимальний, коли контур орієнтований перпендикулярно магнітним лініям, тобто коли $\sin \alpha = 1$; $M_{\max} \sim IS$. Відношення максимального обертаючого моменту до добутку сили струму I на площу поперечного перерізу контуру S характеризує магнітне поле в тому місці, де розташований контур. Це відношення і приймають по визначенню за модуль B вектора магнітної індукції:

$$B = \frac{M_{\max}}{IS} = \frac{M_{\max}}{p_m} \quad (31.2)$$

Магнітна індукція $\mathbf{B}$ - вектор, модуль якого дорівнює максимальному обертальному моменту, що діє на пробний контур з магнітним моментом, рівним одиниці, а напрям визначається рівноважним напрямом додатної нормалі до пробного контура.

Зі сказаного випливає, що магнітна індукція $\mathbf{B}$ характеризує *силову дію* магнітного поля на струм I , отже, є аналогом напруженості електричного поля $\mathbf{E}$, яка характеризує силову дію електричного поля на заряд.

Напрямок магнітного поля $\mathbf{B}$ можна також визначити за допомогою магнітної стрілки. У цьому випадку вісь стрілки (від південного полюса до північного) збігається з напрямом магнітного поля (рис. 31.5).

За допомогою залізних ошурок, які намагнічуються в досліджуваному полі і подібно маленьким магнітним стрілкам орієнтуються уздовж ліній магнітної індукції, картину магнітних силових ліній можна зробити «видимою».

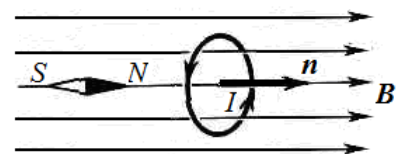


Рис. 31.5.

На відміну від потенціального електростатичного поля, де силові лінії починаються на позитивних зарядах і закінчуються на негативних або на нескінченності, магнітне поле є вихровим: його силові лінії завжди замкнені. Іншими словами, магнітне поле не має джерел - магнітних зарядів в природі немає.

На рис. 31.3 наведені отримані таким способом картини магнітних полів кругового струму (а), довгої котушки соленоїда (б), прямого постійного магніту (в).

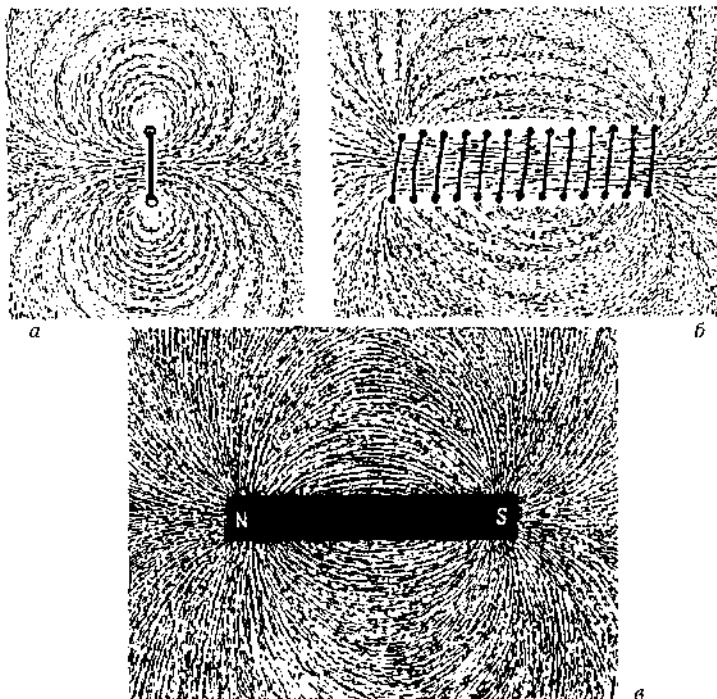


Рис. 31.6.

На підставі досліду встановлено, що різнойменні магнітні полюси притягуються (як і електричні заряди), однойменні відштовхуються. Оскільки звернений на північ кінець стрілки назвали північним полюсом, а притягуються різнойменні полюси, то поблизу північного географічного полюса Землі знаходиться південний магнітний. Іншими словами, магнітне поле Землі направлено з географічного півдня на північ (рис. 31.8).

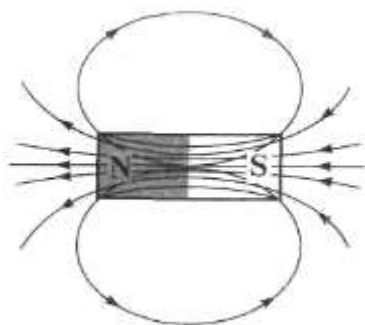


Рис. 31.7.

Завдяки магнітному полю Землі затримуються заряджені частинки космічних променів. Це робить можливим життя на Землі.

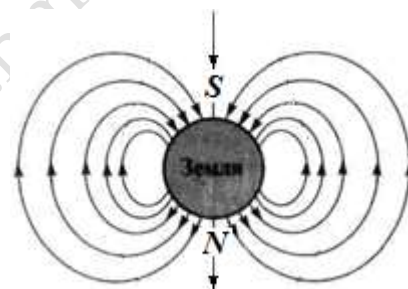


Рис. 31.8.

Оскільки існують елементарні заряджені частинки - носії електричних зарядів двох різних видів, то окремі тіла можна зарядити або тільки позитивно, або тільки негативно.

Однак відокремити один з магнітних полюсів від протилежного неможливо. Здавалося б, ми можемо розділити або ізолювати один від одного північний і південний полюси, розрізавши магніт навпіл (рис. 31.9).

Розрізавши магніт навпіл, ми отримаємо два магніти, причому кожен з двома полюсами. Якщо ми продовжували б цей процес і далі, то, як показує дослід, нам ніколи не вдасться отримати магніт з одним полюсом. Полюси магніту не існують окремо.

Отже, і елементарні носії магнетизму, або, як їх називають, елементарні магнітики, також повинні мати два полюси. Дійшовши в нашому уявному розподілі до окремих атомів, ми отримаємо мікроскопічні магніти з північним і південним полюсами. Мікромагнітами є і окремі електрони.

У 1820 р датським фізиком Г. Х. Ерстедом було експериментально встановлено, що провідники, по яких течуть струми, здатні діяти на магнітну стрілку, тобто створювати магнітне поле.

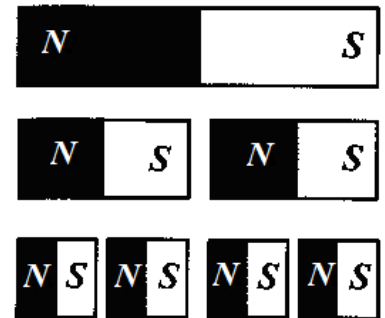


Рис. 31.9.

Під час експерименту Ерстеда (рис. 31.10) магнітна стрілка, яка могла вільно обертатися навколо вертикальної осі, містилася під прямолінійним провідником з постійним струмом. При включенні струму стрілка встановлювалася перпендикулярно до провідника. Зміна напрямку струму викликала поворот стрілки в протилежний бік.

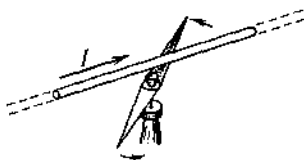


Рис. 31.10.

З досліду Ерстеда витікає, що рухомі заряди (струми) змінюють властивості оточуючого їх простору, створюють особливий простір, в якому проявляється дія магнітних сил. Магнітні сили діють, на відміну від електростатичних, тільки на рухомі заряди або струми.

Т.ч. здатність створювати магнітне поле мають лише рухомі електричні заряди (електричний струм), а навколо нерухомих зарядів існує тільки електростатичне поле.

Магнітне поле, на відміну від електричного, не діє на нерухомий заряд. Сила виникає лише тоді, коли заряд рухається.

Отже, магнітне поле породжується рухомими електричними зарядами і, в свою чергу, діє тільки на рухомі заряди.

Магнітне поле, що виникає в просторі навколо провідників зі струмом, як і електричне поле, обумовлене нерухомими зарядами, є одним з видів матерії. Воно має певні фізичні властивості і характеризується енергією.

Підсумовуючи сказане, сформулюємо сучасну **концепцію магнітного поля**.

Джерелами магнітного поля є рухомі електричні заряди, тобто електричні струми, а також намагнічені тіла (постійні магніти), в яких магнітне поле створюється магнітними моментами електронів в атомах. Крім того, магнітне поле виникає навколо електричного поля, що змінюється з часом.

Відмінна особливість магнітного поля полягає в тому, що воно діє тільки на рухомі заряди (струми).

Магнітне поле є однією з частин *електромагнітного поля*. Як побачимо далі, поділ єдиного електромагнітного поля на електричну і магнітну частини є відносним і залежить від вибору системи відліку.

§ 32. Закон Біо-Савара-Лапласа і його застосування до розрахунку полів прямого і кругового струмів

Електричний струм, проходячи по провіднику, створює навколо провідника магнітне поле. Для розрахунку магнітних полів, створюваних провідниками різної конфігурації, потрібно врахувати, що індукція магнітного поля визначається спільною дією всіх окремих ділянок провідника.

Досліди, проведені французькими фізиками Ж. Біо і Ф. Саваром і оброблені математично П. Лапласом, привели до висновку про те, що магнітна індукція $d\mathbf{B}$ поля, створюваного в даній точці простору елементом струму $I dl$, обернено пропорційна квадрату відстані r від елемента струму до точки спостереження. **Елементом струму $I dl$** називають вектор, модуль якого дорівнює добутку сили струму уздовж провідника і нескінченно малого відрізка цього провідника, а напрямок збігається з напрямком вектора густини струму на цій ділянці провідника. Якщо позначити через $\mathbf{r}$ радіус-вектор, проведений від елемента струму в точку поля, що розглядається, то закон Біо-Савара-Лапласа має вигляд:

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{[d\mathbf{l}, \mathbf{r}]}{r^3}, \quad (32.1)$$

де μ_0 - так звана *магнітна постійна*, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м.

Вектор $d\mathbf{B}$ перпендикулярний до площини, що містить елемент струму $I dl$ і радіус-вектор $\mathbf{r}$ (рис. 32.1). Напрямок $d\mathbf{B}$ визначається **правилом правого гвинта**: він збігається з напрямком обертання головки гвинта при його поступальному переміщенні уздовж струму. Із закону Біо-Савара-Лапласа випливає, що модуль вектора магнітної індукції $d\mathbf{B}$

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl \cdot \sin \alpha}{r^2}, \quad (32.2)$$

де α - кут між напрямком на точку спостереження і напрямком елемента струму.

Для магнітного поля, так само, як і для електричного, справедливий принцип суперпозиції полів: вектор магнітної індукції $\mathbf{B}$ поля, створеного системою провідників зі струмами, дорівнює сумі векторів магнітної індукції полів, створених кожним із провідників під час відсутності інших.

$$\mathbf{B} = \int d\mathbf{B}.$$

Якщо магнітне поле створюється провідним контуром L зі струмом I , то

$$\mathbf{B} = \int_L d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_L \frac{[d\mathbf{l}, \mathbf{r}]}{r^3}, \quad (32.3)$$

де $d\mathbf{B}$ - внесок елемента струму $I dl$ в результуюче магнітне поле, $\mathbf{r}$ - вектор, проведений з елемента струму в дану точку.

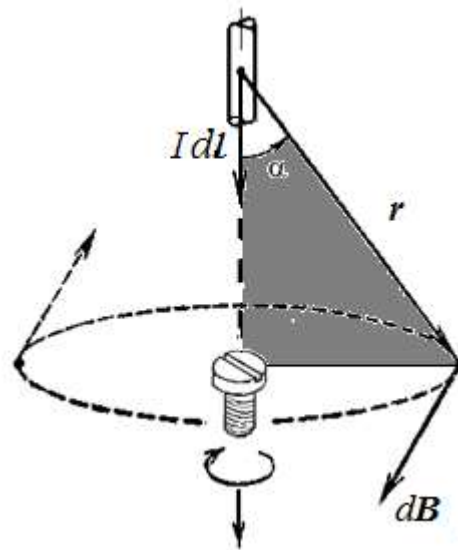


Рис. 32.1.

За допомогою закону Біо-Савара-Лапласа, застосовуючи принцип суперпозиції, по вкладках кожного елемента струму можна знайти повне магнітне поле.

Як приклад обчислимо індукцію магнітного поля, що створюється струмом I , який протікає вздовж прямого проводу, в точці, віддаленій на відстань r_0 від проводу (рис. 32.2).

Вектори полів $d\mathbf{B}$ всіх малих елементів струму в цій точці мають однаковий напрямок (перпендикулярно до площини рисунка) і тому можна складати абсолютні значення магнітних індукцій, тобто

$$B = \int dB. \quad (32.4)$$

З рис. 32.2 видно, що

$$r = \frac{r_0}{\sin \alpha}, \quad dl = \frac{r d\alpha}{\sin \alpha} = \frac{r_0 d\alpha}{\sin^2 \alpha}.$$

Підставляючи ці вирази у формулу (32.2), знаходимо, що магнітна індукція, створювана одним елементом струму, дорівнює за модулем

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{r_0 d\alpha}{\sin^2 \alpha} \frac{\sin^2 \alpha}{r_0^2} \sin \alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0} \sin \alpha d\alpha. \quad (32.5)$$

Для провідника кінцевої довжини

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha d\alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2). \quad (32.6)$$

Тут α_1 і α_2 - кути між напрямом струму і напрямом до тієї точки, де визначається магнітне поле (рис. 32.3).

Якщо точка, в якій визначається магнітне поле, розміщена на однаковій відстані від кінців провідника, то

$$\cos \alpha_2 = -\cos \alpha_1.$$

Тоді формула (32.6) набуває вигляду

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_0} \cos \alpha_1. \quad (32.7)$$

Приклад 32.1. Струм силою $I = 2$ А проходить по прямокутній рамці зі сторонами $a = 10$ см і $b = 12$ см. Визначити магнітну індукцію в центрі рамки.

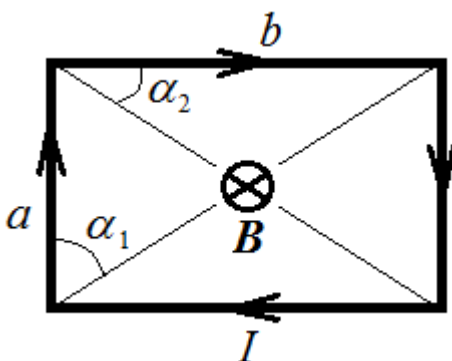


Рис. П. 32.1.

Користуючись правилом гвинта, визначимо, що магнітне поле в центрі рамки, створене кожною зі сторін, спрямоване перпендикулярно до площини рамки за креслення. Тому модуль вектора магнітної індукції результуючого магнітного поля в центрі рамки

$$B = B_1 + B_2 + B_3 + B_4.$$

Скористаємося формулою (32.7) для магнітного поля, що створюється відрізком прямого провідника зі струмом в точці, що лежить на рівні середини відрізка. тоді

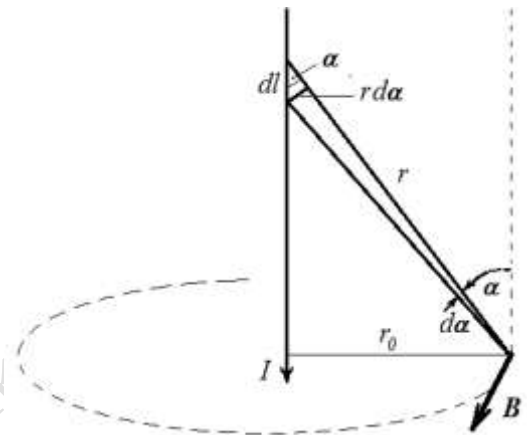


Рис. 32.2.

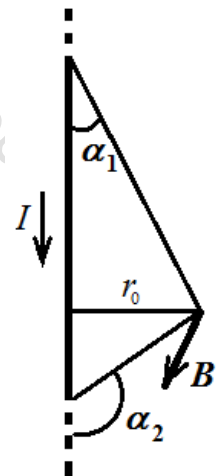


Рис. 32.3.

$$B_1 = B_3 = \frac{\mu_0 I}{2\pi(b/2)} \cos \alpha_1, \text{ та } B_2 = B_4 = \frac{\mu_0 I}{2\pi(a/2)} \cos \alpha_2$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{(\pi/2)} \left(\frac{\cos \alpha_1}{b} + \frac{\cos \alpha_2}{a} \right).$$

З рис. П.32.1. видно що $\cos \alpha_1 = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \cos \alpha_2 = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$

Підставляючи ці значення і виконуючи перетворення, отримаємо

$$B = \frac{2\mu_0 I \sqrt{a^2 + b^2}}{\pi ab} \approx 48 \text{ мкТл}.$$

У випадку **нескінченно довгого прямолінійного провідника** кути $\alpha_1 = 0$ і $\alpha_2 = \pi$, так що за формулою (32.6) магнітне поле на відстані r_0 від нескінченного прямолінійного провідника зі струмом дорівнюватиме

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_0}. \quad (32.8)$$

Як впливає з формули (32.8), магнітна індукція нескінченного прямолінійного провідника зі струмом зменшується обернено пропорційно відстані r_0 від проводу. Лінії магнітної індукції є концентричними колами, площини яких перпендикулярні до струму, а центри розташовані на осі струму (рис. 32.4). Їх напрям визначають за універсальним для магнетизму **правилом гвинта** - крутимо гвинт

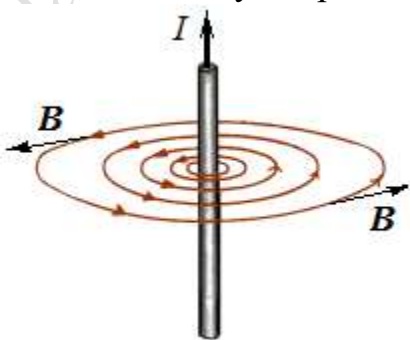


Рис. 32.4.

за лініями, отримуємо напрям струму, крутимо за струмом - отримуємо напрям ліній. Відстань між сусідніми силовими лініями зростає за гіперболічним законом - чим ближче до провідника, тим більшою є густина магнітних силових ліній.

Приклад 32.2. Два паралельних нескінченно довгих провідника, по яких проходять в одному напрямку струми $I_1 = 40 \text{ А}$ і $I_2 = 80 \text{ А}$, розміщені на відстані $d = 12 \text{ см}$ один від одного. Визначити магнітну індукцію B в точці, віддаленій від першого провідника на відстані $r_1 = 8 \text{ см}$ і від другого на

відстані $r_2 = 13 \text{ см}$.

Для знаходження магнітної індукції в зазначеній точці A (рис. П. 32.1) визначимо напрями векторів магнітної індукції B_1 і B_2 полів, що створюються кожним провідником окремо.

Вектори магнітної індукції спрямовані за дотичними до відповідних ліній магнітної індукції, що проходять через точку A . Ці лінії є колами з центрами на осі відповідних провідників і розташовані в площині, перпендикулярній до осі провідників. Їх напрями визначаються за правилом гвинта. На рис. П. 32.1 напрями струмів I_1 і I_2 обрані «від нас» і позначені хрестиками. Тоді за правилом гвинта лінії магнітної індукції

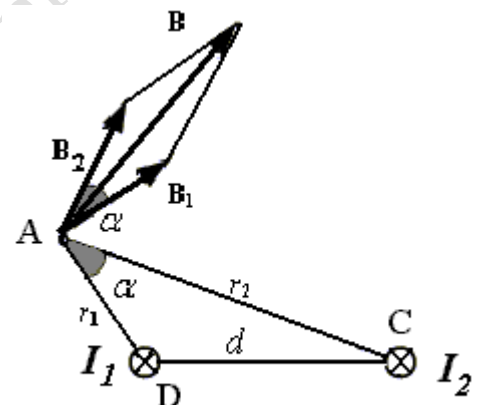


Рис. П. 32.1.

будуть спрямовані за годинниковою стрілкою. Вектор $\mathbf{B}_1$ перпендикулярний до r_1 (дотична перпендикулярна до радіуса кола) і спрямований вправо в точці A . Відповідно, $\mathbf{B}_2$ перпендикулярний до r_2 і теж спрямований вправо.

Згідно з принципом суперпозиції магнітна індукція в точці A :

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2.$$

Модуль вектора $\mathbf{B}$ визначимо за теоремою косинусів:

$$B^2 = B_1^2 + B_2^2 - 2 B_1 B_2 \cos (180^\circ - \alpha) = B_1^2 + B_2^2 + 2 B_1 B_2 \cos \alpha.$$

Звідси

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2 + 2 B_1 B_2 \cos \alpha}. \quad (\text{П. 32.1})$$

Модулі векторів B_1 і B_2 :

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_1}, \quad B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r_2}. \quad (\text{П. 32.2})$$

Підставляючи ці вирази у формулу (П. 32.1), знайдемо шукане B :

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \sqrt{\left(\frac{I_1}{r_1}\right)^2 + \left(\frac{I_2}{r_2}\right)^2 + \frac{2 I_1 I_2}{r_1 r_2} \cos \alpha}. \quad (\text{П. 32.3})$$

Для знаходження $\cos \alpha$ зауважимо, що $\alpha = \angle DAC$, як кути із взаємно перпендикулярними сторонами. Тому за теоремою косинусів запишемо $d^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2 r_1 r_2 \cos \alpha$. Підставивши дані, обчислимо значення косинуса: $\cos \alpha = 0,388$. Підставивши в формулу (П. 32.3) значення μ_0 , I , r_1 , r_2 і $\cos \alpha$, знайдемо $B = 184$ мкТл.

Застосуємо закон Біо - Савара - Лапласа до обчислення магнітного поля **в центрі кругового витка** радіуса R , по якому проходить струм I (рис. 32.5).

В даному випадку в виразі (32.2) слід покласти, як видно з рис. 32.6,

$$r = R \text{ і } \alpha = \pi / 2, \sin \alpha = 1.$$

Всі елементи струму створюють магнітні поля $d\mathbf{B}$ однакового напрямку, що є перпендикулярними до площини витка і пов'язані з напрямом струму правилом правого гвинта, тобто уздовж позитивної нормалі $\mathbf{n}$ до контура (рис. 32.6). Тому сумарна індукція магнітного поля $\mathbf{B}$ від усіх елементів кільцевого струму спрямована в той самий бік (рис. 32.7), а її модуль дорівнює сумі всіх dB .

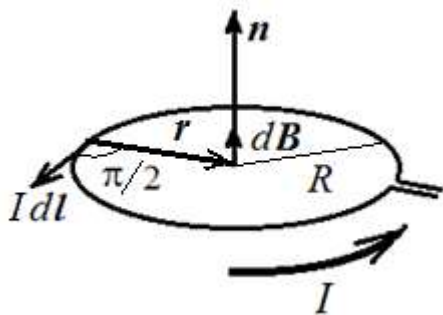


Рис. 32.6.

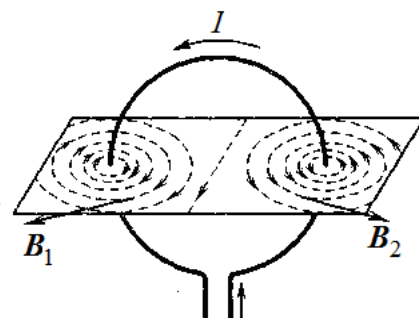


Рис. 32.5.

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{R^2}. \quad (32.9)$$

$$B = \int dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R^2} \oint dl = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R^2} 2\pi R = \frac{\mu_0 I}{2R}. \quad (32.10)$$

(Тут враховано, що сума всіх елементарних ділянок dl дорівнює довжині кола $2\pi R$).

Приклад 32.3. Визначимо магнітну індукцію поля, що створюється коловим струмом в точці, яка лежить на осі колового струму на відстані h від його центра (рис. П. 32.2).

Як випливає з закону Біо-Савара-Лапласа (32.1), вектор $d\mathbf{B}$ має бути перпендикулярним до площини, що проходить через елемент струму Idl і точку, в якій визначається поле.

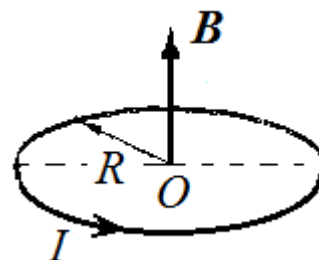


Рис. 32.7.

З рис. П. 32.2 випливає, що $d\mathbf{l}$ перпендикулярне до $\mathbf{r}$. Отже, у формулі (32.2) $\alpha = 90^\circ$, $\sin \alpha = 1$ і вектор $d\mathbf{B}$ за величиною дорівнює

$$dB = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi r^2}.$$

Розкладемо вектор $d\mathbf{B}$ на дві складових: перпендикулярну до осі і паралельну осі. Будь-якому елементу $d\mathbf{l}$ відповідає діаметрально протилежний елемент $d\mathbf{l}'$, який дає таку ж складову магнітної індукції вздовж осі, і перпендикулярну до осі складову протилежного знака. Отже,

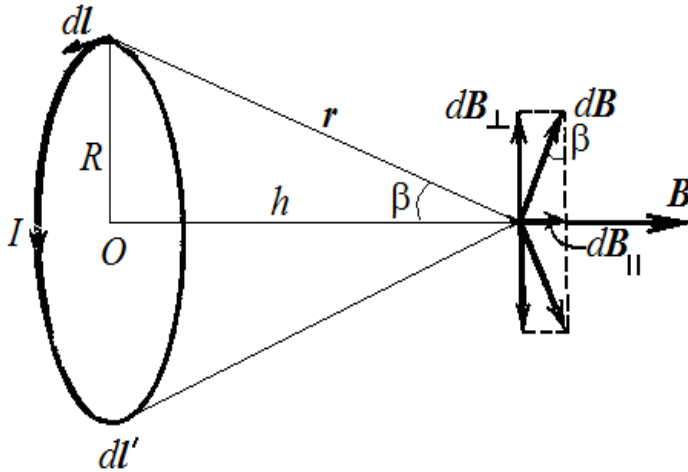


Рис. П.32.2.

при додаванні всіх перпендикулярних складових (інтегрування за контуром) вони взаємно знищуються, а паралельні складові будуть складатися. Результуючий вектор $\mathbf{B}$ буде направлений уздовж осі контура і за модулем дорівнює

$$B = \int dB \sin \beta = \int \frac{\mu_0 I dl}{4\pi r^2} \frac{R}{r} = \frac{\mu_0 I R}{4\pi r^3} \oint dl$$

Замінюючи

$$r = \sqrt{R^2 + h^2} \text{ і } \oint dl = 2\pi R,$$

отримаємо магнітну індукцію на осі колового струму

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2(I\pi R^2)}{(R^2 + h^2)^{3/2}}. \quad (\text{П. 32.4})$$

Використовуючи вираз (31.1) для магнітного моменту, запишемо це рівняння в векторному вигляді

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\mathbf{p}_m}{(R^2 + h^2)^{3/2}}. \quad (\text{П. 32.5})$$

Якщо $h \gg R$, з формули (П. 32.5) випливає

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\mathbf{p}_m}{h^3}.$$

У центрі колового витка ($h = 0$) магнітна індукція, як було отримано раніше, дорівнює

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R}.$$

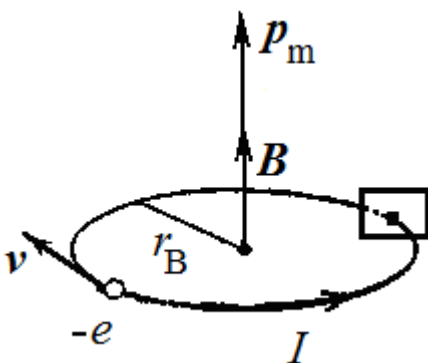


Рис. П. 32.3

Приклад 32.4. Згідно з теорією Н. Бора електрон в атомі водню рухається навколо ядра за круговою орбітою радіуса $r_B = 23$ пм (перший борівський радіус). Визначити: 1) індукцію магнітного поля $\mathbf{B}$, яку створює електрон в центрі кругової орбіти; 2) орбітальний магнітний момент $\mathbf{p}_m$ електрона.

Уявімо собі площинку, що перетинає орбіту електрона і є перпендикулярною до орбіти (рис. П. 32.3). Сила струму за визначенням дорівнює заряду, що переноситься через цю площинку за 1 с. Якщо ν - число обертів електрона в секунду, то з кожним оборотом через виділену площинку буде перенесений заряд e - заряд електрона, а сила кругового струму буде дорівнювати

$$I = e\nu.$$

Щоб визначити частоту ν обертання електрона навколо ядра, застосуємо другий закон Ньютона. Сила кулонівського притягання між електронем і ядром (протоном), заряд якого $+e$, надає електрону нормального (доцентрового) прискорення:

$$F_{\text{кул}} = ma_n,$$

або

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_B^2} = m\omega^2 r_B.$$

Звідки знаходимо кутову швидкість обертання електрона

$$\omega = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m r_B^3}}, \quad (\text{П. 32.6})$$

частоту обертання $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ і силу еквівалентного кругового струму

$$I = e\nu = \frac{e^2}{4\pi r_B \sqrt{\pi\epsilon_0 m r_B}} = \frac{(1,6)^2 \cdot 10^{-38}}{4 \cdot 3,14 \cdot 5,3 \cdot 10^{-11} \sqrt{3,14 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 5,3 \cdot 10^{-11}}} = 1,02 \cdot 10^{-3} \text{ А} = 1,02 \text{ мА}.$$

Магнітна індукція в центрі кругової орбіти

$$B = \frac{\mu_0 I}{2r_B} = \frac{4 \cdot 3,14 \cdot 10^{-7} \cdot 1,05 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 5,3 \cdot 10^{-11}} = 12,44 \text{ Тл}.$$

Для порівняння зазначимо, що найсильніші магнітні поля, отримані в земних лабораторіях, мають порядок 10 Тл.

Орбітальний магнітний момент електрона

$$p_m = IS = I \cdot \pi(r_B)^2 = 1,02 \cdot 10^{-3} \cdot 3,14 \cdot 2,32 \cdot 10^{-22} = 9,27 \cdot 10^{-24} \text{ (А} \cdot \text{м}^2\text{)}.$$

Ця величина отримала назву *магнетона Бора*. Вона відіграє роль елементарного магнітного моменту - «кванта» магнітного моменту електрона.

Приклад 32.5. Нескінченно довгий провідник зігнутий так, як показано на рис. П. 32.4. Вздовж провідника проходить струм $I = 10 \text{ А}$. Визначити магнітну індукцію в центрі кола (радіус кола $R = 2 \text{ см}$).

Магнітну індукцію в точці O визначимо, використовуючи *принцип суперпозиції* магнітних полів, створюваних двома прямолінійними провідниками (1 і 3), що виходять одним кінцем на нескінченність, та дугою кола (2) радіуса R . Тоді

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_3.$$

З огляду на те, що всі вектори $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$ і $\mathbf{B}_3$ напрямлені відповідно з правилом гвинта перпендикулярно до площині рисунка «до нас», векторну суму можна замінити скалярною

$$B = B_1 + B_2 + B_3.$$

Магнітну індукцію поля B_2 можна знайти, використовуючи формулу для магнітної індукції в центрі кругового струму. Оскільки магнітна індукція B_2 створюється в точці O чвертю такого кругового провідника із струмом, то маємо

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R}.$$

Магнітну індукцію поля B_1 напівнескінченного провідника зі струмом знайдемо, використовуючи формулу для магнітного поля нескінченного провідника зі струмом $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$. З огляду на рівний внесок у магнітну індукцію від кожної половини провідника, можна написати

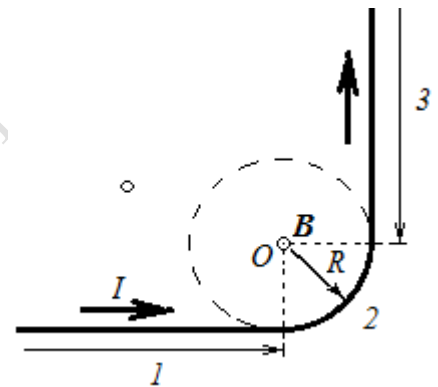


Рис. П. 32.4.

$$B_1 = B_3 = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}.$$

У підсумку отримуємо модуль магнітної індукції в точці O :

$$B = \frac{\mu_0 I}{8R} + 2 \frac{\mu_0 I}{4\pi R} = \frac{\mu_0 I}{8\pi R} (\pi + 4). \quad (\text{П.32.7})$$

Підставляючи числа, знайдемо $B = 71,4 \text{ мкТл}$.

§ 33. Магнітне поле рухомого заряду

Електричний струм в провіднику є впорядкованим рухом заряджених частинок - електронів в металах, іонів в електролітах і т.д. Кожен провідник зі струмом створює в навколишньому просторі магнітне поле. Тоді можна зробити висновок, що магнітне поле провідника зі струмом утворюється при накладенні магнітних полів всіх рухомих заряджених частинок. Скористаємося законом Біо-Савара-Лапласа (32.1) і розглянемо добуток $I d\mathbf{l}$, що входить до нього. Сила струму I дорівнює величині заряду, що протікає через поперечний переріз S провідника за одиницю часу

$$I = nqvS.$$

Тут q - заряд однієї частинки, v - швидкість упорядкованого руху частинок, n - їх концентрація. Тому

$$Idl = nqvSdl = nqv dV,$$

де $dV = Sdl$ - об'єм елемента струму.

Якщо підставити вираз для Idl в закон Біо-Савара-Лапласа (32.1)

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{[d\mathbf{l}, \mathbf{r}]}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{nq dV [\mathbf{v}, \mathbf{r}]}{r^3}$$

і розділити на число носіїв заряду в елементі струму ndV , то вийде вираз для магнітної індукції поля, створюваного одним зарядом q , що рухається зі швидкістю v в вакуумі

$$\mathbf{B}_q = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q[\mathbf{v}, \mathbf{r}]}{r^3}. \quad (33.1)$$

Тут $\mathbf{r}$ - радіус-вектор, проведений від заряду до точки, в якій визначається магнітна індукція $\mathbf{B}_q$, r - модуль цього вектора (рис. 33.1).

Напрямок вектора $\mathbf{B}_q$ легко визначити, якщо згадати, що магнітне поле навколо струму направлено за правилом гвинта (рис. 33.1, в даному випадку замість струму маємо позитивний заряд що рухається прямолінійно).

Модуль вектора магнітної індукції (33.1)

$$B_q = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qv \sin \alpha}{r^2}, \quad (33.2)$$

де α - кут між швидкістю заряду і напрямком на точку спостереження.

