

Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет
«Дніпровська політехніка»

І.П.Гаркуша, В.П.Курінний

Квантова фізика

Фізика. Навчальний посібник у 7 частинах. Частина 6.

Дніпро
НТУ «ДП»
2020

УДК 53 (075.4)
ББК 22.3я72
Г51

Рекомендовано Вченою радою Національного технічного університету «Дніпровська політехніка» як навчальний посібник для студентів всіх технічних спеціальностей, за якими здійснюється підготовка у НТУ «ДП» за ступенем «Бакалавр»

Гаркуша І.П., Курінний В.П.

Г 51 Фізика. Ч. 6. Квантова фізика. [Текст]: Навчальний посібник: - Д. Національний технічний університет «Дніпровська політехніка», 2020. - 92 с.

Навчальний посібник складено відповідно до програми нормативних дисциплін «Фізика», «Загальна фізика» та є шостою частиною курсу лекцій тих же авторів, призначених для бакалаврів усіх технічних спеціальностей, за якими здійснюється підготовка у НТУ «ДП» .

Виклад супроводжується прикладами розв'язання задач, які полегшують розуміння теоретичного матеріалу. Посібник може бути корисним студентам, а також викладачам інших вищих технічних навчальних закладів освіти.

ISBN 966-8271-44-0 Національний технічний університет «Дніпровська політехніка» 2020
Ministerstvo osvity i nauky Ukrainy

Зміст

Глава 1. КВАНТОВА ОПТИКА	4
§ 1. Теплове випромінювання. Формула Планка	4
§ 2. Зовнішній фотоефект	14
§ 3. Фотони. Тиск світла	20
§ 4. Рентгенівське випромінювання. Короткохвильова межа рентгенівського спектру	22
§ 5. Ефект Комптона	24
Контрольні питання	27
Глава 2. ЕЛЕМЕНТИ КВАНТОВОЇ МЕХАНІКИ	28
§ 6. Хвильові властивості мікрочастинок. Хвилі де Бройля	28
§ 7. Співвідношення невизначеностей Гейзенберга	33
§ 8. Хвильова функція і її фізичний зміст. Рівняння Шредінгера	38
Контрольні питання	43
Глава 3. НАЙПРОСТІШІ ЗАДАЧІ КВАНТОВОЇ МЕХАНІКИ	44.
§ 9. Рух вільної частинки	44
§ 10. Проходження мікрочастинок крізь потенціальний бар'єр. Тунельний ефект	45
§ 11. Частинка в одновимірній нескінченно глибокій потенціальній ямі. Квантування енергії	49
§ 12. Гармонічний осцилятор	55
Контрольні питання	60
Глава 4. ЕЛЕМЕНТИ АТОМНОЇ ФІЗИКИ	61
§ 13. Теорія атома водню Н. Бора	61
§ 14. Квантово-механічна теорія атома водню. Просторове квантування	70
§ 15. Принцип Паулі. Пояснення періодичної системи елементів.	79
§ 16. Оптичні квантові генератори (лазери)	82
Контрольні питання	89

Глава 1. КВАНТОВА ОПТИКА

§ 1. Теплове випромінювання. Формула Планка

З досвіду повсякденного життя відомо, що розжарені тіла починають світитися, тобто випускати електромагнітні хвилі видимого діапазону. Чим вище температура тіла, тим яскравіше воно світиться. При більш низьких температурах тіла випромінюють електромагнітні хвилі, які ми не бачимо.

Електромагнітні хвилі, що випускаються тілами і обумовлені тепловими коливаннями електричних зарядів (електронів, іонів), що входять до складу речовини, називаються **тепловим випромінюванням**.

Теплове випромінювання властиве всім тілам при будь-яких температурах вище абсолютного нуля.

Будь-яке випромінювання тіла супроводжується втратою енергії. Тому випромінювання може відбуватися або за рахунок зменшення енергії самого тіла, або за рахунок того, що тіло отримує енергію ззовні. Теплове випромінювання виникає за рахунок внутрішньої енергії тіла.

На відміну від теплового випромінювання інший вид світіння тіл - *люмінесценція* - збуджується зовнішніми джерелами енергії.

У видимій області спектра теплове випромінювання помітно тільки при температурі в кілька сотень або тисяч градусів, в той час як люмінесценція може відбуватися при будь-якій температурі, тому люмінесценцію називають ще *холодним світінням*.

Залежно від механізму випромінювання енергії розрізняють такі види люмінесценції:

- *хемілюмінесценцію*, наприклад світіння фосфору, який окислюється в повітрі;
- *електролюмінесценцію*, наприклад, світіння розрідженого газу при проходженні через нього електричного струму, або світіння *p-n*-переходу в світлодіодах;
- *фотолюмінесценцію*, наприклад, перетворення ультрафіолетового випромінювання у видиме світло за допомогою люмінофора в люмінесцентних лампах, а також деякі інші процеси.

Теплове випромінювання - єдиний вид випромінювання, яке може перебувати в *термодинамічній рівновазі* з випромінюючими тілами.

Щоб пояснити поняття *рівноважного випромінювання* припустимо, що нагріте тіло поміщено в порожнину з ідеально відбиваючим стінками (рис. 1.1), які підтримуються при деякій сталій температурі T . Повітря з порожнини видалимо.

Тоді обмін енергією між оболонкою і тілом відбувається тільки за рахунок теплового випромінювання, що заповнює порожнину.



Рис.1.1.

Дослід показує, що з плином часу температура тіла дорівнюватиме температурі оболонки і настане *динамічна рівновага* - в одиницю часу тіло буде поглинати стільки ж енергії,

скільки і випромінювати, а густина випромінювання в просторі між тілом і оболонкою досягає деякої певної величини.

Припустимо, що рівновага між тілом і випромінюванням порушена, і тіло випромінює енергії більше, ніж поглинає. Тоді внутрішня енергія тіла почне спадати, що призведе до зменшення випромінюваної тілом енергії. Температура тіла буде знижуватися до тих пір, поки кількість випромінюваної тілом енергії не стане дорівнювати кількості енергії, що поглинається.

Якщо рівновага порушиться в іншу сторону, тобто тіло буде випромінювати менше енергії, ніж поглинати, то температура тіла буде зростати до тих пір, поки знову не встановиться рівновага.

Таким чином, порушення рівноваги між тілом і тепловим випромінюванням викликає процеси, спрямовані в бік відновлення рівноваги. Це пояснюється тим, що інтенсивність теплового випромінювання залежить тільки від температури і зростає з підвищенням температури.

Всі інші види випромінювання (люмінесценція) є нерівноважними.

Оскільки в стані рівноваги випромінювання перебуває в тепловій рівновазі зі стінками, можна говорити про температуру не тільки стінок, а й про *температуру самого випромінювання*, вважаючи обидві температури рівними.

Таким чином, будемо розрізняти *теплове випромінювання як процес* випускання електромагнітних хвиль і як *матеріальну субстанцію*.

Введемо тепер деякі величини, що характеризують стан випромінювання в просторі. Позначимо через ***u** густину енергії випромінювання* - кількість енергії випромінювання, що припадає на одиницю об'єму.

Теплове випромінювання складається з електромагнітних хвиль різних частот. Повна густина енергії складається з густин енергій цих хвиль. Тому вводять диференціальну величину - *спектральну густину енергії випромінювання **u**(ω , T)*, що представляє собою енергію випромінювання в одиниці об'єму, що припадає на одиничний інтервал частот.

Розглянемо тепер характеристики *тіла*, що перебуває в рівновазі з тепловим випромінюванням.

*Енергія, що випускається за одиницю часу одиницею поверхні тіла в усіх напрямках в усьому інтервалі частот називається енергетичною світністю **R**, або інтегральною густиною потоку випромінювання.*

Диференціальною характеристикою $r_{\omega} = r(\omega, T)$ - *спектральною випромінювальною здатністю тіла або спектральною густиною потоку випромінювання* - називають кількість енергії, що випускається в одиницю часу одиницею поверхні тіла в одиничному інтервалі частот поблизу даної частоти ω .

Щоб отримати енергетичну світність *R* тіла, треба проінтегрувати спектральну випромінювальну здатність r_{ω} за всіма частотами:

$$R = \int_0^{\infty} r_{\omega} d\omega . \quad (1.1)$$

Нагріте тіло не тільки випускає енергію, а й поглинає її. Другою характеристикою тіла є *поглинальна здатність тіла* - a_{ω} .

Нехай на поверхню тіла падає потік випромінювання $d\Phi_\omega$. **Поглинальна здатність** a_ω (або *спектральний коефіцієнт поглинання*) - це число, яке показує, яка частина потоку $d\Phi_\omega$ енергії, що падає за одиницю часу на одиницю поверхні даного тіла в інтервалі частот $\omega, \omega + d\omega$, поглинається тілом:

$$a(\omega) = \frac{d\Phi'_\omega}{d\Phi_\omega}.$$

Це безрозмірна величина, яка не перевищує одиниці, $a_\omega \leq 1$.

Дослід показує, що будь-яке реальне тіло поглинає випромінювання різних частот по-різному в залежності від його температури. Тому спектральна поглинальна здатність тіла також є функцією частоти і температури.

Для темних тіл, сильно поглинаючих падаючу на них енергію, a_ω є близьким до одиниці. Для світлих тіл, що відбивають велику частину випромінювання, a_ω є малою величиною. Наприклад, для видимої частини спектру при звичайній температурі поглинальна здатність алюмінію дорівнює 0,1; міді - 0,5; води - 0,67.

Тіло, коефіцієнт поглинання якого дорівнює 1, називається **абсолютно чорним**. Абсолютно чорне тіло здатне поглинати повністю при будь-якій температурі все падаюче на нього випромінювання будь-якої частоти.

Абсолютно чорних тіл в природі не існує, це фізична абстракція. За своїми поглинальними властивостями до абсолютно чорного тіла у певному інтервалі частот є близькими сажа, чорний оксамит, платинова чернь.

Гарною моделлю абсолютно чорного тіла є замкнена порожнина з невеликим отвором (рис. 1.2)

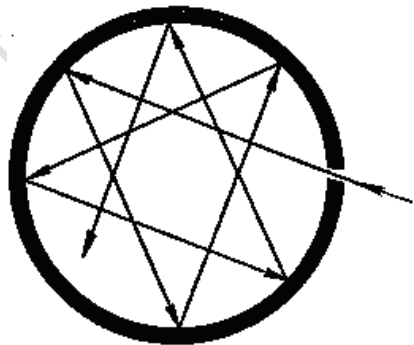


Рис. 1.2.

Випромінювання, що потрапило через отвір в порожнину, після численних відбивань і поглинань на внутрішніх стінках практично повністю поглинається.

Зовні отвір буде здаватися абсолютно чорним. Але якщо порожнина є нагрітою до певної температури T , і всередині встановилася теплова рівновага, то випромінювання, яке виходить через отвір, буде випромінюванням абсолютно чорного тіла. Саме таким чином у всіх експериментах по дослідженню теплового випромінювання моделюється абсолютно чорне тіло.

Зі збільшенням температури всередині порожнини буде зростати енергія випромінювання, яке виходить з отвору, і змінюватиметься розподіл енергії за частотами в суцільному спектрі випромінювання.

Встановимо зв'язок між випромінювальною і поглинальною здатностями будь-якого тіла. Для цього помістимо кілька тіл, нагрітих до різної температури в порожнину зі стінками, які підтримуються при деякій сталій температурі (рис. 1.3). Дослід показує, що в кінці кінців все тіла придбають однакову температуру, що дорівнює температурі оболонки T .

Позначимо через $f(\omega, T)$ енергію, що падає в одиницю часу на одиницю поверхні будь-якого з цих тіл в одиничному інтервалі частот. Те чи інше тіло поглине частку енергії $a_\omega f(\omega, T)$. У стані рівноваги ця енергія має дорівнювати випущеній тілом енергії

$$r_{\omega} = a_{\omega} f(\omega, T). \quad (1.2)$$

Різні тіла в порожнині мають різну поглинальну здатність, отже, у них буде і різна випромінювальна здатність. Тіла, що поглинають випромінювання будь-якої частоти більш інтенсивно, будуть це випромінювання більш інтенсивно і випускати, так що відношення r_{ω} / a_{ω} не залежить від конкретного тіла:

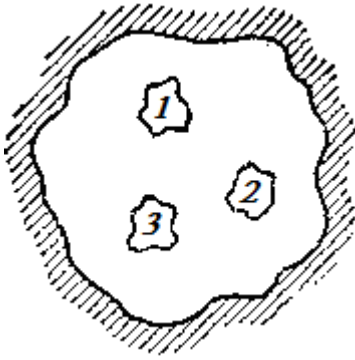


Рис. 1.3.

$$\left(\frac{r_{\omega}}{a_{\omega}} \right)_1 = \left(\frac{r_{\omega}}{a_{\omega}} \right)_2 = \left(\frac{r_{\omega}}{a_{\omega}} \right)_3 = \dots = f(\omega, T). \quad (1.3)$$

Співвідношення (1.3) виражає **закон Кірхгофа**: відношення випромінювальних і поглинальних здатностей тіла не залежить від природи тіла і для всіх тіл являє собою універсальну функцію частоти і температури $f(\omega, T)$.

Закон Кірхгофа є наслідком рівноважності теплового випромінювання.

Для абсолютно чорного тіла $a_{\omega} = 1$, звідки випливає фізична інтерпретація універсальної функції Кірхгофа $f(\omega, T)$: вона являє собою випромінювальну здатність абсолютно чорного тіла.

Реальне тіло випромінює при будь-якій температурі завжди менше енергії, ніж абсолютно чорне тіло. Знаючи випромінювальну здатність абсолютно чорного тіла (універсальну функцію Кірхгофа) і поглинальну здатність реального тіла, із закону Кірхгофа можна визначити енергію, що випромінюється цим тілом в будь-якому діапазоні частот або довжин хвиль.

Для вимірювання випромінювальної здатності $f(\omega, T)$ абсолютно чорного тіла виготовляється довга трубка з тугоплавкого матеріалу, що поміщається в піч і нагрівається. Отвір трубки стає джерелом випромінювання, ідентичного випромінюванню абсолютно чорного тіла. Характер випромінювання вивчається за допомогою спектрографа і болометра. Результати подібних експериментів зображені на рис. 1.4.

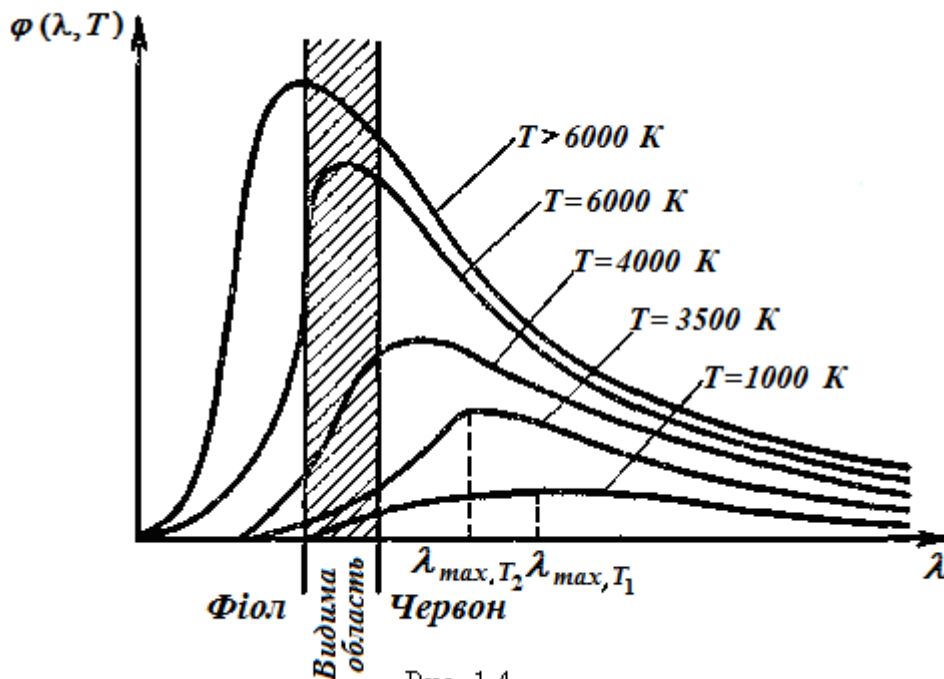


Рис. 1.4

В експериментах для характеристики спектрального складу рівноважного теплового випромінювання замість функції частоти $f(\omega, T)$ користуються функцією довжини хвилі $\varphi(\lambda, T)$, зв'язок між якими встановлюється формулою

$$f(\omega, T) = \frac{\lambda^2}{2\pi c} \varphi(\lambda, T) . \quad (1.4)$$

Криві, наведені на рис. 1.4, представляють собою випромінювальну здатність абсолютно чорного тіла $\varphi(\lambda, T)$ як функцію довжини хвилі λ за різних температур T .

Експериментально було встановлено наступні закономірності.

- Спектр випромінювання абсолютно чорного тіла є суцільним, тобто в спектрі представлений безперервний ряд різних довжин хвиль.
- Розподіл енергії в спектрі випромінювання залежить від довжини хвилі. Зі збільшенням довжини хвилі спектральна густина енергетичної світності $\varphi(\lambda, T)$ збільшується, досягає максимуму при деякій довжині хвилі λ_{\max} , а потім зменшується.
- При підвищенні температури збільшується енергетична світність $R^*(T)$ абсолютно чорного тіла, яка дорівнює площі, обмеженій кривою і віссю абсцис.
- З підвищенням температури максимум випромінювання зміщується в бік більш коротких хвиль.

Якщо спостерігати за ниткою розжарювання електричної лампочки, то можна помітити, що вона починає світитися при температурі приблизно 800°C і має темно-червоний колір. З підвищенням температури світіння нитки стає все більш яскравим, збагачується більш короткими світловими хвилями і приблизно при температурі $2400 - 2500^\circ \text{C}$ випромінює майже білий світ. Це говорить про те, що максимум інтенсивності теплового випромінювання у міру зростання температури тіла зміщується до фіолетового кінця спектра, тобто до його короткохвильової частини. Довжина хвилі в спектрі випромінювання абсолютно чорного тіла, на яку припадає максимум спектральної густини енергетичної світності, визначається **законом зміщення Віна**:

$$\lambda_{\max} = b/T, \quad (1.5)$$

де стала Віна $b = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$.