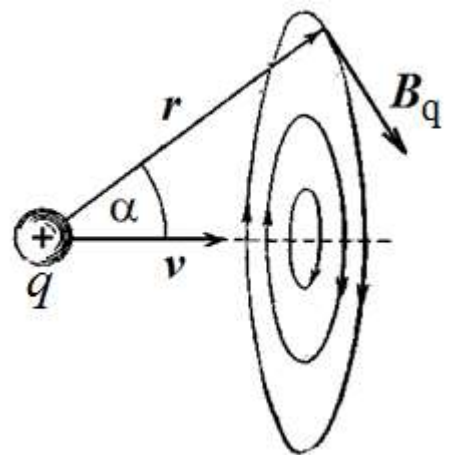


Рис. 33.1.

Відповідно до формули (33.2) на прямій, що проходить через вектор швидкості, магнітне поле відсутнє.

Зауважимо також, що магнітне поле рухомого заряду змінне, оскільки у формулі (33.1) при русі заряду змінюється радіус вектор $\mathbf{r}$. Однак результуюче поле дуже великої кількості носіїв струму в провіднику зі струмом є стаціонарним.

Приклад 33.1. Визначити максимальну магнітну індукцію $B_{q \max}$ поля, створюваного протоном, що рухається прямолінійно зі швидкістю $v = 10^6$ м / с, в точці, віддаленій від траєкторії на відстані $d = 1$ нм.

Магнітна індукція поля, що створюється зарядом q , що рухається зі швидкістю v в вакуумі дорівнює (33.2)

$$B_q = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qv \sin \alpha}{r^2}$$

Очевидно, вона буде максимальною для $\alpha = \pi / 2$. Підставляючи числа, знайдемо

$$B_q = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^6}{4\pi (10^{-9})^2} = 1,6 \cdot 10^{-2} = 16 (\text{мТл}).$$

§ 34. Дія магнітного поля на провідник зі струмом. Закон Ампера

Відмітна особливість магнітного поля - діяти на рухомі заряди та провідники зі струмом деякою силою.

Існування цієї сили можна продемонструвати простим дослідом (рис. 34.1). По двом паралельним горизонтальним провідникам як по рейках може перекинутися легкий провідний (алюмінієвий) циліндричний стрижень - перемичка. Кінці рейок підключені до джерела постійного струму, перемичка замикає коло струму. Якщо піднести до перемички без струму магніт, вона залишається нерухомою - алюміній є слабوماгнітних речовиною, притяганням алюмінієвого стрижня до магніту можна знехтувати. Але якщо через контур пропускати струм, перемичка під дією сили Ампера починає перекинутися по рейках в ту чи іншу сторону.

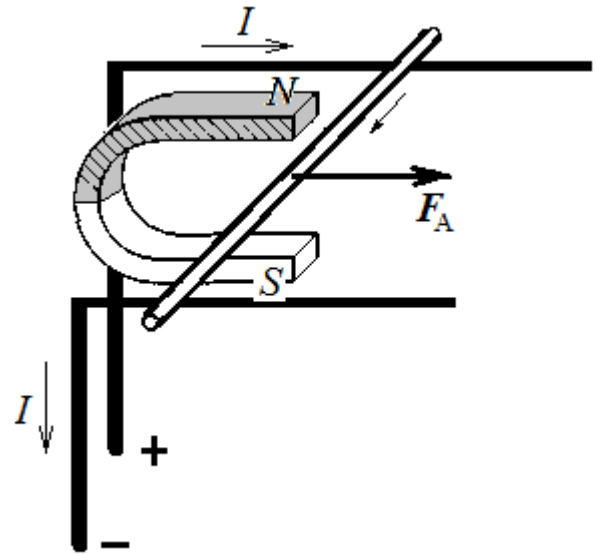


Рис. 34.1.

Дослідним шляхом А. Ампер встановив, що сила, яка діє на елемент провідника зі струмом $I d\mathbf{l}$ в магнітному полі, дорівнює векторному добутку елемента струму на вектор магнітної індукції (**закон Ампера**)

$$d\mathbf{F} = I[d\mathbf{l}, \mathbf{B}]. \quad (34.1)$$

Модуль сили Ампера дорівнює

$$dF = I B dl \sin \alpha, \quad (34.2)$$

де α - кут між векторами $d\mathbf{l}$ і $\mathbf{B}$.

Напрямок сили Ампера визначається правилом векторного добутку (правилом гвинта). Сила $d\mathbf{F}$ є перпендикулярною до площини, в якій лежать вектори елемента струму $I d\mathbf{l}$ і магнітної індукції $\mathbf{B}$.

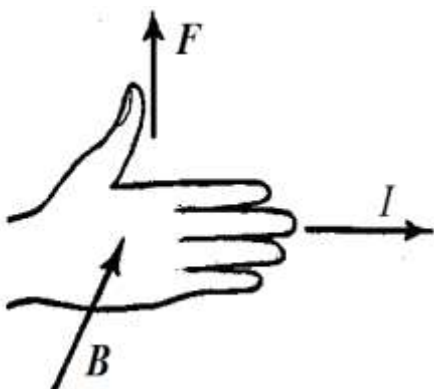


Рис. 34.2.

Зручно також визначати напрям сили Ампера за допомогою *правила лівої руки*: якщо помістити ліву руку так, щоб магнітні силові лінії входили в її долоню, чотири випрямлених пальця вказували напрям струму, то відставлений убік великий палець вказує напрям сили Ампера (рис. 34.2).

У разі однорідного магнітного поля ($\mathbf{B} = \text{const}$) і прямолінійного провідника ($\alpha = \text{const}$), сила, що діє на провідник зі струмом

$$F = \int dF = IB \sin \alpha \int dl = IB l \sin \alpha. \quad (34.3)$$

§ 35. Взаємодія двох паралельних струмів. Визначення одиниці сили струму - ампера

Використовуючи закон Ампера, визначимо силу, з якою взаємодіють два паралельних провідника зі струмом. Розглянемо два паралельних нескінченно довгих провідника, по яких течуть струми I_1 і I_2 , що знаходяться на відстані b один від одного (рис. 35.1). На відрізок довжиною l другого провідника з боку магнітного поля, створюваного струмом в першому провіднику, згідно з формулою (34.3) діє сила Ампера (магнітна індукція $\mathbf{B}_1$ перпендикулярна провіднику 2, тому $\sin \alpha = 1$):

$$F_1 = I_2 B_1 l. \quad (35.1)$$

Магнітна індукція поля, створеного провідником 1 в місці знаходження провідника 2, виражається формулою (32.8), отже

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi b}. \quad (35.2)$$

Тоді

$$F_1 = I_2 \frac{\mu_0 I_1}{2\pi b} l, \quad (35.3)$$

а сила, яка припадає на одиницю довжини цього провідника,

$$F_0 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi b}. \quad (35.4)$$

Якби ми обчислили індукцію B_2 , створювану струмом I_2 , а потім знайшли силу, діючу на провідник 1, то отримали б ту саму формулу. Отже, точно така ж за величиною сила, тільки спрямована протилежно, буде діяти на одиницю довжини першого провідника з боку магнітного поля другого. Це, до речі, впливає з третього закону Ньютона про рівність сил дії і протидії.

Таким чином, провідники з *однаково напрямленими струмами притягуються*. Легко показати, що провідники з *протилежно спрямованими струмами відштовхуються*.

При одиничній силі струму в провідниках, розташованих на відстані 1 м один від одного на одиницю довжини кожного з них буде діяти в вакуумі сила

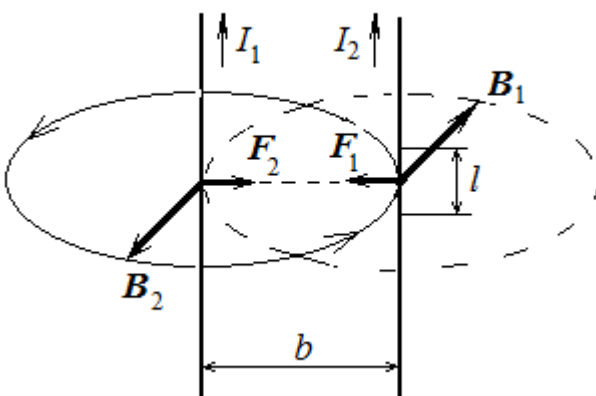


Рис. 35.1.

$$F_0 = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1 \cdot 1}{2\pi \cdot 1} = 2 \cdot 10^{-7} \text{ Н / м.} \quad (35.5)$$

На основі ефекту магнітної взаємодії струмів вводиться четверта (разом з кілограмом, метром і секундою) основна одиниця Міжнародної системи одиниць СІ - одиниця сили струму - *ампер*.

Ампер - сила незмінного струму, який проходячи по двом паралельним прямолінійним провідникам нескінченної довжини і мізерно малого кругового перетину, розташованим на відстані 1 м один від іншого в вакуумі, викликає би між цими провідниками силу, що дорівнює $2 \cdot 10^{-7}$ Н на кожний метр довжини.

§ 36. Дія магнітного поля на рухомий заряд. Сила Лоренца

Знаючи закон Ампера - вираз для сили, що діє на елемент струму в магнітному полі $dF = I [dl, B]$, - можна визначити силу, що діє на окремий рухомий заряд.

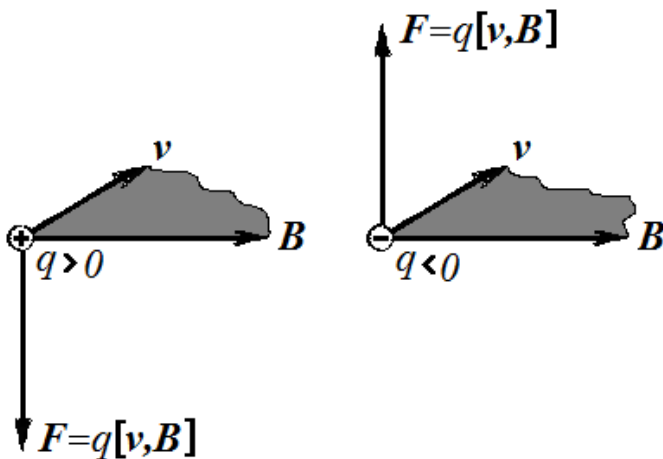


Рис. 36.1.

Позначимо через n кількість електронів, що рухаються впорядковано в одиниці об'єму провідника, v - швидкість цього руху, S - площу перерізу провідника, e - заряд електрона.

Тоді сила струму $I = nevS$, а добуток $I dl$ (елемент струму) дорівнює $nevSdl = Nev$, де N - кількість електронів, що рухаються впорядковано в об'ємі ділянки струму. Підставивши $Idl = Nev$ в формулу амперової сили і розділивши на N ,

отримаємо силу, що діє на один електрон. Замінивши в загальному випадку e на q , отримаємо

$$F_L = q [v, B] \quad (36.1)$$

Цю силу F_L , що діє на частинку з електричним зарядом q , яка рухається зі швидкістю v , в зовнішньому магнітному полі з індукцією B називають *силою Лоренца* (або *магнітної силою*).

Модуль сили Лоренца дорівнює

$$F_L = qvB \sin \alpha, \quad (36.2)$$

де q - абсолютне значення рухомого заряду, v - модуль його швидкості, B - модуль індукції магнітного поля, α - кут між векторами B і v . Слід підкреслити, що на *нерухомий електричний заряд*

магнітне поле не діє. Це відрізняє магнітне поле від електричного.

Направлена сила Лоренца перпендикулярно до площини, в якій лежать вектори v і B . Якщо заряд позитивний, напрям сили F_L (напрям векторного добутку

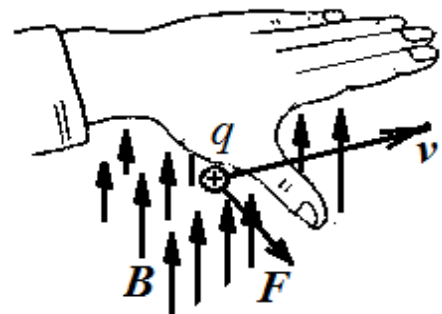


Рис. 36.2

$[\mathbf{v}, \mathbf{B}]$) визначається *правилом правого гвинта* (рис. 36.1): якщо головку гвинта обертати в напрямку від першого множника векторного добутку до другого (від $\mathbf{v}$ до $\mathbf{B}$), то гвинт просунеться в напрямку вектора $[\mathbf{v}, \mathbf{B}]$. Якщо заряд негативний (рис. 66.1), то напрям сили змінюється на протилежний.

Іншим зручним правилом визначення напрямку сили Лоренца $\mathbf{F}_L$, що діє на позитивний заряд, є *правило лівої руки* (рис. 36.2): коли магнітні силові лінії входять в долоню, а чотири витягнутих пальці спрямовані уздовж швидкості заряду, то відігнутий на 90° великий палець вкаже напрям сили.

В електричному полі напруженістю $\mathbf{E}$ на заряд q незалежно від того, рухається він чи знаходиться в стані спокою, діє сила $\mathbf{F}_e = q\mathbf{E}$. Як показує дослід, електричне і магнітне поля діють незалежно. Тому в разі спільної дії електричного і магнітного полів результуюча сила

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_m = q\mathbf{E} + q[\mathbf{v}, \mathbf{B}]. \quad (36.3)$$

Цю повну силу також часто називають силою Лоренца

Приклад 36.1. Два точкових заряди q_1 і q_2 рухаються паралельно один одному з однаковими нерелятивістськими швидкостями $v \ll c$. Відстань між зарядами r . Порівняти, у скільки разів сила $\mathbf{F}_{\text{Кул}}$ електричної взаємодії між зарядами більше сили $\mathbf{F}_{\text{Лор}}$ магнітної взаємодії між ними.

Відповідно до закону Кулона електрична сила, що діє, наприклад, на другий заряд з боку першого, дорівнює

$$\mathbf{F}_{2\text{Кул}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^3} \mathbf{r}. \quad (\text{П. 36.1})$$

Тут $\mathbf{r}$ - радіус-вектор, проведений від першого заряду до другого. Магнітна сила (сила Лоренца), що діє на другий заряд, з боку магнітного поля $\mathbf{B}_q$, створюваного рухомим першим зарядом, дорівнює

$$\mathbf{F}_{2\text{Лор}} = q_2 [\mathbf{v}, \mathbf{B}_q], \quad (\text{П. 36.2})$$

де згідно з (33.1) індукція магнітного поля рухомого заряду q_1 в точці, де знаходиться другий заряд

$$\mathbf{B}_q = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_1}{r^3} [\mathbf{v}, \mathbf{r}]. \quad (\text{П. 36.3})$$

Підставляючи значення магнітної індукції в формулу сили Лоренца, отримаємо

$$\mathbf{F}_{\text{Лор}} = \frac{\mu_0 q_1 q_2}{4\pi r^3} [\mathbf{v}, [\mathbf{v}, \mathbf{r}]]. \quad (\text{П. 36.4})$$

Тут ми зустрічаємося з подвійним векторним добутком векторів. Розкриваємо його за відомим правилом «БАЦ мінус ЦАБ»

$$[\mathbf{a}[\mathbf{b}, \mathbf{c}]] = \mathbf{b}(\mathbf{a}\mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}\mathbf{b}).$$

Тоді вираз для сили Лоренца набуває вигляду

$$\mathbf{F}_{\text{Лор}} = \frac{\mu_0 q_1 q_2}{4\pi r^3} (\mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{r}) - \mathbf{r}(\mathbf{v}\mathbf{v})) = \frac{\mu_0 q_1 q_2 v^2}{4\pi r^3} (-\mathbf{r}). \quad (\text{П. 36.5})$$

Тут враховано, що скалярні добутки векторів дорівнюють відповідно:

$$(\mathbf{v}\mathbf{r}) = v \cdot r \cdot \cos 90^\circ = 0, \quad (\mathbf{v}\mathbf{v}) = v^2.$$

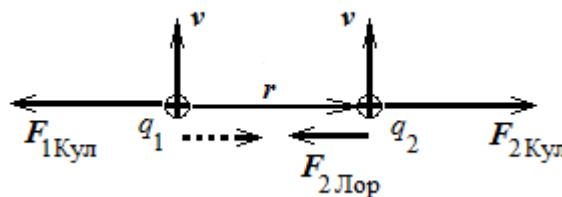


Рис. П. 36.1.

Залишилося знайти відношення електричної і магнітної сил. Розділивши (П. 36.1) на (П. 36.5), отримаємо:

$$\frac{F_{Кул}}{F_{Лор}} = -\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0 v^2}. \quad (\text{П. 36.6})$$

З'ясуємо значення комбінації двох констант:

$$\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} = \frac{1}{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 4 \cdot 3,14 \cdot 10^{-7}} = 9 \cdot 10^{16} \text{ м}^2 / \text{с}^2. \quad (\text{П. 36.7})$$

Величина $1 / (\epsilon_0 \mu_0)$ і за числовим значенням, і за розмірністю дорівнює квадрату швидкості світла у вакуумі $c \approx 3 \cdot 10^8 \text{ м / с}$. Остаточно отримуємо, що електрична сила більше магнітної в c^2/v^2 разів.

$$\frac{F_{Кул}}{F_{Лор}} = -\frac{c^2}{v^2}. \quad (\text{П. 36.8})$$

Навіть для дуже великих досяжних швидкостей v це відношення величезне, тобто електрична сила у багато разів перевершує магнітну.

Проте, магнітну силу слід враховувати, наприклад, в проводах зі струмом. Електричні сили в цьому випадку зникають внаслідок балансу позитивних і негативних зарядів в проводах, залишаються тільки магнітні сили, які виявляються досить великими.

§ 37. Рух заряджених частинок в магнітному полі

1. Розглянемо *перший окремий випадок*, коли частинка масою m і зарядом q рухається в однорідному магнітному полі з індукцією $\mathbf{B}$ так, що швидкість частинки $\mathbf{v}$ спрямована *паралельно магнітному полю*. В цьому випадку сила

$$F_{\text{Л}} = q [\mathbf{v}, \mathbf{B}] = 0, \quad (37.1)$$

і, отже, частинка буде рухатися рівномірно і прямолінійно (рис. 37.1).

2. *Другий окремий випадок* має місце, коли частинка рухається зі швидкістю, *перпендикулярній до вектора $\mathbf{B}$* . В цьому випадку сила дорівнює за модулем

$$F_{\text{Л}} = qvB \sin(\pi/2) = qvB \quad (37.2)$$

і спрямована по нормалі до траєкторії частинки, надаючи їй нормального прискорення, що дорівнює за модулем

$$a_n = \frac{F_{\text{Л}}}{m} = \frac{q}{m} vB. \quad (37.3)$$

Оскільки сила $F_{\text{Л}}$ завжди спрямована перпендикулярно до швидкості $\mathbf{v}$ руху зарядженої частинки, вона не змінює величини швидкості, а змінює лише її напрям. Отже, кінетична енергія зарядженої частинки при русі в магнітному полі не змінюється, і *сила не виконує роботи* при будь-якому переміщенні зарядженої частинки.

Частинка буде рухатися по колу, радіус якого визначиться, якщо прирівняти вираз для нормального прискорення виразу (67.3):

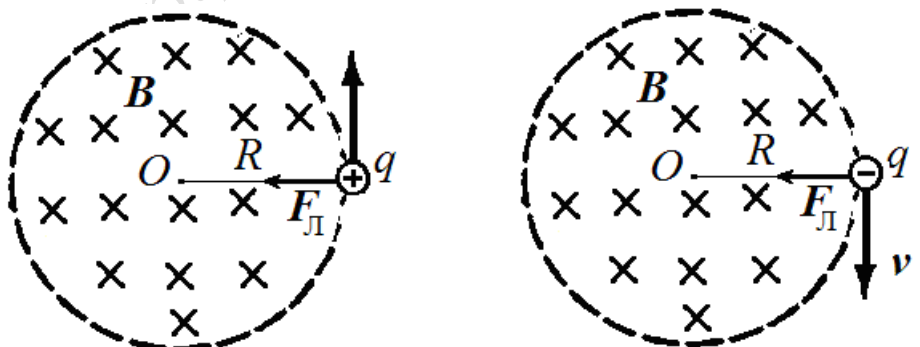


Рис. 37.2.

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{q}{m} v B. \quad (37.4)$$

Звідки

$$R = \frac{v}{\frac{q}{m} B}. \quad (37.5)$$

Відношення q / m називається **питомим зарядом** частинки.

Період T обертання частинки, тобто час, що витрачається на один оборот, визначимо, розділивши довжину окружності $2\pi R$ на швидкість частинки v :

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi}{\frac{q}{m} B}. \quad (37.6)$$

Як випливає з (37.6), період обертання частинки не залежить від її швидкості (енергії), а визначається тільки питомим зарядом частинки і магнітною індукцією поля.

Напрямок обертання частинки по колу показано на рис. 37.2 (магнітне поле направлено від нас). Якщо заряд q позитивний, то напрям вектора $\mathbf{B}$ і кутової швидкості ω протилежні. У разі негативного заряду q ці напрями збігаються. (Нагадаємо, що кутова швидкість ω спрямована по осі обертання за правилом правого гвинта).

3. *Третій випадок* є загальним випадком руху зарядженої частинки в однорідному магнітному полі, коли її швидкість $\mathbf{v}$ спрямована під довільним кутом α до вектора магнітної індукції $\mathbf{B}$. Розкладемо вектор швидкості $\mathbf{v}$ на дві складові: швидкість направлену вздовж поля ($\mathbf{v}_{\parallel}$) і швидкість, перпендикулярну до поля ($\mathbf{v}_{\perp}$) (рис. 37.3):

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_{\perp}$$

Модулі цих складових дорівнюють

$$v_{\parallel} = v \cos \alpha, \quad v_{\perp} = v \sin \alpha. \quad (37.7)$$

Рухи з цими швидкостями є незалежними. Швидкість $v_{\parallel}$ в магнітному полі не змінюється, тому що при русі паралельно полю магнітна сила (сила) дорівнює нулю. Тому в напрямку поля частинка рухається за інерцією рівномірно і прямолінійно зі швидкістю $v_{\parallel} = v \cos \alpha$.

Завдяки складовій $v_{\perp}$ частинка повинна рухатися по колу, площина якого перпендикулярна до вектора $\mathbf{B}$, а радіус за формулою (37.5) дорівнює

$$R = \frac{v_{\perp}}{\frac{q}{m} B} = \frac{v \sin \alpha}{\frac{q}{m} B}. \quad (37.8)$$

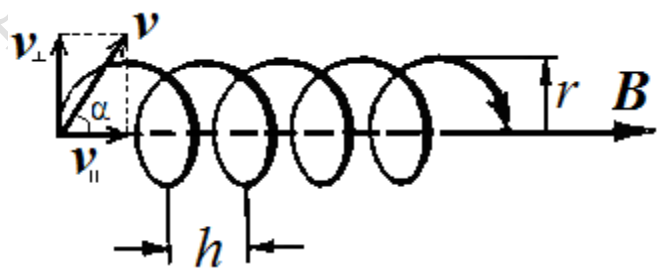


Рис. 37.3

В результаті складання обох незалежних рухів частинка буде рухатися по циліндричній спіралі (гвинтовій лінії), вісь якої збігається з лінією магнітної індукції (рис. 37.3).

Відстань h між сусідніми витками (крок гвинтової лінії) дорівнює

$$h = v_{\parallel} \cdot T.$$

Замінивши $v_{\parallel}$ за формулою (37.7), а T за (37.6), отримаємо

$$h = \frac{2\pi m}{B q} v \cos \alpha. \quad (37.9)$$

Приклад 37.1. Електрон рухається в однорідному магнітному полі з індукцією $B = 1$ мТл по колу радіусом $r = 2$ см. Визначити кінетичну енергію електрона. Збільшення маси електрона зі швидкістю не враховувати.

Зі співвідношення $R = \frac{v}{\frac{q}{m} B}$ отримаємо

$$v = \frac{qBR}{m},$$

звідки нерелятивістський вираз для кінетичної енергії дає

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{(qBR)^2}{2m} = 3,52 \cdot 10^{-17} \text{ Дж}.$$

Приклад 37.2. В однорідне магнітне поле з індукцією 1 Тл влітає протон. Траєкторія протона являє собою гвинтову лінію з радіусом $R = 8$ см і кроком $h = 40$ см. Визначити швидкість протона. Яку прискорювальну різницю потенціалів U пройшов протон, перш ніж потрапити в магнітне поле?

Якщо підставити в формулу (37.9) значення радіуса гвинтової лінії (37.8), то отримаємо

$$h = 2\pi R / \operatorname{tg} \alpha,$$

звідки

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2\pi R}{h}.$$

Виразимо косинус кута α між швидкістю протона і напрямом магнітної індукції через тангенс за формулами тригонометрії:

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2\pi R}{h}\right)^2}}$$

Тепер за формулою (37.9) можна визначити швидкість протона

$$v = \frac{qBh}{2\pi m \cos \alpha} = \frac{qBh}{2\pi m} \sqrt{1 + \left(\frac{2\pi R}{h}\right)^2} = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 1 \cdot 0,4}{2 \cdot 3,14 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27}} \sqrt{1 + \left(\frac{6,28 \cdot 0,08}{0,4}\right)^2} = 9,8 \cdot 10^6 \text{ м/с}$$

Кінетичну енергію протона, що пройшов прискорювальну різницю потенціалів, прирівняємо роботі прискорювального поля

$$\frac{mv^2}{2} = qU$$

Звідси знаходимо різницю потенціалів

$$U = \frac{mv^2}{2q} = \frac{1,67 \cdot 10^{-27} \cdot (9,8 \cdot 10^6)^2}{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} = 5 \cdot 10^5 \text{ В} = 0,5 \text{ МВ}.$$

Приклад 37.3. У близьких до полюсів Землі широтах (північних і південних) спостерігаються полярні сяйва. Це світіння на висотах 90-1000 км розріджених шарів атмосфери. Воно викликається взаємодією компонентів високих шарів атмосфери - атомів і молекул кисню, азоту та водню - з зарядженими частинками високих енергій (електронами і протонами), що випускаються активними областями на Сонці (спалахами).

При цьому прискорені заряджені частинки проникають в зони полярних сяйв під впливом магнітного поля Землі. Вони рухаються до магнітних полюсів Землі під дією сили Лоренца уздовж магнітних силових ліній Землі, навиваючись на них.

Зіткнення частинок з молекулами і атомами кисню та азоту призводять до збудження останніх, тобто до переходу в стан з більш високою енергією. Повернення в початковий рівноважний стан відбувається шляхом випромінювання квантів світла характерних довжин хвиль. Такою є одна з гіпотез північного сяйва.

Приклад 37.4. Циклотрон. Розглянемо як приклад прискорення заряджених частинок. Прискорювачами заряджених частинок називаються пристрої для отримання заряджених частинок високих енергій. У прискорювачах використовується комбінована дія на заряджені частинки електричного і магнітного полів (рис. П. 37.1).

Електричне поле використовується для прискорення заряджених частинок. Відомо, що, пройшовши різницю потенціалів U , частинка з зарядом q набуває кінетичної енергії $E_k = qU$.

Однак для отримання високих енергій створити різницю потенціалів в сотні мільйонів і мільярди вольт не уявляється можливим. Ці труднощі можна обійти, використовуючи *циклічний спосіб прискорення заряджених частинок*. У цьому способі заряджену частинку змушують багаторазово проходити через електричне поле, кожен раз збільшуючи її енергію.

Найпростіший циклїчний резонансний прискорювач важких частинок (протонів, іонів) - *циклотрон*. Він складається з двох порожнистих електродів (дуантів), що являють собою дві половини невисокої циліндричної коробки, розділених вузькою щілиною (рис. П. 37.1).

Дуанти укладені в вакуумну камеру (тиск $\sim 10^{-6}$ мм. рт.ст.), яка поміщена між полюсами сильного електромагніта. Магнітне поле є однорідним і перпендикулярним до площини дуантів (рис. П. 37.1). На дуанти подається змінна напруга від генератора високої частоти. Поблизу центра магніту в проміжку між дуантами розміщується джерело заряджених частинок - наприклад, іонів.

Нехай негативний іон, вилітає з джерела в той час, коли дуант 1 має позитивний потенціал (рис. П. 37.2). Іон буде втягнутий всередину дуанта, набуває деякої швидкості і опиниться всередині дуанта 1 півокколо постійного радіуса.

Коли іон входить в дуант, прискорювальна дія електричного

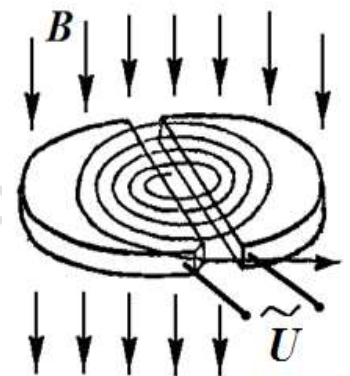


Рис. П.37.1.

поля припиняється. Це пов'язано з тим, що металеві стінки дуанта екранують його внутрішню порожнину від електричного поля. Усередині дуанта частинка знаходиться під дією тільки магнітного поля.

Як впливає з формули (37.6), період обертання іона в магнітному полі

$$T = 2\pi \frac{m}{qB}$$

не залежить від його швидкості.

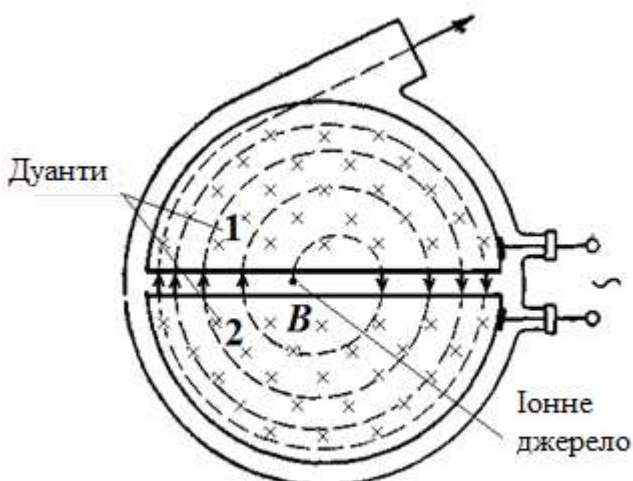


Рис. П.37.2.

Можна підібрати магнітну індукцію B так, щоб період обертання іона збігався з періодом генератора високої частоти. Це означає, що до моменту виходу іона з дуанта 1 напруга електричного поля від високочастотного генератора зміниться на протилежну: дуант 2 набуде позитивного потенціалу, а дуант 1 - негативного. Тому іон знову прискорюється і всередині дуанта 2 опише півколо вже більшого радіусу, але час, за який він пройде половину кола, залишиться колишнім.

Таким чином іон буде потрапляти в зазор між дуантами кожен раз в такий самий фазі змінного високочастотного електричного поля, тобто коли сила дії електричного поля направлена в бік руху іона.

Рухаючись в резонансі з високочастотним полем, іони вздовж спіралі наближаються до краю магніту. Їх енергія буде зростати на величину qU після кожного проходження зазору між дуантами.

Маючи в своєму розпорядженні джерело напруги порівняно невеликої величини, можна прискорювати протони до енергій порядку 22 МеВ (тобто енергії, яку отримав би протон, пройшовши прискорювальну різницю потенціалів в 22 мільйонів вольт).

Однак є причини, що обмежують можливості значного збільшення енергії частинок в циклотроні. Коли частинки розганяються до швидкостей, близьких до швидкості світла, доводиться враховувати залежність маси прискорених частинок від швидкості. Тому для досягнення високих енергій частинок змінюють або частоту змінної напруги (фазотрони), або величину магнітного поля (синхротрони), або і те, і інше (синхрофазотрони).

Приклад 37.5. Циклотрон прискорює протони до енергії 20 МеВ. Який радіус дуантів циклотрона, якщо магнітна індукція $B = 2$ Тл? Маса протона $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$ кг, його питомий заряд $e / m_p = 0,929 \cdot 10^8$ Кл / кг.

Відповідно до формули (37.5) радіус кола, за яким рухається заряджена частинка в магнітному полі,

$$R = \frac{v}{\frac{q}{m} B}.$$

Швидкість протона виразимо через його кінетичну енергію. При цьому будемо користуватися нерелятивістським виразом для кінетичної енергії

$$E_k = \frac{m_p v^2}{2},$$

оскільки кінетична енергія протона за умовою 20 МеВ, що набагато менше його енергії спокою $E_0 = 938,2$ МеВ. Звідси швидкість протона

$$v = \sqrt{\frac{2E_k}{m_p}}.$$

Радіус дуанта очевидно не може бути меншим ніж радіус кола, що описує протон. Визначимо його в системі СІ, замінивши електронвольти на джоулі ($1 \text{ еВ} = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Дж):

$$R \geq \frac{\sqrt{\frac{2E_k}{m_p}}}{\frac{e}{m_p} B} = \frac{\sqrt{\frac{2 \cdot 20 \cdot 10^6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{1,67 \cdot 10^{-27}}}}{0,929 \cdot 10^8 \cdot 2} = 0,323 \text{ м} = 32,3 \text{ см}$$

§ 38. Ефект Холла

Якщо вздовж провідної пластини, поміщеної в поперечне магнітне поле, йде струм, то на носії струму буде діяти сила Лоренца в напрямку, перпендикулярному і до магнітного поля, і до току (рис. 38.1).

Дією цієї сили пояснюється виникнення поперечного електричного поля в провіднику або напівпровіднику з струмом, який поміщений в магнітне поле. Це явище було виявлено американським фізиком Е. Холлом ще до відкриття електронів.

Розглянемо провідну пластину з струмом, яку пронизує магнітне поле з індукцією $\mathbf{B}$, що спрямоване «від нас» (рис. 38.1). Кожен носій струму виявляється під дією сили Лоренца. У не-

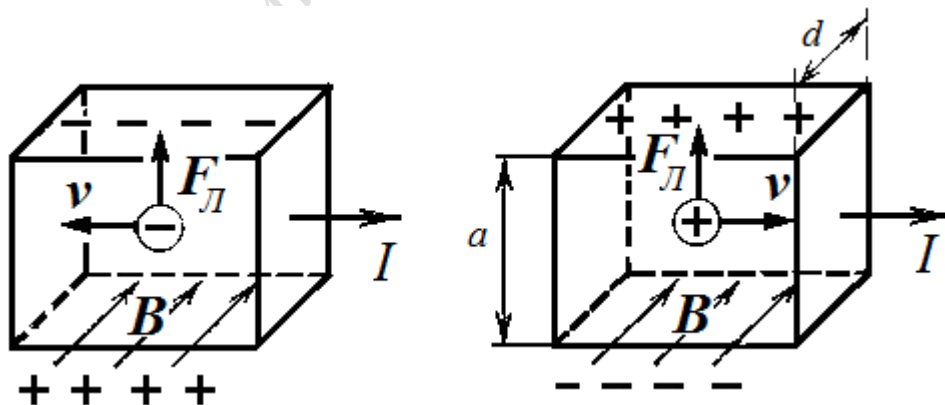


Рис. 38.1.