При практично досяжних в лабораторних умовах температурах максимум випромінювальної здатності $\varphi(\lambda, T)$ лежить в інфрачервоній області спектра. Тільки при $T \geq 5 \cdot 10^3 \text{ К}$ максимум потрапляє в видиму область спектра. Максимум енергії випромінювання Сонця припадає приблизно на 500 нм (зелена область спектра), що відповідає температурі верхніх шарів Сонця близько 5800 К . Сонце вважається «абсолютно чорним тілом», бо не пропускає і не відбиває випромінювання, що приходить від інших тіл, а повністю його поглинає.

Австрійський фізик Й. Стефан на основі аналізу експериментальних даних і німецький фізик Л. Больцман, виходячи з термодинамічних міркувань, встановили, що енергетична світність $R^*(T)$ абсолютно чорного тіла пропорційна четвертому ступеню абсолютної температури.

$$R^* = \int_0^{\infty} f(\omega, T) d\omega = \sigma T^4. \quad (1.6)$$

Коефіцієнт пропорційності - стала Стефана = Больцмана:
 $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$.

Приклад 1. Визначити кількість променевої енергії, що посиляється Сонцем в одиницю часу через одиничну площадку, розміщену перпендикулярно до потоку випромінювання на поверхні Землі (т.зв. «сонячну сталу»). Поглинання сонячного випромінювання атмосферою не враховувати. Сонце вважати абсолютно чорним тілом. Максимум випромінювальної здатності Сонця припадає приблизно на довжину хвилі 0,5 мкм. Середня відстань від Землі до Сонця $R_{CЗ} = 149,59$ млн км. Радіус Сонця $r_C = 6,96 \cdot 10^8$ м.

Оцінити також сумарну площу S панелей сонячної батареї, які виробляють енергію потужністю $P = 10$ кВт. К.к.д. сонячної батареї прийняти рівним $\eta = 20\%$.

Із закону зміщення Віна за формулою (1.5) визначимо температуру поверхні Сонця

$$T = \frac{b}{\lambda_{\max}} = \frac{2,9 \cdot 10^{-3}}{0,5 \cdot 10^{-6}} = 5800(\text{К}).$$

Вважаючи Сонце абсолютно чорним тілом, знаходимо енергетичну світність Сонця R_{eC} за законом Стефана-Больцмана (1.6):

$$R_{eC} = \sigma T^4.$$

Повна енергія W , яку випромінює Сонце в одиницю часу, дорівнює добутку R_{eC} на площу поверхні Сонця:

$$W = R_{eC} \cdot 4\pi r_C^2.$$

Ця енергія досягає орбіти Землі і розподіляється по більшій площі – $4\pi R_{CЗ}^2$ – площі сфери з радіусом $R_{CЗ}$ орбіти Землі навколо Сонця.

Вважаючи, що Сонце випромінює в усіх напрямках рівномірно, знаходимо потік енергії випромінювання через одиницю поверхні сфери, радіус якої дорівнює середній відстані від Сонця до Землі (сонячну сталу):

$$C = \frac{W}{4\pi R_{CЗ}^2} = \sigma T^4 \cdot \left(\frac{r_C}{R_{CЗ}} \right)^2 = 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot (5,8 \cdot 10^3)^4 \left(\frac{6,96 \cdot 10^8}{1,5 \cdot 10^{11}} \right)^2 = 1,38 \left(\frac{\text{кВт}}{\text{м}^2} \right). \quad (\text{П.1.1})$$

Отже, на кожен квадратний метр поверхні Землі, перпендикулярній до сонячних променів, за одну секунду падає 1,38 кДж енергії сонячного випромінювання. Частина цієї енергії в сонячній батареї перетворюється в електричну енергію. З урахуванням к.к.д. сонячної батареї, визначаємо її корисну потужність

$$P = CS\eta, \quad (\text{П.1.2})$$

а потім площу S панелей сонячної батареї

$$S = \frac{P}{C\eta} = \frac{10^4}{1,38 \cdot 10^3 \cdot 0,2} = 36,2(\text{м}^2). \quad (\text{П.1.3})$$

Виникнення ідеї квантування. Формула Планка. Спроба строгого теоретичного виводу залежності $f(\omega, T)$ належить англійським вченим Д. Релею і Д. Джинсу (див., наприклад, літературу [1], [6]).

В рамках класичних уявлень стінки порожнини моделювалися ними як сукупність заряджених класичних осциляторів, які можуть обмінюватись енергією з випромінюванням в порожнині. Випромінювання в порожнині в умовах рівноваги уявлялося у вигляді сукупності стоячих електромагнітних хвиль.

Можна показати, що універсальна функція $f(\omega, T)$ – випромінювальна здатність абсолютно чорного тіла - з точністю до розмірного множника $c/4$ збігається зі спектральною густиною рівноважного теплового випромінювання:

$$f(\omega, T) = \frac{c}{4} u(\omega, T). \quad (1.7)$$

Таким чином, задача про знаходження універсальної функції $f(\omega, T)$ звелася до знаходження спектрального розподілу енергії рівноважного теплового випромінювання $u(\omega, T)$.

Було докладено значних зусиль для теоретичного виводу розподілу енергії теплового випромінювання за частотами. Не вдавалося отримати розподіл, який мав би максимум. Були отримані лише формули, які задовільно описували спектр теплового випромінювання тільки для досить малих і досить великих довжин хвиль. Спільного рішення задачі отримати не вдалося.

При виведенні функції $u(\omega, T)$ виникла необхідність підрахунку числа стоячих хвиль, які можуть збуджуватися в об'ємі кінцевих розмірів. Цей достатньо складний розрахунок можна знайти в підручниках ([1], [10] і ін.). Ми ж обмежимося остаточним результатом.

Число стоячих хвиль dn_ω , що припадають в інтервалі частот $d\omega$ на одиницю об'єму порожнини, дорівнює

$$dn_\omega = \frac{\omega^2 d\omega}{\pi^2 c^3}. \quad (1.8)$$

Виходячи з теореми класичної статистики про рівномірний розподіл енергії за ступенями вільності, Релей і Джинс вважали, що на кожне електромагнітне коливання доводиться середня енергія коливання, яка дорівнює kT .

Якщо помножити число стоячих хвиль на середню енергію коливання, отримаємо густина енергії, що припадає на інтервал частот $d\omega$, а потім і випромінювальну здатність абсолютно чорного тіла

$$f(\omega, T) = \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^2} kT. \quad (1.9)$$

Вираз (1.9) називається *формулою Релея-Джинса*.

Для довгих хвиль формула Релея-Джинса дає добрий збіг з експериментальними даними, але для коротких хвиль, тобто в області високих частот розрахункові значення $f(\omega, T)$ перестають збігатися з експериментом,

Формула Релея-Джинса призводить до фізично безглузкого результату: енергія, що випускається нагрітим тілом і яка припадає на частоту ω випромінюваних електромагнітних хвиль, має бути пропорційною $\omega^2 T$, тобто повинна необмежено зростати в області високих частот. Цей парадоксальний висновок з класичних уявлень отримав назву «ультрафіолетової катастрофи».

Таким чином, перед класичною фізикою при вирішенні задачі про теплове випромінювання виникли непереборні труднощі.

У 1900 р австрійський фізик М. Планк отримав формулу для розподілу енергії в спектрі теплового випромінювання, яка добре узгоджується з дослідними даними. Для цього Планку довелося зробити припущення, що є абсолютно чужим до класичних уявлень, а саме допустити, що електромагнітна *енергія випускаєть-*

ся речовиною не безперервно, а у вигляді окремих порцій енергії (квантів), пропорційних частоті випромінювання:

$$\varepsilon = \hbar \omega. \quad (1.10)$$

Коефіцієнт пропорційності $\hbar \approx 1,055 \cdot 10^{-34}$ Дж·с був названий *сталюю Планка*.

Якщо користуватися не циклічною частотою ω , а звичайною частотою ν ($\omega = 2\pi\nu$), то енергія кванта запишеться $\varepsilon = h\nu$, де $h \approx 6,626 \cdot 10^{-34}$ Дж·с - також стала Планка.

Відповідно до гіпотези Планка доводиться прийняти, що енергія будь-якої коливальної системи, що випромінює електромагнітні хвилі, може приймати лише дискретний набір значень

$$\varepsilon_n = n \hbar \omega, \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (1.11)$$

Виходячи з гіпотези про квантуванні енергії, Планк отримав вираз для середньої енергії коливання

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{\hbar \omega}{\exp(\hbar \omega / kT) - 1}, \quad (1.12)$$

та для випромінювальної здатності абсолютно чорного тіла (*формула Планка*):

$$f(\omega, T) = \frac{\hbar \omega^3}{4\pi^2 c^2} \frac{1}{\exp(\hbar \omega / kT) - 1}. \quad (1.13)$$

Ця формула точно узгоджується з експериментальними даними у всьому інтервалі частот від 0 до ∞ .

З формули Планка випливають як наслідок розглянуті раніше закони Стефана - Больцмана і Віна. Для доказу першого з цих законів необхідно обчислити інтеграл від функції $f(\omega, T)$ в межах від 0 до ∞ :

$$R^* = \int_0^{\infty} f(\omega, T) d\omega = \int_0^{\infty} \frac{\hbar \omega^3}{4\pi^2 c^2} \frac{d\omega}{\exp(\hbar \omega / kT) - 1}. \quad (1.14)$$

Замість ω вводять безрозмірну змінну $x = \frac{\hbar \omega}{kT}$. Тоді формула (1.14) перетворюється до вигляду

$$R^* = \frac{\hbar}{4\pi^2 c^2} \left(\frac{kT}{\hbar} \right)^4 \int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1}. \quad (1.15)$$

Визначений інтеграл в цьому виразі обчислюється (див., наприклад, [6]). Він дорівнює $\pi^4/15$.

Використовуючи це значення інтеграла, прийдемо до закону Стефана - Больцмана:

$$R^* = \frac{\pi^2 k^4}{60 c^2 \hbar^3} T^4 = \sigma T^4. \quad (1.16)$$

Тут отримано аналітичний вираз для сталої Стефана - Больцмана, величина якої узгоджується з експериментальними даними.

Для доказу закону Віна необхідно спочатку перетворити формулу Планка в змінних λ , T , потім вирішити задачу на екстремум, тобто продиференціювати функцію Планка $\phi(\lambda, T)$, прирівняти нулю похідну і вирішити отримане трансцен-

дентне рівняння. Ця процедура докладно описана в підручниках ([1], [6], [8] та ін.). Ми ж наведемо остаточний результат

$$b = T\lambda_m = \frac{2\pi\hbar c}{4,965k} = 2,898 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}. \quad (1.17)$$

Таким чином, формула Планка не тільки прекрасно узгоджується з експериментом, а й містить у собі емпіричні закони теплового випромінювання, а також дозволяє обчислити константи в цих законах.

У теоретичній моделі абсолютно чорного тіла атоми речовини стінок оболонки порожнини моделюються гармонічними осциляторами. Згідно з квантовою гіпотезою Планка енергія осцилятора квантується. Отже, внутрішня енергія атомів не може змінюватися безперервно, а змінюється стрибками, тобто атом може мати лише енергією з деякого дискретного ряду значень. Ця обставина виражається також словами, що *енергія атома квантується*.

Таким чином, гіпотеза Планка започаткувала застосування квантових уявлень у фізиці, яке означало народження сучасної квантової фізики.

Теоретичне виведення формули (1.13) М. Планк доповів 14 грудня 1900 року на засіданні Німецького фізичного товариства. Цей день став *датою народження квантової фізики*

Оптична пірометрія. Методи визначення температури тіла за його тепловим випромінюванням називаються *оптичною пірометрією*; вони особливо зручні при вимірюванні високих температур.

Методи оптичної пірометрії не потребують контакту датчика вимірювального приладу з тілом, температура якого вимірюється. Цими методами в промислових і лабораторних умовах визначають температуру в печах, топках котлів, температуру розплавлених металів, прокату і т. п., температуру полум'я, нагрітих газів, плазми.

Залежно від того, який закон теплового випромінювання використовується при вимірюванні температури тіл, розрізняють *радіаційну, колірну і яскравісну температури*.

1. Радіаційна температура. Радіаційний спосіб вимірювання температур заснований на вимірюванні енергетичної світності тіла R , і обчислення його температури за законом Стефана - Больцмана. Відповідні прилади називаються *радіаційними пірометрами*.

Оптична система такого пірометра проектує зображення джерела на приймач апарату, ступінь нагріву якого (температура), а отже, і вихідний сигнал пропорційні падаючій енергії випромінювання.

Оскільки випромінююче тіло, як правило, не є абсолютно чорним, то радіаційний пірометр не дасть істинної температури тіла, а покаже ту температуру абсолютно чорного тіла, за якої енергетична світність останнього дорівнює енергетичній світності випробуваного тіла. Така температура тіла називається *радіаційною температурою*. Радіаційна температура тіла завжди є меншою його дійсної температури T .

Знаючи поглинальну здатність матеріалу випромінювача, можна перевести виміряну радіаційну температуру випромінювача в його справжню температуру.

2. Яскравісна температура. Найбільш поширений спосіб оптичного розпізнавання температури ґрунтується на порівнянні випромінювання нагрітого тіла в одній певній спектральній ділянці довжин хвиль $\Delta\lambda$ з випромінюванням абсолютно чорного тіла з тією ж довжиною хвилі. Зазвичай використовується ділянка спектра, яка лежить в околі $\lambda = 660$ нм (червона частина спектра).

Яскравісна температура - це температура абсолютно чорного тіла, за якої для певної довжини хвилі його спектральна густина енергетичної світності дорівнює спектральній густині енергетичної світності тіла, яке досліджується.

Спектральна густина енергетичної світності абсолютно чорного тіла визначається формулою Планка. Порівняння випромінювання світлого тіла з випромінюванням абсолютно чорного тіла здійснюється за допомогою пірометра із зникаючою ниткою.

Принцип дії яскравісного методу визначення температур заснований на візуальному порівнянні яскравості розжареної нитки лампи пірометра з яскравістю нагрітого тіла, температуру якого визначають.

Схема приладу дана на рис. 1.5. Він являє собою зорову трубу з вміщеною

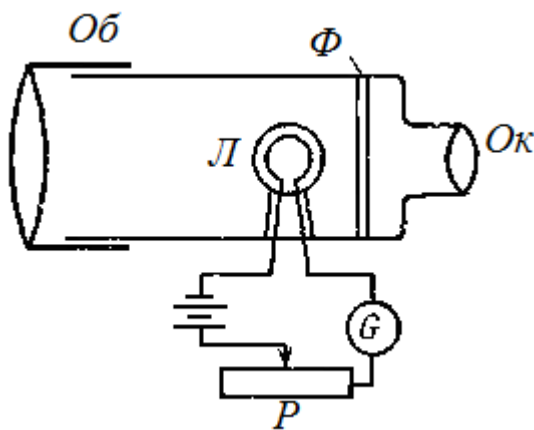


Рис. 1.5.

всередині електричною лампою, яка живиться від акумулятора. На рисунку: *Об* - об'єктив, *Л* - лампа, *Ф* - світлофільтри з вузькою смугою пропускання (в області довжини хвилі 0,665 мкм), *Р* - реостат. Рівність яскравостей, що спостерігається через монохроматичний фільтр, визначається по зникненню зображення нитки на тлі зображення розжареного тіла. Розжарення нитки регулюється реостатом, а температура визначається за шкалою міліамперметра, градуйованого прямо на температуру. Попереднім градуюванням встановлюють, якій температурі абсолютно

чорного тіла відповідає зникнення нитки при різних силах струму.

Слід зазначити, що яскравісна температура може значно відрізнитися від фізичної температури випромінюючого тіла. Для чисто теплових джерел їх яскравісна температура збігається з їх фізичною температурою. У нетеплових джерел яскравісна температура може бути дуже високою. Наприклад, для випромінювання гелій-неонового лазера, сфокусованого в плямі діаметром 10 мкм, яскравісна температура складе майже $14 \cdot 10^9$ К.

3. Колірна температура. Сіримі називають тіла, коефіцієнт поглинання яких менше 1 і не залежить від довжини хвилі випромінювання і температури T . *Сірі тіла* є джерелом теплового випромінювання, однакового за спектральним складом з випромінюванням абсолютно чорного тіла, але яке відрізняється від нього меншою енергетичною світністю.

Тому до сірих тіл (або тіл, близьких до них за властивостями) застосуємо закон зміщення Віна (1.5). Знаючи довжину хвилі λ_{\max} , яка відповідає максималь-

ній спектральній густині енергетичної світності досліджуваного тіла, можна визначити його температуру, яка називається *колірною температурою*.

Колірна температура визначається як температура абсолютно чорного тіла, при якій воно випускає випромінювання того ж колірному тону, що і випромінювання, яке розглядається.

Максимум в спектрі випромінювання Сонця припадає на довжину хвилі $\lambda_{\max} = 480$ нм. Підстановка цього значення в закон Віна дає для колірної температури Сонця значення 6000 К. Таким способом визначається температура на поверхні Сонця і зірок.

Порівнюючи колір розглянутого джерела світла до аналогічного кольору абсолютно чорного тіла, можна встановити колірну температуру деяких природних і штучних джерел світла. При цьому колірна і фізична температура, як правило, розрізняються.

Отже, радіаційна, яскравісна і колірна температури є не справжніми, а умовними температурами, від яких можна перейти до справжньої температури відповідним чином.

Приклад 2. Колірною температурою характеризують люмінесцентні і світлодіодні світильники, лампи для автомобільних фар та ін. Кольорову температуру поділяють на 4 діапазони:

- теплий білий (2700-3200 К);
- нейтральний білий або денний (3500-4500 К);
- білий (4700 - 6000 К);
- холодне біле (від 6000 К).

Ось деякі колірні температури:

Полум'я запаленого сірника 1700 К
Полум'я свічки 1900 К
Світло сонця, що заходить, 2000 К
Місячне світло 4000 К
Світло літнього полуденного сонця 5400 К
100-ватна лампа розжарювання 2850 К
Кварцова галогенна лампа 3250 К
Фотографічна лампа-спалах 5500 К

§ 2. Зовнішній фотоефект

Фотоефектом називається звільнення електронів, що містяться в речовині у зв'язаному стані, під дією світла або будь-якого іншого електромагнітного випромінювання.

Розрізняють:

- зовнішній фотоефект (*фотоелектронну емісію*), який супроводжується вильотом електронів за межі тіла (рис. 2.4);
- внутрішній фотоефект, при якому електрони залишаються в тілі, але змінюють свій енергетичний стан.

На рис 2.1 показана схема установки для вивчення зовнішнього фотоефекту в металах. Світло, що проникає крізь кварцове вікно O (кварц пропускає видиме світло і ультрафіолетові промені), висвітлює катод K . Катод виготовлений з мате-

ріалу, який досліджується. і міститься всередині евакуйованої трубки, його називають фотокатодом ..

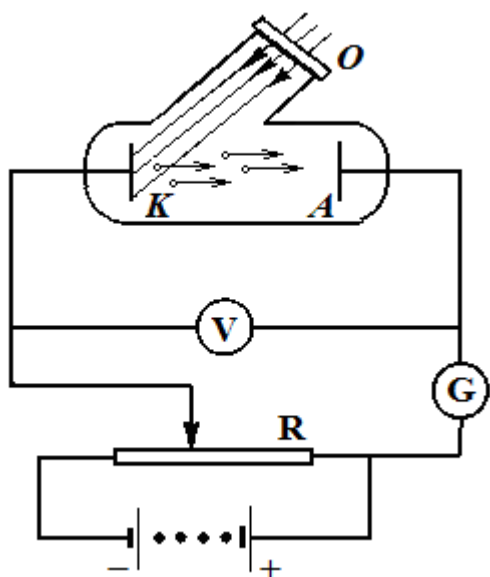


Рис. 2.1.

Електрони, які випущені внаслідок фотоелектричного ефекту, переміщуються під дією електричного поля до анода A . В колі виникає електричний струм (фотострум) I , що вимірюється гальванометром G . За допомогою потенціометра R можна змінювати напругу U між катодом і анодом, яку показує вольтметр V .

Дослідження привели до встановлення основних закономірностей фотоелектричного ефекту.

1) максимальна кінетична енергія електронів, що вилетіли з поверхні тіла при фотоелектричному ефекті (фотоелектронів), не залежить від інтенсивності падаючого світла, а визначається тільки його частотою ν і лінійно зростає зі збільшенням частоти (1-й закон фотоелектричного ефекту);

2) при фіксованій частоті падаючого світла сила фотоструму (тобто повне число електронів,

що залишають метал за 1 с) пропорційна інтенсивності світлового потоку (2-й закон фотоелектричного ефекту);

3) для кожної речовини є своя «червона межа» (або «довгохвильова межа») фотоелектричного ефекту: він спостерігається лише тоді, коли довжина хвилі λ падаючого світла менше деякого характерного для цієї речовини граничного значення λ_0 (або коли частота світла $\nu = c/\lambda$ більше певного граничного значення $\nu_0 = c/\lambda_0$, де c - швидкість світла).

4) фотоелектричний ефект - явище безінерційне, тобто фотострум з'являється миттєво ($\Delta t \leq 10^{-9}$ с) - одночасно з освітленням катода.

Проаналізуємо вольт-амперну характеристику (тобто залежність фотоструму I від напруги між електродами U), яка виходить в результаті фотоелектричного ефекту.

Збільшення напруги між катодом і анодом спочатку призводить до збільшення фотоструму в колі (рис. 2.2), але при досягненні деякої напруги фотострум перестає зростати і залишається незалежним від напруги. Утворюється *струм насичення*.

Це означає, що при фотострумі насичення всі електрони, які випущені катодом, потрапляють на анод. Отже, сила струму насичення I_n визначається кількістю електронів, що випускаються катодом в одиницю часу під дією світла. Тому сила фотоструму насичення I_n прямо пропорційна світловому потоку Φ

$$I_n = k \Phi, \quad (2.1)$$

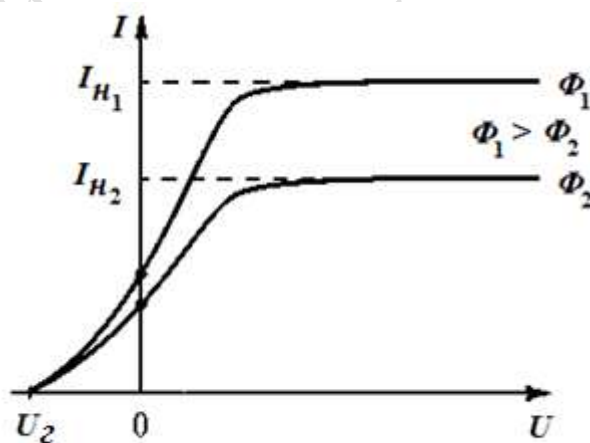


Рис. 2.2.

де k - коефіцієнт пропорційності, що характеризує чутливість даної поверхні до світла.

Аналіз кривої показує, що електрони вилітають з катода з різними за величиною швидкостями. Частина електронів має достатні швидкості, щоб досягти анода і без прискорювальної напруги між катодом і анодом, тобто при $U = 0$ створити струм $I_0 \neq 0$.

Для перетворення фотоструму в нуль необхідно докласти певну *гальмівну напругу* U_r . За величиною гальмівної різниці потенціалів U_r , за якої фотострум перетворюється в нуль, можна визначити швидкість найшвидших фотоелектронів:

$$\frac{1}{2}mv_{\max}^2 = eU_r \quad (2.2)$$

де m , e , v_{\max} - маса, заряд і максимальна швидкість цих електронів.

Експериментально було встановлено, що максимальна швидкість фотоелектронів не залежить від інтенсивності світла, а залежить тільки від частоти опромінення ν .

Пряма пропорційна залежність U_r від ν на рис. 2.3 вказує на те, що збільшення частоти призводить до зростання максимальної швидкості фотоелектронів. Ця експериментальна залежність не вкладається в рамки класичної електродинаміки, так як швидкість фотоелектронів за класичними поняттями повинна залежати від інтенсивності електромагнітної хвилі, а не від її частоти.

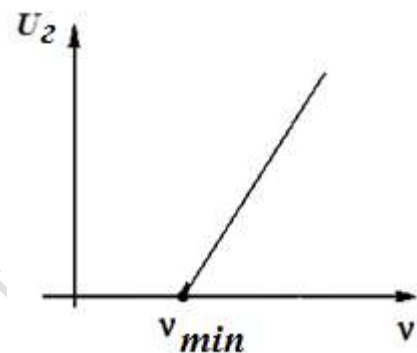


Рис. 2.3.

Теоретичне пояснення законів фотоелектру було дано в 1905 р А. Ейнштейном. Згідно з ним, електромагнітне випромінювання являє собою потік окремих квантів (*фотонів*) з енергією кожного $h\nu$, де h - стала Планка, тобто світло поглинається квантами.

Фотоелектр виникає під час непружного зіткнення фотона з електроном (рис. 2.4). При такому зіткненні фотон поглинається, а його енергія цілком передається електрону.

Таким чином, електрон набуває кінетичної енергії не поступово, а одразу - в результаті одного акту зіткнення. Цим і пояснюється безінерційність фотоелектру.

Енергія, яка отримана електроном, доставляється йому у вигляді кванта $h\nu$. Частина цієї енергії електрон витрачає на те, щоб вирватися з металу.

Для кожного матеріалу є своя *робота виходу* $A_{\text{вих}}$ - найменша енергія, яку необхідно надати електрону, щоб видалити його з речовини в вакуум. Залишок енергії фотона $h\nu - A_{\text{вих}}$ витрачається на кінетичну

енергію $mv^2/2$ електрона. Кінетична енергія максимальна, якщо електрон утворюється поблизу поверхні речовини і не витрачає енергію на випадкові зіткнення в речовині. У цьому випадку буде виконуватися *співвідношення Ейнштейна для фотоелектру*:

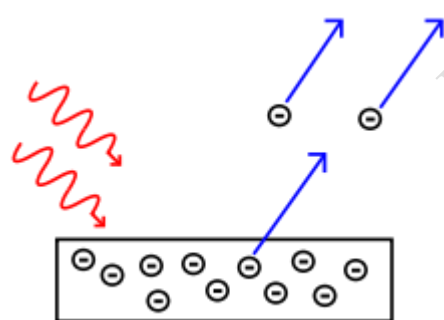


Рис. 2.4.

$$h\nu = \frac{mv_{\max}^2}{2} + A_{\text{вих}}. \quad (2.3)$$

Нобелівська премія з фізики за 1921 року була присуджена Ейнштейну за його «важливі фізико-математичні дослідження і особливо за відкриття законів фотоелектру».

Рівняння Ейнштейна дозволяє пояснити закони фотоелектру. Дійсно, зі співвідношення Ейнштейна безпосередньо випливає, що максимальна кінетична енергія фотоелектронів лінійно зростає зі збільшенням частоти падаючого випромінювання і не залежить від його інтенсивності (1-й закон фотоелектру). Так як зі зменшенням частоти падаючого світла кінетична енергія фотоелектронів зменшується (для даної речовини катода $A_{\text{вих}}$ постійна), то при досягненні деякої критичної частоти $\nu = \nu_{\text{кр}}$ кінетична енергія фотоелектронів стане рівною нулю і фотоелектр припиниться (3-й закон фотоелектру). Згідно з Ейнштейном, частота

$$\nu_{\text{кр}} = \frac{A_{\text{вих}}}{h} \quad (2.4)$$

представляє «червону межу» фотоелектру для даного речовини.

Підвищення інтенсивності світла призводить тільки до збільшення густини потоку фотонів, а отже, до збільшення числа зіткнень (в одиницю часу) електронів з фотонами; звідси - пряма залежність між інтенсивністю падаючого світла і силою фотоструму (2-й закон фотоелектру).

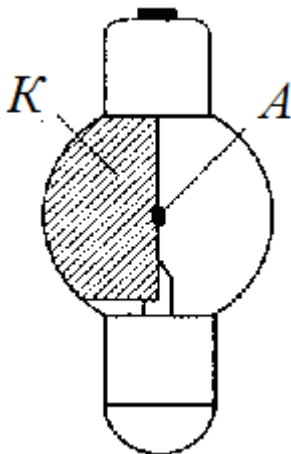


Рис. 2.5.

На явищі зовнішнього фотоелектру заснована дія *фотоелементів*. Вони являють собою скляні балони, всередині яких знаходяться фотокатод і анод (рис.2.5). Фотокатодом K служить шар лужного або лужно - земельного металу, нанесений на напилений на скло шар срібла. Анод A має форму сфери або кільця. Фотоелементи бувають вакуумними або наповненими інертним газом. Такі фотоелементи застосовуються в фотометрії для вимірювання сили світла, яскравості, освітленості, в кіно для відтворення звуку, в фототелеграфах. Недоліками такого фотоелемента є слабкий струм, мала чутливість до довгохвильового випромінювання, складність у виготовленні, неможливість використання в колах змінного струму, крихкість.

Набагато більш широко застосовуються напівпровідникові фотоелементи, засновані на явищі внутрішнього фотоелектру (див., наприклад, [13]).

Для реєстрації слабких світлових потоків використовують *фотопомножувачі*, дія яких заснована на зовнішньому фотоелекті і вторинній електронній емісії. Остання полягає в тому, що електрони, які утворилися в результаті фотоелектру, розганяються електричним полем і, б'ючись об наступний електрод

(емітер), вибивають з нього нову порцію електронів. Ці електрони в свою чергу

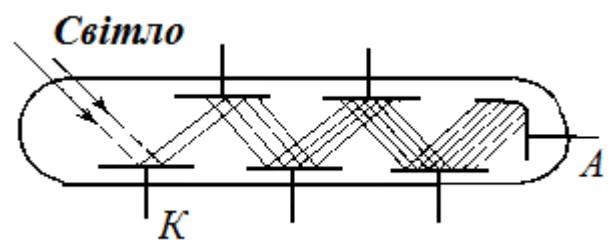


Рис. 2.6.

прискорюються полем і вибивають електрони з наступного емітера і т.д. (рис. 2.6). Такий лавинний процес розмноження електронів призводить до дуже сильного зростання первинного фотоструму. На виході фотопомножувача отримують імпульси струму великої амплітуди.

Приклад. Визначити максимальну швидкість фотоелектронів, що вириваються з поверхні срібла: 1) ультрафіолетовим випромінюванням з довжиною хвилі $\lambda_1 = 155$ нм; 2) γ - випромінюванням з довжиною хвилі $\lambda_2 = 1$ пм.

Максимальну швидкість фотоелектронів можна визначити з рівняння Ейнштейна для фотоэффекту:

$$h\nu = \frac{mv_{\max}^2}{2} + A_{\text{вих}}, \quad (\text{П.2.1})$$

де $h\nu$ - енергія фотонів, що падають на поверхню металу; $A_{\text{вих}}$ - робота виходу електрона з металу; яку знаходимо з таблиць, для срібла $A_{\text{вих}} = 4,47$ еВ, $mv_{\max}^2/2$ - максимальна кінетична енергія фотоелектронів.

Кінетична енергія T електрона може бути виражена або за класичною формулою

$$T = \frac{m_0 v^2}{2}, \quad (\text{П.2.2})$$

або за релятивістською формулою

$$T = E_0 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right), \quad \beta = \frac{v}{c}, \quad (\text{П.2.3})$$

в залежності від того, яка швидкість надана фотоелектрону.

Швидкість фотоелектрона залежить від енергії фотона, що викликає фотоэффект. Якщо енергія фотона набагато менше енергії спокою E_0 електрона, може бути застосована формула (П.2.2). Якщо ж енергія фотона є порівняною за величиною з E_0 , то обчислення за формулою (П.2.2.) призводять до грубої помилки, треба користуватися формулою (п.2.3).

Обчислимо енергію фотона в першому випадку задачі - ультрафіолетового випромінювання:

$$\varepsilon_1 = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{1,55 \cdot 10^7} (\text{Дж}) = 1,28 \cdot 10^{-18} \text{ Дж},$$

або в електронвольтах

$$\varepsilon_2 = \frac{1,28 \cdot 10^{-18}}{1,6 \cdot 10^{-19}} (\text{эВ}) = 8 \text{ эВ}.$$

Отримана енергія фотона (8 еВ) набагато менше, ніж енергія спокою електрона (0,51 МеВ), отже, для даного випадку кінетична енергія фотоелектрона у формулі (П.2.1) може бути виражена за класичною формулою (П.2.2):

$$\varepsilon_1 = A + \frac{m_0 v_{\max 1}^2}{2},$$

звідки.

$$v_{\max 1} = \sqrt{2(\varepsilon_1 - A)/m_0}. \quad (\text{П.2.4})$$

Підставивши значення величин у формулу (П.2.4), знайдемо

$$v_{\max 1} = \sqrt{\frac{2(8 - 4,47)1,6 \cdot 10^{-19}}{9,11 \cdot 10^{-31}}} \text{ м/с} = 1,11 \cdot 10^6 \text{ м/с}.$$

Тепер розглянемо другий випадок. Обчислимо енергію фотона γ - випромінювання:

$$\varepsilon_2 = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{10^{-12}} \text{ Дж} = 1,99 \cdot 10^{-13} \text{ Дж},$$

або в електронвольтах

$$\varepsilon_2 = \frac{1,99 \cdot 10^{-13}}{1,6 \cdot 10^{-19}} \text{ эВ} = 1,24 \cdot 10^6 \text{ еВ} = 1,24 \text{ МэВ}.$$

Робота виходу електрона (4,47 еВ) дуже мала в порівнянні з енергією γ - фотона (1,24 МеВ), тому в рівнянні Ейнштейна (2.3) можна покласти, що максимальна кінетична енергія електрона дорівнює енергії γ - фотона.

Оскільки в даному випадку кінетична енергія електрона більше його енергії спокою, для обчислення швидкості електрона слід взяти релятивістську формулу кінетичної енергії (П.2.3).

З цієї формули знайдемо

$$\beta = \frac{\sqrt{(2E_0 + T)T}}{E_0 + T}$$

З огляду на те, що $v = c\beta$ і $T_{\max} = \varepsilon_2$, отримаємо

$$v_{\max 2} = c \frac{\sqrt{(2E_0 + \varepsilon_2)\varepsilon_2}}{E_0 + \varepsilon_2}.$$

Зробимо розрахунки. Оскільки енергія стоїть у чисельнику і знаменнику дробу, її значення можна підставити в будь-яких одиницях, тому що вони скорочуються. Зручно це зробити в електронвольтах:

$$v_{\max 2} = 3 \cdot 10^8 \frac{\sqrt{(2 \cdot 0,51 + 1,24) \cdot 1,24}}{0,51 + 1,24} \text{ м/с} = 2,87 \cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

§ 3. Фотони. Тиск світла

Фотоном називають квант електромагнітного випромінювання, елементарну частинку. *Енергія фотона* залежить тільки від його частоти (або, що еквівалентно, від довжини хвилі $\lambda = c/v$) і визначається формулою

$$\varepsilon = h\nu = h \frac{c}{\lambda} \text{ или } \varepsilon = \hbar\omega = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda}. \quad (3.1)$$

Енергія фотонів видимого світла має значення близько $2 \div 3$ еВ, рентгенівський фотонів ≈ 100 МеВ.

Якщо приписати фотону наявність т.зв. «релятивістської маси» виходячи з формули Ейнштейна $\varepsilon = mc^2$, то вона складе

$$m = \frac{\varepsilon}{c^2} = \frac{h\nu}{c^2}. \quad (3.2)$$

Як відомо зі спеціальної теорії відносності, релятивістська маса

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \text{ де } m_0 - \text{ маса спокою. Оскільки швидкість фотона дорівнює } c, \text{ підс-}$$

тановка значення $v = c$ в цю формулу перетворює знаменник в нуль, а масу - в

нескінченність. Однак, маса фотона є скінченною. Це можливо, якщо покласти масу спокою фотона такою, що дорівнює нулю: $m_0 = 0$.

Масу спокою фотона вважають рівною нулю, ґрунтуючись на теоретичних обґрунтуваннях і на експерименті. Рівність нулю маси спокою фотона означає, що не існує систем відліку, в яких фотон перебував би в спокої, тобто не існує нерухомих фотонів. Фотон завжди рухається зі швидкістю c (в вакуумі).

Електричний заряд фотона також дорівнює нулю.

Щоб знайти імпульс фотона, скористаємося формулою спеціальної теорії відносності

$$\varepsilon = c\sqrt{p^2 + m_0c^2}.$$

При $m_0 = 0$ $\varepsilon = cp$ і імпульс фотона пов'язаний з енергією співвідношенням

$$p = \frac{\varepsilon}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}. \quad (3.3)$$

Імпульс фотона можна записати у векторному вигляді як

$$\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}, \quad (3.4)$$

де \mathbf{k} - хвильовий вектор, модуль якого $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, а напрямок збігається з на-

прямоком швидкості фотона.