У негативних зарядів вектор швидкості упорядкованого руху $\mathbf{v}$ і струм $\mathbf{I}$ спрямовані в протилежні сторони, у позитивних зарядів ці напрямки збігаються. Застосовуючи правило лівої руки, знаходимо, що в обох випадках, зображених на рис. 38.1, сила Лоренца спрямована до верхньої грані пластини. Отже, носії зарядів, незалежно від їх знаку, накопичуються на верхній грані пластини.

Якщо носіями струму є електрони (у металів і напівпровідників n -типу), у верхній грані утворюється надлишок негативних зарядів, відповідно у нижній грані - надлишок позитивних зарядів. У напівпровідників p -типу носіями струму є так звані «дірки», які мають позитивний заряд. У цьому випадку верхня грань заряджається позитивно, а нижня - негативно.

Заряди, що зібралися на верхній і нижній гранях пластини, створюють всередині пластини поперечне (і до току, і до поля) електричне поле напруженістю $\mathbf{E}_x$. Це поле діє на електричні заряди з силою

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}_x. \quad (38.1)$$

З іншого боку, на заряди діє сила Лоренца, що дорівнює за модулем

$$F_L = qvB,$$

(тому що $\mathbf{v}$ перпендикулярно до $\mathbf{B}$).

Ці дві сили врівноважують одна одну:

$$qvB = qE_x,$$

звідки

$$E_x = vB. \quad (38.2)$$

З формули для густини струму $j = qnv$ знаходимо швидкість упорядкованого руху зарядів

$$v = \frac{j}{qn}. \quad (38.3)$$

Тоді для напруженості поперечного (холлівського) електричного поля отримуємо

$$E_x = \frac{B}{qn} j. \quad (38.4)$$

Помноживши напруженість E_x на відстань a між гранями пластини, отримаємо поперечну напругу (різницю потенціалів між цими гранями)

$$U_x = E_x a = \frac{B}{qn} ja = R_x Bja. \quad (38.5)$$

Тут коефіцієнт

$$R_x = \frac{1}{qn} \quad (38.6)$$

називається **сталю Холла**.

Оскільки сила струму $I = j \cdot S = j \cdot ad$,

$$U_H = R_x \frac{IB}{d} \quad (38.7)$$

Визначивши знак холлівської різниці потенціалів, можна встановити знак носіїв струму, а вимірявши сталу Холла, можна визначити концентрацію носіїв струму в відповідних металах і напівпровідниках. Так, було знайдено, що густина електронів в металах становить $n \approx 10^{28} \text{ м}^{-3}$, а в напівпровідниках $n \approx 10^{20} \text{ м}^{-3}$ (в кубічному сантиметрі, відповідно, 10^{22} і 10^{14}).

На основі ефекту Холла працюють датчики Холла: прилади, що дозволяють прямо і точно вимірювати індукцію магнітного поля, а також виконують інші завдання автоматики.

Приклад 38.1. Вздовж срібної стрічки товщиною $d = 0,1 \text{ мм}$ проходить струм силою $I = 10 \text{ А}$. Стрічка знаходиться в магнітному полі з індукцією $B = 1 \text{ Тл}$. Лінії індукції перпендикулярні до стрічки. Холлівська різниця потенціалів виявилася рівною $U_H = -8,87 \text{ мкВ}$. Визначити концентрацію n носіїв струму в сріблі.

Оскільки холлівська різниця потенціалів за умовою негативна, носії струму мають негативний заряд. Це електрони, що, взагалі кажучи, очевидно, тому що срібло є металом.

Концентрацію електронів в сріблі можна знайти із співвідношення

$$n = \frac{1}{R_H e}.$$

Стала Холла визначається виразом

$$R_H = \frac{U_H d}{IB}.$$

Звідки концентрація електронів в сріблі

$$n = \frac{IB}{U_H d e} = \frac{10 \cdot 1}{(-8,87 \cdot 10^{-6}) \cdot 10^{-4} \cdot (-1,6 \cdot 10^{-19})} = 7,05 \cdot 10^{28} \text{ 1/м}^3$$

§ 39. Циркуляція вектора магнітної індукції у вакуумі

Нагадаємо, що циркуляцією вектора $\mathbf{B}$ по заданому замкнутому контуру L називається криволінійний інтеграл по замкнутому контуру від скалярного добутку вектора $\mathbf{B}$ і вектора елемента довжини контура $d\mathbf{l}$. Модуль вектора $d\mathbf{l}$ дорівнює малому елементу довжини dl , а напрямок збігається з напрямком обходу контура.

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \oint_L B dl \cos \alpha = \oint_L B_l dl. \quad (39.1)$$

Тут $B_l = B \cos \alpha$ - проекція вектора $\mathbf{B}$ на напрям $d\mathbf{l}$, α - кут між вектором $\mathbf{B}$ і вектором елемента довжини $d\mathbf{l}$.

Циркуляцію вектора $\mathbf{B}$ найпростіше обчислити на прикладі магнітного поля прямолінійного провідника зі струмом (рис. 39.1). Лінії магнітної індукції поля прямого струму представляють собою концентричні кола, що лежать в площині, перпендикулярній до проводу, по якому тече струм, і узгоджені з напрямком струму правилом правого гвинта. Виберемо одну з таких ліній в якості замкнутого контура L , напрямок обходу контура також узгодимо з напрямком струму правилом правого гвинта. Обчислимо інтеграл (39.1) з цього замкнутого контура.

У кожній точці даного контура вектор $\mathbf{B}$ направлений по дотичній до окружності і дорівнює за модулем

$$B_l = B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}.$$

Підставивши це значення в формулу (39.1), і враховуючи, що $\oint_L dl = 2\pi R$ (довжина кола), отримаємо

$$\oint_L B_l dl = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \oint_L dl = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} 2\pi R = \mu_0 I. \quad (39.2)$$

Ми довели, що циркуляція вектора $\mathbf{B}$ поля прямолінійного струму в вакуумі по колу, що охоплює струм, дорівнює добутку магнітної постійної на силу струму.

Рівність (39.2) справедливо також для контура L довільної форми, який охоплює провідник зі струмом I .

Якщо замкнутий контур L не охоплює провідника зі струмом, то криволінійний інтеграл по такому шляху дорівнює нулю.

Доведемо це також на прикладі. Нехай замкнутий контур L обмежує сегмент $ABCD$ і утворений двома дугами AB і CD , які є частинами магнітних силових ліній прямого струму I (рис. 39.2), і двома відрізками радіусів AD і BC цих кіл. Струм I перпендикулярний до площини малюнка, спрямований «до нас» і не охоплюється контуром.

Обчислимо циркуляцію вектора $\mathbf{B}$

$$\oint_{ABCD} B_l dl$$

вздовж цього контура. Контур будемо обходити, наприклад, проти годинникової стрілки. Розіб'ємо криволінійний інтеграл на 4 інтеграла по окремих ділянках контура:

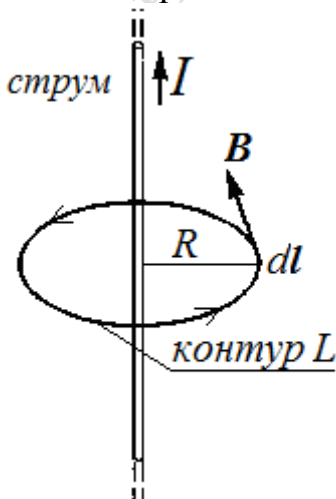


Рис. 39.1.

$$\oint_{ABCD} B_l dl = \int_{AB} B_l dl + \int_{BC} B_l dl + \int_{CD} B_l dl + \int_{DA} B_l dl.$$

Нагадаємо, що B_l - це проекція вектора магнітної індукції $\mathbf{B}$ на напрям $d\mathbf{l}$, який задається вибором напрямку обходу контура, тобто

$$B_l = B \cdot \cos \alpha,$$

де α - кут між векторами $\mathbf{B}$ і $d\mathbf{l}$.

Оскільки відрізки BC і AD (радіуси) перпендикулярні до вектора $\mathbf{B}$ (спрямованому по дотичній), то проекції B_l вектора $\mathbf{B}$ на ці відрізки рівні нулю. Тому другий і четвертий інтеграли дорівнюють нулю.

Для обраного нами напрямку обходу контура всюди на дузі CD кут α дорівнює нулю (рис. 39.2), $\cos 0 = 1$ і $B_l = B_2$.

На дузі AB кут α дорівнює 180° (рис. 39.2), $\cos 180^\circ = -1$ і $B_l = -B_1$.

З огляду на те, що на дугах AB і CD магнітна індукція має постійне числове значення, отримаємо

$$\oint_{ABCD} B_l = -B_1 \int_{AB} dl + B_2 \int_{CD} dl = -B_1 \cdot AB + B_2 \cdot CD \quad (39.3)$$

З формули $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$ випливає відношення

$$\frac{B_1}{B_2} = \frac{R_2}{R_1}. \quad (39.4)$$

Однак, CD довше за AB в таку саму кількість разів, оскільки ці дві дуги стягують один і той же кут відносно провідника:

$$\frac{CD}{AB} = \frac{R_2}{R_1}. \quad (39.5)$$

Тоді повний інтеграл (39.3) обертається в нуль.

Ми довели, що циркуляція вектора магнітної індукції поля прямолінійного провідника зі струмом вздовж замкнутого контура, що не охоплює цей провідник, дорівнює нулю.

Будь-який замкнутий контур довільної форми можна представити у вигляді побудованого з радіальних сегментів і дуг (рис. 39.3). Якщо цей контур не охоплює струму, криволінійний інтеграл вздовж такого контура дорівнює нулю.

Якщо є велика кількість провідників зі струмами і частина з них охоплюється контуром інтегрування, то циркуляція вектора $\mathbf{B}$ визначається алгебраїчною сумою тільки таких струмів, які охоплюються контуром.

В силу принципу суперпозиції

$$\oint_L B_l dl = \oint_L (B_{1l} + B_{2l} + \dots) dl = \mu_0 I_1 + \mu_0 I_2 + \dots \quad (39.6)$$

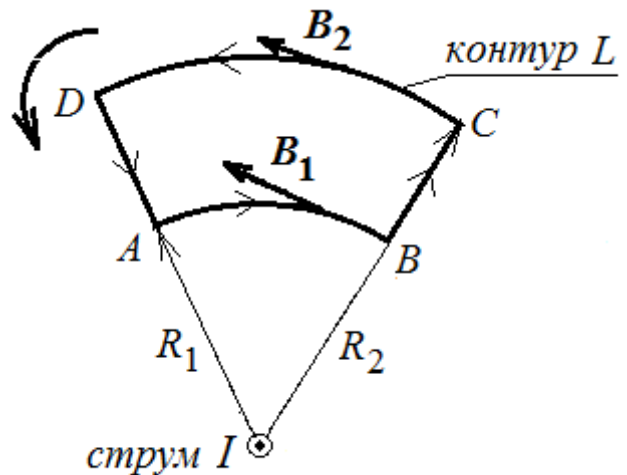


Рис. 39.2.



Рис. 39.3.

Таким чином, **циркуляція вектора магнітної індукції по довільному контуру дорівнює помноженій на магнітну постійну алгебраїчній сумі струмів, які охоплюються цим контуром:**

$$\oint_L B_l dl = \mu_0 \sum_i I_i. \quad (39.7)$$

Вираз (39.7) теореми про циркуляцію називають також **законом повного струму**.

При обчисленні алгебраїчної суми струмів будемо користуватися таким правилом знаків. Позитивним будемо вважати струм, напрямок якого пов'язаний з напрямком обходу по контура правилом правого гвинта, струм протилежного напрямку будемо вважати негативним.

Приклад 39.1. Струм силою $I = 6$ А проходить вздовж суцільного однорідного стрижня круглого перетину радіуса $R = 1$ см. Користуючись теоремою про циркуляцію вектора $\mathbf{B}$, визначити магнітну індукцію в точках, розміщених усередині стрижня і віддалених на відстань $r = 0,2$ см від осі стрижня і поза стрижнем ($r = 1,5$ см).

Нехай точка спостереження лежить поза стрижнем, $r \geq R$. В якості контура для обчислення циркуляції виберемо коло радіуса r , що лежить в площині, перпендикулярній струму і має центр на осі стрижня (рис. П.39.1).

Теорема про циркуляцію дає

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 I,$$

Звідки

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

(Поза стрижнем, $r \geq R$).

Цей результат вже відомий - це магнітне поле прямого струму.

$$B = \frac{4 \cdot 3,14 \cdot 10^{-7} \cdot 6}{2 \cdot 3,14 \cdot 1,5 \cdot 10^{-2}} = 80 (\text{мкТл})$$

Визначимо тепер магнітну індукцію в будь-якій точці всередині стрижня ($r \leq R$). Замкнутий контур знову виберемо у вигляді кола, що проходить через цю точку з центром на осі стрижня. Тоді за теоремою про циркуляції маємо:

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 j \pi r^2,$$

де $j = I / \pi R^2$ - густина струму, що проходить через стрижень.

Звідси

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r. \quad (\text{П. 39.1})$$

$$B = \frac{4 \cdot 3,14 \cdot 10^{-7} \cdot 6}{2 \cdot 3,14 \cdot 10^{-4}} 0,5 \cdot 10^{-2} = 60 (\text{мкТл}).$$

Таким чином, усередині однорідного стрижня магнітна індукція збільшується з відстанню від осі за лінійним законом, а поза стрижня зменшується за гіперболічним законом (рис. П. 39.1).

Нехай тепер струм проходить вздовж поверхні порожнистої тонкостінної трубки. Яким буде магнітне поле всередині трубки?

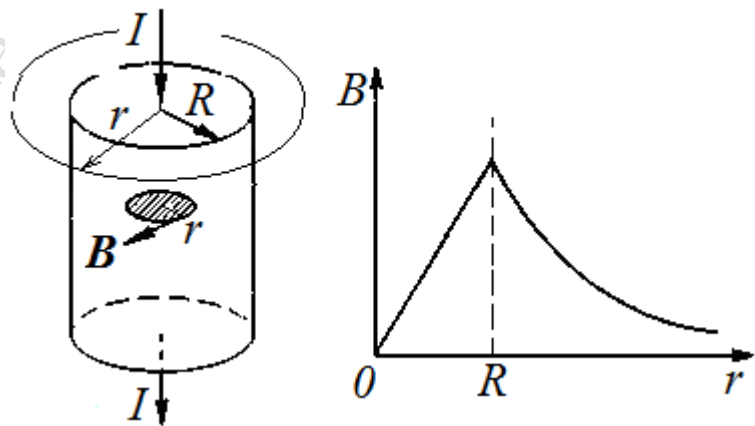


Рис. П.39.1.

Якщо взяти замкнутий контур, що лежить всередині трубки, то він не охоплює струмів. Тоді з теореми про циркуляцію випливає, що магнітного поля всередині трубки з струмом немає.

Порівняємо циркуляцію електростатичного та магнітного полів у вакуумі. Як було показано в § 7, **циркуляція вектора напруженості електростатичного поля вздовж довільного замкненого контура дорівнює нулю**

$$\oint_L E_l dl = 0$$

Ця умова дозволила ввести скалярний потенціал електростатичного поля φ . Циркуляція вектора магнітної індукції пропорційна алгебраїчній сумі струмів, які охоплюються контуром. Тому для магнітного поля *не можна ввести скалярний потенціал*, як це було зроблено для електростатичного поля.

Поле, у якого циркуляція відмінна від нуля, називається **вихровим**.

Основна відмінність магнітного поля від електростатичного полягає в тому, що в той час, як електростатичне поле є потенціальним, магнітне поле є вихровим.

Найбільш наочно різницю потенціальних і вихрових полів можна уявити за картиною силових ліній. Силові лінії електростатичного поля починаються і закінчуються на електричних зарядах або йдуть на нескінченність. Силові лінії магнітного поля завжди є замкненими й охоплюють струми, що проходять, або приходять з нескінченності і йдуть на нескінченність.

§ 40. Магнітне поле соленоїда і тороїда

Соленоїдом називається ізолюваний провідник, що намотаний по гвинтовій лінії на циліндричний каркас. Якщо довжина соленоїда набагато більше його діаметра, соленоїд вважається нескінченно довгим. Кожен з витків соленоїда є круговим струмом, що створює в центрі магнітне поле, спрямоване по осі витка. Очевидно, так само буде направлено і магнітне поле на осі соленоїда.

Експериментальне вивчення магнітного поля соленоїда показує, що всередині соленоїда поле є однорідним і направлено паралельно осі, поза соленоїдом - неоднорідним і дуже слабким.

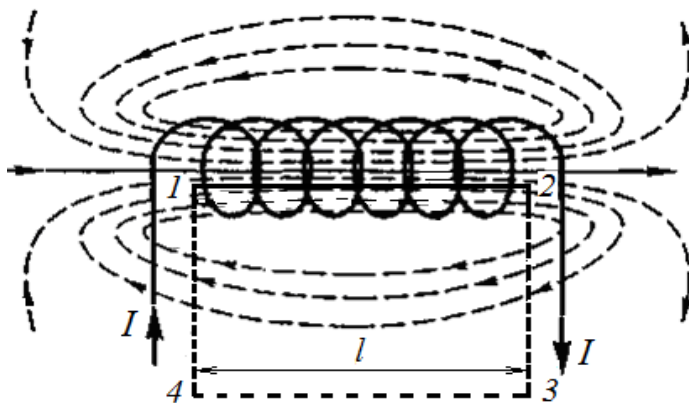


Рис. 40.1.

Лінії магнітного поля соленоїда показані на рис. 40.1. Усередині соленоїда напрямок ліній утворює з напрямком струму правогвинтову систему.

Розрахуємо, застосовуючи теорему про циркуляцію, індукцію магнітного поля всередині соленоїда. Розглянемо соленоїд довжиною l , що має N витків, вздовж яких проходить струм I . Число витків соленоїда, що припадають на оди-

ницю довжини, $n = N / l$.

Візьмемо прямокутний контур 1234 (рис. 40.1) і обчислимо циркуляцію вектора $\mathbf{B}$ по цьому контуру, що охоплює всі N витків. Інтеграл по 12341 можна представити у вигляді чотирьох інтегралів: по 12, 23, 34, 41:

$$\oint_L \mathbf{B}_l d\mathbf{l} = \int_{1 \rightarrow 2} \mathbf{B}_l d\mathbf{l} + \int_{2 \rightarrow 3} \mathbf{B}_l d\mathbf{l} + \int_{3 \rightarrow 4} \mathbf{B}_l d\mathbf{l} + \int_{4 \rightarrow 1} \mathbf{B}_l d\mathbf{l}. \quad (40.1)$$

На ділянках 23 і 41 контур є перпендикулярним до ліній магнітної індукції, звідки випливає $B_l = 0$, і другий і четвертий інтеграли дорівнюють нулю. Ділянку 34 можна вибрати досить далеко від соленоїда, де магнітне поле дорівнює нулю. Таким чином, з огляду на те, що на ділянці 12 вектор магнітної індукції $\mathbf{B}$ паралельний вектору елементарної довжини контура $d\mathbf{l}$ і, отже, $B_l = B$, отримаємо

$$\oint_L \mathbf{B}_l d\mathbf{l} = \int_{1 \rightarrow 2} \mathbf{B}_l d\mathbf{l} = Bl. \quad (40.2)$$

Розглянутий контур охоплює сумарний струм $NI = nIl$, де n - число витків соленоїда, що припадає на одиницю довжини, I - сила струму в соленоїді. Отже, $B_l = \mu_0 nIl$ або

$$B = \mu_0 nI, \quad (40.3)$$

тобто поле всередині довгого соленоїда є всюди однаковим (однорідним). Спостереженням поля поблизу торців соленоїда зазвичай нехтують.

Оскільки дві половини нескінченного соленоїда в точці їх з'єднання вносять однаковий вклад в магнітне поле, то магнітна індукція напівнескінченного соленоїда була його краю вдвічі менше, ніж в об'ємі:

$$B = \frac{1}{2} \mu_0 nI. \quad (40.4)$$

Тороїдом називається кільцева котушка, витки якої намотані на каркас, який має форму тора (рис. 40.2). Обчислимо індукцію магнітного поля всередині замкнутої тороїдальної котушки. З умов симетрії випливає, що силові лінії магнітного поля тороїда повинні мати форму кіл, центри яких співпадають з центром тороїда. Візьмемо контур у вигляді кола радіуса $r_1 < r < r_2$ і обчислимо циркуляцію вектора магнітної індукції вздовж цього контура. З міркувань симетрії очевидно також, що вектор $\mathbf{B}$ в кожній точці силової лінії повинен бути спрямований по дотичній до контура (кола), а його модуль однаковий у всіх точках кола.

Тоді за теоремою про циркуляцію маємо

$$\oint_L \mathbf{B}_l d\mathbf{l} = B \cdot 2\pi r = \mu_0 IN,$$

де N - повне число витків, а I - струм в обмотці тороїда. Звідси

$$B = \frac{\mu_0 IN}{2\pi r} \quad (40.5).$$

Формула (40.5) показує, що поле тороїда залежить від відстані r до центра, тобто на відміну від поля соленоїда, не є однорідним. Магнітна індукція в торі максимальна поблизу внутрішньої

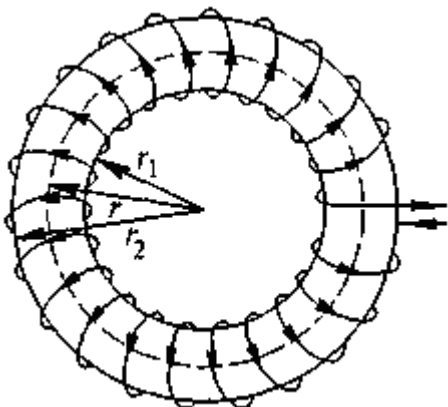


Рис. 40.2

сторони і мінімальна поблизу зовнішнього боку тора.

Якщо $r < r_1$, то коло радіуса r не охоплює провідників зі струмом, $\Sigma I_i = 0$, і за теоремою про циркуляцію (39.7) $B = 0$.

Якщо $r > r_2$, то коло радіуса r охоплює $2N$ провідників зі струмом, причому в N з них струм тече в одному напрямку, а в інших N - в протилежному. Тому $\Sigma I_i = 0$ і $B = 0$. Отже, поза тороїда магнітного поля немає.

§ 41. Потік вектора магнітної індукції

Аналогічно тому, як в електростатиці був введений потік вектора напруженості $\mathbf{E}$, введемо поняття потоку вектора магнітної індукції $\mathbf{B}$.

Потоком вектора $\mathbf{B}$ магнітної індукції або магнітним потоком через малу площадку dS називається фізична величина, що дорівнює добутку величини площадки і проекції B_n вектора на нормаль до цієї площадки, тобто

$$d\Phi_B = B_n dS. \quad (41.1)$$

Введемо в розгляд вектор $d\mathbf{S}$ - вектор площадки, спрямований перпендикулярно до площини площадки в напрямку зовнішньої нормалі і рівний за величиною площі цієї елементарної площадки (рис. 41.1).

Тоді елементарний магнітний потік через малу площадку dS можна записати як скалярний добуток векторів $\mathbf{B}$ і $d\mathbf{S}$:

$$d\Phi_B = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = B dS \cos \alpha = B_n dS, \quad (41.2)$$

де B_n - проекція вектора $\mathbf{B}$ на нормаль до площадки, $B_n = B \cos \alpha$, α - кут між нормаллю до площадки і напрямком магнітного поля (рис. 41.1).

Повний потік Φ_B вектора магнітної індукції через довільну поверхню S дорівнює алгебраїчній сумі потоків через всі малі ділянки цієї поверхні - інтегралу по поверхні:

$$\Phi_B = \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = \int_S B dS \cos \alpha = \int_S B_n dS = \int_S B dS_n. \quad (41.3)$$

В СІ одиниця магнітного потоку називається *вебер* (Вб). Магнітний потік в 1 Вб створюється магнітним полем з індукцією, рівною 1 Тл, через площу в 1 м², розташовану перпендикулярно до напрямку поля:

$$1 \text{ Вб} = 1 \text{ Тл} \cdot 1 \text{ м}^2.$$

Так само, як у випадку електричного поля, можна домовитися проводити стільки магнітних силових ліній через одиничну площадку, перпендикулярну напрямку поля, яка за числом в цьому місці магнітна індукція. Тоді магнітний потік набуває наочний образ - це повне число магнітних силових ліній, що проходять через дану поверхню.

Відсутність в природі магнітних зарядів призводить до того, що лінії вектора магнітної індукції $\mathbf{B}$ не мають ні початку, ні кінця - лінії магнітної індукції завжди замкнуті. Тому число ліній, що входять в певний об'єм простору, дорівнює числу ліній, що виходять з об'єму. Якщо вхідні потоки брати з одним знаком,

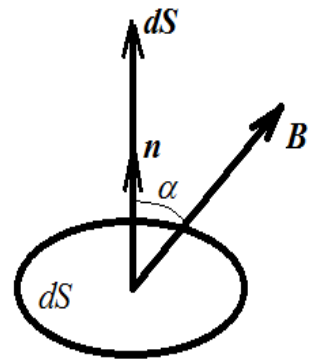


Рис. 41.1

а вихідні - з іншим, то сумарний потік вектора магнітної індукції через замкнену поверхню дорівнюватиме нулю.

Отже, **потік вектора магнітної індукції $\mathbf{B}$ через будь-яку замкнену поверхню дорівнює нулю**. Т.ч. для будь-якого магнітного поля і довільної замкнутої поверхні S виконується умова

$$\oint_S \mathbf{B}_n dS = 0 \quad (41.4)$$

Формула (41.4) виражає теорему Гаусса для вектора $\mathbf{B}$ і є інтегральною ознакою будь-якого вихрового векторного поля.

Продемонструємо справедливість теореми Гаусса для магнітного поля на **прикладі**.

Розглянемо відрізок прямого провідника зі струмом і знайдемо магнітний потік через замкнену поверхню, що охоплює його. В якості замкненої поверхні S візьмемо поверхню прямого кругового циліндра, вісь якого збігається з провідником (рис. 41.2). Лінії індукції магнітного поля прямого струму представляють собою концентричні кола, центри яких лежать на осі провідника, а площини перпендикулярні до осі. Тому лінії індукції не перетинають ні бічної поверхні циліндра, ні його основ. У будь-якій точці поверхні циліндра проекція вектора $\mathbf{B}$ на напрямок нормалі $\mathbf{n}$ до поверхні дорівнює нулю ($B_n = 0$), так що дійсно $\oint_S \mathbf{B}_n dS = 0$.

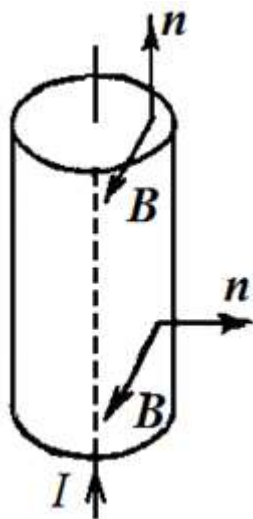


Рис. 41.2.

Для порівняння зазначимо, що електростатична теорема Гаусса стверджує, що потік вектора напруженості $\mathbf{E}$ електростатичного поля через замкнену поверхню визначається сумою електричних зарядів, розміщених усередині цієї поверхні. Рівність нулю магнітного потоку через довільну замкнену поверхню є рівноцінним утвердженню про відсутність в природі

магнітних зарядів.

§ 42. Робота при переміщенні провідника зі струмом в магнітному полі

Нехай прямолінійний провідник довжиною l , вздовж якого проходить струм силою I , поміщений в однорідне магнітне поле $\mathbf{B}$ перпендикулярно лініям магнітної індукції (рис. 42.1).

В такому випадку на нього з боку магнітного поля буде діяти відповідно до закону Ампера сила, модуль якої

$$F_A = IBl. \quad (42.1)$$

Напрямок сили легко визначити за допомогою правила лівої руки - при зазначених на рисунку напрямках струму і магнітного поля сила спрямована вправо. Під дією цієї сили провідник буде переміщатися (наприклад, за допомогою ковзних контактів) і пересунеться на деяку відстань dx .

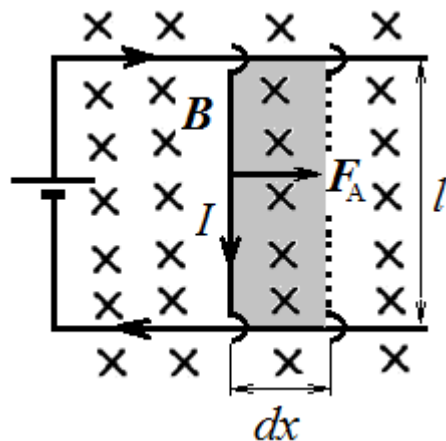


Рис. 42.1.

Визначимо роботу амперової сили на шляху dx :

$$dA = F_A dx = IBl dx$$

Добуток $l dx$ дорівнює заштрихованій на рис. 42.1 площі dS , а BdS – потоку магнітної індукції через цю площу:

$$dA = IB dS = I d\Phi. \quad (42.2)$$

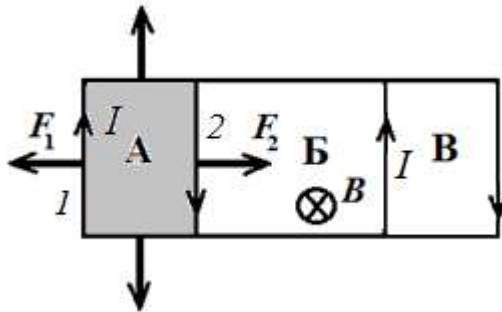


Рис. 42.2.

Робота при переміщенні провідника зі струмом в магнітному полі дорівнює добутку сили струму в провіднику на магнітний потік, що пересікається провідником під час його руху.

Необхідно підкреслити, що робота переміщення провідника із струмом в магнітному полі відбувається не за рахунок енергії магнітного поля, а за рахунок енергії джерела, що підтримує постійний струм в провід-

нику.

Нехай тепер замкнутий контур, для простоти прямокутної форми (рис. 42.2), з постійним струмом I переміщується в перпендикулярному до площини рисунка магнітному полі B (направленому «від нас» за рисунок) з положення A в положення B . Визначимо роботу переміщення.

Сили F_1 і F_2 , які діють на бічні ділянки контура, спрямовані в протилежні сторони і рівні за модулем. Робота сили F_2 є додатною, робота сили F_1 – від’ємною. Сили, що діють на верхній і нижній ділянки контура, роботи не виконують, тому що ці сили є перпендикулярними до переміщення. Сторона 2 перетинає під час руху магнітний потік через поверхні B і B , робота сили F_2 :

$$A_2 = I (\Phi_B + \Phi_B).$$

Відповідно, сторона 1 перетинає поверхні A і B , робота сили F_1

$$A_1 = - I (\Phi_A + \Phi_B).$$

результуюча робота

$$\begin{aligned} A = A_1 + A_2 &= I (\Phi_B + \Phi_B) - I (\Phi_A + \Phi_B) = I (\Phi_B - \Phi_A) = \\ &= I (\Phi_K - \Phi_{\Pi}) = I \Delta\Phi. \end{aligned} \quad (42.3)$$

Тут Φ_{Π} – магнітний потік через контур на *початку* переміщення, Φ_K – магнітний потік через контур в *кінці* переміщення, $\Delta\Phi$ – приріст потоку через контур. Можна довести, що ця формула є вірною для контура довільної форми в довільному постійному магнітному полі.

Робота переміщення замкнутого контура зі струмом в магнітному полі дорівнює добутку сили струму в контурі на приріст магнітного потоку через контур.

Приклад 42.1. В однорідному магнітному полі з індукцією $B = 0,01$ Тл розміщений перпендикулярно полю провідник довжиною $l = 8$ см, вздовж якого проходить струм $I = 5$ А. Визначити роботу A сили Ампера під час поступального переміщення провідника на відстань $x = 5$ см.

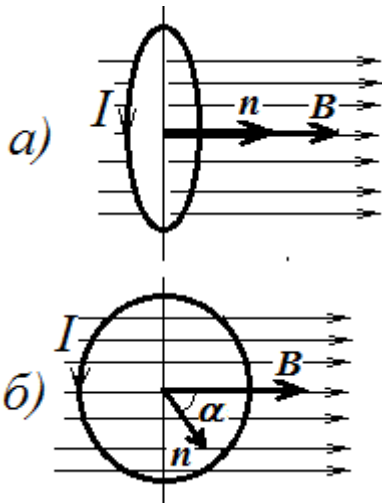


Рис. П.42.1.

Очевидно, що магнітний потік, що пересікається провідником під час його руху, $\Delta\Phi = Blx$. Тоді робота сил поля $A = IBlx = 0,2$ мДж.

Приклад 42.2. Круговий контур діаметром $d = 10$ см, вздовж якого проходить постійний струм $I = 2$ А, вільно встановився в однорідному магнітному полі з індукцією $B = 0,5$ Тл, перпендикулярно до площини контура. Яку роботу треба виконати, щоб повільно повернути виток на кут $\alpha = \pi/2$ навколо осі, що збігається з діаметром?

Зміна магнітного потоку в даному випадку

$$\Delta\Phi = \Phi_K - \Phi_\Pi = BS (\cos \alpha_K - \cos \alpha_\Pi)$$

У початковому положенні (рис. П.42,1 а) контур встановився вільно, і нормаль до площини контура утворює кут $\alpha_\Pi = 0$ з напрямом вектора магнітної індукції ($\cos \alpha_\Pi = 1$).

В кінцевому положенні (рис. П.42.1 б) кут між напрямом поля і нормаллю $\alpha_K = 90^\circ$, $\cos \alpha_K = 0$. Робота сил поля є від'ємною:

$$A = I (\Phi_K - \Phi_\Pi) = IBS (\cos \alpha_K - \cos \alpha_\Pi) = -IBS.$$

Робота зовнішніх сил дорівнює за модулем і є протилежною за знаком роботі сил поля:

$$A_{\text{зовніш}} = IBS = IB (\pi d^2 / 4) = 7,85 \text{ мДж.}$$

Умова повільності повороту є необхідною, щоб можна було знехтувати струмами індукції, що наводяться в контурі.

§ 43. Момент сил, що діють на контур зі струмом в однорідному магнітному полі

Розглянемо плоский прямокутний контур зі струмом I , який поміщений в однорідне магнітне поле з індукцією B (рис. 43.1). Контур може обертатися навколо вертикальної осі OO' . Позначимо через α кут між напрямом магнітного поля і напрямом нормалі до площини контура. Відповідно до закону Ампера сили, що діють на ділянки 1-4 і 2-3 контура, спрямовані вертикально, вони тільки деформують контур, прагнучи розтягнути його. Сили ж, що діють на ділянки 1-2 і 3-4 контура, визначаються виразом

$$F = IbB$$

і прагнуть повернути контур так, щоб його площа була перпендикулярна магнітному полю.