Фотони випромінюються в багатьох природних процесах, наприклад, при гальмуванні електронів, при переході атома або ядра із збудженого стану в стан з меншою енергією, або при анігіляції пари електрон - позитрон. При зворотних процесах - збудженні атома, народження електрон-позитронного пар - відбувається поглинання фотонів.

Одним з експериментальних підтверджень наявності у фотонів імпульсу є існування світлового тиску. Тиск світла на поверхню будь-якого тіла з квантової точки зору здійснюється за рахунок передачі імпульсу фотонів тілу при їх поглинанні.

Нехай на поверхню тіла падає за нормаллю потік фотонів, густина якого (число фотонів, що падають на одиничну площадку в одиницю часу) дорівнює N_ϕ .

Кожен поглинений фотон передає поверхні імпульс $p_{\text{погл}} = \Delta p_1$,

$$\Delta p_1 = p_\phi - 0 = \frac{h\nu}{c}, \quad (3.5)$$

а кожен відбитий передає імпульс $p_{\text{відб}} = \Delta p_2$ - подвоєний імпульс фотона

$$\Delta p_2 = p_\phi - (-p_\phi) = 2\frac{h\nu}{c}. \quad (3.6)$$

Якщо відбивається частка фотонів, що дорівнює ρ (ρ - коефіцієнт відбивання), а поглинається частка, що дорівнює $(1 - \rho)$, то імпульс, що отримується одиницею поверхні тіла в одиницю часу, дорівнює

$$\frac{\Delta p}{\Delta S \Delta t} = \Delta p_1(1 - \rho)N_\phi + \Delta p_2\rho N_\phi = \frac{h\nu}{c}(1 - \rho)N_\phi + 2\frac{h\nu}{c}\rho N_\phi = \frac{h\nu}{c}N_\phi(1 + \rho).$$

Тиск - це сила, що діє на одиницю площі поверхні, а сила згідно з другим законом Ньютона дорівнює зміні імпульсу, віднесеній до часу цієї зміни. Таким чином, світловий тиск дорівнює

$$P = \frac{\Delta p}{\Delta S \Delta t} = \frac{h\nu}{c} N_{\phi} (1 + \rho). \quad (3.7)$$

Зауважимо, що $N_{\phi} h\nu$ - це енергія всіх фотонів, що падають в одиницю часу на одиничну площадку, тобто інтенсивність світла I . З іншого боку $\frac{I}{c} = w$, - це об'ємна густина енергії падаючого випромінювання. Тому вираз для тиску світла набуває вигляду

$$P = w (1 + \rho). \quad (3.8)$$

Приклад. На зачернену поверхню нормально падає монохроматичне світло з довжиною хвилі $\lambda = 0,65$ мкм, утворюючи тиск $p = 0,5 \cdot 10^{-5}$ Па. Визначити концентрацію фотонів поблизу поверхні і число фотонів, що падають на площу 1 м^2 за 1 с .

Тиск світла у разі нормального падіння на поверхню з коефіцієнтом відбивання ρ обчислюється за формулою

$$p = \frac{E_e}{c} (1 + \rho), \quad (П.3.1)$$

де E_e - енергетична освітленість, тобто енергія всіх фотонів, що падають в одиницю часу на одиницю поверхні, $E_e = N h\nu$; N - число фотонів, що падають щосекунди на одиницю площі поверхні, c - швидкість світла у вакуумі; ρ - коефіцієнт відбивання поверхні, в даному випадку поверхня є зачорненою і повністю поглинає фотони без їх відбивання, $\rho = 0$.

Оскільки $\nu = c / \lambda$, то $p = N h (1 + \rho) / \lambda$, звідси число фотонів, які падають щосекунди на одиницю площі поверхні

$$N = \frac{p\lambda}{(1 + \rho)h}. \quad (П.3.2)$$

За час Δt до елемента площі ΔS долетять ті фотони, які відстоять від поверхні тіла не більше, ніж на $c\Delta t$, тобто містяться в об'ємі циліндра з основою ΔS і висотою $c\Delta t$. Число цих фотонів дорівнює

$$N_1 = n\Delta S c\Delta t.,$$

де n - концентрація фотонів (число фотонів в одиниці об'єму). Для $\Delta S = 1 \text{ м}^2$ и $\Delta t = 1 \text{ с}$, маємо

$$N = n c. \quad (П.3.3)$$

З (П.3.2) та (П.3.3) отримуємо шукану концентрацію фотонів

$$n = \frac{p\lambda}{(1 + \rho)hc}.$$

Підставимо числові дані і визначимо: $N = 4,8 \cdot 10^{21} \text{ с}^{-1} \text{ м}^{-2}$, $n = 1,6 \cdot 10^{13} \text{ м}^{-3}$.

§ 4. Рентгенівське випромінювання. Короткохвильова межа рентгенівського спектра

Рентгенівське випромінювання було відкрито в 1895 році німецьким фізиком В.Рентгеном і носить його ім'я. Спочатку це невидиме випромінювання називалося X-променями, ця назва збереглася до сих пір в іноземній літературі.

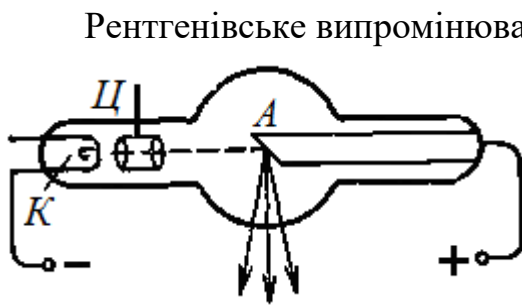


Рис. 4.1.

Рентгенівське випромінювання являє собою електромагнітне випромінювання з дуже короткими довжинами хвиль від 10^2 нм до 10^{-5} нм. Воно виникає при бомбардуванні швидкими електронами поверхні важких металів. Найбільш поширеним джерелом рентгенівського випромінювання є рентгенівська трубка.

У рентгенівській трубці внаслідок термоелектронної емісії з катода K (рис.4.1), який нагрівається струмом, випускаються вільні електрони.

Якщо між катодом і анодом прикладена напруга U , то електрони розганяються до енергії eU і потрапляють на мішень. Мішенню є анод A , виготовлений з важких металів (W, Mo, Cr, Ni та ін.).

Для прискорення електронів між анодом і катодом прикладається напруга порядку десятків і сотень кіловольтів.

Відомо, що будь-який заряд, що рухається з прискоренням, збуджує електромагнітні хвилі, причому інтенсивність випромінювання пропорційна квадрату прискорення.

Навколо електронів, що рухаються, існує магнітне поле. Внаслідок різкої зміни швидкості електронів різко змінюється і їх магнітне поле. В результаті випромінюються електромагнітні хвилі різної довжини.

Тому зазнаючи в речовині анода сильне гальмування, електрони стають джерелом електромагнітних хвиль.

Експериментальні криві залежності потужності P гальмівного рентгенівського випромінювання від довжини хвилі показані на рис 4.2 для різних значень прискорювальної напруги U .

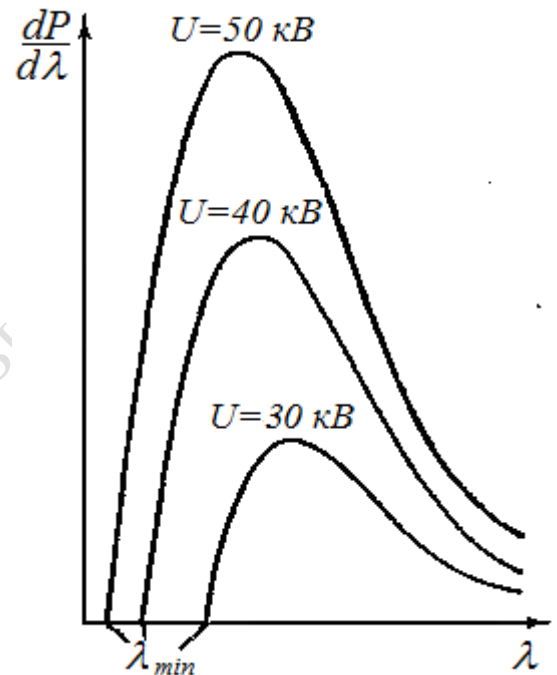


Рис. 4.2

З рисунка видно, що спектр рентгенівського випромінювання є суцільним, і для кожної прискорювальної напруги довжини випромінюваних хвиль обмежені з боку коротких хвиль (λ_{\min} на рисунку) - для кожної напруги спектр різко обривається.

Суцільний спектр гальмівного рентгенівського випромінювання пояснюється тим, що при випадкових зіткненнях електронів з мішенню різна частина кінетичної енергії електронів перетворюється в енергію фотона, який народжується. Отже, в рентгенівському випромінюванні можуть бути присутніми фотони з різними частотами.

Короткохвильова межа λ_{\min} рентгенівського випромінювання пояснюється, якщо припустити, що випускання випромінювання відбувається порціями (квантами), енергія яких дорівнює $\hbar\omega$.

Так як величина енергії випущеного рентгенівського фотона не може перевищувати енергію електрона eU (частина цієї енергії перетворюється при зіткненні в тепло), то

$$\hbar\omega \leq eU. \quad (4.1)$$

У граничному випадку при ударі електрона об анод він може віддати всю свою енергію на випромінювання. Тоді виникає фотон з максимальною частотою ω_{\max} і, відповідно, мінімальною довжиною хвилі

$$\lambda_{\min} = 2\pi c/\omega_{\max} = 2\pi\hbar c/eU. \quad (4.2)$$

Формула (4.2) добре узгоджується з експериментом.

При досить великій швидкості електронів, крім гальмівного випромінювання (тобто випромінювання, обумовленого гальмуванням електронів), збуджується також *характеристичне випромінювання*, викликане вибиванням електронів з внутрішніх електронних шарів атомів анода швидкими електронами. Перехід електронів з вищих шарів на шар, з якого вибито електрон, супроводжується випромінюванням рентгенівського фотона.

Так як довжини хвиль рентгенівського випромінювання дуже малі, то для їх вимірювання звичайні дифракційні решітки неспроможні. В якості дифракційних решіток, придатних для дослідження рентгенівських променів, користуються кристалами, в яких атоми і молекули розташовуються впорядковано в просторі з періодичним повторенням їх структурних елементів.

Приклад. Визначити найменшу довжину хвилі рентгенівського випромінювання, якщо рентгенівська трубка працює при напрузі 120 кВ.

На підставі фотонної теорії кожний електрон при гальмуванні породжує один фотон. У разі повного переходу енергії електрона в енергію випромінювання виникає фотон з максимальним значенням енергії, тобто з мінімальним значенням довжини хвилі:

$$eU = \hbar\omega_{\max} = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda_{\min}}.$$

Звідси

$$\lambda_{\min} = 2\pi\hbar c/eU = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 1,05 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 120 \cdot 10^3} = 10,36 \cdot 10^{-12} \text{ м} = 10,36 \text{ нм}.$$

§ 5. Ефект Комптона

У 1923 р. американський фізик А. Комптон виявив, що розсіяні в парафіні рентгенівські промені мають більшу довжину хвилі, ніж падаючі.

Схема досліду Комптона представлена на рис. 5.1. Монохроматичне рентгенівське випромінювання з довжиною хвилі λ , що виходить з рентгенівської трубки, проходить через діафрагми D і D_1 і у вигляді вузького пучка направляється на розсіювач - речовину з легкими атомами (парафін, бор). Розсіяні промені потрапляють в приймач - рентгенівський спектрограф, де вимірюється довжина хвилі λ' розсіяного випромінювання.

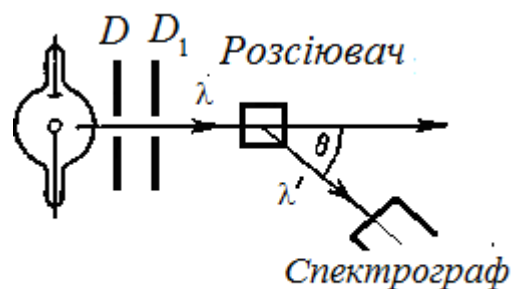


Рис. 5. 1.

За допомогою цього досліджу Комптоном було встановлено, що в складі розсіяного випромінювання поряд з випромінюванням початкової довжини хвилі λ спостерігається також випромінювання більш довгих хвиль $\lambda' > \lambda$. Дослід показав, що збільшення довжини хвилі $\Delta\lambda$ виражається формулою

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = 2\lambda_c \sin^2 \frac{\theta}{2}, \quad (5.1)$$

де θ - кут розсіювання (кут між напрямками поширення первинного і розсіяного променів), $\lambda_c = 2,43 \cdot 10^{-12}$ м - стала Комптона, знайдена з досліджу.

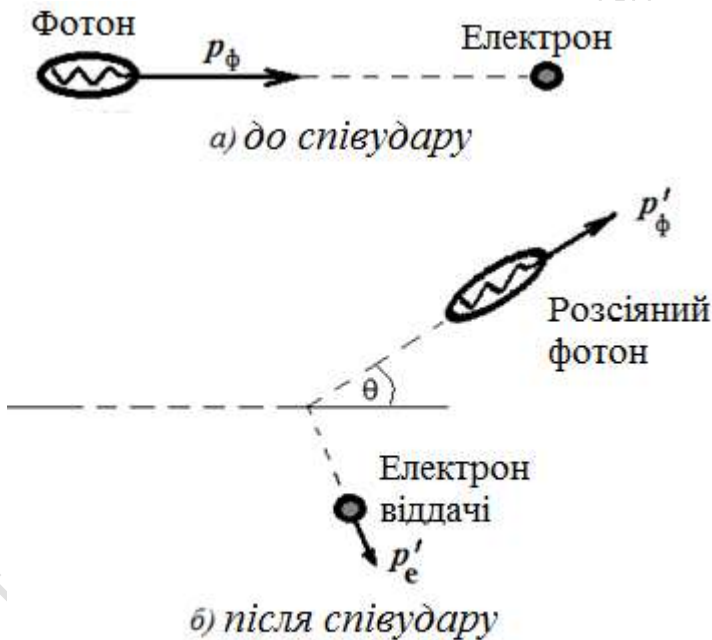


Рис. 5. 2.

Явище, яке отримало назву ефекту Комптона, є одним з експериментальних фактів, що підтверджують квантову природу світла.

За квантовою теорією, світлова хвиля являє собою потік світлових квантів - фотонів. Кожен фотон має певну енергію $\epsilon_\phi = h\nu = hc/\lambda$ і імпульс $p_\phi = (h/\lambda)$, де λ і ν - довжина хвилі і частота падаючого світла, c - швидкість світла, h - стала Планка.

Ефект Комптона в квантовій теорії виглядає як пружне зіткнення двох частинок - рентгенівського фотона і вільного електрона, який покоїться (рис. 5.2). Для легких атомів електрони слабо зв'язані з атомами, їх енергія зв'язку є значно меншою енергії рентгенівського

фотона, тому їх можна вважати вільними.

У кожному такому акті зіткнення (як при пружному зіткненні двох більярдних куль) виконуються закони збереження енергії і імпульсу. Фотон, зіткнувшись з електроном, передає йому частину своєї енергії і імпульсу і змінює напрямок руху (розсіюється); зменшення енергії фотона і означає збільшення довжини хвилі розсіяного світла. Електрон, який раніше покоївся, отримує від фотона енергію і імпульс і приходить в рух - зазнає віддачу. Напрямок руху частинок після зіткнення, а також їх енергії визначаються законами збереження енергії та імпульсу.

Виведемо співвідношення, що зв'яже довжину хвилі розсіяного фотона з кутом розсіювання і довжиною хвилі фотона до зіткнення.

Нехай фотон з імпульсом p_ϕ і енергією $p_\phi c$ стикається з нерухомим електроном, енергія спокою якого mc^2 . Після зіткнення імпульс фотона стане рівним p'_ϕ і спрямованим під кутом θ , як показано на рис. 5.2. Імпульс електрона віддачі буде дорівнювати p'_e , а повна релятивістська енергія електрона віддачі E'_e . При розсіянні фотонів

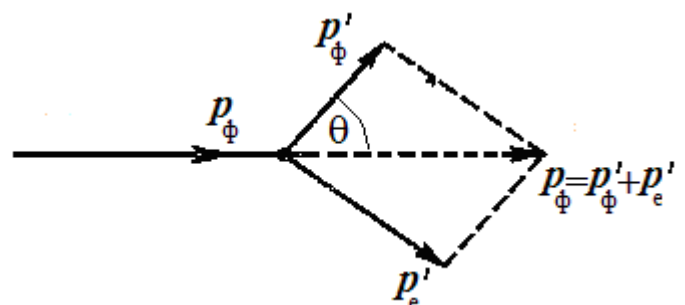


Рис. 5.3.

високої енергії електрон віддачі може отримати значну швидкість, тому необхідно враховувати релятивістську залежність енергії і імпульсу електрона від його швидкості.

Відповідно до закону збереження енергії повна початкова енергія фотона і електрона дорівнює їх повній енергії після зіткнення (після зіткнення величини позначені штрихами):

$$p_{\phi} c + mc^2 = p_{\phi}'c + E_e', \Delta\lambda = \lambda' - \lambda = 2\lambda_C \sin^2 \frac{\theta}{2}, \quad (5.1)$$

або, після поділу на c і піднесення до квадрату,

$$(p_{\phi} - p_{\phi}' + mc)^2 = p_{\phi}^2 - 2 p_{\phi} p_{\phi}' + p_{\phi}'^2 + 2 p_{\phi} mc - 2 p_{\phi}' mc + m^2 c^2 = (E_e'/c)^2. \quad (5.2)$$

Рис. 5.3. ілюструє закон збереження імпульсу при Комптон-ефекті. Відповідно до закону збереження імпульсу

$$\mathbf{p}_{\phi} = \mathbf{p}_{\phi}' + \mathbf{p}_e'. \quad (5.3)$$

Піднесемо до квадрату обидві частини рівності

$$\mathbf{p}_{\phi} - \mathbf{p}_{\phi}' = \mathbf{p}_e',$$

яка випливає з (5.3). Тоді отримаємо

$$p_{\phi}^2 - 2 \mathbf{p}_{\phi} \cdot \mathbf{p}_{\phi}' + p_{\phi}'^2 = p_e'^2$$

або, розкриваючи в цьому виразі скалярний добуток векторів, маємо

$$p_{\phi}^2 - 2 p_{\phi} p_{\phi}' \cos \theta + p_{\phi}'^2 = p_e'^2. \quad (5.4)$$

Віднімаючи рівність (5.4) від виразу (5.2), отримаємо

$$m^2 c^2 - 2 p_{\phi} p_{\phi}' + 2 p_{\phi} mc - 2 p_{\phi}' mc + 2 p_{\phi} p_{\phi}' \cos \theta = (E_e'/c)^2 - p_e'^2. \quad (5.5)$$

З релятивістського виразу енергії частинки через її імпульс

$$E_e' = c \sqrt{p_e'^2 + m^2 c^2} \quad (5.6)$$

випливає, що права частина формули (5.5) дорівнює $m^2 c^2$. Тоді з (5.5) виходить вираз для модуля імпульсу розсіяного фотона p_{ϕ}' :

$$p_{\phi}' = \frac{p_{\phi}}{1 + \frac{p_{\phi}}{mc}(1 - \cos \theta)}. \quad (5.7)$$

Підставивши $p_{\phi} = \frac{h}{\lambda}$, отримуємо

$$\frac{1}{\lambda'} = \frac{1}{\lambda + \frac{h}{mc}(1 - \cos \theta)}. \quad (5.8)$$

Остаточно маємо вираз для зміни довжини хвилі розсіяного фотона

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos \theta) = 2\lambda_C \sin^2 \frac{\theta}{2}, \quad (5.9)$$

де величина $\lambda_C = \frac{h}{mc}$ називається *комтонівською довжиною хвилі частинки з масою m*

(в даному випадку - електрона).

Таким чином, розрахунок, виконаний на основі квантових уявлень, дав повне пояснення ефекту Комптона і дозволив виразити комтонівську довжину хвилі λ_C через фундаментальні константи h , c і m .

$$\lambda_C = \frac{h}{m_0 c} = 2,426 \cdot 10^{-12} \text{ м.} \quad (5.10)$$

В ефекті Комптона найбільш повно проявилися корпускулярні властивості електромагнітного випромінювання (світла).

Приклад. Кут розсіювання фотона з енергією $\varepsilon = 1,2 \text{ Мев}$ на вільному електроні $\theta = 60^\circ$. Визначити довжину хвилі λ' розсіяного фотона, кінетичну енергію T і імпульс p електрона віддачі.

Зміна довжини хвилі фотона при комптонівському розсіюванні дорівнює

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos\theta) = \lambda_C (1 - \cos\theta), \quad (П.5.1)$$

де λ і λ' - довжини хвиль падаючого і розсіяного фотонів; $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$ - стала Планка, $m_0 = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$ - маса спокою електрона, $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ - швидкість світла у вакуумі, $\lambda_C = 2,43 \cdot 10^{-12} \text{ м}$ - комптонівська довжина хвилі електрона, θ - кут розсіювання.

З формули (П.5.1) знаходимо

$$\lambda' = \lambda + \lambda_C (1 - \cos\theta)$$

Виразимо довжину хвилі падаючого випромінювання через енергію $\varepsilon = \frac{hc}{\lambda}$ фотона:, тоді

$\lambda = \frac{hc}{\varepsilon}$. Отримаємо відповідь на перше запитання

$$\lambda' = \frac{hc}{\varepsilon} + \lambda_C (1 - \cos\theta). \quad (П.5.2)$$

Кінетична енергія електрона віддачі за законом збереження енергії

$$T_e = \varepsilon - \varepsilon' = h(\nu - \nu').$$

Виразимо зміну довжини: хвилі через зміну частоти :

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{c}{\nu'} - \frac{c}{\nu} = \frac{c(\nu - \nu')}{\nu\nu'}$$

З урахуванням (П.5.1) можна написати :

$$\nu - \nu' = \frac{h\nu\nu'}{m_0 c^2} (1 - \cos\theta). \quad (П.5.3)$$

Помножимо вираз (П.5.3) на h і врахуємо, що $h\nu = \varepsilon$, $h\nu' = \varepsilon'$, $m_0 c^2 = E_0$.

($E_0 = 0,51 \text{ Мев} = 0,82 \cdot 10^{-13} \text{ Дж}$ - енергія спокою електрона). Отримаємо $\varepsilon - \varepsilon' = \frac{\varepsilon\varepsilon'}{E_0} (1 - \cos\theta)$.

Виразимо з останнього рівняння ε' і підставимо в перетворену формулу (П.5.3):

$T = \frac{\varepsilon\varepsilon'}{E_0} (1 - \cos\theta)$. Отримаємо відповідь на друге питання завдання.

$$T_e = \frac{\varepsilon^2 (1 - \cos\theta)}{E_0 + \varepsilon (1 - \cos\theta)}. \quad (П.5.4)$$

Релятивістський імпульс електрона

$$p_e = \frac{1}{c} \sqrt{T_e(T_e + 2E_0)}. \quad (\text{П.5.5})$$

Підставляючи числові значення в формули (П.5.2), (П.5.4) і (П.5.5), отримаємо:

$$\lambda_2 = \frac{6,62 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}}{1,92 \cdot 10^{-13} \text{ Дж}} + 2,43 \cdot 10^{-12} (1 - 0,5) \text{ м} = 2,25 \cdot 10^{-12} \text{ м};$$

$$T = \frac{(1,2)^2 \cdot 0,5}{0,511 + 1,2 \cdot 0,5} \text{ МэВ} = 0,648 \text{ МэВ} = 1,04 \cdot 10^{-13} \text{ Дж}.$$

$$p_e = \frac{1}{3 \cdot 10^8 \text{ м/с}} \sqrt{1,04 \cdot 10^{-13} \text{ Дж} (1,04 + 2 \cdot 2 \cdot 0,82) \cdot 10^{-13} \text{ Дж}} = 5,55 \cdot 10^{-22} \text{ кг} \cdot \text{м/с}$$

Контрольні питання

1. Чим відрізняється теплове випромінювання від інших видів випромінювання?
2. Яка розмірність випромінювальної здатності тіла?
3. Чи залежить енергія, яку випромінює нагріте тіло, від температури навколишнього середовища?
4. В чому полягає гіпотеза Планка про квантуванні енергії випромінювання?
5. На якому законі теплового випромінювання заснований принцип колірної температури?
6. У чому полягає гіпотеза Ейнштейна про фотони?
7. Який зв'язок між хвильовими характеристиками світла (частотою, довжиною хвилі) і корпускулярними характеристиками фотона (енергією, імпульсом)?
8. Що являє собою «червона межа» фотоефекту?
9. Чи залежить кінетична енергія фотоелектронів від інтенсивності світла, падаючого на фотокатод?
10. Чому рентгенівські трубки працюють під високою напругою?
11. Чому гальмівний рентгенівський спектр є суцільним? Чому суцільний рентгенівський спектр має різку межу з боку коротких хвиль і чим визначається її положення?
12. Внаслідок чого зменшується частота рентгенівського кванта при його зіткненні з вільним електроном?
13. Чому ефект Комптона не спостерігається для видимого світла?
14. Чому тиск світла на чорну поверхню в два рази менше, ніж на білу?

Глава 2. ЕЛЕМЕНТИ КВАНТОВОЇ МЕХАНІКИ

§ 6. Хвильові властивості мікрочастинок. Хвилі де Бройля

Корпускулярно-хвильовий дуалізм світла. Вивчення властивостей світла показало, що в залежності від умов експерименту воно поводить себе то як електромагнітна хвиля, то як потік дискретних частинок - фотонів.

Так, хвильові властивості світла виявляються в явищах інтерференції, дифракції, поляризації. Для пояснення інших експериментів - законів теплового випромінювання, фотоэффекту, явища Комптона і ін. - виявилось необхідним приписати світлу корпускулярні властивості.

Що ж таке світло? Чи становить воно собою електромагнітні хвилі або потік фотонів? Відповідь на це питання така - не можна розглядати світло ні як потік класичних частинок, ні як класичні хвилі. Світло *одночасно* має і хвильові, і корпускулярні властивості. Це уявлення називають *корпускулярно-хвильовим дуалізмом* (подвійністю властивостей світла).

Корпускулярно - хвильовий дуалізм має на увазі, що світло має потенційну можливість проявляти і хвильові, і корпускулярні властивості, але вони ніколи не виявляються одночасно.

Неможливо здійснити експеримент, в якому світло одночасно виявляло б і ті, і інші властивості. Залежно від конкретних умов реалізується тільки одна можливість.

Розглянемо зв'язок хвильових і корпускулярних властивостей світла на прикладі проходження світла через щілину в непрозорому екрані. Припустимо, що паралельний пучок монохроматичних світлових променів падає на непрозорий екран з вузькою щілиною AB (рис. 6.1).

Як відомо з розділу «Хвильова оптика» (див., наприклад, І.П.Гаркуша, В.П.Курінний, Фізика, ч.5. § 13) на екрані CD , розміщеному за щілиною, виникає дифракційна картина. На рис. 6.1 праворуч зображено розподіл освітленості E , яка є пропорційною інтенсивності світла, на екрані (лінзу, яку зазвичай ставлять за щілиною, для простоти міркувань опускаємо). Оскільки інтенсивність світла пропорційна квадрату амплітуди A світлової хвилі, то і $E \sim A^2$.

З квантової точки зору утворення дифракційної картини означає, що при проходженні світла через щілину відбувається *перерозподіл* фотонів в просторі. В результаті цього в різні точки екрану потрапляє різне число фотонів. Освітленість екрана в даній точці буде пропорційна числу n_0 фотонів, які потрапляють за одиницю часу в дану точку. Таким чином, $E \sim n_0$.

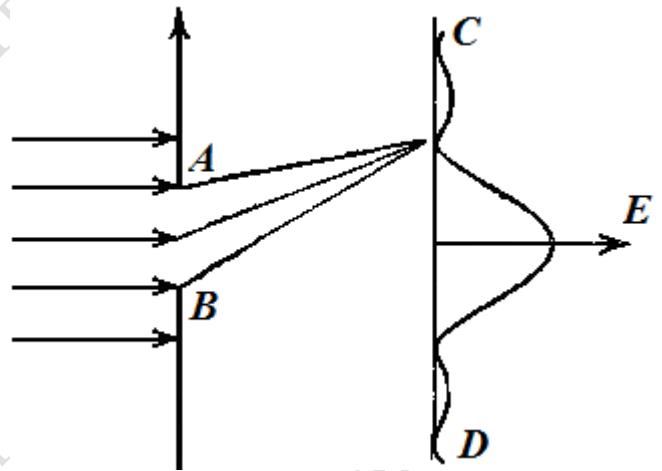


Рис. 6.1.

Порівняємо два вирази для освітленості. З них випливає, що $A^2 \sim n_0$. Квадрат амплітуди світлової хвилі в будь-якій точці простору пропорційний числу фотонів, що потрапляють в цю точку. Іншими словами, *квадрат амплітуди світлової хвилі в даній точці простору є мірою ймовірності попадання фотонів в цю точку.*

Кожний окремий фотон має хвильові властивості, які проявляються в тому, що для нього не можна точно вказати, в яку саме точку екрану він потрапить після проходження щілини. Можна говорити тільки про ймовірність попадання кожного фотона в ту чи іншу точку екрану.

Нагадаємо, що імпульс p і енергія ϵ фотона пов'язані з частотою ν і довжиною хвилі λ співвідношеннями (див. § 3):

$$p_{\text{ф}} = h/\lambda, \quad \epsilon_{\text{ф}} = h\nu = hc/\lambda.$$

Чим більша довжина хвилі світла, тим менший імпульс і енергія фотона і тим важче виявити корпускулярні властивості світла. І навпаки, чим менша довжина хвилі електромагнітного випромінювання, тим більша енергія і імпульс фотонів і тим важче виявити хвильові властивості цього випромінювання.

Хвильові властивості мікрочастинок. Французький фізик Л. де Бройль в 1924 р. висунув *гіпотезу про універсальність корпускулярно-хвильового дуалізму.* Він припустив, що *не тільки фотони, але і електрони і будь-які інші частинки речовини поряд з корпускулярним мають також хвильові властивості.*

Згідно з де Бройлем, з кожним мікрооб'єктом зв'язуються, з одного боку, корпускулярні характеристики - енергія ϵ і імпульс p , а з іншого боку - хвильові характеристики - частота ν і довжина хвилі λ .

Співвідношення між довжиною хвилі і імпульсом частинки залишаються такими ж, як у випадку фотонів:

будь-якій частинці, що рухається з енергією ϵ і імпульсом p , відповідає хвиля з частотою

$$\nu = \frac{\epsilon}{h} \quad (6.1)$$

і довжиною хвилі

$$\lambda = \frac{h}{p}. \quad (6.2)$$

Всі частинки мають хвильові властивості, зокрема, зазнають інтерференції і дифракції.

І навпаки, з *будь-якою хвилею пов'язані частинки*, які мають енергію $\epsilon = h\nu$ і імпульс $p = \frac{h}{\lambda}$.

Хвилі, пов'язані з будь-якою мікрочастиною, які відображають її квантову природу, називаються *хвилями де Бройля.*

При вирішенні завдань, пов'язаних з хвилею де Бройля, слід розрізняти релятивістський і нерелятивістський випадки руху частинок.

Якщо швидкість частинки набагато менше швидкості світла $c \approx 3 \cdot 10^8$ м/с, то можна застосовувати класичний вираз для імпульсу

$$p = mv$$

(на практиці вважається, що $v \ll c$, якщо $v \leq 0,3c$ або $v^2/c^2 \leq 0,1$).

Іншим критерієм застосовності класичних формул є малість кінетичної енергії частинки в порівнянні з її енергією спокою

$$E_k \ll mc^2.$$

У цьому випадку

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m},$$

звідки

$$p = \sqrt{2mE_k}.$$

Тоді довжина хвилі де Бройля в нерелятивістському випадку

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{h}{\sqrt{2mE_k}} \quad (6.4)$$

Якщо ж кінетична енергія частинки не мала в порівнянні з енергією спокою, то зі співвідношення теорії відносності між повною енергією частинки E і її імпульсом p

$$E = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}$$

слід

$$p = \frac{1}{c} \sqrt{(E - mc^2)(E + mc^2)}.$$

Оскільки кінетична енергія E_k дорівнює різниці між повною енергією і енергією спокою

$$E_k = E - mc^2,$$

то для імпульсу вийде

$$p = \frac{1}{c} \sqrt{E_k(E_k + 2mc^2)}, \quad (6.5)$$

відповідно довжина хвилі де Бройля

$$\lambda = \frac{hc}{\sqrt{E_k(E_k + 2mc^2)}}, \quad (6.6)$$

або

$$\lambda = \frac{h}{mv} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (6.6, a)$$

Приклад 1. Визначити довжину хвилі де Бройля λ електрона, якщо електрон пройшов прискорюючу різницю потенціалів: 1) $U = 50$ В; 2) $U = 1$ МВ.

Порівняємо кінетичні енергії електрона, що пройшов різниці потенціалів U_1 і U_2 з енергією спокою електрона. Енергія спокою електрона $E_0 = m_e c^2 = 0,51$ МеВ.

У першому випадку $E_{k1} = |e|U = 50$ еВ. Ця кінетична енергія багато менше енергії спокою електрона, $E_{k1} \ll E_0$. Отже, можна застосувати формулу (6.4).

$$\lambda_1 = \frac{h}{\sqrt{2m_e|e|U}} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 50}} \text{ м} = 1,7 \cdot 10^{-10} \text{ м}.$$

У другому випадку кінетична енергія $E_{k2} = |e| U = 1 \text{ MeV}$. Ця енергія приблизно в два рази більше, ніж енергія спокою електрона. Отже, необхідно застосувати релятивістську формулу (6.6)

$$\lambda_2 = \frac{hc}{\sqrt{E_k(E_k + 2m_e c^2)}} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{\sqrt{10^6(10^6 + 2 \cdot 0,51 \cdot 10^6) \cdot (1,6 \cdot 10^{-19})^2}} \text{ м} = 8,82 \cdot 10^{-13} \text{ м}.$$

Фізичне тлумачення хвиль де Бройля. У класичній фізиці хвиля - це коливання матерії, що поширюються в просторі. Якщо розглядаються пружні хвилі в речовині, то коливаються частинки цієї речовини. Такі коливання матерії можна виявити у всіх точках, до яких встигла дійти хвиля. У разі електромагнітних хвиль, взаємно пов'язані коливання здійснюють електричне (E) і магнітне (H) поля.

Хвилі де Бройля не є ні електромагнітними хвилями, ні хвилями якогось іншого фізичного матеріального поля.

Щоб пояснити зміст хвиль де Бройля, розглянемо такий дослід.

Нехай пучок електронів падає на непрозорий екран з круглим отвором (рис. 6.2). Електрони, які пройшли крізь отвір, можна реєструвати за допомогою фотопластинки позаду екрану.

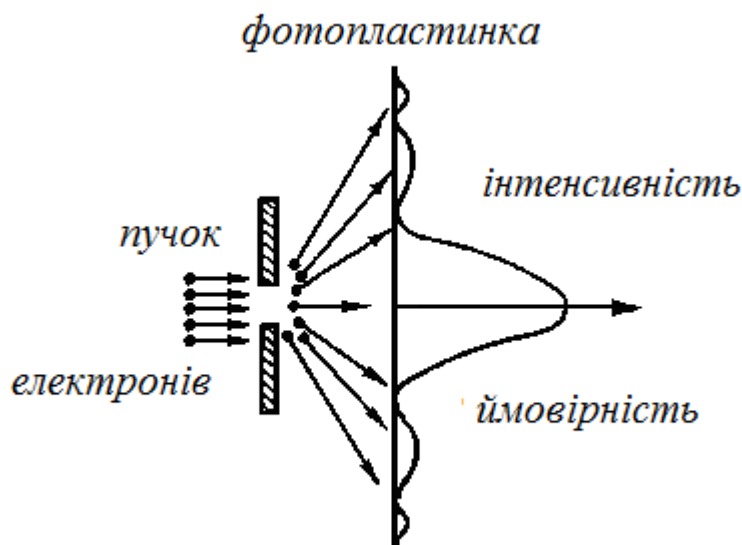


Рис. 6.2.

Від кожного електрона на фотопластинці з'являється почорніння - цятка. Навіть якщо падаючі на отвір електрони мають однакові імпульси, одні з них відхиляються в одну сторону, інші - в іншу, і відбувається це, здавалося б, випадковим чином. Однак коли цяток на фотопластинці стає дуже багато, вони утворюють певну картину. Цятки розміщуються з різною густиною і гущі будуть там, де повинні бути максимуми на дифракційній картині, і рідше там, де мінімуми (рис. 6.2).