Т.ч. з боку магнітного поля на контур діє пара сил з моментом, що дорівнює, як видно з рис. 43.1 внизу (на нижньому рисунку показаний вид на контур зверху уздовж вертикальної осі):

$$M = Fh = IbB a \sin \alpha = BIS \sin \alpha,$$

де h - плече пари сил, $S = ab$ - площа контура. Напрямок по осі вгору - механічного моменту, що обертає контур, показано на рис. 43.1 (для заданого напрямку струму і магнітного поля).

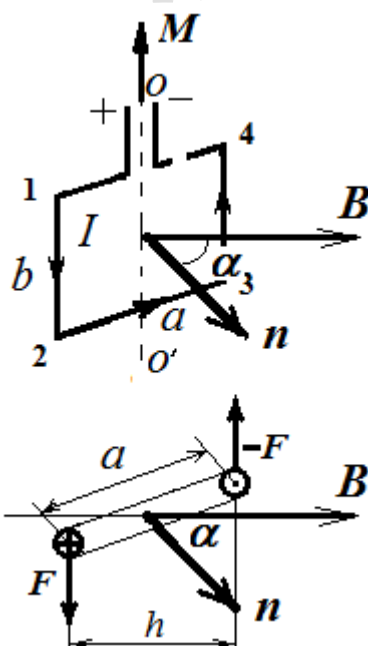


Рис. 43.1.

Величина, що чисельно дорівнює добутку сили струму I , що протікає в контурі, на площу контура S називається *магнітним моментом* p_m :

$$p_m = IS.$$

Таким чином, можна записати момент пари сил у вигляді

$$M = p_m B \sin \alpha, \quad (43.1)$$

Магнітний момент контура зі струмом - векторна величина. Напрямок магнітного моменту $\mathbf{p}_m$ збігається з напрямком позитивної нормалі до площини контура, який визначається правилом гвинта: якщо головку гвинта обертати в напрямі струму в контурі, то поступальний рух гвинта показує напрям вектора $\mathbf{p}_m$.

Вираз для моменту сил може бути записано в векторній формі

$$\mathbf{M} = [\mathbf{p}_m, \mathbf{B}]. \quad (43.2)$$

Можна показати, що ця формула справедлива для плоского контура будь-якої форми.

Під дією моменту $\mathbf{M}$ контур повертається так, щоб вектори $\mathbf{p}_m$ і $\mathbf{B}$ стали паралельними і однаково спрямованими. Це відповідає положенню стійкої рівноваги. Стан, при якому вектори є антипаралельними, нестійкий.

Під час повороту контура на малий кут $d\alpha$ навколо осі OO' (рис. 43.1) потрібно виконати проти сил, що діють на контур в магнітному полі, роботу

$$dA = M d\alpha = p_m B \sin \alpha d\alpha.$$

Ця робота витрачається на збільшення потенціальної енергії $W_{\text{пот}}$, яку має контур в магнітному полі. Дійсно, повертаючись в початкове положення, контур повертає витрачену на його поворот роботу.

$$dW_{\text{пот}} = M d\alpha = p_m B \sin \alpha d\alpha.$$

Інтегруючи, отримаємо

$$W_{\text{пот}} = - p_m B \cos \alpha + \text{const.}$$

Сталу можна прийняти рівною нулю (потенціальна енергія, як відомо, визначається з точністю до постійної величини).

Тоді потенціальна енергія запишеться у вигляді скалярного добутку

$$W_{\text{пот}} = - p_m B \cos \alpha = - \mathbf{p}_m \mathbf{B}. \quad (43.3)$$

Стійкій рівновазі, за якої потенціальна енергія мінімальна, відповідає випадок, коли магнітний момент орієнтований паралельно напрямку магнітного поля.

Приклад 43.1. Квадратний дротяний контур зі стороною $a = 5$ см може обертатися навколо вертикальної осі. Вздовж контура пропускають струм силою $I = 4$ А і поміщають в магнітне поле з індукцією $B = 0,01$ Тл. Контур утримують від повороту в положенні, при якому кут між нормаллю до площини контура і напрямом поля становить $\alpha_{\text{п}} = 45^\circ$ (П – початковий). Яку роботу необхідно виконати, щоб повернути контур в положення, коли зазначений кут складе $\alpha_{\text{к}} = 60^\circ$ (К – кінцевий)?

Робота зовнішніх сил, що долають дію амперових сил і повертають контур навколо вертикальної осі, піде на збільшення потенціальної енергії контура зі струмом в магнітному полі. Ситуація подібна закручуванню пружини. Закручуючи пружину, ми збільшуємо її потенціальну енергію. Отже, робота зовнішніх сил дорівнює приросту потенціальної енергії контура:

$$A_{\text{зовніш}} = \Delta W_{\text{пот}}.$$

Нагадаємо, що приріст будь-якої величини - це різниця між тим, що стало і тим, що було. Формула потенціальної енергії (з точністю до довільної сталої)

$$W_{\text{пот}} = - p_m B \cos \alpha.$$

З огляду на те, що магнітний момент контура зі струмом дорівнює $p_m = IS = Ia^2$, отримаємо

$$A_{\text{зовніш}} = \Delta W_{\text{пот}} = -p_m B \cos \alpha_k - (-p_m B \cos \alpha_{\text{п}}) = Ia^2 B (\cos \alpha_{\text{п}} - \cos \alpha_k) = 4 \cdot 25 \cdot 10^{-4} \cdot 0,01 (\cos 45^\circ - \cos 60^\circ) = 10^{-4} (\sqrt{2} / 2 - 1/2) = 20 \text{ (мкДж)}.$$

Контрольні запитання.

1. Який фізичний зміст вектора ***B*** магнітної індукції?
2. Відомо, що існують два види електричних зарядів - позитивні і негативні, які можна розділити просторово. Чи можна розділити магніт на два різноіменних полюси - північний і південний?
3. По двох паралельних прямих провідниках в одному напрямку проходять однакові струми. Чому дорівнює індукція магнітного поля в точці, розміщеній строго посередині відстані між провідниками? Яким буде поле, якщо струми мають протилежні напрями?
4. Як визначити напрям вектора магнітної індукції поля, що створюється рухомим зарядом в даній точці простору? Носії струму в провіднику беруть участь в тепловому русі, створюючи при цьому магнітні поля. Чому вони не враховуються?
5. Як повинен бути розміщений по відношенню до магнітного поля провідник зі струмом, щоб діюча на нього сила з боку поля була максимальною?
6. Чи можна виділити окремо (здійснити на досліді) елемент струму?
7. По двох паралельних прямих провідниках в одному напрямку проходять струми. Відомо, що такі провідники притягуються. Чи будуть притягатися два паралельних пучка електронів?
8. Провідник зі струмом електрично нейтральний, повний заряд його дорівнює нулю. Чому ж на нього діє магнітне поле?
9. По двох паралельних прямих провідниках проходять постійні струми. За рахунок якої енергії відбувається робота притягання або відштовхування провідників?
10. При русі контура зі струмом в постійному магнітному полі сили Ампера здійснюють роботу. За рахунок якої енергії відбувається ця робота?
11. Чим відрізняються взаємодії нерухомих зарядів і рухомих (наприклад, в провіднику, по якому тече струм)?
12. Чому сила Лоренца не виконує роботу?
13. Чому дорівнює і як спрямована сила, що діє з боку магнітного поля на рухомий заряд?
14. Пучок заряджених частинок влітає в магнітне поле. Траєкторії частинок є кола різного радіусу. Які характеристики частинок визначають розміри кіл? Чому одні частинки закручуються в одну сторону, інші - в іншу?
15. Який вид може мати має траєкторія електрона, якщо в тій області простору, де він рухається, існують: а) тільки електричне поле; б) тільки магнітне поле; в) одночасно обидва поля? Який вигляд має траєкторія електрона, що влетів в магнітне поле Землі з космосу?
16. Електрон в деякій області простору рухається прямолінійно. Чи свідчить це про відсутність магнітного поля в даній області простору?
17. Чим пояснюється синхронність руху іонів в дуантах і зміни електричного поля в зазорі між ними?
18. Як за допомогою явища Холла визначити тип домішкової провідності напівпровідників і концентрацію носіїв струму?
19. Чи може циркуляція вектора напруженості електричного поля бути відмінною від нуля?
20. Чим відрізняються циркуляції вектора напруженості електричного поля і вектора магнітної індукції? У чому полягає фізичний зміст такого відмінності?
21. Яке співвідношення є вираженням вихрового характеру магнітного поля?

22. Який фізичний зміст мають вирази $\oint E_l dl$ і $\oint B_l dl$?
23. Чому дорівнює потік вектора магнітної індукції через замкнену поверхню?
24. Чим відрізняються потоки вектора напруженості електричного поля і вектора магнітної індукції? У чому полягає фізичний зміст такої відмінності?
25. Рамка зі струмом орієнтована своїм магнітним моментом $\mathbf{p}_m$ по відношенню до магнітного поля: а) паралельно; б) антипаралельно; в) перпендикулярно. Яке становище рамки є становищем стійкої рівноваги?
26. Як діє однорідне магнітне поле на плоский замкнутий контур з струмом?

Глава 7. МАГНІТНЕ ПОЛЕ В РЕЧОВИНІ

§ 44. Намагнічення речовини

Як було зазначено раніше, джерелами магнітних полів є рухомі заряди. Будь-який рухомий заряд створює в навколишньому просторі магнітне поле. Тому магнітні поля можуть створюватися не тільки електричними струмами, що проходять в провідниках (струмами провідності або макрострумами), але і рухом електронів в атомах, іонах і молекулах речовини (молекулярними струмами або мікрострумами).

Рух електронів в атомах підпорядковується квантовим законам. Однак для пояснення багатьох магнітних явищ можна використовувати напівкласичну борівську модель атома.

За теорією Н. Бора електрони обертаються навколо атомних ядер по замкнених орбітах. Крім того, вони здійснюють обертання навколо власних осей подібно обертанням планет навколо своїх осей. З таким внутрішнім обертанням пов'язаний певний момент імпульсу, названий **спіном** електрона. Спіном володіють не тільки електрони, а й атомні ядра. Орбітальні і спинові обертання заряджених частинок аналогічні струмам і збуджують магнітні поля.

Квантова механіка замінила наочне уявлення про рух електронів по орбітах і про їх обертання навколо своїх осей більш загальною картиною руху. У цій картині не існує поняття траєкторії електрона. Хоча електрону в атомі не можна приписати рух по якійсь певній траєкторії (орбіті), термін «орбітальний рух» зберігся. Електрон має як магнітний момент, пов'язаний з рухом відносно атомного ядра (орбітальний магнітний момент), так і спиновий магнітний момент, пов'язаний з наявністю у нього власного моменту імпульсу (спіна).

Магнітний момент атома є векторною сумою магнітних моментів окремих електронів і може бути відмінний від нуля або дорівнювати нулю (тільки у атомів з парним числом електронів).

Магнітний момент атомного ядра приблизно в тисячі разів менше електронного магнітного моменту, оскільки важкі атомні ядра рухаються значно повільніше легких електронів. Тому магнітним моментом атомного ядра, як правило, нехтують, і відповідальними за магнітні властивості атомів виявляються електрони.

Внаслідок хаотичного теплового руху атомів їхні магнітні моменти у відсутності зовнішнього магнітного поля зазвичай орієнтовані хаотично. Збуджувані ними магнітні поля в навколишньому просторі компенсують одне одного.

При накладенні зовнішнього магнітного поля B_0 магнітні моменти атомів орієнтуються в напрямку цього поля, і тоді компенсація порушується. У таких випадках кажуть, що тіло є намагніченим.

Сучасні уявлення про природу магнетизму речовини добре узгоджуються з гіпотезою французького фізика А. Ампера, що була висунута ще в першій половині 19-го століття. Згідно з гіпотезою Ампера, магнітні властивості речовини обумовлені особливими молекулярними струмами, що проходять всередині молекул речовини.

Ці мікроскопічні молекулярні струми можуть повертатися в магнітних полях макрострумів, створюючи в тілі додаткове магнітне поле. Блискуча здогадка Ампера підтвердилася та доповнилася подальшим розвитком науки, починаючи з відкриття будови атомів і молекул.

Всі речовини здатні намагнічуватися, вони називаються **магнетиками**.

Коли речовина намагнічується, то виникає додаткове поле B' , яке додається з зовнішнім полем B_0 , так що, згідно з принципом суперпозиції, повне поле в речовині

$$B = B_0 + B' . \quad (44.1)$$

Для того, щоб характеризувати ступінь намагніченості речовини, вводиться поняття **вектора намагніченості J** .

Намагніченість називається величина, що дорівнює відношенню сумарного магнітного моменту атомів, що містяться в малому об'ємі ΔV речовини, до величини цього об'єму:

$$J = \frac{1}{\Delta V} \sum_{\Delta V} p_m , \quad (44.2)$$

тут ΔV - фізично нескінченно малий об'єм магнетика, p_m - магнітний момент окремого атома (молекули). Таким чином, намагніченість є магнітним моментом одиниці об'єму намагніченої речовини.

З формули (44.2) встановимо розмірність J . Оскільки розмірність магнітного моменту

$$[p_m] = [I] [S] = A \cdot m^2, \text{ то}$$

$$[J] = \frac{A \cdot m^2}{m^3} = \frac{A}{m} .$$

§ 45.1. Опис магнітного поля в речовині. Циркуляція вектора магнітної індукції в речовині. Напруженість магнітного поля. Магнітна сприйнятливість і магнітна проникність

У вакуумі магнітне поле створюють тільки макроструми, а в речовині - макроструми і мікроструми. Результуюче поле в будь-якому середовищі визначається

вектором магнітної індукції $\mathbf{B}$, яке має дві складові: поля $\mathbf{B}_0$, створюваного намагнічуючими струмами в вакуумі (макрострумами), і поля $\mathbf{B}'$ намагніченої речовини (мікрострумами):

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}'.$$

Узагальнимо закон повного струму для магнітного поля у вакуумі (39.7) на магнітне поле в речовині, тобто визначимо циркуляцію вектора $\mathbf{B}$.

Для поля в речовині в праву частину закону повного струму (39.7) має входити сума як струмів провідності, так і молекулярних струмів, що пронизують контур, тобто

$$\oint_L \mathbf{B} d\mathbf{l} = \mu_0 (\sum I_{\text{макро}} + \sum I_{\text{мол}}). \quad (45.1)$$

Тут $\sum I_{\text{макро}}$ і $\sum I_{\text{мол}}$ - алгебраїчні суми макро- і мікрострумів (молекулярних струмів), які охоплюються замкнутим контуром L , тобто результуючі макро- і мікроструми крізь поверхню, що натягнута на контур L .

Згідно з уявленнями класичної фізики, електрони в атомах рухаються по деяким замкнутим орбітам. Такий рух електрона еквівалентний замкнутому круговому струму (молекулярному струму).

Обчислимо алгебраїчну суму молекулярних струмів, що проходять через поверхню S , обмежену деякими контуром L (рис. 45.1).

Для *внутрішніх* точок поверхні S кожен молекулярний струм перетинає поверхню S двічі - в один бік і в інший в протилежних напрямках. Внесок такого струму в суму струмів дорівнює нулю (рис. 45.1, ліворуч).

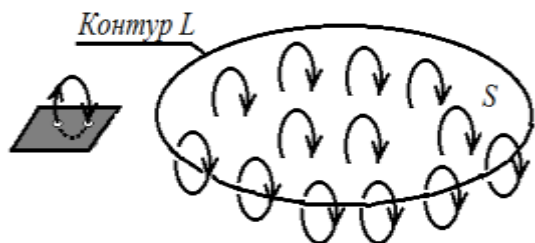


Рис. 45.1.

Для *прикордонних* точок поверхні S (рис. 45.1, праворуч) існують молекулярні струми, що огинають контур L поверхні, тобто перетинають поверхню тільки в одному напрямку, створюючи некомпенсований результуючий струм через поверхню.

Знайдемо суму молекулярних струмів, які обвиваються навколо контура, як кажуть, «нанизаних» на контур L . Позначимо через α кут між вектором $d\mathbf{l}$ малого елемента замкнутого контура L і вектором намагніченості $\mathbf{J}$ (рис. 45.2). На елемент $d\mathbf{l}$ контура «нанизані» молекулярні струми всіх молекул, що знаходяться в об'ємі косої циліндра з твірною $d\mathbf{l}$ і основою, яка дорівнює $S_{\text{мол}}$ ($S_{\text{мол}}$ - площа, що охоплюється окремим молекулярним струмом). Об'єм косої циліндра $S_{\text{мол}} d\mathbf{l} \cos \alpha$. Якщо n - число молекул в одиниці об'єму, то сумарний струм, що охоплюється елементом $d\mathbf{l}$ дорівнює:

$$n I_{\text{мол}} S_{\text{мол}} d\mathbf{l} \cos \alpha.$$

За визначенням магнітний момент окремого кругового струму

$$p_{\text{м}} = I_{\text{мол}} \cdot S_{\text{мол}}.$$

Тоді намагніченість або магнітний момент одиниці об'єму (за модулем)

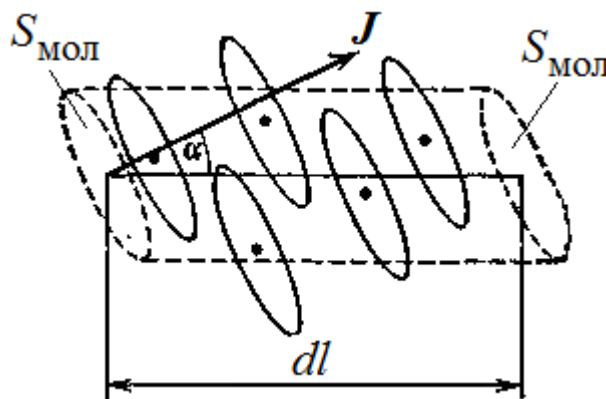


Рис. 45.2.

$$J = n I_{\text{мол}} S_{\text{мол}}, \quad (45.2)$$

а вираз $n I_{\text{мол}} S_{\text{мол}} \cos \alpha$ дає проекцію J_l вектора $\mathbf{J}$ на напрям елемента $d\mathbf{l}$.

Отже, на елемент $d\mathbf{l}$ «нанизаний» молекулярний струм $J_l d\mathbf{l}$, а на весь контур L «нанизані» молекулярні струми

$$\sum I_{\text{мол}} = \oint_L J_l d\mathbf{l} = \oint_L \mathbf{J} d\mathbf{l}. \quad (45.3)$$

Тепер вираз (45.1) для закону повного струму в речовині набуде вигляду

$$\oint_L \mathbf{B} d\mathbf{l} = \mu_0 \sum I_{\text{макро}} + \mu_0 \oint_L \mathbf{J} d\mathbf{l}.$$

Розділивши на μ_0 і об'єднавши обидві циркуляції, отримаємо

$$\oint_L \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{J} \right) d\mathbf{l} = \sum I_{\text{макро}}. \quad (45.4)$$

Вираз спрощується, якщо ввести допоміжну величину

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{J}. \quad (45.5)$$

Ця допоміжна величина $\mathbf{H}$ називається **напруженістю магнітного поля**.

Її циркуляція визначається тільки макроскопічними струмами:

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = \oint_L \mathbf{H}_l d\mathbf{l} = \sum I_{\text{макро}}. \quad (45.6)$$

Тобто **циркуляція вектора напруженості магнітного поля вздовж довільного замкненого контура дорівнює алгебраїчній сумі струмів провідності, які пронизують цей контур**.

Одиницею напруженості магнітного поля є ампер на метр (А/м). У техніці використовується також позасистемна одиниця – ерстед. $1 \text{ E} \approx 79,58 \text{ А/м}$.

Як показує дослід, для досить слабких магнітних полів і більшості речовин, що зустрічаються в природі, залежність $\mathbf{J}$ від $\mathbf{H}$ має лінійний характер

$$\mathbf{J} = \chi \mathbf{H}. \quad (45.7)$$

Коефіцієнт пропорційності χ називається **магнітною сприйнятливістю** даної речовини.

Оскільки $\mathbf{J}$ і $\mathbf{H}$ мають однакову розмірність, χ є безрозмірною величиною. Магнітна сприйнятливість χ характеризує здатність речовини намагнічуватися в зовнішньому магнітному полі.

Для вакууму $\chi = 0$, а для будь-якої речовини $\chi \neq 0$, тобто всі речовини здатні намагнічуватися і тому є магнетиками. Для одних речовин (**діамагнетиків**) $\chi < 0$ (тобто напрям $\mathbf{J}$ є протилежним $\mathbf{H}$ і зовнішнє поле в діамагнетиках послаблюється).

Для інших – (**парамагнетиків**) $\chi > 0$ (тобто напрям $\mathbf{J}$ і $\mathbf{H}$ збігаються і зовнішнє поле посилюється).

З рівності (45.5) випливає $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{J}$, тобто магнітне поле в магнетикі складається з зовнішнього магнітного поля $\mu_0 \mathbf{H}$ і магнітного поля намагніченого магнетика $\mu_0 \mathbf{J}$. З урахуванням (45.7) цю рівність можна переписати так:

$$\mathbf{B} = \mu_0 (1 + \chi) \mathbf{H},$$

і матеріальне рівняння для магнітного поля набуває вигляду

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H}. \quad (45.8)$$

Безрозмірна величина

$$\mu = (1 + \chi) \quad (45.9)$$

називається **магнітною проникністю** речовини.

Магнітна проникність μ - макроскопічний параметр, матеріальна константа, яка характеризує магнітні властивості різних магнетиків. Магнітну проникність μ визначають експериментально.

Опис магнітного поля в термінах векторів $\mathbf{B}$ і $\mathbf{H}$ дозволяє не розглядати молекулярних струмів. Для однорідного середовища формули закону Біо-Савара-Лапласа та ін. можуть бути отримані заміною в них μ_0 на $\mu_0 \mu$:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 \mu I}{4\pi} \int_L \frac{[d\mathbf{l}, \mathbf{r}]}{r^3} \text{ і т.д.}$$

Щоб з'ясувати фізичний зміст напруженості магнітного поля $\mathbf{H}$ і магнітної проникності μ , розглянемо магнетик у вигляді кругового циліндра, внесеного в однорідне зовнішнє магнітне поле з індукцією $\mathbf{B}_0$ і розташованого вздовж зовнішнього поля (рис. 45. 3, ліворуч).

Під дією поля молекулярні струми встановлюються так, що їх магнітні моменти напрямлені вздовж осі циліндра, а площині струмів стануть перпендикулярними до цієї осі. Розглянемо молекулярні струми, що лежать в одному з поперечних перерізів циліндра (рис. 45.3, праворуч).

Молекулярні струми сусідніх молекул в місцях їхнього зіткнення напрямлені протилежно і урівноважуються. Нескомпенсованими залишаються тільки молекулярні струми, що виходять на зовнішню бічну поверхню циліндра. Ці струми складаються в макроскопічний поверхневий струм, що циркулює по боковій поверхні циліндра.

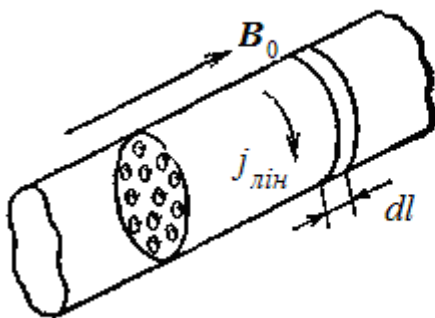
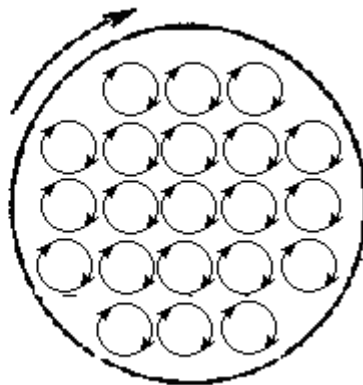


Рис. 45.3



Позначимо лінійну густину поверхневого струму через $j_{\text{лін}}$. Струм, що проходить по боковій поверхні циліндра, подібний до струму в соленоїді з числом ампер-витків $nI = j_{\text{лін}}$. Магнітна індукція всередині такого соленоїда визначається формулою (40.3):

$$\mathbf{B}' = \mu_0 j_{\text{лін}}. \quad (45.10)$$

За правилом правого гвинта напрямком $\mathbf{B}'$ збігається з напрямком $\mathbf{B}_0$. Поза циліндра $\mathbf{B}' = 0$.

Виділимо в циліндрі перпендикулярно до його осі шар товщиною dl (рис. 45.3). Молекулярні струми, розміщені в цьому шарі, є еквівалентними круговому струму силою $j_{\text{лін}} dl$. За визначенням магнітного моменту кругового струму

$$dp_m = j_{\text{лін}} S dl,$$

де S - площа поперечного перерізу циліндра. Розділивши dp_m на об'єм шару $dV = S dl$, отримаємо магнітний момент одиниці об'єму – намагніченість циліндра:

$$J = j_{\text{лін}}. \quad (45.11)$$

Таким чином, модуль намагніченості циліндра дорівнює лінійній густині молекулярного струму, що обтікає циліндр.

Тоді додаткове поле $\mathbf{B}'$, що створюється молекулярними струмами

$$\mathbf{B}' = \mu_0 \mathbf{J}. \quad (45.12)$$

Додавши вектори $\mathbf{B}_0$ і $\mathbf{B}'$, знайдемо магнітну індукцію результуючого поля всередині циліндра

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}' = \mathbf{B}_0 + \mu_0 \mathbf{J}$$

Підстановка цього виразу в формулу (45.5) дає напруженість поля всередині циліндра

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{J} = \frac{\mathbf{B}_0}{\mu_0} = \mathbf{H}_0. \quad (45.13)$$

Отже, напруженість поля в циліндрі співпадає з напруженістю зовнішнього поля. В даному прикладі напруженість магнітного поля не залежить від магнітних властивостей середовища. У речовині напруженість магнітного поля $\mathbf{H}$ визначає той вклад в магнітну індукцію $\mathbf{B}$, який дають зовнішні джерела поля (макроструми, інші магніти і т.д.).

Якщо, наприклад, поле створюється котушкою зі струмом, в яку вставлене залізне осердя, то напруженість магнітного поля $\mathbf{H}$ всередині осердя має фізичний зміст зовнішнього поля і може бути розрахована, виходячи з геометрії котушки і струму в ній. Напруженість $\mathbf{H}$ збігається з точністю до постійного розмірного коефіцієнта μ_0 з вектором $\mathbf{B}_0$, який був би створений цією котушкою при відсутності осердя.

Помноживши $\mathbf{H}$ на $\mu_0 \mu$, отримаємо магнітну індукцію всередині циліндра:

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H} = \mu_0 \mu \frac{\mathbf{B}_0}{\mu_0} = \mu \mathbf{B}_0. \quad (45.14)$$

Звідси випливає, що *магнітна проникність μ показує, у скільки разів посилюється поле в магнетикі*.

Примітка. Отримане трактування напруженості справедливе лише в тих випадках, коли однорідний і ізотропний магнетик заповнює весь об'єм, обмежений поверхнями, які утворені лініями вектора $\mathbf{B}_0$.

§ 45.2. Граничні умови на межі поділу двох магнетиків

Розглянемо магнітне поле на межі поділу двох магнетиків з різними магнітними проникностями μ_1 і μ_2 . Щоб знайти, як змінюється магнітне поле на цій межі, ми скористаємося теоремою Гаусса для магнітного поля і теоремою про циркуляцію вектора напруженості $\mathbf{H}$.

Згідно з теоремою Гаусса потік вектора магнітної індукції $\mathbf{B}$ через будь-яку замкнену поверхню завжди дорівнює нулю:

$$\oint_S \mathbf{B}_n dS = 0.$$

Виберемо поверхню S у вигляді паралелепіпеда, основи якого лежать по різні боки межі поділу магнетиків (рис. 45.4). Одна з основ лежить в середовищі 1 з магнітною проникністю μ_1 , а інша - в середовищі 2 з магнітною проникністю μ_2 . Якщо спрямувати висоту h паралелепіпеда до нуля, то потік вектора $\mathbf{B}$ через бічну

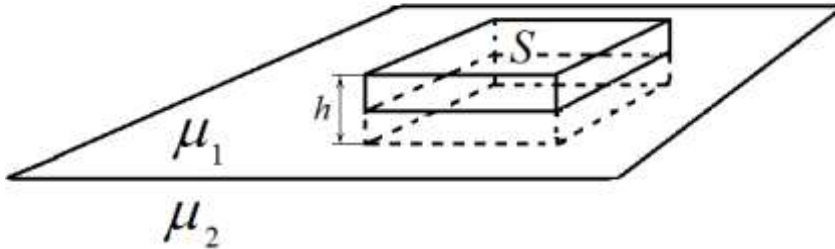


Рис. 45.4.

поверхню паралелепіпеда також виявиться нескінченно малим, і ми отримаємо повний потік, тобто різницю потоків через верхню і нижню грані:

$$B_{1n}S - B_{2n}S = 0.$$

де S - площа основи.

Це дає

$$B_{1n} = B_{2n}. \quad (45.15)$$

Розглянемо тепер невеликий прямокутний контур на межі поділу двох магнетиків, одне ребро якого довжиною a лежить в середовищі 1, а інше - в середовищі 2 (рис. 45.5). Обчислимо для нього циркуляцію вектора $\mathbf{H}$. Ширину контура b візьмемо настільки малою, щоб внеском в циркуляцію сторін, перпендикулярних до межі поділу, можна було знехтувати. Тоді для циркуляції отримуємо:

$$\oint_L \mathbf{H}_l dl = (H_{2\tau} - H_{1\tau})a$$

де H_τ - модуль тангенціальної складової вектора $\mathbf{H}$.

Оскільки контур не охоплює струмів провідності, то відповідно до теореми про циркуляцію вектора напруженості $\mathbf{H}$ циркуляція має бути рівною нулю, тому:

$$H_{1\tau} = H_{2\tau}. \quad (45.16)$$

Таким чином, на межі поділу двох магнетиків нормальна складова магнітної індукції і тангенціальна складова напруженості магнітного поля залишаються неперервними, а тангенціальна складова магнітної індукції і нормальна складова напруженості магнітного поля терплять розрив.

Технічні застосування законів магнетостатики. У пристроях сучасної електротехніки - електромагнітах, генераторах електричного струму, електродвигунах і т.д. - широко використовують магнітні потоки.

На практиці часто виникає потреба визначення магнітного поля в зазорі між полюсами електромагніту. У зображеному на рис. 45.6 електромагніті магнітне поле направлене вздовж осі залізного осердя, так що на межі між осердям і повітряним зазором вектор $\mathbf{B}$ спрямований за нормаллю

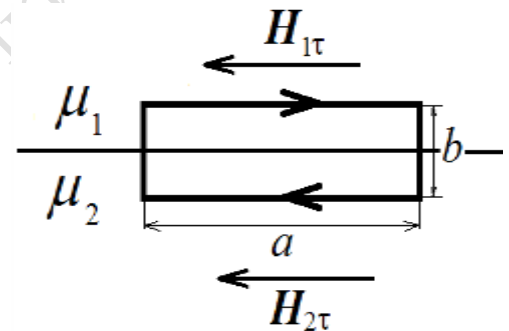


Рис. 45.5

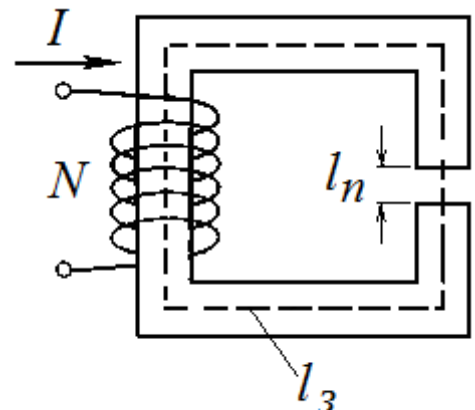


Рис. 45.6

до поверхні поділу. Відповідно до формули (45.15) це означає, що магнітна індукція в осерді і магнітна індукція в зазорі однакові за величиною.

Застосуємо тепер теорему про циркуляцію вектора $\mathbf{H}$ до контура, що проходить вздовж осі осердя. Повний струм, що охоплюється контуром, дорівнює NI , де N - число витків обмотки електромагніта, а I - сила струму в ній. Позначимо через l_z і l_n довжини ділянок контура, що проходять відповідно через залізне осердя і через повітряний зазор. Маючи на увазі, що напруженість магнітного поля в осерді дорівнює $H_z = B/(\mu_0 \mu_z)$, де μ_z - магнітна проникність заліза, а напруженість магнітного поля в зазорі дорівнює $H_n = B/(\mu_0 \mu_n)$, де μ_n - магнітна проникність речовини в зазорі, ми можемо записати теорему про циркуляцію вектора $\mathbf{H}$:

$$\oint_L \mathbf{H}_l d\mathbf{l} = H_z l_z + H_n l_n = NI,$$

або

$$\frac{B}{\mu_0 \mu_z} l_z + \frac{B}{\mu_0 \mu_n} l_n = NI.$$

Звідси

$$B = \frac{NI}{\frac{l_z}{\mu_0 \mu_z} + \frac{l_n}{\mu_0 \mu_n}}. \quad (45.17)$$

Останню формулу можна перетворити. Зазвичай довжина l_z осердя електромагніта буває близько 1 м, довжина повітряного зазору l_n - порядку декількох сантиметрів, магнітна проникність повітря $\mu_n = 1$ з великою точністю, а магнітна проникність заліза μ_z порядку декількох тисяч. Тому першим доданком в знаменнику формули (45.17) можна знехтувати. тоді

$$B \approx \frac{\mu_0 NI}{l_n}. \quad (45.18)$$

Збільшуючи число витків N електромагніта і зменшуючи розміри повітряного зазору l_n , можна отримати поля з великим значенням B . Нагадаємо, що значення магнітної індукції B , отримане в лабораторіях, має порядок декількох тесла.

Приклад 45.1. Електромагніт, зображений на рис. 45.6, має наступні параметри: магнітна проникність заліза $\mu_z = 2000$, довжина повітряного зазору $l_n = 5$ мм, число витків в обмотці $N = 1200$. Який струм I має проходити вздовж обмотки, щоб магнітна індукція в зазорі становила $B = 1,5$ Тл?

Користуючись формулою (72.18), знаходимо

$$I = \frac{Bl_n}{\mu_0 N} = \frac{1,5 \cdot 5 \cdot 10^{-3}}{4 \cdot 3,14 \cdot 10^{-7} \cdot 1,2 \cdot 10^3} \approx 5 \text{ А}.$$

§ 46. Природа молекулярних струмів. Магнітні властивості атомів

Використовуємо модель атома Н.Бора. Електрон, що рухається в атомі по коловій орбіті (рис 46.1), можна умовно порівняти з контуром зі струмом і вважати, що електрон утворює коловий струм.