Таку ж дифракційну картину можна отримати при дифракції паралельного пучка світла на круглому отворі. Картини дифракції в обох випадках однотипні, тільки в разі світла в центрі спостерігається *максимум освітленості*, а в разі електронів - *максимум ймовірності* попадання електронів, пропорційний концентрації частинок.

Дифракційну картину слід розглядати як прояв певної статистичної закономірності: електрони з найбільшою ймовірністю потрапляють в одні місця, а з меншою ймовірністю - в інші. Оскільки з кожним рухомих електроном пов'язана хвиля де Бройля, то ці хвилі набувають *ймовірнісного змісту*.

З точки зору хвильових властивостей електронів в центрі лежить максимум інтенсивності хвиль де Бройля. Нагадаємо, що інтенсивність хвилі пропорційна квадрату амплітуди. Тому приходимо до висновку: **квадрат амплітуди хвилі де Бройля в певній точці простору є мірою ймовірності знаходження частинки в цій точці.**

Чим же є мікрочастинка - хвилею або частинкою? У такій постановці питання мається на увазі альтернатива - або хвиля, або частинка. Наше мислення допускає тільки одну з цих можливостей.

Хвиля де Бройля не є хвилею, що якимось чином рухається разом з частинкою. Хвиля де Бройля і частинка - це **один і той же єдиний об'єкт**. Реальність полягає в тому, що частинка має властивості хвилі.

Якщо дослідити поведінку мікрочастинки за допомогою приладу, то хвильовий прилад (наприклад, дифракційна решітка) зареєструє хвилю, а корпускулярний прилад (наприклад, детектор частинок) зареєструє частинку.

Виникає питання: якщо корпускулярно-хвильовий дуалізм є універсальною властивістю всіх тіл природи, то чому хвильові властивості не проявляються у макроскопічних тіл? Чому в оточуючих нас предметах немає нічого «хвильового»?

Відповідь полягає в тому, що довжини хвиль де Бройля для таких тіл настільки малі, що виявлення хвильових властивостей виявляється неможливим.

У розділі «Хвильова оптика» ми бачили, що дифракція світла, тобто відхилення від законів геометричної оптики (прямолінійного поширення світла вздовж променів) спостерігається в тому випадку, коли розміри перешкод сумірні з довжиною світлової хвилі. Якщо ж розміри перешкод набагато більше, ніж довжина хвилі світла, явищем дифракції можна знехтувати.

Аналогічно цьому уявленню про хвилі де Бройля можна використовувати для з'ясування питання про те, якою теорією, квантовою або класичною, слід описувати конкретне явище. Для цього потрібно порівняти довжину хвилі де Бройля, що зіставлена за формулою (6.2) досліджуваному об'єкту, з характерними розмірами у відповідній задачі.

Хвильові властивості об'єкта не відіграють істотної ролі, поки довжина хвилі де Бройля не стане сумірною з характерними розмірами області руху частинки.

Для прикладу оцінимо довжину хвилі де Бройля для маленької кульки і електрона. Нехай кулька масою 1 г переміщається зі швидкістю 100 м/с. Тоді довжина хвилі де Бройля

$$\lambda_1 = \frac{h}{\sqrt{2m_e|e|U}} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 50}} \text{ м} = 1,7 \cdot 10^{-10} \text{ м}.$$

Довжина хвилі де Бройля для такої кульки настільки мала, що виявлення хвильових властивостей неможливо методами сучасної фізики. У природі немає такого об'єкта, який можна було б використовувати для спостереження дифракції таких хвиль. Інакше кажучи, хвильові властивості такої кульки не виявляються.

Якщо тепер розглянути електрон, який переміщається з такою ж швидкістю, то він буде мати довжину хвилі

$$\lambda_2 = \frac{6,63 \cdot 10^{-34}}{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 10^2} \text{ м} = 7,3 \cdot 10^{-6} \text{ м} = 7,3 \text{ мкм}$$

Така довжина хвилі порівняно легко може бути знайдена в експерименті.

Як бачимо, при рівних умовах довжина хвилі де Бройля тим менше, чим більше маса частинки.

Довжину хвилі електрона, що знаходиться в атомі водню, можна порівняти з розмірами самого атома. Тому квантові ефекти в цьому випадку будуть визначувальними, і уявлення класичної фізики тут явно неприйнятні.

Порівняємо тепер довжину хвилі де Бройля, що зіставляється ракеті, з висотою навколоразомної орбіти 300 км, на яку виводиться космічний корабель. Якщо прийняти масу ракети ≈ 100 т, першу космічну швидкість ≈ 8 км/с, то довжина хвилі де Бройля $\lambda \approx 10^{-42}$ м. Ця величина фантастично мала. Отже, рух ракет, супутників, космічних кораблів і будь-яких інших макроскопічних тіл буде прекрасно описуватися класичною механікою.

За відкриття хвильової природи електрона Луї де Бройль в 1929 р. був удостоєний Нобелівської премії з фізики.

Вперше доказ існування хвильових властивостей електронів був отриманий в 1927 р. американськими фізиками К. Девіссоном і Л. Джермером. Досліджуючи відбивання електронного пучка від монокристала нікелю, вони встановили, що електронний пучок відбивається від монокристала селективно, тобто при деяких кутах падіння і в деяких напрямках дуже сильно, а в інших - дуже слабо. Таке відбивання електронів від монокристала аналогічно дифракції рентгенівських променів від кристалів і свідчить про *хвильові властивості електронного пучка*.

Надалі російські фізики під керівництвом В.Фабріканта поставили дослід по дифракції електронів, який виявляв хвильові властивості не тільки пучка електронів, а й кожного рухомого електрона окремо.

Пізніше спостерігалася дифракція *протонів*, а також дифракція *нейтронів*. На дифракції цих частинок засновані сучасні методи аналізу атомної структури речовини - *електронографія і нейтронографія*, а ще одне важливе практичне застосування ідеї де Бройля - створення електронного мікроскопа, в якому замість світлових променів використовуються пучки електронів, прискорених до великих енергій.

§ 7. Співвідношення невизначеностей Гейзенберга

Для *макроскопічної частинки*, що підлягає законам класичної механіки, завжди можна вказати її точні координати x, y, z і певний імпульс \mathbf{p} з проєкціями на осі p_x, p_y, p_z . Якщо відома сила, що діє на частинку, то на підставі другого закону Ньютона

$$\frac{dp_x}{dt} = F_x$$

і очевидного співвідношення $\frac{dx}{dt} = \frac{p_x}{m}$ можна визначити координату і складову імпульсу через час dt , а сукупність послідовних положень рухомої точки утворює лінію - траєкторію руху.

Відмінність *мікрочастинок* від макроскопічних частинок полягає в тому, що для опису руху мікрочастинки поняття траєкторії не застосовується. Про це, зокрема, свідчать результати досліду по дифракції електронів на двох щілинах.

Направимо на перешкоду з двома вузькими щілинами паралельний пучок електронів (рис. 7.1), причому швидкості електронів в пучку однакові як за моду-

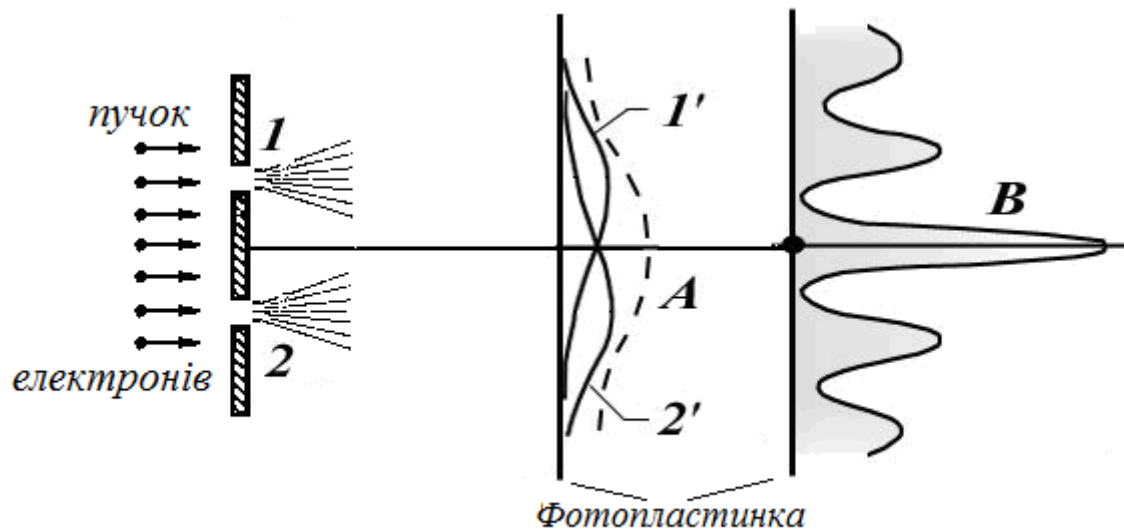


Рис. 7.1.

лем, так і за напрямом.

Якщо залишити відкритою тільки верхню щілину 1, то розподіл ймовірностей виявити електрон в різних точках екрану має вигляд, описуваний кривою 1' (подібний розглянутому в попередньому параграфі на рис. 6.1, у даному прикладі ми знехтували дрібними максимумами).

Якби була відкрита тільки нижня щілина 2, то розподіл ймовірностей залишився б таким самим, але тільки відповідна крива змістилася б униз на відстань, що дорівнює відстані між щілинами (рис. 7.1, крива 2').

Здавалося б, що при відкритих обох щілинах розподіл електронів на екрані має описуватися пунктирною кривою А, яка виходить від накладання двох попередніх картин. Так було б, якби кожен електрон, рухаючись по своїй траєкторії, проходив через певну щілину - 1 або 2, не надаючи ніякого впливу на електрони, що проходять через іншу щілину.

Замість цього ми побачимо картину почорніння, аналогічну картині, що отримується при інтерференції світла від двох отворів двох когерентних світлових хвиль - відомий дослід Юнга (див., наприклад [5], § 8). Це серія максимумів, найінтенсивніший максимум - центральний (рис. 7.1, крива В).

На відміну від класичних частинок, кожна з яких в будь-який момент часу знаходиться в певній точці простору і рухається по траєкторії і може пролітати або через одну, або через іншу щілину, на рух кожного електрона впливають оби-

дві щілини. Відбувається інтерференція хвиль кожного з електронів на обох щілинах.

При цьому електрон не поділяється на дві частини, кожна з яких проходить через відповідну щілину, а залишається неподільною частинкою.

Такий висновок є несумісним з наочним, але абсолютно неправильним уявленням про електрон, як про маленьку кульку, а поняття траєкторії до електрона не застосовується. Як же виглядає електрон? Ми цього не знаємо, не можемо скласти собі наочний образ. Будь-яка наочна модель буде діяти за класичними законами і, тому, не придатна для зображення мікрочастинок. Доводиться відмовитися від побудови наочних образів квантових об'єктів.

Поєднуючи в собі властивості частинки і хвилі, електрон не поводить себе ні як частинка, ні як хвиля. Зі зменшенням розмірів починають виявлятися якісно нові властивості, які не виявляються у макрочастинок.

Згідно класичним уявленням частинка, рухаючись по траєкторії, в кожен момент часу знаходиться в певній точці простору і, отже, не може в цей же момент часу знаходитися в інших точках. Згідно з квантовими уявленнями мікрочастинка в силу своїх хвильових властивостей може бути виявлена в один і той же момент часу в різних точках простору. Таким чином, для опису руху мікрочастинок *поняття траєкторії виявляється непридатним*.

Зауважимо, що як і у випадку дифракції світла умова спостереження дифракції електронів полягає в тому, що довжина хвилі де Бройля повинна бути порівнянна з розмірами щілин і відстанню між ними.

Німецький фізик В. Гейзенберг в 1927 р., враховуючи хвильові властивості мікрочастинок, прийшов до висновку, що поняття координати і імпульсу в класичному розумінні не можуть бути застосовані до мікроскопічних об'єктів.

Згідно зі **співвідношенням невизначеностей Гейзенберга** мікрочастинка не може одночасно мати і точно визначену координату (x, y, z), і певну відповідну проекцію імпульсу (p_x, p_y, p_z), причому невизначеності в значеннях цих величин задовольняють умовам:

$$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar/2 ; \quad \Delta y \Delta p_y \geq \hbar/2 ; \quad \Delta z \Delta p_z \geq \hbar/2 . \quad (7.1)$$

Тобто добуток невизначеностей координати і відповідної до неї проекції імпульсу не може бути меншим величини $\hbar/2$.

Зі співвідношення невизначеностей випливає, що чим точніше фіксована координата, тобто чим менше невизначеність значення координати частинки $\Delta x, \Delta y, \Delta z$, тим більше невизначеність імпульсу $\Delta p_x, \Delta p_y, \Delta p_z$, і навпаки, чим точніше визначений імпульс, тим більше невизначеність координати. Якщо положення частинки визначено точно (наприклад, на осі $Ox, \Delta x = 0$), то $\Delta p_x = \infty$, і значення проекції імпульсу p_x стає повністю невизначеним.

Ніякий експеримент не дозволяє провести одночасно точне вимірювання координати і імпульсу мікрочастинки, це пов'язано з об'єктивними властивостями матерії.

Співвідношення невизначеностей підкреслює відмінність в описі стану систем в класичній і квантовій механіці.

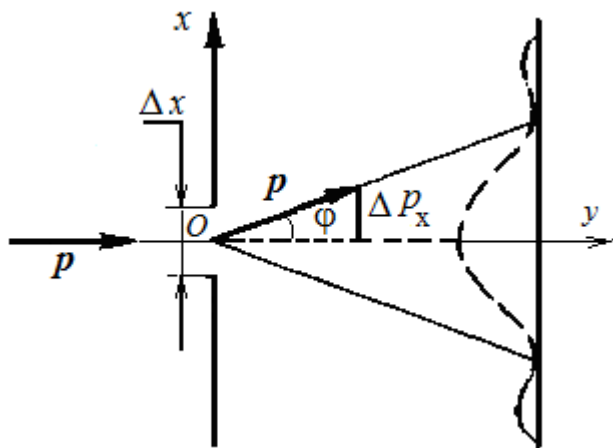


Рис. 7.2.

Розглянемо як приклад дифракцію електрона на щілині і встановимо з цього розгляду співвідношення невизначеностей. Нехай потік електронів, що мають однакові за модулем і напрямом імпульси, проходить крізь вузьку щілину шириною Δx , розміщену перпендикулярно до напрямку їх руху (рис. 7.2). Оскільки електрони мають хвильові властивості, то при розмірах щілини, порівняних з довжиною хвилі де Бройля для електрона при його проходженні крізь щілину, відбувається дифракція, яка спостерігається на екрані. Дифракційна

картина, яка спостерігається на екрані, складається з головного максимуму і побічних максимумів по обидва боки від головного.

Направимо вісь Ox перпендикулярно до щілини, а вісь Oy - вздовж напрямку руху пучка електронів (рис. 7.2). До проходження крізь щілину електрон рухався уздовж осі Oy , тому складова імпульсу $p_x = 0$, так що $\Delta p_x = 0$, а координата x електрона була при цьому абсолютно невизначеною.

У момент проходження електрона крізь щілину замість повної невизначеності координати x з'являється невизначеність її Δx , яка дорівнює ширині щілини.

У міру віддалення від щілини внаслідок дифракції електрон відхиляється від первинного напрямку і починає рухатися в межах кута 2φ (φ - кут, що відповідає першому мінімуму). Отже, з'явиться невизначеність Δp_x в значенні складової імпульсу вздовж осі Ox , яка, як видно з рис. 7.2 дорівнює

$$\Delta p_x = p \sin \varphi = (h/\lambda) \sin \varphi. \quad (7.2)$$

Електрони, що пройшли через щілину, в переважній більшості випадків будуть потрапляти в центральний дифракційний максимум. Межі цього максимуму визначаються кутом дифракції φ , що задає напрямок на перший мінімум інтенсивності в дифракційній картині. Відповідно до теорії дифракції (див., наприклад [5], § 13) цей кут знаходиться з умови

$$\Delta x \sin \varphi = \lambda, \quad (7.3)$$

де λ - дебройлівська довжина хвилі електрона.

З формул (7.2) і (7.3) отримаємо

$$\begin{aligned} \sin \varphi &= (\lambda/h) \Delta p_x \\ \sin \varphi &= \lambda/\Delta x. \end{aligned}$$

Тому

$$\Delta x \Delta p_x = h. \quad (7.4)$$

Строгий вивід (врахування максимумів вищих порядків) дає наступний результат

$$\Delta x \Delta p_x \geq h/2.$$

Координати і імпульс були введені в класичній фізиці для характеристики руху звичайних тел. Застосовуючи ці поняття до мікрочастинок, ми тим самим приписуємо їм властивості макроскопічних тіл. Експериментальні ж дані показу-

ють, що ці класичні уявлення не застосовні в мікросвіті, або застосовні з певними обмеженнями.

Користуючись співвідношенням невизначеностей Гейзенберга, можна встановити, в якій мірі можна користуватися поняттями класичної механіки стосовно до мікрочастинок.

Розглянемо кілька прикладів.

Приклад 1. *Рух електрона в атомі водню.* Відомо, що розмір атома водню дорівнює приблизно $d = 10^{-10}$ м. Класичний опис поведінки електрона в атомі припускає, що йому можна приписати певну траєкторію. У планетарній моделі атома електрон обертається навколо ядра. Діаметр його орбіти d можна вважати рівним розміру атома. Якщо електрон знаходиться всередині атома, то невизначеність у значенні його координати Δx не перевищує розмірів атома d : $\Delta x = d/2$.

Підставивши в (7.1) замість p_x добуток mv_x , отримаємо співвідношення

$$\Delta x \cdot \Delta v_x \geq \frac{\hbar}{2m} \quad (\text{П.7.1})$$

Тоді невизначеність в швидкості електрона матиме порядок

$$\Delta v_x = \frac{\hbar}{2m\Delta x} = \frac{1,05 \cdot 10^{-34}}{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 0,5 \cdot 10^{-10}} = 1,2 \cdot 10^6 \text{ м/с}$$

Порівняємо отримане значення зі швидкістю електрона в атомі, яку оцінимо, використовуючи закони класичної фізики. Згідно з другим законом Ньютона добуток маси електрона на його доцентрове прискорення повинен дорівнювати кулонівській силі притягання електрона до ядра

$$m \frac{v^2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2}$$

При русі електрона навколо ядра по круговій орбіті радіуса $r = 0,5 \cdot 10^{-10}$ м, його швидкість $v \approx 2,3 \cdot 10^6$ м/с. Отже, отримана нами величина невизначеності швидкості Δv_x одного порядку зі швидкістю електрона. Тому не можна говорити про рух електрона в атомі по певній траєкторії. Інакше кажучи, для опису руху електрона в атомі не можна користуватися законами класичної механіки.