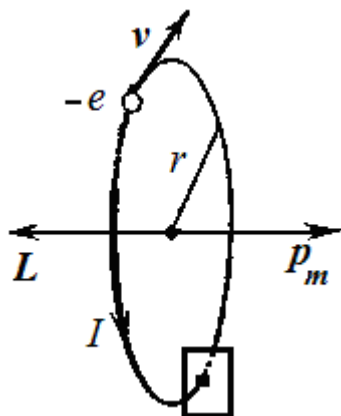


Рис. 46.1.

Уявімо собі площадку, що перетинає орбіту електрона і є перпендикулярною до орбіти. За визначенням сила струму дорівнює заряду, що переноситься через площадку за одну секунду. За 1 с через неї буде перенесений заряд $I = ev$, де e – заряд електрона, v – число обертів електрона в секунду. Отже, магнітний момент такого контура дорівнює

$$p_m = IS = ev \pi r^2, \quad (46.1)$$

де r – радіус електронної орбіти. Зв'яжемо p_m зі швидкістю електрона $v = \frac{2\pi r}{T} = 2\pi r \nu$ (T – період обертання електрона), отримаємо звідси $\pi r \nu = \frac{v}{2}$, підставляючи у вираз для

p_m , отримаємо:

$$p_m = \frac{evr}{2}. \quad (46.2)$$

Ця величина називається **орбітальним магнітним моментом електрона**. На рис. 46.1 електрон рухається за годинниковою стрілкою, а струм направлений в протилежний бік – проти годинникової стрілки, тому що заряд електрона негативний. Напрямок вектора p_m утворює з напрямком струму правогвинтову систему. Вектор p_m спрямований перпендикулярно площині орбіти на рис. 46.1 управо.

З іншого боку, електрон, що рухається по орбіті, має момент імпульсу

$$L = m_e v r,$$

де m_e – маса електрона. Вектор L називають **орбітальним механічним моментом електрона**. Він також утворює з напрямком руху електрона правогвинтову систему. Вектор L спрямований перпендикулярно до площини орбіти на рис. 46.1 вліво.

Отже, для електрона (як негативно зарядженої частинки) напрями векторів p_m і L протилежні.

Відношення магнітного моменту елементарної частинки до її механічного моменту називається **магнітомеханічним** (або **гіромагнітним**) **відношенням**. Для орбітального руху електрона воно дорівнює

$$\frac{p_m}{L} = -\frac{e}{2m_e}. \quad (46.3)$$

Знак мінус вказує на те, що напрями моментів є протилежними.

Крім орбітальних моментів електрон має **власний механічний** L_s і **магнітний** $p_{m,s}$ моменти, для яких **магнітомеханічне** відношення в два рази більше:

$$\frac{p_{m,s}}{L_s} = -\frac{e}{m_e}. \quad (46.4)$$

Власний механічний момент (**спін**) і пов'язаний з ним власний (спіновий) магнітний момент є невід'ємними властивостями елементарних частинок, як і їх маса і заряд. Спін має квантову природу і не пов'язаний з переміщенням частинки як цілого. У дуже грубому наближенні його пов'язують з обертанням частинки навколо власної осі.

Спін елементарних частинок (в проекції на напрям зовнішнього магнітного поля $\mathbf{B}_0$) виявляється цілим або напівцілим кратним фундаментальної постійної фізики – постійної Планка $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$.

Зокрема, ця проекція вектора L_s для електрона дорівнює $\frac{\hbar}{2}$, тому зазвичай говорять, що спін електрона дорівнює половині. Відповідно, власний магнітний момент електрона (в проекціях на напрям $\mathbf{B}_0$) дорівнює

$$p_{m,s} = -\frac{e}{m_m} L_s = -\frac{e\hbar}{2m_e}. \quad (46.5)$$

Величину $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 0,927 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/Тл}$ називають магнетоном Бора. Отже,

власний магнітний момент електрона дорівнює одному магнетону Бора.

Як показується в квантовій теорії Бора, орбітальний механічний момент може приймати значення, кратні постійної Планка: $L = n\hbar$, $n = 1, 2, \dots$. З урахуванням (46.3) отримуємо, що найменший відмінний від нуля орбітальний магнітний

момент дорівнює $|p_m| = \frac{e\hbar}{2m_e} = \mu_B$. Таким чином, *магнетон Бора – найменша одиниця магнітного моменту, «квант» магнітного моменту.*

Як бачимо, магнітний момент електрона складається з орбітального і спінового магнітних моментів. Результируючий магнітний момент атома утворюється в результаті векторного додавання магнітних моментів всіх елементарних частинок, що містяться в атомі. Як уже зазначалося, магнітні моменти ядер в тисячі разів менше магнітних моментів електронів, тому ними нехтують. Тому загальний магнітний момент атома (молекули) $\mathbf{p}_a$ дорівнює векторній сумі магнітних моментів (орбітальних і спінових) електронів, що входять в атом (молекулу)

$$\mathbf{p}_a = \Sigma \mathbf{p}_m + \Sigma \mathbf{p}_{ms}. \quad (46.6)$$

§ 47. Діа- і парамагнетизм

Всі речовини є магнетиками – при внесенні їх у зовнішнє магнітне поле вони намагнічуються, тобто створюють своє власне магнітне поле, що накладається на зовнішнє поле.

За своїм магнітними властивостями магнетики поділяються на три основні групи:

- 1) *діамагнетики*, у яких магнітна сприйнятливість χ від'ємна і є малою за модулем, $\chi < 0$, $|\chi| \ll 1$, $|\chi| \sim 10^{-6} - 10^{-9}$, а магнітна проникність $\mu < 1$;
- 2) *парамагнетики*, у яких χ теж мала, але додатна, $\chi > 0$, $\chi \sim 10^{-3} - 10^{-6}$, $\mu > 1$;
- 3) *магнітовпорядковані речовини* (феро-, антиферо-, і ферімагнетики) у яких χ додатна, $\chi > 0$ і сягає дуже великих значень, $\chi \gg 1$, $10^2 < \chi < 10^5$, $\mu \gg 1$.

Діамагнетики — речовини, які під час внесення їх у зовнішнє магнітне поле дуже слабо намагнічуються проти напрямку цього поля.

Діамагнетики складаються з таких частинок (атомів, іонів, молекул), в яких під час відсутності зовнішнього магнітного поля магнітний момент атома (сума спінових і орбітальних магнітних моментів) дорівнює нулю.

Розглянемо, що відбувається з атомами діамагнетика в зовнішньому магнітному полі. Оскільки електрон в атомі можна уподібнити до коловому струму, що характеризується магнітним моментом $\mathbf{p}_m$, то під час внесення атома в зовнішнє магнітне поле на електрон, що рухається по орбіті, почне діяти обертальний момент

$$\mathbf{M} = [\mathbf{p}_m, \mathbf{B}_0],$$

який прагне встановити орбітальний момент електрона $\mathbf{p}_m$ у напрямку поля $\mathbf{B}_0$ (рис. 47.1). Під дією цього моменту $\mathbf{M}$ вектор орбітального моменту електрона $\mathbf{p}_m$ буде прецесувати навколо напрямку вектора магнітної індукції $\mathbf{B}_0$, тобто отримає додаткове рівномірне обертання, при якому вектор $\mathbf{p}_m$ стане описувати конус навколо напрямку $\mathbf{B}_0$ (рис. 47.1). Таким чином, вектор $\mathbf{p}_m$, що є перпендикулярним до площини електронної орбіти, зберігає незмінний кут α нахилу до зовнішнього поля і обертається навколо $\mathbf{B}_0$ з деякою кутовою швидкістю. Цей рух нагадує прецесію осі дзиги навколо вертикальної осі в полі сили тяжіння.

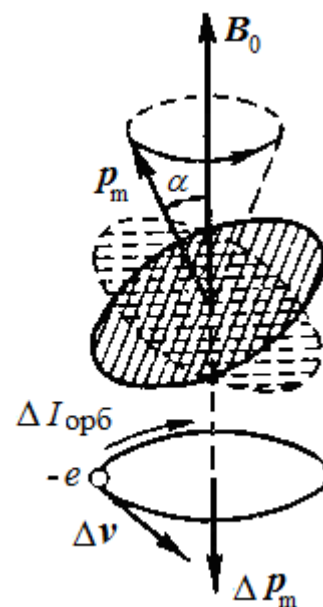


Рис. 47.1.

Частота прецесії електронної орбіти

$$\Omega = eB/(2m_e), \quad (47.1)$$

яку називають *ларморівською* частотою, не залежить ані від кута нахилу орбіти електрона до вектора $\mathbf{B}_0$, ані від радіуса орбіти або швидкості електрона і, отже, для всіх електронів є однаковою.

Прецесія електронної орбіти створює додатковий рух електрона в зовнішньому магнітному полі $\mathbf{B}_0$. Це рух, як і будь-який рух зарядів, призводить до виникнення *індукованого магнітного моменту*, причому, в даному випадку, спрямованого проти поля.

На рис. 47.1 показано прецесійний рух електрона і його орбітального магнітного моменту $\mathbf{p}_m$. Прецесійний рух електрона створює індукований орбітальний магнітний момент $\Delta \mathbf{p}_m$, протилежний за напрямом до вектора $\mathbf{B}_0$.

Отже, у діамагнітних речовин в зовнішньому магнітному полі B_0 виникає індуковане магнітне поле B' , яке є протилежним за напрямом та послаблює зовнішнє поле:

$$B = B_0 - B',$$

тобто магнітна сприйнятливість $\chi < 0$, а магнітна проникність $\mu < 1$.

До діамагнетиків відносяться інертні гази, азот, водень, багато металів: вісмут Bi, цинк Zn, мідь Cu, золото Au, срібло Ag, вода, смоли, скло, мармур, сіліцій Si, фосфор P, також багато інших, як органічних, так і неорганічних з'єднань. Людина в магнітному полі поводить себе як діамагнетик.

Приклад 47.1. Наведемо значення магнітної сприйнятливості для деяких діамагнетиків.

Діамагнетик	Магнітна сприйнятливість, χ
N ₂ (газ)	$-6,75 \cdot 10^{-9}$
Bi	$-1,5 \cdot 10^{-4}$
Au	$-2,9 \cdot 10^{-5}$
Cu	$-1 \cdot 10^{-5}$
H ₂ O	$-7 \cdot 10^{-6}$

Можна показати на досліді, що намагнічування діамагнетика відбувається проти зовнішнього поля. Підвішений між полюсами сильного електромагніта невеликий вісмутівий стрижень (рис. 47.2) намагнічується так, що північний полюс діамагнетика виявляється навпроти північного полюса магніту, а південний - навпроти південного. В результаті діамагнетик слабо виштовхується з магнітного поля. Стрижень встановлюється перпендикулярно полю.

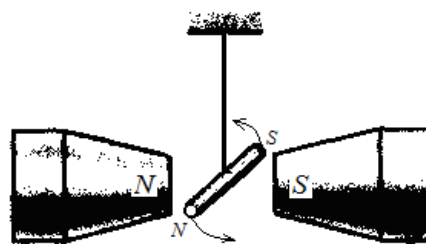


Рис. 47.2.

Парамагнетики - також є слабوماгнітними речовинами, але вони намагнічуються вздовж поля. У парамагнетиків векторна сума орбітальних та спінових моментів електронів не дорівнює нулю, тому молекули парамагнітної речовини мають власне магнітне поле.

Якщо зовнішнє магнітне поле відсутнє, ці магнітні мікрополя молекул тепловим рухом орієнтовані в просторі хаотично, і тому сумарне магнітне макрополе парамагнетика дорівнює нулю.

Під час внесення парамагнітної речовини в зовнішнє магнітне поле B_0 у електронів речовини, також як у діамагнетиків, виникає ларморовська прецесія. Однак зовнішнє магнітне поле не тільки індукує додатковий магнітний момент Δp_m , а й орієнтує власний момент атомів.

Спрямований вздовж поля магнітний момент, що виникає при цьому, виявляється набагато більшим, ніж індукований магнітний момент Δp_m , який спрямований проти поля.

В результаті сумарне власне магнітне поле парамагнетика B' стає відмінним від нуля і направлене вздовж зовнішнього поля B_0 .

Отже, парамагнетик, поміщений в зовнішнє магнітне поле, підсилює це поле:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}',$$

магнітна сприйнятливість парамагнетика $\chi > 0$ і магнітна проникність $\mu > 1$.

Парамагнітний ефект залежить від температури, оскільки тепловий рух атомів і молекул порушує переважну орієнтацію магнітних моментів в зовнішньому магнітному полі. П. Кюрі експериментально встановив закон залежності магнітної сприйнятливості парамагнетиків від температури

$$\chi = \frac{C}{T}, \quad (47.2)$$

де C - постійна Кюрі, що залежить від речовини, T - абсолютна температура.

Під час внесення парамагнітного зразка (наприклад, магнієвого стрижня) в поле сильного електромагніта, він встановлюється уздовж поля і слабо притягається до найближчого полюсу (рис. 47.3).

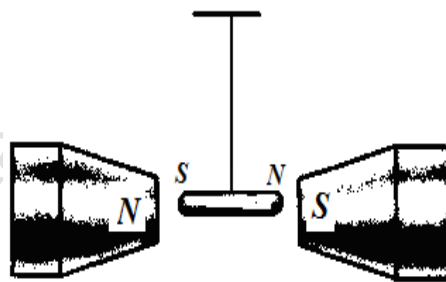


Рис. 47.3.

До парамагнетиків відносяться лужноземельні і лужні метали - натрій Na, калій K, кальцій Ca, а також платина Pt, алюміній Al, з газів - кисень O_2 .

Приклад 47.2. Наведемо значення магнітної сприйнятливості для деяких парамагнетиків.

Парамагнетик	Магнітна сприйнятливість, χ
O_2 (рідкий)	$3,6 \cdot 10^{-3}$
Pt	$2,5 \cdot 10^{-4}$
Al	$2,4 \cdot 10^{-3}$
O_2 (газ)	$1,5 \cdot 10^{-6}$

§ 48. Магнітовпорядковані речовини (феро -, антиферо-, ферімагнетики)

На відміну від діа- і парамагнетиків, які називаються слабوماгнітними речовинами, існують сильномагнітні речовини – феромагнетики.

Феромагнетиками називаються речовини, в яких власне (внутрішнє) магнітне поле в сотні і тисячі разів сильніше зовнішнього магнітного поля, що зумовило намагнічення. Феромагнетики мають самодовільну намагніченість, тобто вони можуть залишатися намагніченими навіть за відсутності зовнішнього магнітного поля.

До феромагнетиків відносяться кристали, побудовані з атомів перехідних елементів (атомів з недобудованими внутрішніми електронними шарами): залізо Fe (від якого походить назва «феромагнетизм»), нікель Ni, кобальт Co, гадоліній Gd, їх оксиди і сульфід, сплави з неферомагнітних компонентів на основі марганцю і хрому та ін.

Відповідальними за велику величину намагніченості феромагнетиків є власні (спінові) магнітні моменти електронів, що належать іонам кристалічної ґратки.

За певних умов в кристалах можуть виникати сили, які змушують спінові магнітні моменти електронів розміщуватися паралельно один одному. Походження цих сил є чисто квантово-механічний ефектом, обумовленим хвильовими властивостями електронів. В результаті будь-яке феромагнітне тіло виявляється розбитим на малі області *спонтанного (самодовільного) намагнічення*, які називають **доменами**. Домени мають розміри приблизно 1 – 10 мкм.

У межах кожного домена феромагнетик спонтанно намагнічений до границі і має певний магнітний момент. Напрямки цих моментів для різних доменів є різними (рис. 48.1). Стрілками тут умовно зображені магнітні моменти електронів.

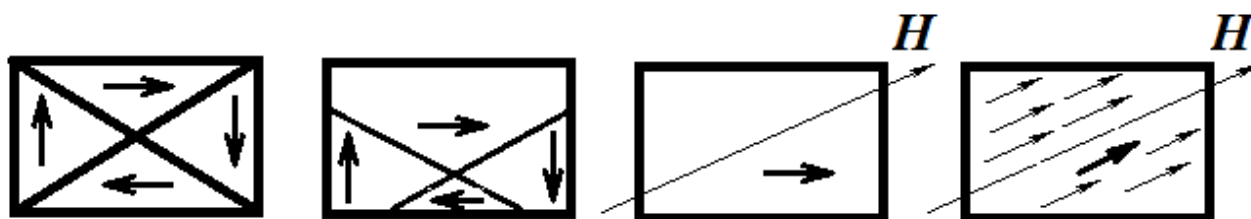


Рис. 48.1.

Енергетично вигідними станами доменів є замкнуті магнітні кола, так що під час відсутності зовнішнього поля сумарний магнітний момент всього тіла дорівнює нулю.

Дія зовнішнього поля на домени на різних стадіях процесу намагнічення є різною. Спочатку, за слабких полів, спостерігається *зміщення меж доменів* (рис. 48.1). За рахунок об'ємів сусідніх доменів зростають об'єми доменів, у яких намагніченість орієнтована найближче і вигідніше до напрямку зовнішнього магнітного поля.

Зі збільшенням напруженості поля цей процес йде до тих пір, поки домени, які мають в магнітному полі меншу енергією, не поглинуть повністю енергетично менш вигідні домени.

На наступній стадії відбувається зміна напрямку спонтанної намагніченості окремих доменів шляхом повороту магнітних моментів доменів в напрямку поля. При цьому моменти електронів в межах домену повертаються одночасно, без порушення їх суворої паралельності один одному.

Основні **властивості феромагнетиків**, що пов'язані з їх доменною структурою, такі:

- 1) аномально велике значення магнітної проникності μ ;
- 2) здатність намагнічуватися до магнітного насичення і здатність зберігати стан намагніченості після видалення феромагнітних тіл з меж поля, що намагнічує (залишкова намагніченість);

- 3) залежність магнітної проникності μ і сприйнятливості χ від напруженості H зовнішнього поля, що намагнічує;

4) при перемагнічуванні виявляється «магнітний гістерезис» - зміна намагніченості тіла відстає (запізнюється) від зміни напруженості H поля, що намагнічує;

2) анізотропія магнітних властивостей кристала.

Відзначимо, що на графіках намагніченості J в якості аргументу використовується напруженість магнітного поля H .

Для феромагнітних тіл намагніченість є складною нелінійною функцією H . На рис. 48.2 дана графічна залежність намагніченості J від H для заліза.

Якщо феромагнетик не є намагніченим ($J = 0$), то сумарний магнітний момент доменів дорівнює нулю. У слабких полях J круто наростає з ростом H - домени шикуються переважно вздовж вектора H , у багато разів підсилюючи зовнішнє поле.

Однак цей процес почне сповільнюватися, коли залишається все менше і менше неорієнтованих моментів, і, нарешті, коли все магнітні моменти атомів упорядковуються в напрямку зовнішнього магнітного поля, подальше збільшення J припиняється, і настає магнітне насичення. У сильних полях ($H \geq 200$ А/м) намагніченість J досягає максимального значення, яке практично залишається незмінним (насичення) (на рис. 48.2 за значень $H > H_{\text{нас}}$).

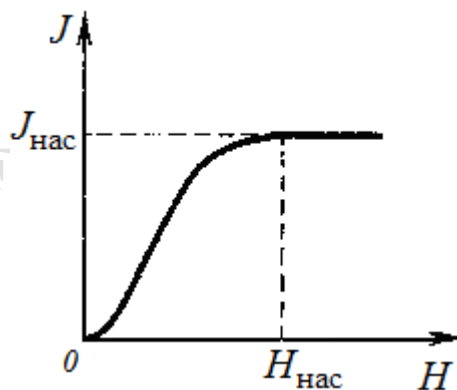


Рис. 48.2.

Аналогічно до кривої намагнічування $J(H)$ отримують криву $B(H)$. На рис 48.3 зображено криву залежності B від H . Вона відрізняється від попередньої тим, що не має горизонтальної частини. Це пояснюється тим, що в стані насичення другий доданок в $B = \mu_0 (H + J)$ залишається незмінним і B зростає тільки за рахунок збільшення першого доданка:

$$B = \mu_0 H + \mu_0 J_{\text{нас}} = \mu_0 H + \text{const}$$

Як видно з рис. 48.2 і 48.3 намагніченість J і індукція B нелінійно залежать від напруженості поля H . Тому для феромагнетиків магнітна сприйнятливість χ і магнітна проникність μ не є постійними величинами, а залежать від H .

У слабкому магнітному полі μ швидко зростає, досягаючи максимуму, а потім спадає, наближаючись до одиниці, як для вакууму (рис. 48.4). Це впливає з таких міркувань. Запи-

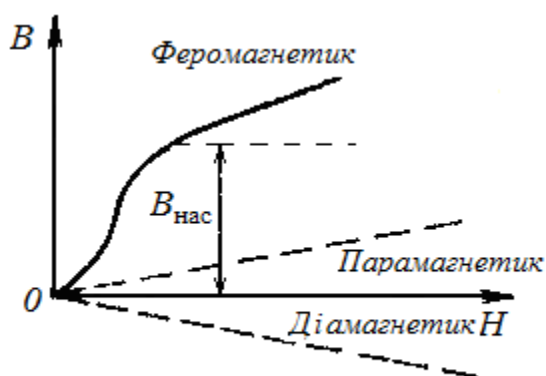


Рис. 48.3.

шемо вираз $B = \mu_0 (H + J)$ інакше:
 $\mu_0 \mu H = \mu_0 (H + J)$.

Звідси

$$\mu = 1 + \frac{J}{H}. \quad (48.1)$$



Рис. 48.4.

Під час насичення $J = \text{const}$, якщо $H \rightarrow \infty$, то $\mu \rightarrow 1$.

Максимальні значення μ є дуже великими: для заліза - 5000, кременистого заліза - 10 000, пермалоя (78% Ni і 22% Fe) - 100 000.

Характерна особливість феромагнетиків полягає також у тому, що для них залежність J від H (а отже, і B від H) визначається передісторією намагніченості феромагнетика, тобто від того, в яких полях він побував раніше.

Нехай ненамагнічений феромагнітний стрижень поміщений в котушку (рис. 48.2) і в ній збільшується постійний струм, починаючи від нуля. Напруженість магнітного поля всередині котушки зростає лінійно з силою струму: $H = nI$. Залежність намагніченості від напруженості магнітного поля виразиться кривою 0 - 1 (рис. 48.6). При $H = H_n$ настає насичення.

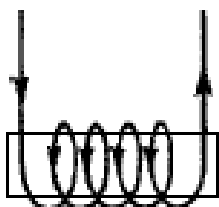


Рис. 48.5.

Якщо тепер зменшувати силу струму в котушці (тобто зменшувати напруженість магнітного поля від H_n до 0), то, як показує дослід, графік уже не піде зворотним шляхом за первісною кривою 1 - 0, а зобразиться кривою 1 - 2, що лежить вище від первинної кривої.

В результаті, коли напруженість зовнішнього поля стає рівною нулю (точка 2), намагніченість не зникає і характеризується величиною J_r , яка називається *залишковим намагніченням*. При цьому частина магнітних моментів атомів залишається орієнтованою в первісному напрямку. Магнітна індукція має, відповідно, значення B_r , яка називається *залишковою індукцією*.

Отже, зменшення H не супроводжується відповідним зменшенням J , спостерігається відставання розмагнічування. Явище відставання (запізнення) змін намагніченості тіла від змін напруженості магнітного поля називається *магнітним гістерезисом* (від грец. «запізнювання»). Для повного розмагнічування зразка будемо збільшувати H в протилежному напрямку (змінимо напрямок струму в котушці на протилежний). При $H = -H_n$ залишкова намагніченість зникає (крива 2 - 3).

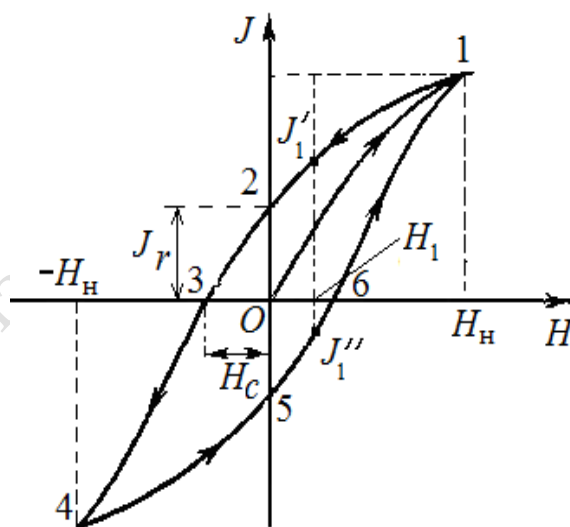


Рис. 48.6.

Напруженість поля H_c , при якій зникає залишкова намагніченість J_r , є мірою стійкості феромагнетика і називається *затримуючою або коерцитивною силою*.

Існування залишкової намагніченості уможливорює виготовлення постійних магнітів, або тіл, які без витрати енергії на підтримання макроскопічних струмів володіють магнітним моментом і створюють в оточуючому їх просторі магнітне поле. Постійний магніт тим краще зберігає свої властивості, чим більшою є коерцитивної сила матеріалу, з якого він виготовлений.

Якщо далі збільшувати H в протилежному напрямі, то намагніченість відобразиться кривою 3 - 4, і при $H = -H_n$ досягається насичення (точка 4), феромагнетик перемагнічується. Потім зразок можна знову розмагнітити (крива 4 - 5 - 6) і знову перемагнітити до насичення (крива 6 - 1).

Таким чином, при дії на феромагнетик змінного магнітного поля намагніченість J змінюється відповідно до замкнутої кривої 1-2-3-4-5-6-1, яка називається *петлею гістерезису*. Гістерезис призводить до того, що намагніченість J феромагнетика не є однозначною функцією H , тобто одному і тому ж значенню H відповідає кілька значень J . Наприклад, в полі напруженості H_1 (рис. 48.6) намагніченість може мати будь-які значення в межах від J'_1 до J''_1 .

Робота, необхідна для перемагнічування феромагнетика, виконується за рахунок енергії зовнішнього магнітного поля. Можна показати, що енергія, яка витрачається за один цикл перемагнічування феромагнетика, пропорційна площі петлі гістерезису.

Якщо коерцитивна сила H_c є великою, феромагнетик називається *магнітно-жорстким*. Для нього характерна широка петля гістерезису. Феромагнетик з малою H_c (і відповідно вузькою петлею гістерезису) називається *магнітно-м'яким*. Залежно від призначення використовуються феромагнетики з тією чи іншою характеристикою. Так, жорсткі феромагнетики (наприклад, вуглецеві і вольфрамові сталі) застосовуються для виготовлення постійних магнітів, а м'які (наприклад, м'яке залізо, сплав заліза з нікелем) - для виготовлення осердя трансформаторів, електродвигунів і т.д., в яких відбувається перемагнічування в змінних магнітних полях, а втрати енергії при цьому будуть незначними.

Приклад. Магнітно-м'які матеріали: залізо (99,9% Fe) $\mu_{\max} = 5\,000$, коерцитивна сила $H_c = 80\text{ А/м}$; пермалой (78% Ni, 22% Fe) $\mu_{\max} \approx 10^6$, $H_c = 0,3\text{ А/м}$. Магнітно-жорсткий матеріал: Алніко (8% Al, 14% Ni, 24% Co, 3% Cu, 51% Fe): $H_c = 53\,000\text{ А/м}$.

Намагніченість феромагнетиків залежить від температури. З підвищенням температури залишкове намагнічування зменшується і при певній температурі, яка називається *точкою Кюрі*, зникає зовсім. Це пояснюється досить інтенсивним тепловим рухом молекул феромагнетика і дезорієнтацією спінових магнітних моментів. Точка Кюрі для різних феромагнетиків неоднакова: для заліза $768\text{ }^\circ\text{C}$, нікелю - $358\text{ }^\circ\text{C}$, кобальту - $1127\text{ }^\circ\text{C}$, пермалоя - $550\text{ }^\circ\text{C}$ і т. п. З переходом через точку Кюрі феромагнетик поводить себе в зовнішньому магнітному полі як парамагнетик.

Перехід речовини з феромагнітного стану в парамагнітний, що відбувається в точці Кюрі, не супроводжується поглинанням або виділенням теплоти, тобто в точці Кюрі відбувається фазовий перехід II роду.

Нарешті, процес намагнічування феромагнетиків супроводжується змінами його лінійних розмірів і об'єму. Це явище отримало назву *магнітострикції*.

Існують речовини, в яких обмінні сили викликають антипаралельну орієнтацію спінових магнітних моментів електронів. Такі тіла називаються *антиферомагнетиками*.

До антиферромагнетиків відносять речовини, для яких обмінна взаємодія призводить до протилежної орієнтації магнітних моментів сусідніх атомів. Кристалічну структуру таких речовин можна уявити як накладення двох або більше кристалічних підґраток, в кожній з котрих магнітні моменти атомів паралельні один одному і однакові за модулем. Для різних підґраток магнітні моменти атомів спрямовані протилежно та є рівними за модулем (рис. 48.7, б). Тому у відсутності магнітного поля, незважаючи на те, що вектори намагнічування кожної з підґраток відрізняються від нуля, намагніченість усього антиферромагнетика дорівнює нулю.

Типовими прикладами антиферромагнетиків є такі метали, як марганець, хром, самарій, неодим, а також окиси металів MnO , FeO , CoO та ін.

Для антиферромагнетиків існує температура, вище якої вони втрачають свої незвичайні властивості і стають парамагнетиками. Ця температура получила назву температури Нееля.

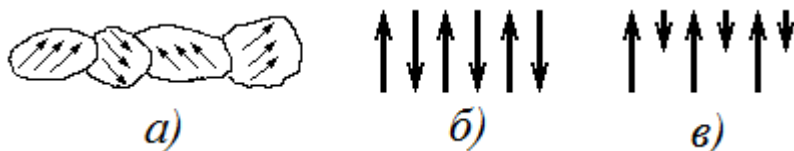


Рис. 48.7.

Так, наприклад, для марганцю вона становить $T_N = 100$ К, для хрому $T_N = 310$ К, для оксиду NiO $T_N = 650$ К. Поведінка феромагнетика нижче температури Кюрі і антиферомагнетика нижче темпера-

тури Нееля істотно відрізняються. У феромагнетика намагніченість може досягати великих значень, а для антиферомагнетика прагне до нуля.

Феримагнетики мають таку ж кристалічну структуру, як і антиферомагнетики - вона складається з декількох підґраток, магнітні моменти атомів сусідніх підґраток спрямовані назустріч один одному. Але на відміну від антиферомагнетика магнітні моменти атомів різних підґраток не є рівними за модулем, що призводить до не рівного нулю сумарного вектора намагніченості у відсутності зовнішнього магнітного поля (рис. 48.7, в).

Поведінка цих речовин в зовнішньому магнітному полі багато в чому аналогічна поведінці феромагнетиків: вони мають високі значеннями магнітної проникності, для них існує температура Кюрі, спостерігається магнітний гістерезис і т.д.

До таких речовин можна віднести, наприклад, *ферити* - подвійні оксиди перехідних металів, такі як $NiFe_2O_4$, $MnFe_2O_4$, і т.д. Вони, як і феромагнетики, мають високі значеннями магнітної проникності, але при цьому ферити є напівпровідниками, їх питомий опір в $(10^7 - 10^{11})$ разів більше, ніж у феромагнетиків. Тому використання феритів в високочастотних полях різко зменшує втрати енергії на виділення тепла за рахунок протікання струмів Фуко.

Звідси їх широке застосування в радіотехніці як осердя радіочастотних конструкцій. Ферити застосовуються також для виготовлення сталих магнітів, феритових антен, елементів оперативної пам'яті в обчислювальній техніці і т. д.

Контрольні запитання.

1. Чим пояснюється виникнення внутрішнього додаткового магнітного поля при розміщенні речовини в зовнішнє магнітне поле?
2. Який фізичний зміст напруженості магнітного поля?
3. Що таке магнітна проникність і магнітна сприйнятливість речовини?
4. Чий внесок більше - ядра атома чи електронів - в сумарний магнітний момент атома?
5. Чому дорівнює мінімальний магнітний момент, і яка частинка є його носієм?
6. У яких речовинах - діа- або парамагнетиках - виникає ларморова прецесія електронних орбіт?
7. Чим пояснюється межа намагнічування - магнітне насичення феромагнетиків?
8. Чим пояснюються сильномагнітні властивості феромагнетиків?
9. Який фізичний зміст має точка Кюрі для феромагнетиків?
10. Відомий дослід з намагнічування залізного стрижня, по торцю якого б'ють молотком. Стрижень розміщують в напрямку з півночі на південь. Як пояснити намагнічування феромагнітного стрижня з позицій його доменної структури?

Глава 8. ЕЛЕКТРОМАГНІТНА ІНДУКЦІЯ

§ 49. Явище електромагнітної індукції. Закон Фарадея. Виведення закону електромагнітної індукції з закону збереження енергії. Правило Ленца

1. Досліди Фарадея. Індукційний струм. У 1831 році великий англійський фізик М. Фарадей відкрив одне з найбільш фундаментальних явищ в електродинаміці – явище електромагнітної індукції.

Нагадаємо деякі досліди, за допомогою яких можна продемонструвати це явище.

1. При всуванні (або висуванні) магніта в котушку, на яку намотаний ізолюваний дріт, замкнутий на гальванометр, стрілка гальванометра відхиляється, що свідчить про появу струму в колі (рис. 49.1).

Як тільки припиниться рух магніта, стрілка гальванометра повертається до нульового положення.

Те ж явище спостерігається, якщо переміщати котушку відносно нерухомого магніта.

2. При русі котушки 1 в магнітному полі котушки 2 з'являється струм в колі котушки 1 (рис. 49.2). Струм в колі котушки 1 виникає як під час зближення котушок, так і під час віддалення їх. Якщо залишити котушку 1 нерухомою, а рухати котушку зі

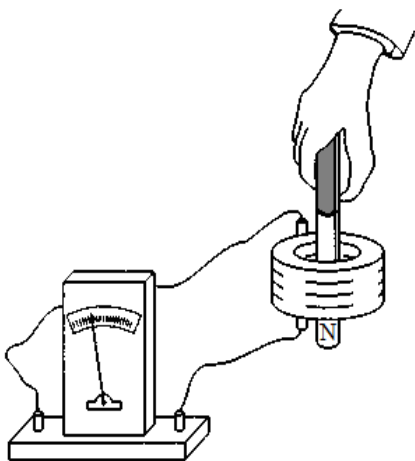


Рис. 49.1.

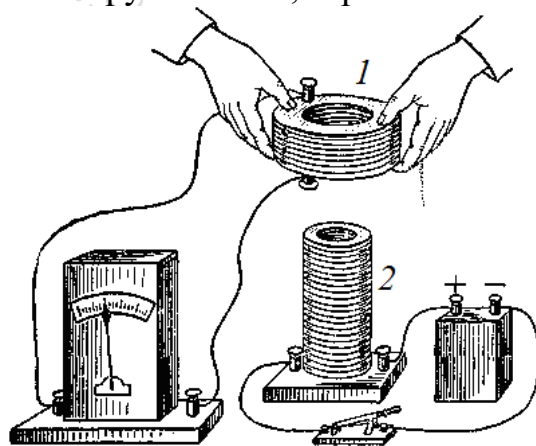


Рис. 49.2.

струмом 2, гальванометр також показує струм.

3. Можна залишити обидві котушки 1 і 2 нерухомими, але змінювати силу струму в котушці 2 за допомогою реостата. Тоді в колі котушки 1 виникне струм.

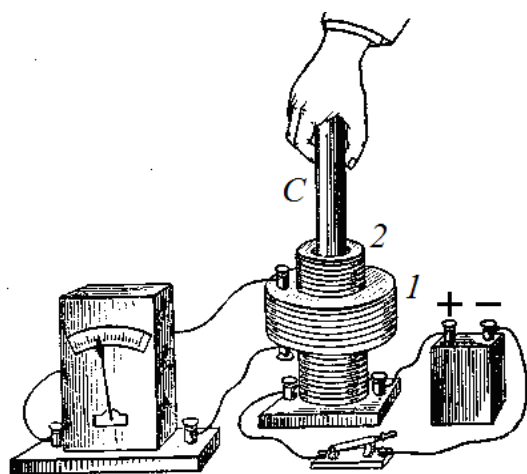


Рис. 49.3.

4. Індукційний струм виникне, якщо залишити обидві котушки 1 і 2 нерухомими, але в котушку 2 всувати або висувати залізне осердя (рис. 49.3). Цей дослід підкреслює, що в явищі виникнення індукційного струму основну роль грає магнітна індукція, а не напруженість магнітного поля.

Досліди показують, що у всіх випадках причиною появи індукційного струму є зміна потоку магнітної індукції через поверхню, обмежену провідним контуром.

Явище виникнення в провіднику електрорушійної сили при зміні магнітного поля, що пронизує площу контура провідника, називається електромагнітною індукцією.

Якщо провідник замкнений, то в ньому виникає електричний струм, який називається **індукційним**.

ЕРС індукції виникає, якщо потік Φ_B магнітної індукції $\mathbf{B}$ через поверхню, обмежену замкненим провідним контуром, *змінюється з будь-яких причин* – або контур переміщається, повертається, деформується, обертається в постійному магнітному полі, або контур є нерухомим, а потік Φ_B змінюється за рахунок зміни магнітного поля $\mathbf{B}$.

При цьому ЕРС ε_i електромагнітної індукції в контурі пропорційна швидкості зміни потоку, тобто значенню похідної $\frac{d\Phi_B}{dt}$.

2. Виведення закону електромагнітної індукції з закону збереження енергії. Німецький фізик Г. Гельмгольц показав, що основний закон електромагнітної індукції – закон Фарадея – є наслідком закону збереження енергії.

Розглянемо замкнений контур, який зображено на рис. 49.4. Одна сторона 1-2 (перемичка) контура може переміщатися. Контур поміщений в однорідне магнітне поле, яке перпендикулярне до його площині, і містить джерело струму з ЕРС ε_0 .

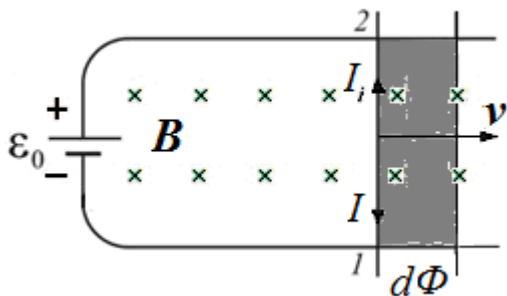


Рис. 49.4.

За час dt джерело здійснює роботу

$$dA = I \varepsilon_0 dt. \quad (49.1)$$

Якщо вздовж перемички проходить струм, то під дією сил Ампера перемичка почне рухатись. Елементарна робота амперових сил dA_1 , що здійснюється під час переміщення контура зі струмом за час dt , виражається формулою

$$dA_1 = I d\Phi_B, \quad (49.2)$$

де $d\Phi_B$ - приріст магнітного потоку через площу контура при цьому переміщенні.

Крім того, в перемичці виділяється джоулево тепло

$$dQ = I^2 R dt. \quad (49.3)$$

Згідно з законом збереження енергії сума двох величин (49.2) і (49.3) має дорівнювати роботі (49.1) джерела струму:

$$dA = dQ + dA_1$$

або

$$\varepsilon_0 I dt = I^2 R dt + I d\Phi_B, \quad (49.4)$$

звідки

$$I = \frac{\varepsilon_0 dt - d\Phi_B}{R dt} = \frac{\varepsilon_0 + \left(-\frac{d\Phi_B}{dt}\right)}{R}. \quad (49.5)$$

Отриманий вираз можна розглядати як запис закону Ома для замкненого контура, в якому, крім ЕРС джерела ε_0 , є додаткова ЕРС

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi_B}{dt}. \quad (49.6)$$

ЕРС електромагнітної індукції в замкненому контурі чисельно дорівнює і протилежна за знаком швидкості зміни магнітного потоку через поверхню, обмежену цим контуром.

У цьому полягає основний закон електромагнітної індукції – закон Фарадея.

Приклад 49.1. Заряд, що проходить в контурі при зміні магнітного потоку. Нехай дрітаний виток розміщений в однорідному магнітному полі так, що в початковий момент часу площина витка перпендикулярна до напрямку вектора $\mathbf{B}$ магнітної індукції. Потім виток повертають на 90° навколо осі, перпендикулярної до вектора $\mathbf{B}$. Яка кількість електрики проходить в контурі?

Під час повороту витка змінюється магнітний потік через його площу, і у витку виникає індукційний струм. З визначення сили струму слід

$$i_i = \frac{dq}{dt}.$$

Тому $dq = i_i dt = \frac{\varepsilon_i}{R} dt$. Замінюючи ε_i за формулою (49.6), отримаємо

$$dq = -\frac{1}{R} \cdot \frac{d\Phi_B}{dt} \cdot dt = -\frac{1}{R} \cdot d\Phi_B.$$

Інтегрування дає вираз для заряду q , що проходить по витку при зміні магнітного потоку

$$q = \frac{\Phi_{\Pi} - \Phi_K}{R}, \quad (\text{П. 49.1})$$

де Φ_{Π} і Φ_K - значення магнітного потоку через поверхню витка в його початковому і кінцевому положеннях:

$$\Phi_{\Pi} = BS, \quad \Phi_K = 0.$$

$$q = \frac{BS}{R}. \quad (\text{П. 49.2})$$

Тут S - площа витка, R - його опір. Вимірявши величину заряду q балістичним гальванометром і знаючи площу S і опір R кола, можна за формулою (П. 49.2) визначити магнітну індукцію B . На цьому принципі засновані спеціальні прилади – флюксметри.

3. Правило Ленца.

Російський фізик Е.Х. Ленц встановив загальне **правило визначення напрямку індукційного струму**:

індукційний струм завжди спрямований так, що створюване ним власне магнітне поле не перешкоджає зміні магнітного потоку, яке збуджує індукційний струм.

Наприклад, при збільшенні магнітного потоку, що пронизує поверхню, обмежену провідним контуром (рис. 49. 5), в цьому провідному контурі виникає струм індукції такого напрямку, щоб своїм магнітним полем зменшити магнітний потік.

Можна сформулювати правило Ленца коротше: *індукційний струм завжди має такий напрям, щоб послаблювати дію причини, яка збуджує його.*

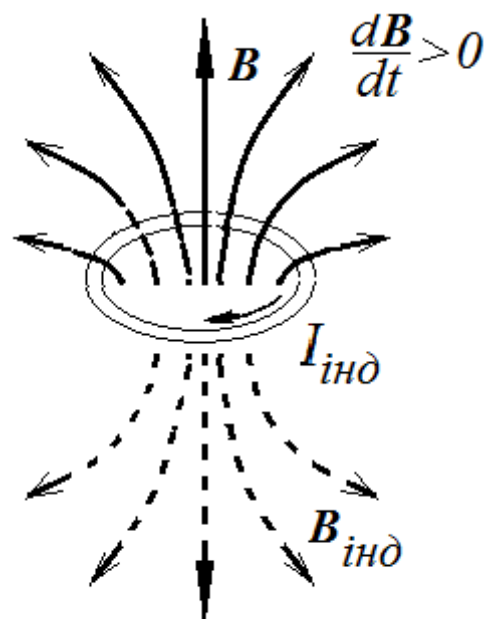


Рис. 49.5.

Таке формулювання полегшує знаходження напрямку індукційного струму.

Наприклад, якщо до провідного кільця наближати прямий смуговий магніт північним полюсом (рис. 49.6), то на боці кільця, зверненому до магніта, буде виникати теж північний полюс (північний від північного відштовхується і протидіє наближенню магніта).

Потім, користуючись правилом гвинта, можна визначити напрям струму індукції в кільці.

Математично правило Ленца відображається знаком мінус в рівнянні (49.6) закону Фарадея.

Щоб пояснити зміст знака мінус в законі Фарадея, розглянемо контур, що пронизується лініями магнітної індукції зовнішнього поля B (рис. 49.7).

Виберемо довільно напрям додатного обходу контура, наприклад, проти годинникової стрілки (рис. 49.7, а). Тоді за правилом правого гвинта додатна нормаль n до контура буде спрямована, як по-

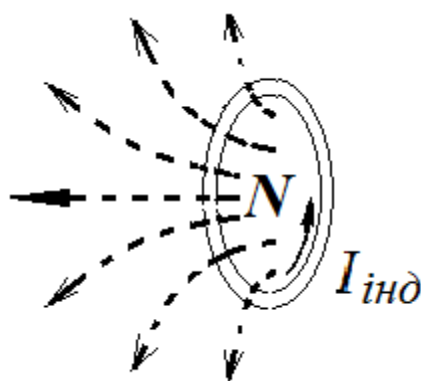


Рис. 49.6.

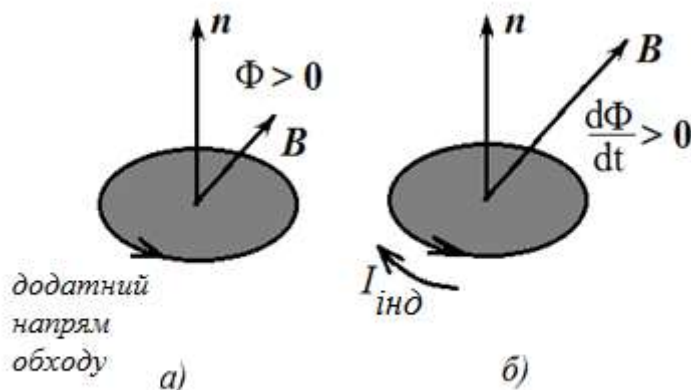


Рис. 49.7.

казано на рис. 49.7, а.

Вибираючи певний додатний напрям нормалі, ми тим самим визначаємо як знак потоку, так і додатний напрям струму і ЕРС в контурі.

За обраними нами як приклад додатного напрямку обходу і гострому куті між нормаллю $\mathbf{n}$ і вектором магнітної індукції $\mathbf{B}$ магнітний потік через контур буде додатним, $\Phi > 0$.

Нехай тепер магнітне поле збільшується (рис. 49.7, б). Додатний потік через контур також зростає, $d\Phi/dt > 0$. Тоді за формулою (49.6) закону Фарадея ЕРС індукції $\varepsilon_{\text{інд}}$, а отже, і індукційний струм, будуть від'ємними. Це означає, що струм проходить в зворотному напрямі по відношенню до вибраного шляху обходу, тобто за годинниковою стрілкою, що відповідає правилу Ленца.

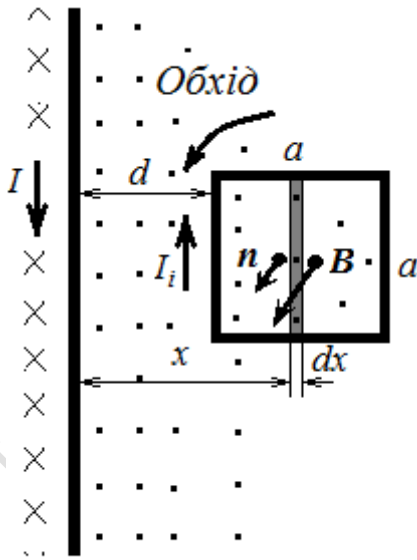


Рис. П. 49.1.

Приклад 49.2. В одній площині з нескінченно довгим проводом розміщена провідна квадратна рамка зі стороною a так, що провід проходить паралельно одній із сторін рамки на відстані d від неї. Опір рамки R . Сила струму в проводі змінюється за законом $I(t) = \alpha t^2$, де $\alpha = \text{const}$. Визначити залежність сили струму в рамці від часу.

Для вирішення цього завдання ми скористаємося законом електромагнітної індукції

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Спочатку визначимо магнітний потік Φ через рамку, створюваний струмом, що проходить по дроту. Магнітне поле прямого нескінченного провідника є неоднорідним, яке убуває обернено пропорційно відстані x до точки, де воно розглядається (рис. П.49.1):

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \mathbf{n}.$$

Тут $\mathbf{n}$ – одиничний вектор нормалі до площини рамки. Напрямок нормалі пов'язано правилом правого гвинта з напрямом обходу рамки. Вибираємо довільно напрям обходу, наприклад, проти годинникової стрілки (рис. П 49.1). Цим ми визначаємо напрям позитивної нормалі – від креслення «до нас», так само спрямована магнітна індукція поля прямого проводу зі струмом в разі, зображеному на рис. П 49.1, і цим ми визначаємо знак потоку Φ . За зробленого нами вибору напрямів, потік Φ є додатним, $\Phi > 0$.

Для визначення величини потоку Φ через рамку розділимо площу рамки на вузькі смужки так, щоб в межах кожної смужки магнітне поле можна було б вважати однорідним. Нехай одна з таких смужок шириною dx розміщена на відстані x від проводу. Тоді елементарний магнітний потік через смужку

$$d\Phi_B = B_n dS = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} a dx. \quad (\text{П. 49.1})$$

Після інтегрування знаходимо повний потік через рамку

$$\Phi_B = \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = \int_S B_n dS = \frac{\mu_0 a I}{2\pi} \int_d^{d+a} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln \frac{d+a}{d}. \quad (\text{П. 49.2})$$

Е.р.с. індукції в рамці:

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{a}{d}\right) \frac{dI}{dt} = -\frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{a}{d}\right) 2\alpha t. \quad (\text{П. 49.3})$$

Нарешті, згідно із законом Ома визначаємо струм індукції в рамці

$$I_i = \frac{\varepsilon_i}{R} = -\frac{\mu_0 \alpha t a}{\pi R} \ln\left(1 + \frac{a}{d}\right). \quad (\text{П. 49.4})$$

Від'ємне значення сили струму означає, що він проходить проти обраного нами додатного напрямку обходу рамки – струм індукції проходить за годинниковою стрілкою.

§ 50. Природа ЕРС індукції. Виведення закону електромагнітної індукції на основі електронної теорії

Якою є фізична причина виникнення ЕРС індукції? Виникнення електро-рушійної сили індукції може бути обумовлено сторонніми силами різної фізичної природи.

При цьому можливі два випадки:

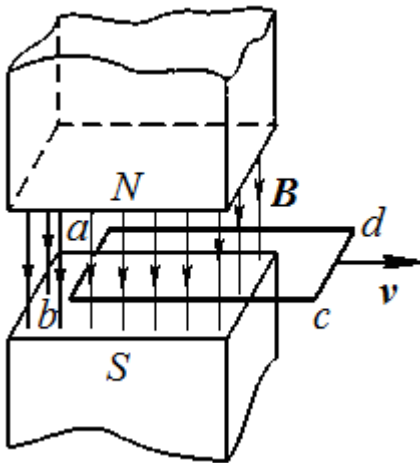


Рис. 50.1.

- 1) проводить контур рухається в постійному магнітному полі;
- 2) проводить контур в магнітному полі спочиває, а магнітне поле змінюється.

Розглянемо їх по черзі.

1). Нехай прямокутна металева рамка $abcd$ рухається з постійною швидкістю v в магнітному полі, як показано на рис. 50.1. Сторона ab перетинає силові лінії однорідного магнітного поля B , існуючого між полюсами магніту. ЕРС індукції в контурі $abcd$ може бути обчислена за допомогою закону електромагнітної індукції (49.6).

Нехай за час dt контур пересунувся на dx . За визначенням швидкість

$$v = \frac{dx}{dt}.$$

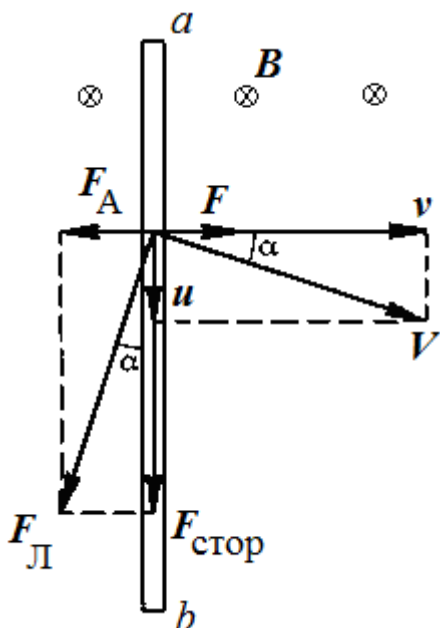


Рис. 50.2.

Площа контура, що пронизується магнітним потоком, зменшилася на $dS = l dx$ (l - довжина сторони ab). Магнітний потік зменшився на $d\Phi_B = -B dS = -B l dx = -B l v dt$, звідки відповідно до закону Фарадея (79.6) **ЕРС індукції в рухомому провіднику**

$$\varepsilon_{\text{інд}} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = Blv. \quad (50.1)$$

Обчислимо тепер цю ж ЕРС індукції на основі електронної теорії.

Розглянемо рух прямолінійного відрізка ab контура $abcd$ (рис. 50.1) в однорідному магнітно-

му полі $\mathbf{B}$ (на рис. 50.2 поле направлено перпендикулярно до креслення «від нас»). При русі відрізка провідника зі швидкістю v електрони провідності в ньому почнуть рухатися з такою ж швидкістю. В результаті на кожний рухомий в магнітному полі електрон почне діяти сила Лоренца, і електрони почнуть переміщатися уздовж відрізка ab з деякою швидкістю впорядкованого руху $\mathbf{u}$ (швидкістю дрейфу). Швидкість $\mathbf{u}$ спрямована уздовж відрізка ab від точки a до точки b (рис. 50.2).

Як показано на рис. 50.2, швидкість електронів відносно лабораторної системи відліку тепер стане рівною

$$\mathbf{V} = \mathbf{v} + \mathbf{u}. \quad (50.2)$$

Тоді на кожен з вільних електронів в провіднику з боку магнітного поля буде діяти сила Лоренца

$$\mathbf{F}_L = -e [\mathbf{V}, \mathbf{B}]. \quad (50.3)$$

(Заряд електрона дорівнює $-e$). Ця сила перпендикулярна до вектора $\mathbf{V}$ і за правилом гвинта спрямована, як зазначено на рис. 50.2.

Розкладемо силу Лоренца $\mathbf{F}_L$ на дві складові - перпендикулярно до провідника і вздовж нього.

Перпендикулярна до провідника складова $\mathbf{F}_A$, якщо її просумувати по всім носіям заряду на ділянці ab провідника, дасть діючу на провідник зі струмом силу Ампера. При рівномірному русі провідника вона врівноважується зовнішньою силою $\mathbf{F}$, яка призводить провідник в рух.

Спрямована уздовж провідника складова $\mathbf{F}_{стор}$ сили Лоренца - це і є стороння сила, що змушує електрони рухатися по провіднику, тобто створює індукційний струм.

Робота сили Лоренца дорівнює нулю, оскільки ця сила є перпендикулярною до швидкості електронів $\mathbf{V}$. Це означає, що дорівнює нулю сума робіт сили Ампера і сторонньої сили:

$$A_A + A_{стор} = 0,$$

Звідки

$$A_{стор} = -A_A$$

Але робота сили Ампера дорівнює роботі зовнішньої сили, взятої зі знаком мінус

$$A_A = -A_{зовніш}.$$

Звідси випливає, що робота сторонніх сил під час руху електронів в контурі дорівнює роботі зовнішніх сил, що призводять цей контур в рух:

$$A_{стор} = A_{зовніш} \quad (50.4)$$

Іншими словами, *електрична енергія індукційного струму виникає завдяки механічній роботі, яку виконують зовнішні сили.*

Стороння сила $\mathbf{F}_{стор}$ здійснює роботу тільки на ділянці ab довжиною l :

$$A_{стор} = F_{стор} l = F_L \cos \alpha \cdot l = eVB l \cos \alpha,$$

де α - кут між векторами $\mathbf{v}$ і $\mathbf{V}$, а, отже, $V \cos \alpha = v$.

В результаті отримуємо остаточно для роботи сторонніх сил:

$$A_{стор} = evBl. \quad (50.5)$$

Відношення цієї роботи до заряду e , тобто робота переміщення одиниці заряду за визначенням є електрорушійною силою індукції $\epsilon_{інд}$. Таким чином,

$$\varepsilon_{\text{інд}} = Blv,$$

що збігається з формулою ЕРС в даному випадку, виведеної іншим шляхом (50.1).

Відзначимо, що ЕРС індукції в такій рамці виникає лише тоді, коли тільки частина рамки знаходиться в однорідному магнітному полі (як показано на рис. 50.1), або, коли магнітне поле неоднорідне. Якщо рамка цілком знаходиться в однорідному полі, то під час її поступального руху магнітний потік не змінюється і ЕРС індукції дорівнює нулю: хоча на окремих ділянках рамки сторонні сили діють, але робота цих сил уздовж всієї рамки дорівнює нулю.

Таким чином, якщо магнітне поле є постійним, а магнітний потік змінюється внаслідок руху провідника, то ЕРС, що виникає, породжується силою Лоренца, яка визначається дією магнітного поля на рухомі (з контуром) заряди.

2). Іншу фізичну природу має стороння сила, яка викликає індукційний струм і яка виникає в тому разі, коли контур залишається нерухомим, а змінюється магнітне поле (наприклад, у нерухому котушку вводиться магніт, рис. 49.1, або нерухома котушка знаходиться в змінному магнітному полі та ін.). Магнітне поле не діє на нерухомі заряди. Яка ж сила збуджує індукційний струм в нерухомому провіднику, що знаходиться в змінному магнітному полі?

Відповідь була дана видатним англійським фізиком Д. К. Максвеллом. Згідно з Максвеллом, **всьяке змінне магнітне поле збуджує в навколишньому просторі електричне поле** (рис. 50.3).

Таке поле має вихровий характер. На відміну від статичного електричного поля, силові лінії якого завжди починаються і закінчуються на електричних зарядах або йдуть на нескінченність, силові лінії вихрового електричного поля, що породжується змінним магнітним полем, замикаються самі на себе.

Це вихрове електричне поле і діє на нерухомі електричні заряди, які починають рухатися, утворюючи струм індукції.

Як бачимо, механізм виникнення ЕРС індукції може бути різним, але кінцевий результат описується одним і тим самим законом Фарадея.

Приклад 50.1. Генераторами змінного струму називаються пристрої, що перетворюють механічну енергію в енергію електричного струму. Принцип дії генератора заснований на явищі електромагнітної індукції.

Нехай плоска дротяна рамка обертається в постійному магнітному полі. Вісь обертання рамки лежить в площині рамки і є перпендикулярною до вектора магнітної індукції $\mathbf{B}$ (рис. П. 50.1).

Проведемо вектор $\mathbf{n}$ нормалі до площини рамки і позначимо через α кут між векторами $\mathbf{n}$ і $\mathbf{B}$. Нехай в початковий момент часу $\alpha = 0$. Якщо кутова швидкість обертання рамки дорівнює ω і вона постійна, то кут α залежить від часу за законом

$$\alpha = \omega t.$$

Магнітний потік через площу S рамки

$$\Phi = BS \cos \alpha = BS \cos \omega t.$$

Використовуючи основний закон електромагнітної індукції (49.6), знайдемо вираз для ЕРС індукції, що виникає в рамці

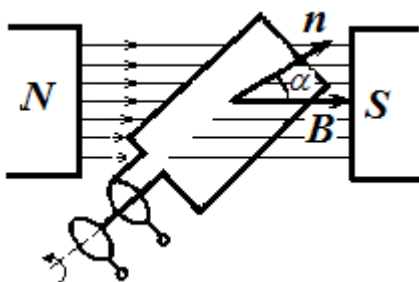


Рис. П.50.1.

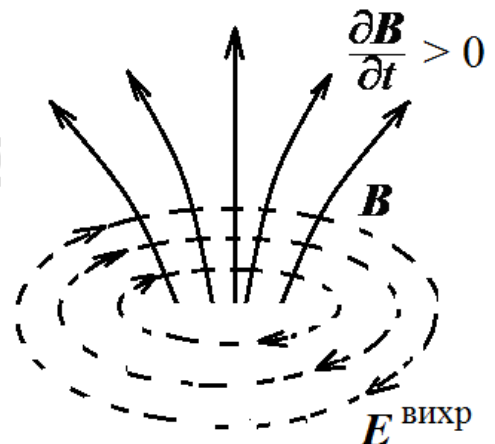


Рис. 50.3.

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} = B \cdot S \cdot \omega \cdot \sin \omega t . \quad (\text{П.50.1})$$

Таким чином ЕРС індукції змінюється за синусоїдальним законом

$$\varepsilon_i = \varepsilon_{\max} \sin \omega t,$$

де $\varepsilon_{\max} = BS \omega$ - амплітудне значення ЕРС. Щоб зняти ЕРС, кінці провідника прикріплюють до контактних кілець; від кілець через ковзні контакти - щітки - ЕРС включають в коло споживача.

Зауважимо, що описану конструкцію використовують рідко, тільки в малопотужних генераторах. Справа в тому, що за допомогою ковзних контактів неможливо передати потужний струм високої напруги. Тому генератори конструюють так, щоб змінний струм індукувався б в нерухомій обмотці (статор), а обертався дво- або багатополюсний електромагніт (ротор) (рис. П. 50.2).

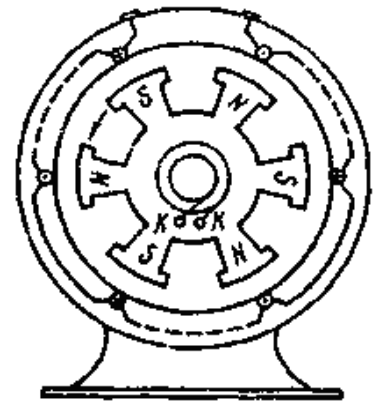


Рис. П.50.2.

Приклад 50.2. Індукційні струми можуть виникати в суцільних масивних провідниках при зміні магнітного потоку, що пронизує їх. Такі струми називають *вихровими або струмами Фуко*. Вихрові струми утворюються в провідному тілі або внаслідок зміни з часом магнітного поля, в якому воно знаходиться, або в результаті руху тіла в магнітному полі, при якому змінюється магнітний потік через тіло.

Вихрові струми самі вибирають замкнуті шляхи в товщі провідника, утворюючи вихроподібні контури. Згідно з правилом Ленца магнітне поле вихрових струмів направлено так, щоб протидіяти зміні магнітного потоку, який індукує ці струми. В результаті на рухомий в магнітному полі масивний провідник діє гальмівна сила. Це явище використовується, зокрема, для гасіння коливань стрілок вимірювальних приладів.

Відповідно до закону Джоуля-Ленца вихрові струми нагрівають провідники, в яких вони виникають. Це призводить до втрат енергії, наприклад, в осердях трансформаторів. Доводиться вживати заходів для зменшення цих струмів, осердя збирають з окремих пластин, розділених ізолюючими прошарками, або замінюють феромагнітний матеріал осердя магнітодіелектриками (феритами).

З іншого боку, тепло, що виділяється струмами Фуко, може бути використано для плавлення металів в так званих індукційних плавильних пічках. У побутовій кухонній індукційній плиті розігрів металевого посуду проводиться вихровими струмами, що створюються високочастотним магнітним полем частотою 20 - 100 кГц.

§ 51. Явище самоіндукції. Індуктивність. Явище взаємної індукції

Розглянемо дротяну соленоїдальну котушку, з'єднану з джерелом струму (рис. 51.1).

Магнітне поле довгої котушки можна вважати зосередженим тільки всередині неї. Будемо називати магнітний потік через поперечний переріз котушки з струмом *потокосцепленням або повним магнітним потоком* Ψ .

Нехай за допомогою реостата струм через котушку змінюється, наприклад, збільшується (рис. 51.1). Тоді збільшується і магнітне поле цього струму. У всіх випадках, коли змінюється магнітний потік крізь контур, виникає електромагнітна індукція. В даному випадку магнітний потік, що змінюється, пронизує витки котушки і за законом електромагнітної індукції наводить в ній струм індукції.

Виникнення ЕРС електромагнітної індукції в контурі внаслідок зміни сили струму в цьому ж самому контурі називається самоіндукцією.

Згідно із законом електромагнітної індукції ЕРС самоіндукції дорівнює

$$\varepsilon_{si} = - \frac{d\Psi}{dt}. \quad (51.1)$$

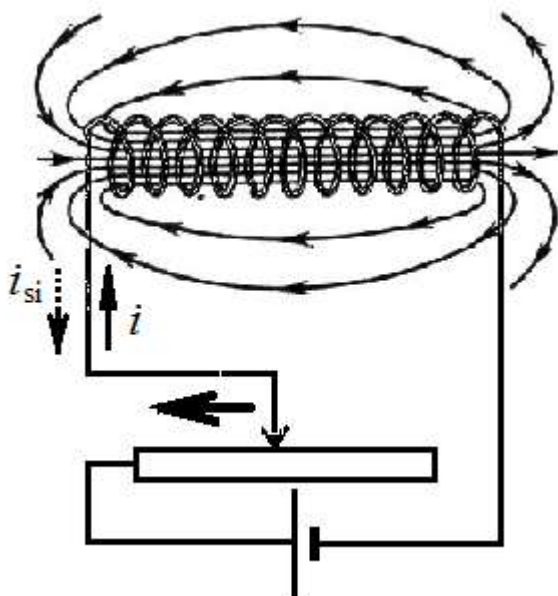


Рис. 51.1.

За правилом Ленца додатковий до основного струм i_{si} в котушці, що виникає, буде протидіяти причині, що викликала його, тобто струм самоіндукції перешкоджає будь-яким змінам основного струму в контурі. В даному прикладі струм самоіндукції i_{si} буде спрямований назустріч зростаючому струмові i в котушці.

Відповідно до закону Біо-Савара-Лапласа магнітна індукція, а, отже, і створюваний струмом повний магнітний потік пропорційні силі струму в контурі

$$\Psi = LI. \quad (51.2)$$

Коефіцієнт пропорційності L називається **індуктивністю** котушки (контура).

Індуктивністю контура називається величина, що чисельно дорівнює відно-

шенню повного магнітного потоку через контур, що створюється струмом, який протікає по цьому контуру, до сили струму.

$$L = \frac{\Psi}{I}.$$

В системі СІ за одиницю індуктивності приймається індуктивність такого контура, в якому струм силою в 1 А створює магнітний потік в 1 Вб. Ця одиниця називається **генрі** (Гн). $1 \text{ Гн} = 1 \text{ Вб}/1 \text{ А}$.

Як приклад обчислимо індуктивність довгого соленоїда довжиною l і площею перетину S , обмотка якого містить n витків на одиницю довжини. Соленоїд можна розглядати як систему з $N = nl$ послідовно з'єднаних витків. Повний магнітний потік через всі витки соленоїда (потокозчеплення) дорівнює

$$\Psi = N\Phi_0 = NBS = (nl) \cdot \mu_0 nI \cdot S = \mu_0 n^2 V I$$

Тут враховано, що магнітна індукція поля в соленоїді $B = \mu_0 nI$ та $V = lS$ - об'єм соленоїда. Тоді індуктивність соленоїда

$$L = \mu_0 n^2 V. \quad (51.3)$$

Як бачимо, індуктивність контура залежить від його форми і розмірів, а також від магнітної проникності середовища (середина ферромагнітна). Якщо осердя соленоїда зроблене з ферромагнітної речовини, то μ залежить не тільки від матеріалу осердя, але і від сили струму в обмотці.

Визначимо ЕРС самоіндукції через індуктивність контура і силу струму

$$\varepsilon_{si} = - \frac{d}{dt}(LI) = -L \frac{dI}{dt}. \quad (51.4)$$

Електрорушійна сила самоіндукції дорівнює взятому з оберненим знаком добутку індуктивності контура на швидкість зміни сили струму в ньому.

Формула (51.4) справедлива для середовища, що заповнює контур і не є феромагнітним.

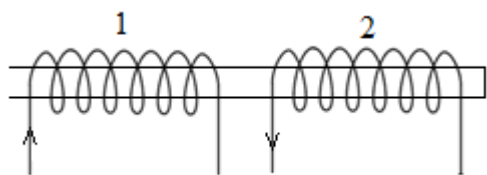


Рис. 51.2.

Розглянемо тепер процес *взаємної індукції* між двома контурами, зображеними на рис. 51.2 у вигляді двох котушок, намотаних на загальне осердя.

Якщо в першому контурі проходить струм I_1 , то він створює магнітний потік (потокозчеплення), через другий контур величина

якого пропорційна I_1 :

$$\Psi_{21} = L_{21} I_1. \quad (51.5)$$

Якщо сила струму I_1 змінюється, то відповідно до закону електромагнітної індукції змінне магнітне поле першого контура збуджує в другому контурі ЕРС

$$\varepsilon_{21} = -L_{21} \frac{dI_1}{dt}. \quad (51.6)$$

Аналогічно, якщо в контурі 2 проходить струм I_2 , то створений ним магнітний потік через контур 1

$$\Psi_{12} = L_{12} I_2, \quad (51.7)$$

і при зміні сили струму I_2 в контурі 1 індукується ЕРС

$$\varepsilon_{12} = -L_{12} \frac{dI_2}{dt}. \quad (51.8)$$

Контури 1 і 2, які взаємодіють за допомогою магнітного поля, називаються *зв'язаними*.

Явище виникнення електрорушійної сили в одному з пов'язаних контурів при зміні сили струму в іншому називається взаємною індукцією.

Коефіцієнти пропорційності L_{12} та L_{21} називаються *взаємною індуктивністю* контурів 1 і 2.