Приклад 2. Нехай тепер електрон пролітає в середовищі з пересиченою парою (камера Вільсона). При проходженні через камеру Вільсона високоенергетичні частинки залишають в ній сліди у вигляді треків. Трек частинки в камері Вільсона є ланцюжком маленьких крапельок туману розміром 10^{-6} м.

Положення мікрочастинки визначається з точністю, що задається розмірами крапельки. Отже, невизначеність координати частинки $\Delta x \approx 5 \cdot 10^{-7}$ м.

Товщина сліду електрона визначається величиною поперечної складової його швидкості. Для електрона з енергією $E = 1$ кеВ швидкість становить

$$v = \sqrt{\frac{2E}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-16}}{9,1 \cdot 10^{-31}}} = 1,9 \cdot 10^7 \text{ м/с},$$

а поперечна складова швидкості визначається зі співвідношення невизначеностей (7.1)

$$\Delta v_x \approx \frac{\hbar}{2m\Delta x} = \frac{1,05 \cdot 10^{-34}}{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 5 \cdot 10^{-7}} = 1,1 \cdot 10^2 \text{ м/с}.$$

Таким чином, трек частинки в камері Вільсона - це не геометрична лінія, а трубка діаметром 10^{-6} м = 10^{-4} см, в кожній точці якої швидкість відома неточно. Однак ця невизначеність

при швидкості електронів близько $10^6 \div 10^7$ м/с настільки мала, що дозволяє вважати, що електрони рухаються по певній траєкторії з точно заданій в кожній точці швидкістю.

З тієї ж причини електрони в електронно-променевих трубках, протони в прискорювачах, атоми і молекули в газах, іони в плазмі можна вважати такими, що рухаються за законами ньютонівської механіки.

Приклад 3. Оцінимо тепер невизначеність координати у кульки, що летить, масою $m = 0,1$ г, швидкість якої визначена з точністю $\Delta v_x = 10^{-6}$ см / с.

Зі співвідношення (П.7.1) слід, що $\Delta x = 10^{-27}$ см, тобто практично положення кульки буде визначено точно. Отже, співвідношення невизначеностей до макроскопічних тіл не застосовується, тому що у них не проявляються хвильові властивості.

Для цих тіл у відповідності з класичною механікою, можливо одночасне завдання координат і швидкостей, і отже, можливе обчислення траєкторій руху.

Крім співвідношень невизначеностей (7.1) між координатами і імпульсами, існує ще одне співвідношення, що зв'язує невизначеність енергії частинки ΔE і невизначеність часу Δt , протягом якого ця зміна енергії відбулася:

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar / 2. \quad (7.5)$$

Це співвідношення означає, що визначення енергії з точністю до ΔE повинно зайняти проміжок часу $\Delta t \sim \hbar / \Delta E$.

Таким чином, якщо частинка перебуває в деякому стані протягом часу Δt , то її енергія має невизначеність не менше $\Delta E \sim \hbar / \Delta t$. Розкид енергії ΔE зростає зі зменшенням часу життя частинки. І навпаки, чим довше частинка знаходиться в даному стані, тим точніше може бути визначена її енергія.

Наприклад, на стаціонарній орбіті атомний електрон живе необмежено довго, тому й енергія основного стану E визначається точно.

Зі співвідношення (7.5) випливає, що енергії збуджених рівнів, на яких електрон живе скінченний час, не можуть бути строго визначеними, тобто мають деяку ширину, вони як би розмиті. Якщо Δt - середній час життя збудженого стану, то невизначеність енергії стану (ширина його рівня) становить $\Delta E \sim \hbar / \Delta t$.

Коли невизначеність енергії досягає значень $2 E_0$, де E_0 - енергія спокою будь-якої елементарної частинки, може народжуватися пара частинка - античастинка. Ці частинки називаються *віртуальними*. Вони можуть існувати час Δt .

§8. Хвильова функція і її фізичний зміст. Рівняння Шредінгера

У класичній механіці рух матеріальної точки описується другим законом Ньютона; наприклад, в проекціях на вісь Ox описується формулою

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_x.$$

Але мікрочастинки мають ще й хвильові властивості, тому для опису їх руху повинна бути використана інша механіка.

Теорія, що описує рух мікрочастинок (елементарних частинок, атомів, молекул, атомних ядер) і їх систем (кристалів) і враховує їх хвильові і корпускулярні властивості, називається *квантовою механікою*.

Основоположним в квантовій механіці є положення про те, що корпускулярно-хвильовий дуалізм (подвійність властивостей) має універсальний характер. Всі частинки матерії, що мають скінченний імпульс, мають хвильові властивості.

З будь-якою частинкою, будь то фотон або електрон, пов'язана хвиля (хвиля де Бройля). Амплітуда цієї хвилі визначається так званою **хвильовою функцією**, яка є функцією координат і часу; її позначають грецькою буквою «пси»:

$$\Psi = \Psi(x, y, z, t).$$

Сама хвильова функція фізичного змісту не має, але фізичний зміст приписується її квадрату: *інтенсивність хвилі де Бройля пропорційна квадрату Ψ* .

Оскільки хвильова функція може бути комплексною (тобто може містити комплексні числа виду $a + ib$, де $i = \sqrt{-1}$), то інтенсивність пропорційна квадрату модуля хвильової функції

$$|\Psi|^2 = \Psi\Psi^*,$$

де Ψ^* - це функція, комплексно спряжена з Ψ .

Основне твердження квантової механіки полягає в тому, що квадрат модуля хвильової функції для будь-якої точки простору $|\Psi|^2$, помножений на елементарний об'єм dV , що містить цю точку, визначає ймовірність dP знаходження частинки в межах об'єму dV :

$$dP = |\Psi|^2 dV. \quad (8.1)$$

Величина $|\Psi|^2$ має зміст *густини ймовірності* (в такому ж розумінні, як густина енергії, густина заряду і т. д., тобто ймовірність, віднесена до одиниці об'єму) перебування частинки в даній точці простору.

Квантова механіка має *статистичний характер*; за допомогою хвильової функції Ψ визначають *тільки ймовірність* виявлення мікрочастинки в різних точках простору. Квантова механіка не ставить питання про місцезнаходження частинки або її траєкторії в просторі, оскільки завдяки хвильовим особливостям мікрочастинки такі питання не мають сенсу.

Необхідність імовірнісного підходу відноситься до будь-яких процесів в мікросвіті і є однією з найважливіших відмінних рис квантової механіки.

Повна ймовірність P знаходження частинки в елементі об'єму V вийде, якщо підсумувати (інтегрувати) dP за елементами dV

$$P = \int_V dP = \int_V |\Psi|^2 dV. \quad (8.2)$$

Хвильова функція $\Psi(x, y, z, t)$ за своїм змістом має задовольняти так звану *умову нормування*:

$$\int_0^\infty \Psi\Psi^* dV = 1. \quad (8.3)$$

Цей інтеграл дає ймовірність того, що частинка з даною хвильовою функцією знаходиться в одній з точок нескінченного простору, тобто ймовірність достовірної події, яка дорівнює одиниці. Цією умовою користуються для знаходження постійних множників, що входять в Ψ .

Частинка може бути виявлена в будь-якій точці простору, в якій хвильова функція відмінна від нуля, а результати експериментів по визначенню, наприклад, координати частинки, мають імовірнісний характер. Це означає, що при прове-

денні серії однакових дослідів над однаковими системами виходять кожен раз різні результати. Однак деякі значення будуть більш вірогідними, тобто з'являтимуться частіше. Відносна частота появи тих чи інших значень координати пропорційна квадрату модуля хвильової функції.

Щоб рівняння руху мікрочастинок враховувало їх хвильові властивості, необхідно, щоб воно було хвильовим рівнянням (див., наприклад, [11] § 16), тобто являти собою диференціальне рівняння в частинних похідних другого порядку.

Таке квантово-механічне рівняння руху було запропоновано в 1926 р австрійським фізиком Е. Шредінгером.

Рівняння Шредінгера має такий вигляд:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi + U(x, y, z, t)\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}, \quad (8.4)$$

де m - маса частинки, Δ - оператор Лапласа ($\Delta\Psi = \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}$),

$U(x, y, z, t)$ - потенціальна енергія частинки в силовому полі, в якому рухається частинка, $i = \sqrt{-1}$ - уявна одиниця.

З рівняння Шредінгера визначають функцію Ψ для різних випадків руху і взаємодій мікрочастинок.

Рівняння (8.4) є основним рівнянням нерелятивістської квантової механіки, справедливим для довільної частинки, яка рухається з малою швидкістю ($v \ll c$). Аналогічно з другим законом Ньютона в класичній механіці, воно не виводиться, а постулюється на основі узагальнення експериментальних даних. Рівняння (8.4) також називають **рівнянням Шредінгера, яке залежить від часу**.

Рівняння Шредінгера доповнюється умовами, які накладаються на Ψ - функцію:

- а) функція Ψ має бути скінченною, однозначною і безперервною;
- б) похідні $\frac{\partial\Psi}{\partial x}$, $\frac{\partial\Psi}{\partial y}$, $\frac{\partial\Psi}{\partial z}$ мають бути безперервними;
- в) функція $|\Psi|^2$ має бути інтегрованою.

Для багатьох фізичних явищ, що відбуваються в мікросвіті, можна знайти рівняння Шредінгера для *стаціонарних станів* - станів з фіксованими значеннями енергії. Це можливо, якщо силове поле, в якому частинка рухається, є стаціонарним, тобто функція $U = U(x, y, z)$ не залежить явно від часу і має зміст потенціальної енергії.

У цьому випадку рішення рівняння Шредінгера може бути представлено у вигляді добутку двох функцій, одна з яких залежить тільки від координат, інша - тільки від часу, причому залежність від часу виражається множником $e^{-i(E/\hbar)t}$:

$$\Psi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z)e^{-i(E/\hbar)t}. \quad (8.5)$$

(Щоб розрізнити написання великих і малих грецьких літер Ψ і ψ , першу жартівливо називають «псі з рогами»).

Пояснимо на прикладі, чому в якості хвильової функції вибирають *комплексну функцію*. Для цього розглянемо частинку, яка рухається вздовж осі Ox , імпульс якої має точно визначене значення $p = h/\lambda$.

Прийнято виражати пульс не крізь довжину хвилі λ , а крізь хвильове число $k = 2\pi/\lambda$:

$$p = \frac{h}{2\pi} \cdot \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{h}{2\pi} \cdot k$$

Для величини $h/2\pi$ введено спеціальне позначення \hbar («ха» перекреслене).

Тоді

$$p = \hbar k.$$

Так як імпульс заданий точно, невизначеність імпульсу Δp_x дорівнює нулю. Тоді, як випливає з співвідношення невизначеностей Гейзенберга, невизначеність координати $\Delta x = \infty$, тобто частинка з рівною імовірністю може перебувати в будь-якій точці на осі Ox .

Якщо взяти в якості хвильової функції відомий з хвильової фізики (див., наприклад [3]) вираз для плоскої хвилі

$$\Psi = A \cos(\omega t - kx),$$

то розподіл ймовірностей матиме вигляд

$$|\Psi|^2 = A^2 \cos^2(\omega t - kx).$$

Але тоді в будь-який момент часу t на осі Ox знайдуться такі точки, в яких квадрат косинуса перетворюється в нуль, тобто в цих точках частинку неможливо виявити.

Насправді ж її можна з однаковою імовірністю виявити в будь-якій точці на осі. З останньої формули випливає, що в інших точках простору ймовірність знаходження частинки буде пульсувати з часом як квадрат косинуса. Такої пульсації насправді також немає.

Тому в якості хвильової функції слід взяти іншу - *комплексну функцію*

$$\Psi = A e^{-i(\omega t - kx)}.$$

Тоді густина ймовірності виявити частинку

$$|\Psi|^2 = \Psi \Psi^* = A e^{-i(\omega t - kx)} A e^{i(\omega t - kx)} = A^2$$

буде постійною величиною, без періодичної пульсації в часі. Тепер в будь-якій точці осі Ox ймовірність знайти частинку однакова, що знаходиться у відповідності з принципом невизначеності.

Повернемося до формули (8.5). Тут E - повна енергія частинки, яка в разі стаціонарного поля (такого, що не змінює свої характеристики з часом) залишається незмінною. Підставимо вираз (8.5) в рівняння (8.4).

$$-\frac{\hbar^2}{2m} e^{-i(E/\hbar)t} \Delta \psi + U \psi e^{-i(E/\hbar)t} = i\hbar(-i(E/\hbar)) \psi e^{-i(E/\hbar)t}$$

Скоротивши на загальний множник $e^{-i(E/\hbar)t}$, прийдемо до диференціального рівняння, що визначає функцію ψ :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + U \psi = E \psi \quad (8.6)$$

або в іншому вигляді:

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\psi = 0 . \quad (8.7)$$

Рівняння (8.7) називається *рівнянням Шредінгера для стаціонарного стану*.

У разі стаціонарного силового поля густина ймовірності $\Psi\Psi^*$ з часом не змінюється. Дійсно, відповідно до (8.5)

$$\Psi\Psi^* = \psi e^{-i(E/\hbar)t} \cdot \psi^* e^{i(E/\hbar)t} = \psi\psi^* .$$

Ми отримали добуток двох функцій, які не залежать за визначенням від часу, тобто в цьому випадку густина ймовірності знаходження частинки у відповідному місці простору від часу не залежить.

У рівняння (8.7) в якості параметра входить повна енергія E частинки. У теорії диференціальних рівнянь доводиться, що подібні рівняння мають рішення не за довільних значень параметра E , а лише за певного їх набору, характерного для даної задачі. Ці значення енергії називаються *власними*. Рішення ж, які відповідають власним значенням енергії, називаються *власними функціями*. Власні значення E можуть утворювати як безперервний, так і дискретний ряд. У першому випадку говорять про *безперервний, або суцільний енергетичний спектр*, у другому - про *дискретний спектр*.

У класичній механіці, згідно з *принципом причинності* за відомим станом системи в деякий момент часу (який повністю визначається значеннями координат і імпульсів всіх частинок системи) і силам, прикладеним до неї, розв'язавши рівняння Ньютона, можна *абсолютно точно* задати стан системи в будь-який подальший час після цього.

На відміну від цього, стан мікрооб'єктів неможливо описати методами класичної фізики хоча б тому, що зі співвідношення невизначеностей випливає, що мікрочастинка не має певного імпульсу в точці.

Опис станів в класичній і в квантовій областях є істотно різним.

Координати і імпульси класичних частинок самі є безпосередньо вимірюваними величинами. У квантовій теорії стан мікрооб'єктів описується принципово по-новому - за допомогою хвильової функції Ψ . Хвильова функція Ψ не може бути безпосередньо виміряна, хоча в експериментах вимірюються фізичні величини, які виражаються через Ψ . Хвильова функція $\Psi(x, y, z, t)$ задовольняє рівняння руху Шредінгера. Воно дозволяє однозначно визначити $\Psi(x, y, z, t)$ в будь-який момент часу, якщо відомі хвильова функція в початковий момент часу $\Psi_0(x_0, y_0, z_0, t_0)$ і силове поле, в якому рухається частинка.

Знаючи хвильову функцію, можна зробити висновок про результати фізичного експерименту. Однак ці результати формулюються в імовірнісних термінах. *Ми не можемо сказати, що щось станеться, а можемо тільки сказати, що ймовірність цієї події така-то*. Це означає, що перевірка квантових законів можлива тільки при багаторазовому здійсненні експерименту.

Таким чином, квантова механіка не скасувала принцип причинності, а надала йому нову, відповідну властивостям мікрочастинок форму.

Контрольні питання

1. Як підтверджується на досліді наявність у мікрочастинок хвильових властивостей? Дифрагує чи окрема мікрочастинка на перешкоді?
2. Чому у мікрочастинок відсутні траєкторії руху?
3. Чи притаманні хвильові властивості макроскопічним тілам, наприклад, більярдній кулі або тенісному м'ячу?
4. Що відбувається при підвищенні точності вимірювання координати мікрочастинки?
5. Що таке хвилі де Бройля? Як довжина хвилі де Бройля залежить від маси і швидкості частинки?
6. Чому хвилю де Бройля не можна записати в вигляді $\Psi(x,t) = A \cos(\omega t - kx)$?
7. Виразіть дебройлівську довжину хвилі релятивістської частинки через її кінетичну енергію T .
8. Яка довжина хвилі де Бройля у електрона з кінетичною енергією, яка дорівнює його енергії спокою?
9. Як залежить довжина хвилі де Бройля від маси частинки?
10. У чому відмінність розуміння причинності в класичній і квантовій механіці?
11. У чому полягає імовірнісна інтерпретація хвильової функції? Що визначає квадрат модуля хвильової функції?
12. Чим відрізняється опис стану системи в класичній та квантовій теорії?
13. У чому полягає фізичний зміст нормування хвильової функції?
14. Як проявляються причинно-наслідкові зв'язки в класичній і квантовій механіці?
15. Чому в якості хвильової функції вибирають комплексну функцію?
16. Чи можна виміряти на досліді хвильову функцію?

Глава 3. НАЙПРОСТІШІ ЗАДАЧІ КВАНТОВОЇ МЕХАНІКИ

§ 9. Рух вільної частинки

Найпростішим рухом квантової частинки є рух вільної частинки. *Вільними* називають частинки, які не взаємодіють з іншими тілами. Отже, потенціальна енергія вільної частинки $U(x) = \text{const}$ і її можна прийняти рівною нулю, $U(x) = 0$, а повна енергія збігається з кінетичною $E = E_k$.

Для вільної частинки, яка рухається вздовж осі Ox , рівняння Шредінгера для стаціонарних станів набуває вигляду

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E \psi = 0. \quad (9.1)$$

Прямою підстановкою можна переконатися в тому, що окремим розв'язком цього рівняння є функція

$$\psi(x) = A e^{ikx}, \quad (9.2)$$

де A і k - постійні.