Розрахунок показує, що для довільних контурів 1 і 2 при відсутності феромагнетиків ці коефіцієнти дорівнюють один одному

$$L_{12} = L_{21}. \quad (51.9)$$

Взаємна індуктивність залежить від форми, розмірів і взаємного розташування контурів, а також від магнітної проникності середовища. При наявності феромагнетика взаємна індуктивність залежить від сили струмів в контурах.

Взаємна індуктивність двох зв'язаних контурів є величина, що чисельно

дорівнює електрорушійній силі індукції, яка виникає в одному з контурів, при швидкості зміни сили струму в іншому контурі 1 А за 1 с.

Система з двох котушок, з'єднаних феромагнітним сердечником, являє собою **трансформатор** (рис. 51.3).

За допомогою трансформатора можна підвищувати або знижувати напругу змінного струму.

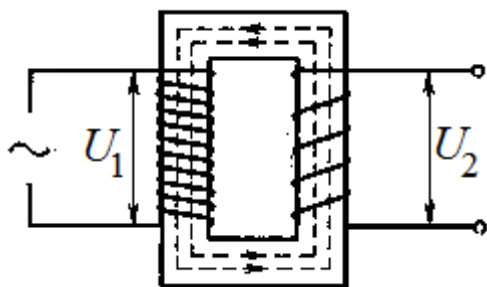


Рис. 51.3.

Під час холостого ходу трансформатора, коли струм у вторинній обмотці відсутній, відношення абсолютних значень напруг на кінцях вторинної та первинної обмоток дорівнює відношенню відповідних чисел витків.

$$\frac{|U_2|}{|U_1|} = \frac{N_2}{N_1}. \quad (51.10)$$

Для трансформатора, що підвищує (знижує) напругу $N_2 > N_1$ ($N_2 < N_1$).

Приклад 51.1. Скільки витків дроту діаметром $d = 0,4$ мм потрібно намотати на картонний циліндр діаметром $D = 4$ см, для того, щоб отримати котушку з індуктивністю $L = 1$ мГн? Обмотка соленоїда одношарова, витки щільно прилягають один до одного.

Число витків n на одиницю довжини знайдемо, розділивши цю одиницю довжини на діаметр проводу

$$n = \frac{1}{d}.$$

У відповідності з формулою (81.3) для соленоїда без осердя ($\mu = 1$)

$$L = \mu_0 n^2 l S = \mu_0 \left(\frac{1}{d}\right)^2 l \frac{\pi D^2}{4}.$$

Звідси довжина соленоїда $l = \frac{4d^2 L}{\pi \mu_0 D^2}$ і повне число витків дроту

$$N = nl = \frac{4dL}{\pi \mu_0 D^2} \approx 254 \text{ витки}$$

§ 52. Струм замикання і розмикання кола

Характерним прикладом самоіндукції може бути поява струмів замикання і розмикання.

При замиканні або розмиканні кола в ньому внаслідок явища самоіндукції виникають додаткові струми, які за правилом Ленца завжди перешкоджають зміні основного струму в колі. Отже, при замиканні кола ЕРС самоіндукції буде сповільнювати швидкість наростання струму, а при розмиканні, навпаки, уповільнювати швидкість зменшення струму.

Розглянемо коло (рис. 52.1), що складається з послідовно включених опору R , індуктивності L і джерела струму ε (в опір R включені внутрішній опір джерела і омичний опір котушки).

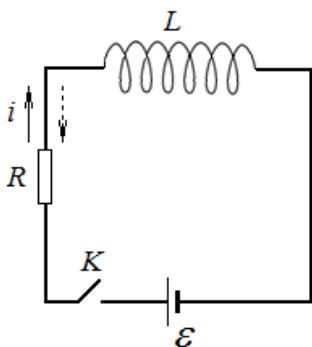


Рис. 52.1.

Після замикання ключа K в колі крім ЕРС джерела ε буде діяти ЕРС самоіндукції ε_{si} і відповідний їй струм самоіндукції, який називається *екстраструмом замикання*. Згідно з правилом Ленца напрямком екстраструму замикання протилежний напрямку основного струму, струм самоіндукції перешкоджає швидкому наростанню основного струму.

Позначимо через $i(t)$ миттєве значення сили струму

в колі. Відповідно до закону Ома

$$\varepsilon + \varepsilon_{si} = iR. \quad (52.1)$$

Підставляючи вираз для ЕРС самоіндукції, отримаємо

$$\varepsilon - L \frac{di}{dt} = iR. \quad (52.2)$$

Розділивши змінні, отримаємо рівняння

$$L \frac{di}{\varepsilon - iR} = dt. \quad (52.3)$$

Це співвідношення є диференціальним рівнянням для сили струму. Візьмемо інтеграл від правої і лівої частин рівняння

$$L \int \frac{di}{\varepsilon - iR} = \int dt$$

Обидва інтеграли є табличними. Після інтегрування отримаємо

$$-\frac{L}{R} \ln(\varepsilon - iR) = t + const. \quad (52.4)$$

Довільна стала інтегрування визначається з початкових умов: в момент часу $t = 0$ струму в колі ще не було, $i(0) = 0$.

Тоді

$$const = -\frac{L}{R} \ln \varepsilon. \quad (52.5)$$

Підставляючи (52.5) в (52.4), після нескладних перетворень отримаємо

$$\ln \frac{\varepsilon - iR}{\varepsilon} = -\frac{R}{L} t.$$

або остаточно

$$i(t) = \frac{\varepsilon}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L} t}). \quad (52.6)$$

Величина $\frac{L}{R}$ має розмірність часу, її позначають τ і називають *постійною часу кола (або часом релаксації, часом встановлення струму)*

$$\tau = \frac{L}{R}. \quad (52.7)$$

Тоді формула (52.6) набуде вигляду

$$i(t) = \frac{\varepsilon}{R} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = i_0 (1 - e^{-t/\tau}). \quad (52.8)$$

З формули (52.8) випливає, що при включенні джерела струм в колі не відразу, а поступово сягає значення, що відповідає силі усталеного струму (рис. 52.2). Наростання сили струму відбувається тим швидше, чим більше відношення R/L , тобто чим меншою є індуктивність кола і більшим її опір.

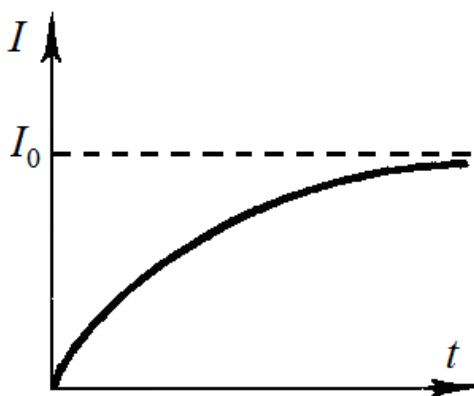


Рис. 52.2.

Приклад 52.1. До джерела з внутрішнім опором $r_i = 2$ Ом підключили котушку з опором $R_k = 8$ Ом і індуктивністю $L = 10$ мГн. Знайти час t , протягом якого струм в котушці, наростаючи, досягне значення, рівного половині максимального.

Опір кола дорівнює $R = r_i + R_k$.

Струм в момент часу t дорівнює $i(t) = i_0(1 - e^{-\frac{R}{L}t})$

За умовою $\frac{1}{2} = 1 - e^{-\frac{R}{L}t}$ або $e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{1}{2}$, звідки $\frac{R}{L}t = \ln 2$. Остаточно

$$t = \frac{L}{R} \ln 2 = \frac{10 \cdot 10^{-3}}{10} 0,693 \approx 0,7(\text{мс}).$$

Розглянемо тепер процес розмикання струму.

У колі, що зображене на рис. 52.3, спочатку ключ K знаходився в положенні 1 і проходив струм $i_0 = \varepsilon / R$ (як і в першому випадку, в опір R включені внутрішній опір джерела і омичний опір котушки).

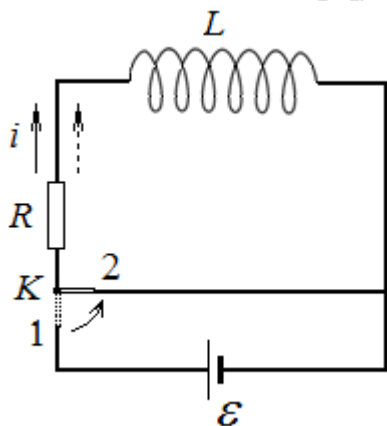


Рис. 52.3.

При повороті ключа в положення 2 джерело струму відключається від кола, і струм в ньому почне зменшуватися. Але він не відразу досягає нуля, тому що через індуктивність і опір проходитиме струм самоіндукції, який буде підтримувати спадаючий струм.

Такий струм називається *екстраструмом розмикання*. Напрямок струму до розмикання показано суцільною стрілкою, після розмикання - штриховою. Згідно із законом Ома

$$iR = -L \frac{di}{dt}. \quad (52.9)$$

Після розділення змінних отримуємо рівняння

$$\frac{di}{i} = -\frac{R}{L} dt,$$

інтегрування якого дає $\ln i = -Rt/L + \text{const}$, або

$$i(t) = \text{const} \cdot e^{-\frac{R}{L}t}.$$

При $t = 0$ $i(0) = i_0 = \text{const} = \varepsilon / R$, так що остаточно маємо для струму розмикання

$$i(t) = \frac{\varepsilon}{R} e^{-\frac{R}{L}t} = i_0 e^{-t/\tau}. \quad (52.10)$$

Згідно із законом Ленца екстраструм розмикання за напрямком збігається зі струмом джерела, тому струм в колі спадає поступово (рис. 52.4) за експоненціальним законом.

Швидкість убуття струму від початкового значення I_0 до нуля характеризується постійною часу $\tau = L/R$. Чим більше значення τ (чим більше інду-

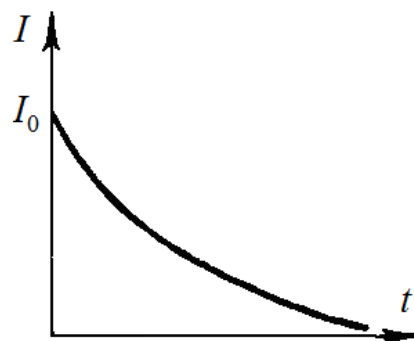


Рис. 52.4.

ктивність контура і чим менше опір), тим повільніше спадає струм.

Відповідно до формули (52.10) постійна часу кола τ дорівнює часу, протягом якого сила струму зменшується в e разів.

У колах, що містять великі індуктивності, під час виключення струму екстраструми розмикання можуть досягати великої величини і можуть бути причиною потужної іскри на рубильнику. Це може привести до пробоя діелектриків і виходу з ладу електрообладнання. Щоб запобігти дію екстраструмів розмикання, струм перед розмиканням поступово зменшують.

На закінчення встановимо аналогію між індуктивністю L контура в електродинаміці і масою тіла m у механіці. Індуктивність є мірою «інертності» по відношенню до зміни струму в контурі і в цьому сенсі є аналогом маси - міри інертності тіла при його поступальному русі.

§ 53. Енергія магнітного поля

У тому, що магнітне поле має енергію можна переконатися, розглядаючи процес спадання струму в схемі рис. 52.3. До розмикання кола струм проходив в котушці і створив в ній магнітне поле. Після розмикання ключа залишається послідовно з'єднана котушка і резистор. Завдяки явищу самоіндукції струм в колі спадає поступово, і на опорі виділяється Джоулева теплота. Відповідно до закону Джоуля-Ленца елементарна робота, яку виконує ЕРС самоіндукції,

$$dA = I \varepsilon_{si} dt = -IL \frac{dI}{dt} dt = -LI dI. \quad (53.1)$$

За час убуття сили струму від початкового значення I до нуля ним буде здійснена робота

$$A = -L \int_I^0 IdI = \frac{LI^2}{2}. \quad (53.2)$$

Ця робота йде на нагрівання проводів. За рахунок яких запасів енергії виділяється теплота? Очевидно, що в даному випадку джерелом роботи може бути тільки магнітне поле струму.

Магнітне поле є носієм енергії, за рахунок якої здійснюється робота.

Енергія магнітного поля струму I , що проходить по провіднику з індукцією L ,

$$W = \frac{LI^2}{2}. \quad (53.3)$$

Визначимо енергію, що припадає на одиницю об'єму, займаному полем - *об'ємну густину енергії магнітного поля*.

Як приклад зручно розглянути магнітне поле соленоїда, оскільки поле довгого соленоїда є однорідним, а поза соленоїдом може бути прийнято рівним нулю.

Індуктивність соленоїда

$$L = \mu\mu_0 n^2 V.$$

Магнітна індукція всередині соленоїда

$$B = \mu\mu_0 n I.$$

Звідки

$$I = \frac{B}{\mu\mu_0 n} \quad (53.4)$$

Таким чином, енергія магнітного поля соленоїда

$$W = \frac{1}{2} \frac{B^2 V}{\mu\mu_0}.$$

З урахуванням виразу $B = \mu\mu_0 H$ для густини енергії магнітного поля можна написати три вирази

$$w = \frac{W}{V} = \frac{B^2}{2\mu\mu_0} = \frac{H \cdot B}{2} = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2}. \quad (53.5)$$

Приклад. До обкладинок зарядженого до напруги $U_{\max} = 200$ В конденсатора, ємністю $C = 0,04$ мкФ приєднують котушку індуктивності. Індуктивність котушки $L = 1,6$ мГн. Конденсатор починає розряджатися, і в колі з'являється електричний струм. Якою є максимальна сила струму в колі?

Електрична енергія конденсатора перетворюється в енергію магнітного поля котушки зі струмом

$$\frac{CU_{\max}^2}{2} = \frac{LI_{\max}^2}{2}.$$
$$\text{Звідси } I_{\max} = \sqrt{\frac{CU_{\max}^2}{L}} = \sqrt{\frac{0,04 \cdot 10^{-6} \cdot (200)^2}{1,6 \cdot 10^{-3}}} = 1 \text{ А}.$$

§ 54. Релятивістське тлумачення магнітної взаємодії рухомого заряду і прямолінійного провідника зі струмом. Відносний характер електричного і магнітного полів

Розглянемо як приклад довгий прямолінійний провідник зі струмом. Паралельно провіднику з деякою швидкістю v ($v \ll c$, $c \approx 3 \cdot 10^8$ м/с) в напрямку, протилежному струмові, рухається заряджена частинка (наприклад, негативно заряджена зарядом $-q$).

Як показує дослід, частинка притягається до провідника.

Як буде виглядати взаємодія частинки і провідника зі струмом в різних інерціальних системах відліку (ІСВ)?

В ІСВ, де провідник нерухомий, а частинка рухається (назвемо її K – системою), існує магнітне поле прямого струму. З боку цього магнітного поля на рухоми в ньому заряджену частинку буде діяти сила Лоренца. Відзначимо, що ця сила спрямована перпендикулярно до провідника, «до нього».

Будемо вважати, що всі електрони рухаються впорядковано з однаковою швидкістю v (для простоти завдання) і цим утворюють струм в проводі.

Перейдемо тепер в ІСВ, яка рухається паралельно проводу в той самий бік, що і електрони, які утворюють струм, і з тією самою швидкістю. Назвемо її K' – системою.

У цій ІСВ заряджена частинка перебуває в стані спокою. Магнітне поле проводу на нерухомий заряд не діє, і сила Лоренца, що залежить від швидкості заряду, дорівнює нулю.

Але взаємодія заряду й проводу зі струмом повинна спостерігатися в будь-якій ІСВ, вона зникнути не може!

Спробуємо пояснити взаємодію заряду і струму в K' – системі без залучення поняття магнітного поля. Для початку зауважимо, що у вихідній K – системі провідник не є зарядженим. Металевий провідник можна розглядати як остов позитивних іонів, заповнений негативними електронами. Густина позитивних іонів і негативних електронів однакова, провідник є нейтральним.

А в K' – системі провідник виявляється позитивно зарядженим! Дійсно, відповідно до одного з наслідків спеціальної теорії відносності, довжина рухомих тіл скорочується в напрямку руху (лоренцеве скорочення).

У K' – системі електрони перебувають у стані спокою, а іони рухаються в протилежний бік з такою ж за модулем швидкістю. За рахунок «лоренцевого скорочення» довжина остова позитивних іонів стає меншою, відстань між позитивними іонами зменшується, а їх концентрація зростає.

З іншого боку, переходячи в K' – систему, ми виявляємо, що відстані між електронами збільшуються в силу того ж слідства СТВ (найбільшою довжина буде в тій ІСВ, в якій тіло покоїться). Т.ч., в цій ІСВ концентрація електронів стає меншою.

В результаті нейтральний в K – системі відрізок проводу зі струмом в K' – системі заряджається позитивно.

Позитивно заряджений провідник діє на розташовану поруч з ним негативно заряджену частинку і притягує її.

Пояснення знайдено.

Виникає питання. Якщо можна обійтися без залучення поняття магнітного поля, якщо магнітні сили є релятивістським ефектом, то навіщо було вводити це поняття?

Відповідь на це питання можна дати таку – пояснення за допомогою теорії відносності є важким і складним! Набагато простіше залишити поняття магнітного поля, яке історично виникло ще до появи спеціальної теорії відносності. Що й було зроблено фізиками в розділі «Електромагнетизм».

Розглянемо тепер цей приклад більш докладно і кількісно

1. В ІСВ K струм I , що проходить вздовж провідника, створює магнітне поле $\mathbf{B}$, яке діє на заряджену частинку з силою Лоренца, спрямованої до провідника зі струмом (рис. 54.1)

$$\mathbf{F}_L = (-q) [\mathbf{v}, \mathbf{B}].$$

Оскільки провідник в цілому є електронейтральним, то електричного поля, яке діяло б на заряджену частинку, навколо себе він не створює, $\mathbf{E} = 0$.

Впорядкований рух електронів (в бік, протилежний напрямку струму) утворює струм I . Вва-

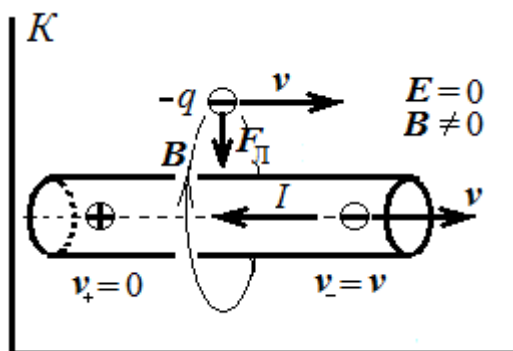


Рис. 54.1.

жаємо, що швидкість упорядкованого руху електронів провідності v_- дорівнює швидкості частинки, що рухається поруч з провідником: $v_- = v$. При цьому швидкість позитивних іонів $v_+ = 0$, оскільки в K -системі провідник перебуває в спокої.

2. Перейдемо тепер в ІСВ K' , яка рухається рівномірно і прямолінійно зі швидкістю v відносно K (рис. 54.2). У цій системі відліку заряд $-q$ буде нерухомим, а провідник рухатиметься щодо K' в зворотний по відношенню до випадку бік. Швидкість позитивних іонів $v_+ = -v$, швидкість електронів провідності $v_- = 0$ (рис. 54.3).

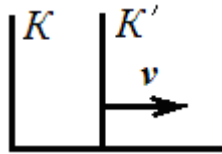


Рис. 54.2.

54.2). У цій системі відліку зарядник буде рухатися щодо K' в зворотний по відношенню до випадку бік. Швидкість позитивних іонів $v_+ = -v$, швидкість електронів провідності $v_- = 0$

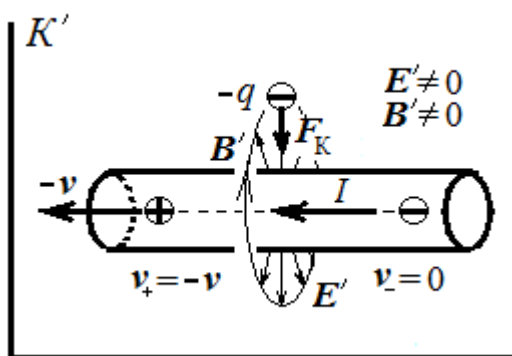


Рис. 54.3.

Рухомі позитивні іони створюють навколо провідника магнітне поле B' , яке однак на нерухому частинку не діє. Тим не менш, вона притягується до провідника.

Згідно з фундаментальним фізичним законом – принципом відносності – будь-який процес протікає однаково в системі, що знаходиться в спокої, і в такій самій системі, що перебуває в стані рівномірного прямолінійного руху (обидва стани визначаються по відношенню до довільно обраної ІСВ).

У розглянутому прикладі таким фізичним процесом є взаємодія рухомого заряду і провідника зі струмом. Процес однаковий в обох системах, але причини взаємодії пояснюються нерухомим і рухомих спостерігачами по-різному.

У K' – системі зрушити з місця нерухому заряджену частинку може тільки електричне поле E' , яке і виникає в цій системі відліку (рис. 54.3). Походження цього електричного поля E' пов'язано з різним лоренцевим скороченням, яке відчувають ланцюжки позитивних і негативних зарядів. Покажемо це.

Нехай деяка сукупність зарядів Q знаходиться в циліндричній посудині з розмірами S_0, L_0 , яка є нерухомою в системі K' (рис. 54.4, а). Густина нерухомих зарядів

$$\rho_0 = \frac{Q}{S_0 L_0}. \quad (54.1)$$

Відносно системи K циліндр з зарядами рухається уздовж своєї осі зі швидкістю v .

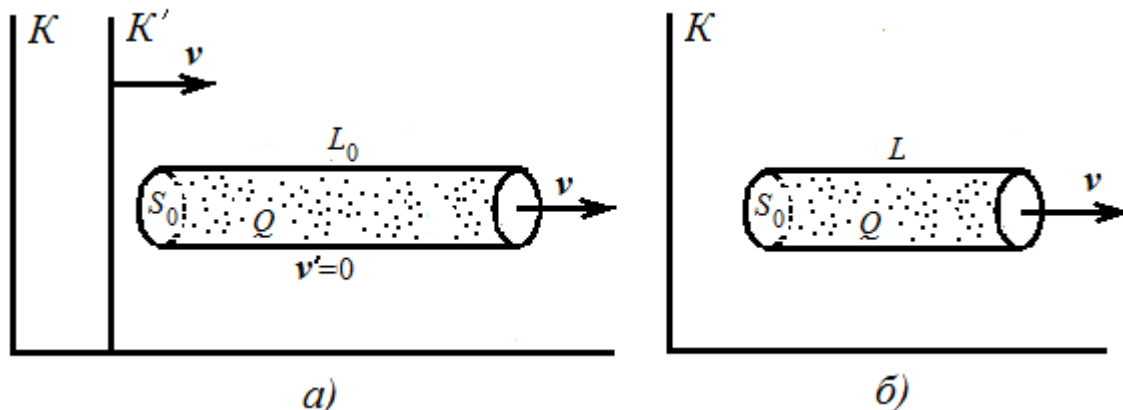


Рис. 54.4.

(рис. 54.4, б). Оскільки лінійні розміри тіл скорочуються в напрямку руху, довжина L рухомого циліндра буде менше тієї, яку він мав у стані спокою:

$$L = L_0 \sqrt{1 - v^2 / c^2} . \quad (54.2)$$

Через релятивістського скорочення довжини об'єм циліндра $S_0 L$ стає меншим (поперечні розміри S_0 не змінюються). Тоді густина рухомої сукупності зарядів стане рівною

$$\rho = \frac{Q}{S_0 L} . \quad (54.3)$$

Якщо врахувати, що заряд Q під час руху не змінюється (інваріантність заряду), то

$$\rho_0 S_0 L_0 = \rho S_0 L , \quad (54.4)$$

звідки

$$\rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} \quad \text{або} \quad \rho_{\text{рухом}} = \frac{\rho_{\text{нерухом}}}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} . \quad (54.5)$$

Застосуємо співвідношення (84.5) до циліндричного провідника, що рухається вздовж своєї осі.

В K -системі провідник нерухомий, *позитивні* заряди, що утворюють остов провідника перебувають в стані спокою (рис. 54.1), в K' – системі вони рухаються зі швидкістю $-v$ (рис. 54.3). Тоді з (54.5) випливає співвідношення між густиною *позитивних* зарядів в різних системах

$$\rho'_+ = \frac{\rho_+}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} . \quad (54.6)$$

Для *негативних* зарядів (рис. 54.3 і 54.1) навпаки: в K' – системі вони нерухомі, в K – системі вони рухаються вправо зі швидкістю v . Рівняння (54.2) дає співвідношення між густиною негативних зарядів в різних системах

$$\rho_- = \frac{\rho'_-}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} . \quad (54.7)$$

Результуюча густина зарядів в K' – системі з урахуванням (54.6) і (54.7) дорівнює

$$\rho' = \rho'_+ + \rho'_- = \frac{\rho_+}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} + \rho_- \sqrt{1 - v^2 / c^2} . \quad (54.8)$$

Оскільки нерухомий в K – системі провідник є електрично нейтральним, тобто сума густин позитивних іонів і негативних вільних електронів дорівнює нулю, то

$$\rho_+ + \rho_- = 0, \quad \text{або} \quad \rho_+ = -\rho_- . \quad (54.9)$$

Тоді (54.8) запишеться

$$\rho' = \rho_+ \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} - \sqrt{1 - v^2 / c^2} \right) = \rho_+ \frac{v^2 / c^2}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} . \quad (54.10)$$

Формула (54.10) означає, що рухомий провідник зі струмом вже не є електрично нейтральним. Він заряджається позитивно і створює в точці, де знаходиться

нерухомий заряд електричне поле E' . Це поле і забезпечує притягання заряду до проводу зі струмом в ІСВ K' .

Можна вважати, що простір, що оточує провідник з струмом, знаходиться в деякому особливому стані. В системі відліку K цей стан простору називається магнітним полем. В системі K' , що рухається разом із зарядом $(-q)$, – електричним полем. Принцип відносності стверджує, що вплив провідника зі струмом на заряд в будь-якій ІСВ буде одним і тим самим. *Одна і та ж дія, що спричиняється одним і тим же станом простору, в різних системах відліку називається по-різному.* Насправді немає «чисто електричної» і «чисто магнітної» взаємодії – є єдина взаємодія, яка по-різному називається в різних системах відліку.

Розглянутий приклад дозволяє зробити висновок про те, що електричне і магнітне поля не мають абсолютного характеру. Окремо ці поля не існують. ***У природі існує матеріальне електромагнітне поле, а окремі його прояви у вигляді електричного або магнітного поля залежать від вибору ІСВ, в якій розглядається явище.***

Якщо в деякій ІСВ існує тільки магнітне поле, то в іншій з'являється також і електричне поле, і навпаки. Відповідним вибором ІСВ можна усунути одне з полів. Однак електромагнітне поле не можна знищити переходом в будь-яку систему відліку.

Наведемо ще деякі приклади.

Приклад 54.1. Нехай електричний заряд рухається з постійною швидкістю v відносно деякої ІСВ K , яку ми умовно вважаємо нерухомою. Рухомий заряд створює як електричне, так і магнітне поле. Однак, якщо перейти в ІСВ K' , що рухається щодо K зі швидкістю заряду v , то в ній заряд перебуває в спокої і ніякого магнітного поля в цій системі не виявляється, ми будемо спостерігати тільки електричне поле.

Приклад 54.2. Нехай тепер два електричних заряди рухаються назустріч один одному з однаковою швидкістю v відносно деякої ІСВ K . В цій ІСВ ми будемо спостерігати як електричне, так і магнітне поля. Однак знайти таку систему відліку, в якій спостерігалось б лише одне з полів, в даному випадку неможливо.

З наведених прикладів випливає, що експериментальне визначення електричного або магнітного поля зарядів залежить від системи відліку, в якій ведеться спостереження.

Зауважимо, що електричне і магнітне поля не можна розглядати як складові частини електромагнітного поля. Ці поля є його окремими випадками.

Електромагнітне поле - одне з первинних фундаментальних понять, а тому його не можна розділити на якісь більш дрібні поняття - складові частини.

§ 55. Перетворення Лоренца для електромагнітного поля

Нехай існують дві ІСВ: K – система і K' – система, що рухається відносно неї зі швидкістю $\mathbf{v}$. В деякій просторово-часовій точці K – системи відомі значення полів $\mathbf{E}$ і $\mathbf{B}$. Якими будуть значення полів в тій же самій просторово-часовій точці в K' – системі?

Спеціальна теорія відносності показує, що закони перетворення полів (перетворення Лоренца для електромагнітного поля) виражаються наступними формулами (величини зі штрихом відносяться до системи відліку K' , що рухається відносно системи K уздовж осі x зі швидкістю v):

для компонент вектора напруженості електричного поля:

$$E'_{x'} = E_x, E'_{y'} = \frac{E_y - vB_z}{\sqrt{1 - \beta^2}}, E'_{z'} = \frac{E_z + vB_y}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (55.1)$$

для компонент вектора індукції магнітного поля

$$B'_{x'} = B_x, B'_{y'} = \frac{B_y + \frac{vE_z}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, B'_{z'} = \frac{B_z - \frac{vE_y}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (55.2)$$

З рівнянь (55.1) і (55.2) видно, що кожен з векторів $\mathbf{E}'$ і $\mathbf{B}'$ виражається як через $\mathbf{E}$, так і через $\mathbf{B}$. Це свідчить про єдину природу електричного і магнітного полів. Електричне і магнітне поля є компонентами єдиного фізичного об'єкта - *електромагнітного поля*. Кожне з полів окремо не має абсолютного сенсу: про електричні і магнітні поля можна говорити лише з обов'язковим зазначенням ІСВ, в яких ці поля розглядаються.

Якщо, наприклад, в системі K поле $\mathbf{E}$ дорівнює нулю, то в системі K' воно відмінне від нуля. Якщо в системі K поле $\mathbf{B}$ дорівнює нулю, то в системі K' воно відмінне від нуля.

Приклад 55.1. Розглянемо заряджену частинку, нерухому в системі K . Оскільки заряд є нерухомим, в цій системі ми будемо спостерігати тільки електричне поле

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{r} \quad (\text{П. 55.1})$$

Тут $\mathbf{r}$ - радіус вектор, проведений від частинки в дану точку поля. Нерухомі заряди магнітного поля не створюють, тому в цій системі відліку магнітного немає, $\mathbf{B} = 0$.

Що буде бачити спостерігач рухомої системи відліку K' ?

Скористаємося формулами перетворення полів і для простоти розглянемо випадок, коли швидкість системи відліку K' є набагато меншою швидкості світла, $v \ll c$. В цьому випадку квадратні корені $\sqrt{1 - v^2/c^2} \approx 1$ і формули перетворення Лоренца приймають вид

$$E'_{x'} = E_x, E'_{y'} = E_y - vB_z, E'_{z'} = E_z + vB_y. \quad (\text{П. 55.2})$$

$$B'_{x'} = B_x, B'_{y'} = B_y + vE_z/c^2, B'_{z'} = B_z - vE_y/c^2. \quad (\text{П. 55.3})$$

Ці рівняння можна записати у векторному вигляді

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + [\mathbf{v}, \mathbf{B}]. \quad (\text{П. 55.4})$$

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B} - [\mathbf{v}, \mathbf{E}]/c^2. \quad (\text{П. 55.5})$$

Оскільки ми розглядаємо нерелятивістський випадок $v \ll c$, просторові координати і час пов'язані перетвореннями Галілея, тому радіус-вектор однаковий в обох системах відліку $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$.

Підставляючи вирази для $\mathbf{E}$ (П. 55.1) і $\mathbf{B} = 0$ в перетворення (П. 55.4) і (П. 55.5), отримаємо, що в K' – системі спостерігаються як електричне, так і магнітне поля даного заряду:

$$\mathbf{E}' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{r}. \quad (\text{П. 55.6})$$

$$\mathbf{B}' = -\frac{1}{c^2} [-\mathbf{v}, \mathbf{E}] = \frac{\mu_0 q}{4\pi r^3} [\mathbf{v}, \mathbf{r}]. \quad (\text{П. 55.7})$$

Вираз (П. 55.6) – це кулонівське поле заряду, а вираз (П. 55.7) – магнітне поле рухомого заряду.

Таким чином, при переході від однієї системи відліку до іншої електричне поле в одній системі виражається і через електричне поле, і через магнітне поле в іншій системі, і навпаки.

Ясно, що має сенс розглядати ці поля спільно, як єдине **електромагнітне поле**.

Теорія відносності накладає обмеження на взаємне перетворення електричних і магнітних полів в рухомих системах відліку. Виявляється, що при переході від однієї системи відліку до іншої існують інваріантні, тобто такі, що не міняють свого значення, комбінації з векторів $\mathbf{E}$ і $\mathbf{B}$. Це скалярний добуток цих векторів і їх різниця квадратів:

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{E}' \cdot \mathbf{B}', \quad (55.3)$$

$$E^2 - c^2 B^2 = E'^2 - c^2 B'^2. \quad (55.4)$$

Формули (55.3), (55.4) дозволяють зробити ряд висновків про властивості електромагнітного поля.

Якщо в якій-небудь інерціальній системі відліку електричне та магнітне поля взаємно перпендикулярні (їх скалярний добуток дорівнює нулю, $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$), то, як видно з (55.3), вони будуть взаємно перпендикулярні і у всякій іншій системі.

Якщо ліва частина співвідношення (55.4) дорівнює нулю в деякій ІСВ, що характерно для плоскої електромагнітної хвилі в вакуумі, то ця властивість матиме місце у всіх ІСВ, тобто плоска електромагнітна хвиля залишатиметься плоскою в будь-якій іншій ІСВ.

Приклад 55.2. Літак летить уздовж земного меридіана на північ зі швидкістю $v = 250$ м/с. Магнітне поле Землі на цій широті складає $B_z = 60$ мкТл і направлено вертикально вниз. Які поля спостерігає пілот літака?

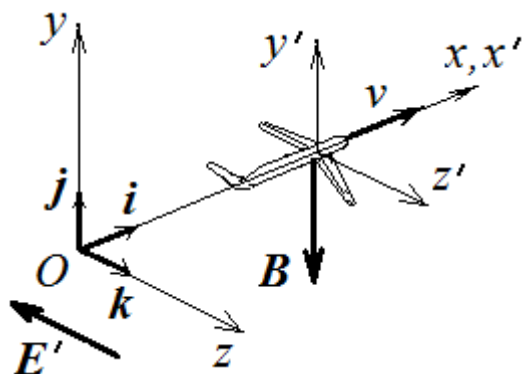


Рис. П.55.1.

Направимо вісь Ox уздовж меридіана на північ. Використовуючи одиничні вектори координатних осей $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, можна записати швидкість літака, спрямовану вздовж осі Ox ,

$$\mathbf{v} = v \cdot \mathbf{i}, \quad (\text{П.55.8})$$

і магнітне поле Землі, спрямоване вертикально вниз

$$\mathbf{B} = -B_z \cdot \mathbf{j}. \quad (\text{П.55.9})$$

Лабораторну систему відліку K зв'яжемо із Землею, а систему відліку K' – з літаком. Тепер завдання виглядає таким чином: задано магнітне поле в K -системі. Користуючись законами перетворення полів,

визначити електричне та магнітне поля в K' - системі. Оскільки швидкість літака набагато менше швидкості світла, скористаємося формулами перетворення полів для цього випадку (П.55.4, П.55.2)

$$\begin{aligned} E' &= E + [v, B] \\ B' &= B - [v, E]/c^2 \end{aligned}$$

У лабораторній системі відліку електричного поля немає, $E = 0$. Тоді з цих формул випливає, що магнітне поле в K' - системі буде таким же, як і в лабораторній K -системі:

$$B' = B. \quad (\text{П.55.10})$$

Що ж стосується електричного поля, то воно з'являється в K' - системі:

$$E' = [v, B] = -v B_3 [i, j] \quad (\text{П.55.11})$$

Відповідно до відомого з векторної алгебри співвідношенню

$$[i, j] = k,$$

Тому

$$E' = -v B_3 k. \quad (\text{П.55.12})$$

Підставивши числа, знайдемо модуль напруженості електричного поля

$$E' = 250 \cdot 60 \cdot 10^{-6} = 0,015 \text{ (В/м)}.$$

Таким чином, пілот літака, крім магнітного поля, зареєструє електричне поле, спрямоване вздовж крил зі сходу на захід. В результаті дії цього поля, на кінці лівого крила літака будуть накопичуватися позитивні заряди, а на кінці правого крила - негативні заряди. При розмаху крил $l = 60$ м різниця потенціалів між кінцями крил складе

$$\Delta\varphi = E \cdot l = 0,015 \cdot 60 = 0,9 \text{ В}.$$

Контрольні запитання

1. У середині металевої трубки падає намагнічена металева кулька з діаметром, меншим внутрішнього діаметра трубки. Чому падіння кульки сповільнюється в порівнянні з падінням в цій же трубці немагнітної кульки? В якому випадку будуть чутні удари кульки об стінки трубки?
2. Чому осердя трансформаторів виготовляються з окремих листів, а не з суцільного шматка заліза?
3. Чому в потужних електричних генераторах обертають магнітне поле, а не рамку?
4. Послідовно з котушкою індуктивності включена лампа розжарювання. При включенні напруги яскравість лампи наростає поступово. Як пояснити це явище? Як залежить швидкість наростання яскравості від індуктивності котушки?
5. У чому полягає відносність поділу електромагнітного поля на електричне і магнітне поля?
6. Чи існують ІСВ, в яких електричний заряд є джерелом тільки одного магнітного поля?
7. Електричний заряд нерухомий в K -системі. Які поля спостерігаються в K' -системі, що рухається відносно K -системи рівномірно і прямолінійно?
8. Чи існує така конфігурація електромагнітного поля, при якій в будь-який ІСВ існують одночасно і електричне та магнітне поля?
9. Два однакових заряди рухаються в K -системі відліку назустріч один одному з однаковою швидкістю V . Які поля спостерігаються в цій системі? Чи можна знайти таку ІСВ, де спостерігалось б тільки одне з полів?
10. У K -системі відліку існує постійне неоднорідне магнітне поле (наприклад, поле нерухомого постійного магніту). Які поля спостерігаються в ІСВ K' , що рухається відносно K -системи?
11. У K -системі відліку існує електричне поле, але немає магнітного. В якому випадку в K' -системі також буде спостерігатися тільки електричне поле?
12. Як користуючись законами перетворення полів показати, що при швидкості світла, яка дорівнює нескінченності, магнітна взаємодія між двома зарядами, що рухаються паралельно з однаковими швидкостями, зникає? Які висновки можна зробити з цього?

Глава 9. РІВНЯННЯ МАКСВЕЛЛА

Між електричними і магнітними полями існує глибокий зв'язок. Будь-яка зміна магнітного поля завжди супроводжується появою електричного поля, і, навпаки, всяка зміна електричного поля призводить до появи магнітного поля. Це взаємне перетворення електричних і магнітних полів було відкрито в 60-х роках 19 ст. видатним англійським фізиком Дж. К. Максвеллом.

Рівняння Максвелла - це основні рівняння класичної електродинаміки, які описують електромагнітні явища в будь-якому середовищі. Рівняння були сформульовані Максвеллом на основі узагальнення експериментальних законів електричних і магнітних явищ і розвитку ідеї англійського вченого М. Фарадея про те, що взаємодія між електрично зарядженими тілами здійснюється за допомогою електромагнітного поля.

Рівняння Максвелла пов'язують величини, що характеризують електромагнітне поле, з його джерелами, тобто з розподілом в просторі електричних зарядів і струмів і дозволяють вирішити основну задачу електродинаміки: по заданому розподілу зарядів і струмів визначити характеристики створюваних ними електричних і магнітних полів.

Система рівнянь Максвелла, що описують електромагнітне поле, складається з семи рівнянь (порядок і нумерація їх довільні).

§ 56. Вихрове електричне поле. Перше рівняння Максвелла

Це рівняння дає поглиблене тлумачення явища електромагнітної індукції і є його математичним формулюванням. Відповідно до закону Фарадея, при зміні магнітного потоку Φ_B через замкнутий провідний контур, збуджується електрорушійна сила індукції

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Phi_B}{dt}.$$

Максвелл, однак, підійшов до розгляду явища електромагнітної індукції з дещо іншої точки зору, ніж Фарадей. Згідно Фарадею, електромагнітна індукція полягає в *збудженні електричного струму* і, отже, для її прояви необхідна наявність *замкненого провідника*. З точки зору Максвелла, основним в явищі електромагнітної індукції є *збудження електричного поля*, а не струму, так що це явище

існує і в тому випадку, коли в просторі взагалі немає ніяких провідників (рис. 56.1), тобто в діелектрику або в вакуумі. Провідний контур в дослідах Фарадея грає роль індикатора для виявлення вихрового електричного поля.

З огляду на визначення ЕРС як циркуляції вектора напруженості $\mathbf{E}$ поля сторонніх сил, можна записати

$$\mathcal{E}_i = \oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{d\Phi_B}{dt},$$

де L - замкнений контур інтегрування, $d\mathbf{l}$ - вектор елемента контура, який проведений в напрямі обходу. Магніт-

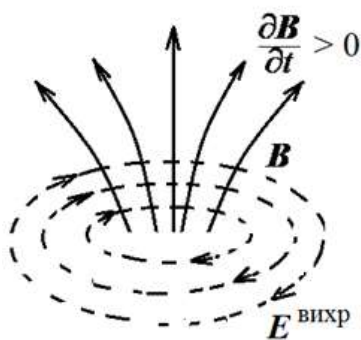


Рис. 56.1.

ний потік через довільну поверхню S , натягнуту на цей контур, визначається інтегралом

$$\Phi_B = \int_S B_n dS = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}.$$

Тут $d\mathbf{S} = dS \cdot \mathbf{n}$, $\mathbf{n}$ - одиничний вектор позитивної нормалі до елемента dS поверхні S , натягнутої на замкнутий контур L (з кінця вектора $\mathbf{n}$ обхід контура видно таким, що відбувається проти годинникової стрілки).

Тоді

$$\varepsilon_i = - \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}.$$

Враховуючи, що порядок диференціювання за часом і інтегрування по поверхні можна поміняти місцями, оскільки поверхня, по якій здійснюється інтегрування, залишається незмінною, отримуємо:

$$\frac{d}{dt} \left(\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \right) = \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

Вектор $\mathbf{B}$ залежить від координат і часу, а інтеграл $\int \mathbf{B} dS$ є функцією тільки часу. Тому під знаком інтеграла застосований символ частинної похідної за часом, в припущенні, що контур є нерухомим.

Таким чином, ми остаточно маємо I рівняння Максвелла в інтегральній формі

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (56.1)$$

Циркуляція вектора $\mathbf{E}$ напруженості електричного поля по довільному замкнутому контуру дорівнює взятій з протилежним знаком швидкості зміни потоку магнітної індукції через поверхню, межею якої є даний контур.

Фізичний зміст I рівняння Максвелла можна коротко сформулювати наступним чином: **змінне магнітне поле породжує вихрове електричне поле.**

Приклад 56.1. В обмотці довгого прямого соленоїда, довжина якого набагато більше його діаметра, змінюється струм за законом $I = I_0 \cos \omega t$. Кількість витків, що припадає на одиницю довжини соленоїда, дорівнює n , осердя виготовлене з неферомагнітного матеріалу з магнітною проникністю μ . Визначити закон зміни електричного поля як функцію відстані r від осі соленоїда.

Змінне магнітне поле всередині соленоїда породжує вихрове електричне поле. Математично це записується у вигляді рівняння Максвелла так:

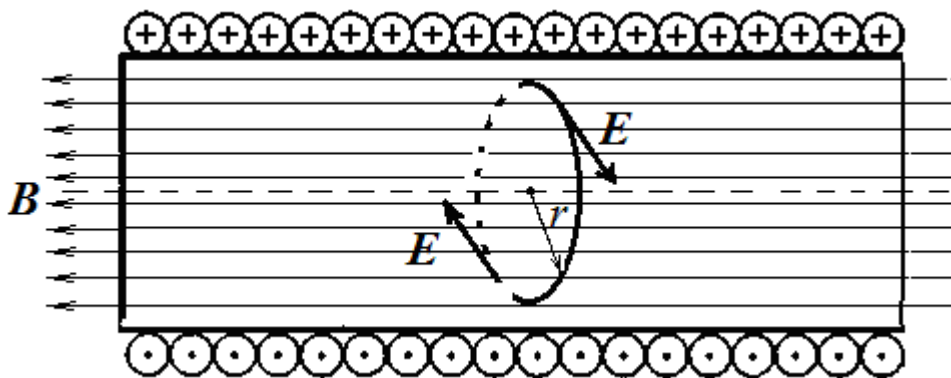


Рис. П. 56.1.

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = - \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S} . \quad (\text{П. 56.1})$$

Для обчислення циркуляції вектора $\mathbf{E}$, що стоїть зліва в рівнянні Максвелла, в якості контура інтегрування L виберемо одну з силових ліній вихрового електричного поля. Це коло з центром на осі соленоїда (рис. П. 56.1). Тоді

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = E \oint_L d\mathbf{l} = E \cdot 2\pi r . \quad (\text{П.56.2})$$

Розкриємо тепер зміст правої частини рівняння Максвелла. Вважаючи поле всередині соленоїда однорідним, тобто однаковим по перетину $S = \pi r^2$, винесемо магнітну індукцію B за знак інтеграла і, нехтуючи крайовими ефектами, замінимо виразом $B = \mu\mu_0 n I$:

$$\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = \frac{d}{dt} (B \int_S dS) = \frac{d}{dt} (\mu\mu_0 n I \pi r^2) = \mu\mu_0 n \pi r^2 \frac{dI}{dt} . \quad (\text{П.56.3})$$

Знаходимо похідну від сили струму за часом

$$\frac{dI}{dt} = \frac{d}{dt} (I_0 \cos \omega t) = -I_0 \sin \omega t . \quad (\text{П.56.4})$$

Дорівнюючи праву і ліву частини рівняння Максвелла (П. 56.1), отримаємо для напруженості вихрового електричного поля

$$E(r, t) = \frac{\mu\mu_0}{2} \omega n r I_0 \sin \omega t . \quad (\text{П.56.5})$$

§ 57. Струм зміщення. Друге рівняння Максвелла

З явища електромагнітної індукції випливає, що всяке змінне магнітне поле викликає вихрове електричне поле.

Основна ідея Максвелла полягала в тому, що можливе і зворотнє явище, тобто електричне поле, яке змінюється з часом, повинно призводити до появи вихрового магнітного поля. Ця плідна ідея згодом була підтверджена на досліді.

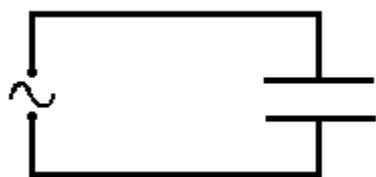


Рис. 57.1.

Щоб проілюструвати відкриття Максвелла, розглянемо коло змінного струму, що містить конденсатор. У розглянутій схемі упорядкований рух зарядів (електронів) існує тільки в провіднику, що з'єднує обкладинки. На обкладинках конденсатора впорядкований рух зарядів обривається.

Однак, це не заважає існуванню змінного струму в розглянутому контурі. Заряди в ньому рухаються від затискачів джерела до обкладинок конденсатора і назад, заряджаючи, розряджаючи і перезаряджаючи конденсатор. Заряди скупчуються на обкладинках, не проникаючи всередину конденсатора. Між обкладинками конденсатора існує змінне електричне поле.

Величину, пропорційну швидкості зміни з часом електричного поля, Максвелл назвав **струмом зміщення**. Термін «струм» тут вживається не в прямому сенсі - ніякого упорядкованого руху зарядів між обкладинками конденсатора немає. Сутність струму зміщення можна виразити таким чином: це **електричне поле, що змінюється в часі**

Струм зміщення створює в навколишньому просторі магнітне поле таке ж, як і поле рівного йому струму провідності. Згодом було доведено експериментально, що електричне поле, яке змінюється з часом, створює навколо себе магнітне поле.

Однак, струм зміщення, на відміну від струму провідності, не виділяє джоулевої теплоти.

Якщо згідно з Максвеллом струм зміщення $i_{зм}$ в конденсаторі дорівнює за величиною струму провідності $i_{пр}$ в іншій частині кола:

$$i_{зм} = i_{пр}, \quad (57.1)$$

то ця умова дозволяє виразити струм зміщення через характеристики електричного поля конденсатора. Дійсно, струм провідності пов'язаний зі зміною заряду кожної обкладки конденсатора загальним співвідношенням:

$$i_{пр} = \frac{dq}{dt},$$

оскільки саме струм, тобто рух зарядів в колі, змінює заряд конденсатора (заряди натікають на обкладинки і стікають з них).

Далі, використовуємо співвідношення, відомі з електростатики:

$$q = CU, \quad U = Ed, \quad C = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{d}, \quad (57.2)$$

де U - напруга на конденсаторі, C - його ємність, S, d - відповідно площа кожної обкладинки і відстань між ними (для простоти розглядається плоский конденсатор), $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м - електрична постійна, ϵ - відносна діелектрична проникність діелектрика конденсатора, E - напруженість електричного поля між обкладинками конденсатора.

Після цього для струму зміщення отримаємо, використовуючи (57.1):

$$i_{зм} = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}(CU) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\epsilon_0 \epsilon S}{d} Ed\right) = \frac{d}{dt}(\epsilon_0 \epsilon E \cdot S) = \frac{d}{dt}(DS) = \frac{d\Phi_D}{dt}. \quad (57.3)$$

Тобто

$$i_{зм} = \frac{d\Phi_D}{dt}. \quad (57.4)$$

Тут $\Phi_D = DS$ є потік вектора електричного зміщення ($\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon \mathbf{E}$) через площу обкладинок конденсатора.

Таким чином, згідно з Максвеллом, *струм зміщення дорівнює швидкості зміни потоку вектора електричного зміщення.*

Цей струм зміщення в даному випадку потрібно уявляти собі таким, що проходить через площу, яка дорівнює площі обкладинки конденсатора S . Тому можна ввести поняття про **густину струму зміщення** $j_{зм}$, визначивши його (аналогічно до густини струму провідності) як струм через одиничну площадку, перпендикулярну струмові. Тоді, очевидно, отримаємо:

$$j_{зм} = \frac{i_{зм}}{S} = \frac{\partial D}{\partial t}$$

або у векторній формі, як окремо довів Максвелл

$$\mathbf{j}_{см} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (57.5)$$

густина струму зміщення за величиною й напрямом дорівнює швидкості зміни вектора електричного зміщення.

Тут враховано, що електричне поле може бути неоднорідним, тобто залежати не тільки від часу, але і від координат. Тому в виразі (57.5) використаний знак частинної похідної.

Підкреслимо, що струм зміщення визначається не самим вектором електричного зміщення $\mathbf{D}$, а похідною від нього. Так, наприклад, на рис. 57.2 струм провідності натікає на верхню обкладинку конденсатора, електричне поле (вектор $\mathbf{D}$) направлене від позитивної пластини до негативної зверху вниз і зростає за величиною. Приріст вектора $\mathbf{D}$ та похідна $\partial \mathbf{D} / \partial t$ (тобто густина струму зміщення) мають той же напрямок, що і струм провідності $i_{пр}$.

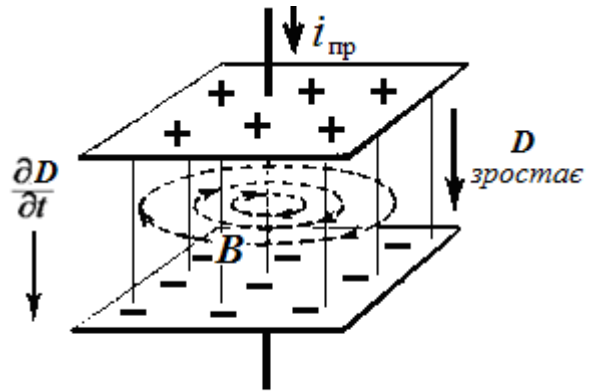


Рис. 57.2.

На рис. 57.3 зображена ситуація через пів періоду змінного струму. Верхня обкладинка конденсатора, як і раніше, заряджена позитивно, але тепер заряди стікають з верхньої обкладинки, струм провідності $i_{пр}$ і струм зміщення спрямовані від низу до верху.

У діелектрику вектор зміщення $\mathbf{D}$ складається з двох складових:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P},$$

де $\mathbf{P}$ - поляризованість середовища. Тоді формулу (57.5) можна записати в розгорнутому вигляді, що розкриває «джерела» струму зміщення:

$$\mathbf{j}_{см} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}. \quad (57.6)$$

Це означає, що струм зміщення, в загальному випадку, складається з двох частин: одна частина $\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$ обумовлена зміною поляризованості середовища в змінному електричному полі, наприклад, поворотом (зміщенням) молекулярних диполів при зміні напрямку поля.

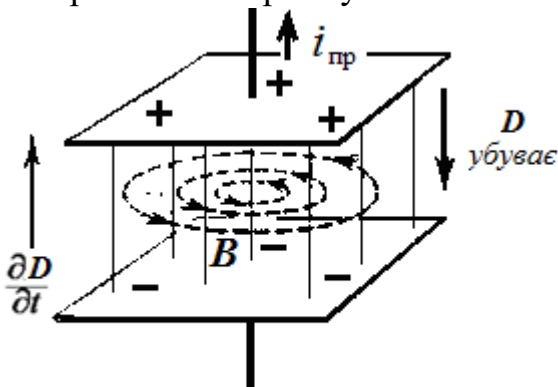


Рис. 57.3.

Друга частина $\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ - густина струму зміщення у вакуумі - не пов'язана з рухом зарядів, а обумовлена лише зміною в часі електричного поля. У вакуумі частина густини струму зміщення $\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$ відсутня, але другий доданок є відмінним від нуля, тому струм зміщення може існувати і в вакуумі.

У загальному випадку струми провід-

ності і зміщення в просторі не поділяються, вони існують в одному і тому ж об'ємі. Наприклад, всередині провідника, по якому проходить змінний струм, існує електричне поле, а, отже, струм зміщення. Однак всередині провідників струм зміщення є мізерно малим.

За допомогою гіпотези про струмі зміщення Максвелл узагальнив закон повного струму (39.7) ввівши в праву частину так званий повний струм, тобто суму струму провідності і струму зміщення:

$$\oint H_l dl = \sum i_{np} + i_{см},$$

або

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} \quad (57.7)$$

Це співвідношення є **другим основним рівнянням системи Максвелла** в інтегральній формі.

Циркуляція вектора $\mathbf{H}$ напруженості магнітного поля по довільному замкненому контуру дорівнює алгебраїчній сумі струмів провідності і швидкості зміни потоку електричного зміщення через довільну поверхню, натягнуту на цей контур.

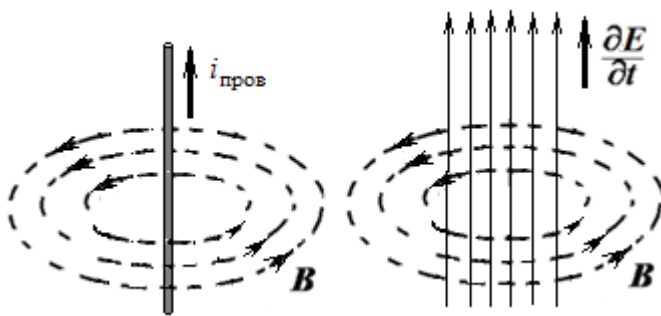


Рис. 57.4.

Підводячи підсумки, відзначимо **фізичний зміст II рівняння Максвелла**. Він полягає в тому, що **як струм провідності, так і струм зміщення (змінне електричне поле) створюють магнітне поле** (рис. 57.4).

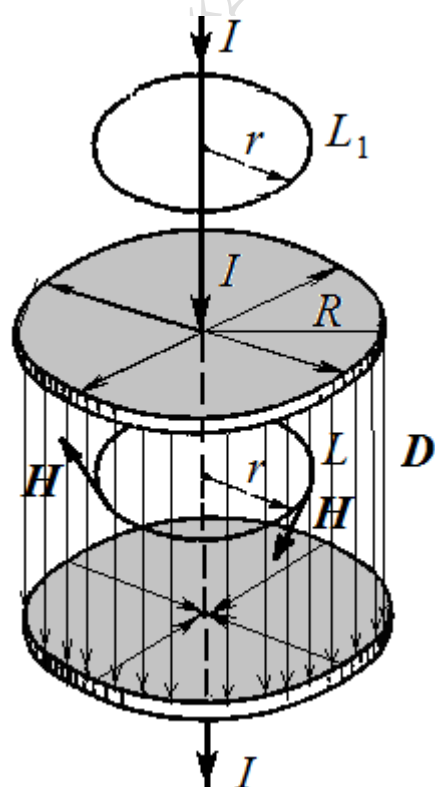


Рис. П.57.1.

Приклад 57.1. Плоский конденсатор складається з двох круглих пластин радіуса R . Конденсатор заряджають постійним струмом I , напрям якого показано на рис. П.57.1.

Визначити, як залежить від відстані r від осі конденсатора напруженість H магнітного поля:

- всередині конденсатора;
- поза конденсатором.

Чим можна пояснити стрибок напруженості поля при переході через поверхню пластини конденсатора?

Зростаюче під час зарядження конденсатора електричне поле (вектор електричного зміщення якого $\mathbf{D}$) створює магнітне поле напруженістю $\mathbf{H}$, силові лінії якого - це концентричні кола з центрами на осі конденсатора (рис. П. 57.1).

Скористаємося цією циліндричною симетрією при виборі контура обходу для теореми про циркуляцію.

В силу симетрії модуль H напруженості магнітного поля на колі L , вісь якого збігається зі струмом, є однаковим у всіх точках, тому циркуляція вектора $\mathbf{H}$ уздовж одного з цих кіл радіуса r дорівнює

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = H \oint_L dl = H \cdot 2\pi r . \quad (\text{П. 57.1})$$

Як випливає з рівняння Максвелла (57.7), для контура, що лежить всередині конденсатора, циркуляцію вектора $\mathbf{H}$ слід прирівняти струму зміщення, що пронизує контур L :

$$\begin{aligned} I_{см} &= \int_S \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) d\mathbf{S} = \frac{\partial D}{\partial t} \int_S dS = \frac{\partial D}{\partial t} \pi r^2 = \\ &= \pi r^2 \frac{\partial}{\partial t} \sigma = \frac{r^2}{R^2} \frac{\partial}{\partial t} Q = \frac{r^2}{R^2} I \end{aligned} \quad (\text{П. 57.2})$$

Прирівнявши (П.57.1) і (П.57.2), визначаємо напруженість магнітного поля

$$H = \frac{r}{2\pi R^2} I . \quad (\text{П. 57.3})$$

Для визначення поля поза конденсатором застосуємо теорему про циркуляцію до контура L_1 (рис. П.57.1). Циркуляцію вектора $\mathbf{H}$ по цьому контуру слід прирівняти струму провідності I , що заряджає конденсатор, звідки

$$H_1 = \frac{I}{2\pi r} . \quad (\text{П. 57.4})$$

Як бачимо, поля всередині конденсатора і поза ним розрізняються. Стрибок напруженості поля під час переходу через пластину конденсатора обумовлений наявністю радіальних струмів, що проходять по поверхні пластин в процесі заряджання конденсатора (рис. П.57.1).

§ 58. Третє і четверте рівняння Максвелла. Матеріальні рівняння

З електростатики (див. § 13) відома теорема Гаусса для потоку вектора $\mathbf{D}$: *потік вектора електричного зміщення через довільну замкнену поверхню дорівнює алгебраїчній сумі вільних зарядів, що містяться всередині цієї поверхні*.

$$\Phi_D = \oint_S \mathbf{D}_n dS = \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \sum_i q_i .$$

Максвелл узагальнив цю теорему, припустивши, що вона залишається справедливою також і в разі змінного електричного поля. Виразивши величину заряду $\sum q_i$ через густину заряду ρ

$$\sum q_i = \int_V \rho dV , \quad (58.1)$$

де інтеграл береться за об'ємом, охопленим поверхнею S , ми отримуємо третє рівняння Максвелла в інтегральній формі:

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho dV . \quad (58.2)$$

Фізичний зміст III рівняння Максвелла: електричні заряди здатні служити джерелами електричного поля.

Четверте рівняння є узагальненням теореми Гаусса для статичного магнітного поля на випадок змінних магнітних полів:

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 . \quad (58.3)$$

Потік вектора магнітної індукції через довільну замкнену поверхню дорівнює нулю.

Фізичний зміст IV рівняння Максвелла можна підсумувати у вигляді твердження: *в природі не існує магнітних зарядів.*

Під час вирішення задачі про визначення електромагнітного поля в будь-якому середовищі до чотирьох рівнянь Максвелла необхідно додати ще три співвідношення, що характеризують електричні і магнітні властивості середовища, в якому розглядається електромагнітне поле. Ці додаткові рівняння (матеріальні рівняння) мають вигляд:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \mathbf{E}; \quad \mathbf{B} = \mu \mu_0 \mathbf{H}; \quad \mathbf{j} = \gamma \mathbf{E}, \quad (58.4)$$

де ε і μ - діелектрична і магнітна проникності, γ - питома електропровідність середовища.

§ 59. Повна система рівнянь Максвелла для електромагнітного поля

Система рівнянь Максвелла в інтегральній формі має вигляд:

$$\begin{aligned} \oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} &= -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}, \\ \oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} &= \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} + \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}, \\ \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} &= \int_V \rho dV, \\ \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} &= 0. \end{aligned} \quad (59.1)$$

Іноді ці рівняння (в вакуумі) записують без залучення допоміжних величин $\mathbf{D}$ і $\mathbf{H}$:

$$\begin{aligned} \oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} &= -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}, \\ \oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} &= \mu_0 \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} + \varepsilon_0 \mu_0 \int_S \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}, \\ \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} &= \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV, \\ \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} &= 0. \end{aligned} \quad (59.2)$$

Щоб отримати рівняння Максвелла в якому-небудь середовищі, в рівняннях (59.2) роблять заміну $\varepsilon_0 \rightarrow \varepsilon_0 \varepsilon$ и $\mu_0 \rightarrow \mu_0 \mu$.

За допомогою теорем векторного аналізу з (59.1) можна отримати рівняння Максвелла в диференціальній формі (в вакуумі):

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (59.3)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (59.4)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}. \quad (59.5)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (59.6)$$

Фізичний зміст їх залишається тим самим, однак рівняння в диференціальній формі пов'язують значення полів $\mathbf{E}$ і $\mathbf{B}$ і їх похідних за часом зі значенням густини заряду і струму в одній і тій самій точці.

У ці рівняння входять *дивергенція* і *ротор* електричного і магнітного полів. Це особливі операції диференціювання векторних полів. Не маючи можливості зупинитися на цих операціях векторного аналізу, відзначимо лише, що дивергенція (по латині «це виверження назовні, розбіжність») описує конфігурацію силових ліній, що розходяться з точок, у яких наявні електричні заряди. Якщо дивергенція більше нуля, то точка є джерелом, якщо менше - стоком.

Під дивергенцією вектора $\mathbf{E}$ в даній точці розуміють границю відношення потоку вектора $\mathbf{E}$ через поверхню S , що оточує точку, до об'єму V , який знаходиться всередині поверхні, коли поверхня стягується в точку:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}}{V}.$$

Операція ротора описує вихрові поля (кільцеподібні силові лінії) навколо їх джерел - струмів або полів, що змінюються з часом. Ротор характеризує ступінь завихрення векторного поля.

Ротором вектора $\mathbf{E}$ називається вектор, нормальна до площадки в даній точці проекція якого є границею відношення циркуляції вектора $\mathbf{E}$ по контуру площадки до її величини, коли контур стягується в точку

$$\operatorname{rot}_n \mathbf{E} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}}{S}.$$

Теорія Максвелла є найбільшим досягненням класичної фізики. Максвеллові вдалося досягти в електромагнетизмі того ж, що зробив Ньютон в механіці. Всі явища електромагнетизму можна повністю описати рівняннями Максвелла.

З рівнянь Максвелла випливають такі **висновки**:

1. Електричне поле $\mathbf{E}$, як випливає з рівнянь (59.5) і (59.3)), породжується або електричними зарядами (як вільними, так і зв'язаними), так і змінним в часі магнітним полем $\mathbf{B}$ (закон електромагнітної індукції Фарадея).

2. Магнітне поле $\mathbf{B}$ породжується, як видно з (59.4), або електричними струмами провідності $\mathbf{j}$, або змінними в часі електричними полями $\mathbf{E}$ (струмами зміщення), або тим та іншим одночасно.

3. Оскільки будь-яке електричне поле породжується все-таки зарядами, то в кінцевому рахунку джерелами всякого електричного і магнітного поля є електричні заряди. Експериментальний факт полягає в тому, що в природі відсутні магнітні заряди, тобто джерела магнітного поля, подібні до джерел електричного поля (зарядів).

4. Оскільки в кожне з рівнянь (59.3) і (59.4), що описують поведінку полів $\mathbf{E}$ і $\mathbf{B}$ у просторі і часі, входять і $\mathbf{E}$ і $\mathbf{B}$, то це означає, що $\mathbf{E}$ і $\mathbf{B}$ одне без одного в загальному випадку існувати не можуть і треба говорити не про $\mathbf{E}$ і $\mathbf{B}$ окремо, а про єдине електромагнітне поле $\mathbf{E}, \mathbf{B}$.

2. У разі постійних в часі $\mathbf{E}$ і $\mathbf{B}$ має місце $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0$ і $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$ і рівняння (59.3) і (59.4) приймають вид

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0, \quad \text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}.$$

У кожне з цих рівнянь входить або $\mathbf{E}$, або $\mathbf{B}$, а це означає, що в даному випадку можна говорити про $\mathbf{E}$ і $\mathbf{B}$, розділених між собою, що існують незалежно одне від одного.

6. З рівнянь (59.3) і (59.4) випливає, що чим швидше змінюється в будь-якій точці магнітне поле $\mathbf{B}$ (чим більше $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$), тим більше циркуляція електричного поля $\mathbf{E}$, що виникає навколо цієї точки (тим більше $\text{rot } \mathbf{E}$), тобто тим воно сильніше змінюється від точки до точки. Аналогічно йде справа і з магнітним полем $\mathbf{B}$, що виникає при зміні з часом поля $\mathbf{E}$.

Таким чином, ні змінне електричне, ні змінне магнітне поля не можуть існувати одне без іншого. Змінне магнітне поле породжує навколо себе вихрове електричне поле, і навпаки, змінне електричне поле породжує вихрове магнітне поле. Обидва поля є складовими частинами єдиного електромагнітного поля.

Виникнувши в одному місці простору, змінне електричне (або магнітне) поле не залишається зосередженим в ньому, а поширюється в навколишній простір у вигляді електромагнітної хвилі.

Максвелл теоретично передбачив існування електромагнітних хвиль, тобто змінного електромагнітного поля, що поширюється в просторі з кінцевою швидкістю з $\approx 300\,000$ км/с, які були отримані експериментально Г. Герцем тільки через 20 років.

Контрольні запитання.

1. Чим відрізняються фарадеївське і максвеллівське трактування явища електромагнітної індукції?
2. Струм через обмотку соленоїда змінюється. Яке поле виявляється всередині соленоїда?
3. Плоский конденсатор заряджається струмом. Яке поле виявляється між обкладинками конденсатора?
4. Які фізичні явища дозволяють виявити струм зміщення?
5. У чому полягає подібність і в чому відмінність струмів провідності і струмів зміщення?
6. Вздовж замкненого кола проходить постійний електричний струм. Чому дорівнює в цьому випадку струм зміщення в провіднику?

Рекомендована література

1. Кучерук І. М., Горбачук І.Т., Луцик П.П. Загальний курс фізики. У 3 т. Т.2: Електрика і магнетизм. - К .; «Техніка», 2006, - 422 с
2. Бушок Г.Ф., Левандовський В.В., Півень Г.Ф. . Курс фізики. У 2 кн .: Кн.1. Фізичні основи механіки. Електрика і магнетизм. - К.: «Либідь», 2001. - 448с.
3. Савельев И.В. Курс физики. В 3-х т. Т 2. Электричество. Колебания и волны. Волновая оптика. – М.: «Наука», 1989, – 464с.,
4. Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс физики. – М. «Высш. шк.», 1989, – 609 с.
5. Иродов И.Е. Электромагнетизм. Основные законы. – М. «Лаборатория базовых знаний». 2002.– 320 с.
6. Сивухин Д.В. Общий курс физики. – М.: «Наука», 1977.– Т. 3. Электричество. 688 с.
7. Калашников С.Г. Электричество. М.: «Наука», 1964 – 666 с.
8. Калашников Н.П., Смондырев М.А. Основы физики. В 2 т. Т. 1. М.:Дрофа, 2003, 400 с.
9. Кингсеп А.С., Локшин Г.Р., Ольхов О.А. Основы физики. Курс общей физики. В 2 т. Т.1. Механика. Электричество и магнетизм. Колебания и волны, волновая оптика. М.: Физматлит, 2001. – 260 с.
10. Бутиков Е.И., Кондратьев А.С..Физика. Учеб. пособие. В 3 кн.Кн.2. Электродинамика. Оптика. – М.: Физматлит, 2004.-336 с.
11. Трофимова Т.И. Курс физики. – М., «Академия», 2002, – 260 с.
- 12.. Чертов А.Г. Воробьев А.А. Задачник по физике. – М.: «Физмат лит», 2002 – 640 с.
- 13.. Гаркуша І.П., Горбачук І.Т., Курінний В.П. та ін. Загальний курс фізики: Збірник задач – К.: «Техніка», 2004,– 260 с.