При цьому, як випливає з прямої підстановки, власні значення енергії

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}. \quad (9.3)$$

Так як згідно з корпускулярно-хвильовим дуалізмом $k = p_x/\hbar$ и $\omega = E/\hbar$, де p_x - проекція імпульсу частинки на вісь Ox , k - хвильове число, ω - кругова частота хвилі де Бройля, то залежність енергії від імпульсу виявляється звичайною для нерелятивістських частинок

$$E = \frac{p_x^2}{2m}. \quad (9.4)$$

Оскільки хвильове число k може приймати будь-які додатні значення, то отже і енергія вільної частинки E приймає будь-які значення, тобто енергетичний спектр вільної частинки буде безперервним з найменшим значенням $E = 0$.

Функція $\psi(x)$ є тільки координатною частиною хвильової функції $\Psi(x, t)$. Для хвильової функції, яка залежить від часу, отримуємо

$$\Psi(x, t) = \psi(x) e^{-i\omega t} = A e^{-i(\omega t - kx)} = A e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - p_x x)} \quad (9.5)$$

Це рішення являє собою *плоску монохроматичну хвилю де Бройля* з частотою ω і хвильовим числом k , що поширюється в додатному напрямку осі Ox . Таким чином, *вільна квантова частинка описується плоскою монохроматичною хвилею де Бройля*, що поширюється в тому ж напрямку і описує хвильові властивості частинки.

Імовірність знаходження частинки в певній точці осі Ox

$$|\psi(x)|^2 = |A|^2 = \text{const}. \quad (9.6)$$

Сталість цієї величини означає рівну ймовірність виявлення частинки в усіх точках осі Ox , тобто область руху вільної частинки є необмежено великою.

§ 10. Проходження мікрочастинок крізь потенціальний бар'єр. Тунельний ефект

Потенціальним бар'єром називається обмежена область простору, в якій потенціальна енергія взаємодії частинки більше, ніж в сусідніх областях. Область підвищеного значення потенціальної енергії розділяє області зі зниженим її значенням. Крива потенціальної енергії має вигляд бар'єру. На рис. 10.1 зображений потенціальний бар'єр прямокутної форми для випадку одновимірного (по осі Ox) руху частинки. У точці $x = 0$ потенціальна енергія $U(x)$ приймає максимальне значення U_0 , яке називається *висотою бар'єру*. Потенціальний бар'єр ділить простір на три області:

$$U = 0 \text{ при } x < 0 \text{ і при } x > l, \text{ а в області } 0 \leq x \leq l \text{ } U = U_0.$$

Розглянемо спочатку поведінку *класичної частинки* (тобто частинки, що підлягає законам класичної механіки), що рухається у додатному напрямку осі Ox у напрямку до потенціального бар'єру.

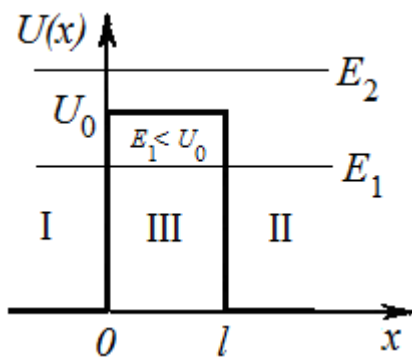


Рис. 10.1.

Проходження частинки крізь потенціальний бар'єр, наприклад з області I в область II при русі частинки зліва направо, можливо лише в тому випадку, коли її повна (кінетична + потенціальна) енергія E перевищує висоту потенціального бар'єру, $E \geq U_0$ (E_2 на рис 10.1); тоді частинка вільно пролітає над бар'єром (переходить з області I в область II). При цьому на ділянці бар'єру $0 \leq x \leq l$ швидкість частинки стає меншою, але після проходження бар'єру вона знову набирає первісне значення.

Якщо ж повна енергія E частинки менше висоти бар'єру $E < U_0$ (E_1 на рис 10.1), то проникнути в область $x > 0$ частинка не може, тому що при цьому її кінетична енергія $p^2/2m = E - U_0$ стає від'ємною, а імпульс $p = \sqrt{2m(E - U_0)}$ стає уявним, що безглуздо, оскільки p - дійсна величина.

Крізь бар'єр класична частинка пройти не може, вона відіб'ється від бар'єру і полетить в зворотну сторону з тією ж енергією, яку мала спочатку.

Таким чином, потенціальний бар'єр виявляється як би непрозорою стінкою (бар'єром) для частинок малої (менше висоти потенціального бар'єру) енергії, звідси назва «потенціальний бар'єр».

Зовсім інша картина має місце *для квантових частинок*. З точки зору квантової механіки, тобто згідно з рішеннями рівняння Шредінгера, у випадку, коли $E < U_0$, існує ймовірність того, що частинка пройде крізь потенціальний бар'єр і потрапить в область $x > l$.

У квантовій механіці знаходження частинки всередині області $E < U_0$ не приводить до безглузлого висновку про негативну кінетичну енергію.

Розглядати повну енергію як суму потенціальної і кінетичної енергії можна тільки в класичній механіці, адже це означає, що ми знаємо одночасно імпульс p і координату x частинки.

Згідно зі співвідношенням невизначеностей кінетична і потенціальна енергії не можуть мати одночасно точних значень, оскільки кінетична енергія залежить від імпульсу, а потенціальна енергія - від координати.

Розкиди в значеннях імпульсу Δp і координати Δx пов'язані один з одним: $\Delta p \Delta x \geq \hbar$.

Тому, якщо локалізувати частинку всередині потенціального бар'єру (тобто вважати, що частинка проходить крізь бар'єр), то її координата буде визначена з точністю Δx , що не перевищує ширину бар'єру l , $\Delta x \leq l$, і отже, імпульс набуде невизначеність $\Delta p \geq \hbar/l$. Пов'язана з цим розкидом кінетична енергія в значеннях імпульсу $(\Delta p)^2/2m$ може збільшити кінетичну енергію частинки до значення, рівного висоті бар'єру, тобто стає достатньою для того, щоб повна енергія частинки виявилася більшою за потенціальну.

Проходження частинки під потенціальним бар'єром називають **тунельним переходом** - назва означає, що «частинка як би рие тунель під горою потенціального бар'єру».

Тунельний ефект є строгим наслідком рівняння Шредингера. Розв'язання цього рівняння показує, що Ψ -функція має відмінні від нуля значення і в тих точках простору, де $E < U_0$. Отже, з деякою ймовірністю частинка може бути знайдена і в цих областях.

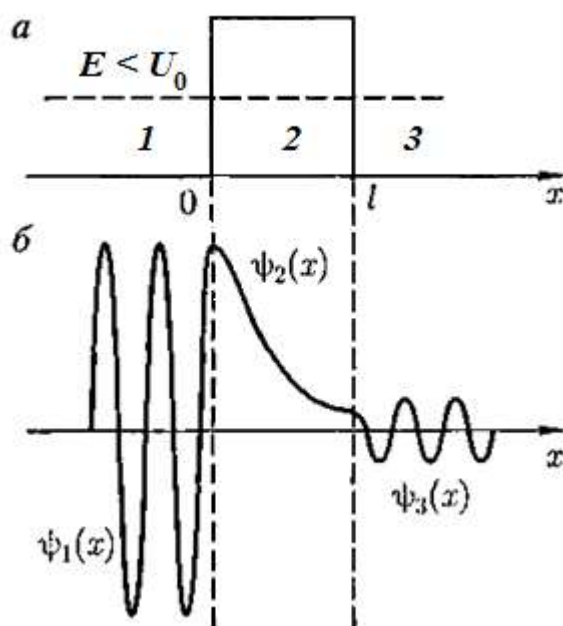


Рис. 10.2.

Не маючи можливості приводити ці рішення, відзначимо лише якісну ілюстрацію отриманих рішень (рис. 10.2). Хвильова функція $\psi_1(x)$ в області 1 ліворуч від бар'єру (частинка підходить до бар'єру зліва) представляє собою хвилю де Бройля. Усередині бар'єру (область 2 на рис. 10.2) хвильова функція $\psi_2(x)$ експоненційно убуває і не встигає повністю згаснути. Це призводить до того, що існує невелика ймовірність виявити частинку по інший бік від бар'єру, праворуч від бар'єру (область 3). Тут хвильова функція $\psi_3(x)$ також є хвилю де Бройля тієї ж частоти, але з набагато меншою амплітудою, ніж перед бар'єром.

Розрахунок показує, що ймовірність просочування частинки крізь потенціальний бар'єр прямокутної форми може бути виражена формулою

$$D \approx e^{-\frac{2}{\hbar} l \sqrt{2m(U_0 - E)}} \quad (10.1)$$

де l - ширина; U_0 - висота бар'єру; E - повна енергія частинки.

Приклад 1. Частинка з енергією $E = 5$ еВ рухається в додатному напрямку осі Ox , зустрічаючи на своєму шляху прямокутний потенціальний бар'єр висотою $U = 10$ еВ і шириною $l = 0,1$ нм. Визначити коефіцієнт прозорості, якщо частинкою є: 1) електрон; 2) протон.

В коефіцієнті прозорості маса частинки входить під квадратним коренем в показнику експоненти.

$$D_1 = \exp\left(-\frac{2l}{\hbar}\sqrt{2m_e(U_0 - E)}\right) = \exp\left(-\frac{2 \cdot 10^{-10}}{1,05 \cdot 10^{-34}}\sqrt{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 5 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}\right) = \exp(-2,3) = 0,1.$$

Оскільки маса протона майже в 2000 разів більше маси електрона, для коефіцієнта прозорості в разі протона виходить мізерно мала величина: $D_2 = \exp\left(-\frac{2l}{\hbar}\sqrt{2m_p(U_0 - E)}\right) =$

$$\exp\left(-\frac{2 \cdot 10^{-10}}{1,05 \cdot 10^{-34}}\sqrt{2 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27} \cdot 5 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}\right) = 1,67 \cdot 10^{-43}.$$

Як бачимо, проникність бар'єру сильно залежить від маси частинки.

Тунельний ефект - специфічно квантовий ефект, пов'язаний з тим, що частинки мають хвильові властивості. Він важливий лише для систем, що мають мікроскопічні розміри і маси. У макроскопічних явищах тунельний ефект не грає ролі.

Прозорість бар'єру сильно залежить від енергії частинки і від ширини та висоти бар'єру. Чим вужче потенціальний бар'єр і чим менше різниця $U_0 - E$, тим більша ймовірність для частинки пройти крізь бар'єр.

Приклад 2. Прямокутний потенціальний бар'єр має ширину $l_1 = 10^{-8}$ см. Різниця між висотою потенціального бар'єру і енергією електрона, який рухається в додатному напрямку осі Ox $U_0 - E = 5$ еВ. Визначити, у скільки разів зміниться коефіцієнт прозорості D потенціального бар'єру для електрона, якщо ширина бар'єру збільшиться: а) в два рази; б) в десять разів.

$$а) \frac{D_1}{D_2} = \frac{\exp\left(-\frac{2l_1}{\hbar}\sqrt{2m_e(U_0 - E)}\right)}{\exp\left(-\frac{2l_2}{\hbar}\sqrt{2m_e(U_0 - E)}\right)} = \exp\left(\frac{2(l_2 - l_1)}{\hbar}\sqrt{2m_e(U_0 - E)}\right) =$$

$$\exp\left(\frac{2 \cdot 10^{-10}}{1,05 \cdot 10^{-34}}\sqrt{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 5 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}\right) \approx \exp(2,3) \approx 10.$$

$$б) \frac{D_1}{D_2} = \exp\left(\frac{2 \cdot 9 \cdot 10^{-10}}{1,05 \cdot 10^{-34}}\sqrt{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 5 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}\right) \approx \exp(20,69) \approx 10^9.$$

Як бачимо, у випадку б) ширина бар'єру збільшилася в десять разів, а ймовірність «просочування» частинки крізь такий бар'єр зменшилася в мільярд разів.

Тунельний ефект має ряд проявів в макроскопічних системах:

- - тунелювання носіїв зарядів крізь потенціальний бар'єр p - n переходу, що знайшло практичне застосування в тунельному напівпровідниковому діоді;
- - утворення подвійного електричного шару в металах і напівпровідниках;

- тунелювання носіїв зарядів крізь тонку оксидну плівку з діелектричними властивостями, яка покриває ряд металів (зокрема, алюмінію) і забезпечує провідність точок механічного з'єднання провідників (скручування проводів, затискачі, джампери в материнських платах комп'ютерів).

Такі явища, як виривання електронів з металу під дією електричного поля (автоелектронна емісія), альфа-розпад, термоядерні реакції і ін., знаходять кількісне пояснення тільки за допомогою теорії тунельного ефекту.

Приклад 3. При α -розпаді з радіоактивних ядер вилітають α -частинки (ядра атома гелію). Відомо, що α -частинка міцно утримується всередині ядра ядерними силами. Поза ядра на α -частинку діють електростатичні сили відштовхування. Потенціальна енергія в залежності від

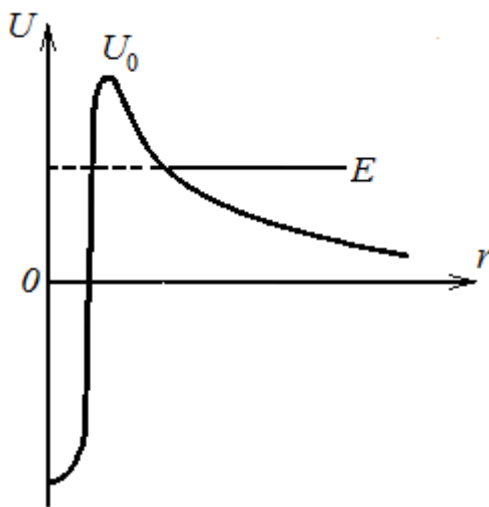


Рис. П.10.1.

відстані до центра ядра має вигляд глибокої потенціальної ями (рис. П.10.1). Зовнішня сторона бар'єру обумовлена кулонівським відштовхуванням α -частинки і ядра. Внутрішня сторона бар'єру обумовлена ядерними силами. Усередині потенціальної ями α -частинка має енергію E , яка набагато менша за висоту бар'єру U_0 . Для ядер важких елементів $E \approx 5$ МеВ, а $U_0 \approx 25$ МеВ. За класичним уявленням за зазначених умов частинка не може подолати потенціальний бар'єр. Незважаючи на значну висоту бар'єру, згідно з квантовою механікою є відмінна від нуля ймовірність проходження частинки крізь бар'єр. Результати, що передбачаються теорією α -розпаду, яка заснована на уявленні про тунельний ефект, добре узгоджуються з даними дослідів.

Приклад 4. На основі тунельного ефекту був створений сканувальний тунельний мікроскоп (СТМ), який справив справжню революцію у фізиці і техніці поверхні і має широкі перспективи в зв'язку з розвитком нанотехнологій.

Тунельний мікроскоп був створений в 1982 р. Він відкрив великі можливості наукових і прикладних досліджень в області нанотехніки і став першим технічним пристроєм, за допомогою якого можна було «побачити» атоми і молекули. За створення СТМ співробітники дослідницького відділу фірми ІВМ Г. Бінніг і Х. Рєрер в 1986 році були удостоєні Нобелівської премії з фізики.

Принцип роботи СТМ полягає в наступному: до поверхні провідного зразка на характерну міжатомну відстань, що становить частинки нанометра, підводиться дуже тонке металеве вістря (голка). Якщо між зразком і голкою прикласти невелику різницю потенціалів в колі з'являється струм, обумовлений тунелюванням електронів крізь зазор між ними. Тунельний струм має величину, яку цілком можна виміряти на експерименті.

Оскільки ймовірність тунелювання через потенціальний бар'єр експоненціально залежить від ширини бар'єру (див. формулу (10.1)), то тунельний струм при збільшенні зазору між голкою і поверхнею зразка зменшується за експонентою і зменшується приблизно на порядок при збільшенні на кожні 0,1 нм. Експоненціальна залежність тунельного струму від відстані забезпечує дуже високу роздільну здатність СТМ. Переміщуючи голку СТМ уздовж поверхні зразка, тобто здійснюючи сканування поверхні, можна отримувати інформацію про рельєф поверхні з атомним просторовим розрізненням і здійснити наочну візуалізацію атомів і молекул

§ 11. Частинка в одновимірній нескінченно глибокій потенціальній ямі. Квантування енергії

Якщо частинка рухається в просторі, де відсутні сили, то її енергія може приймати будь-які значення, тобто енергетичний спектр частинки є безперервним. Якщо ж рух частинки обмежений скінченною областю простору, то згідно з квантовою механікою енергетичний спектр частинки стає дискретним. Покажемо це на простому прикладі.

Нехай частинка, наприклад, електрон рухається вздовж прямої лінії - по осі Ox . Будемо відкладати по осі ординат потенціальну енергію частинки, а по осі абсцис - відстань, від якої залежить значення потенціальної енергії.

Якщо потенціальна енергія різко зростає при $x < 0$ і $x > l$, (наприклад, частинка відскакує від абсолютно відбивальних перешкод), то говорять, що частинка оточена потенціальним бар'єром або знаходиться в потенціальній «ямі». Термін «яма» походить від виду графіка, який зображує залежність потенціальної енергії частинки від координат.

Форму прямокутної ями має, наприклад, потенціальна енергія електрона в металевій пластині. Всередині пластини на електрон діють сили притягання до оточуючих іонів металу і сили відштовхування від оточуючих електронів, які

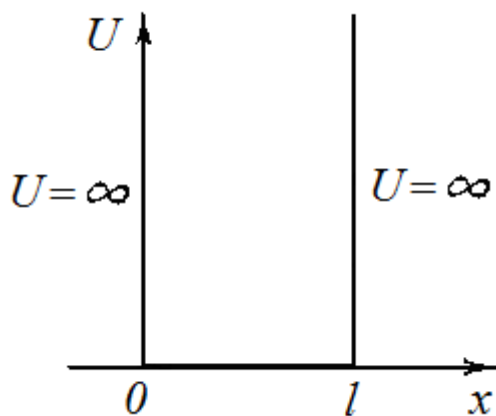


Рис.1 1.1.

спрямовані в різні боки. Рівнодіюча цих сил в середньому дорівнює нулю. Біля границі пластини сили притягання електрона до іонів решітки спрямовані вглиб пластини. Глибина ями визначається енергією, яку необхідно затратити для видалення електрона з металу у вакуум - роботою виходу електрона з металу.

Для простоти розглянемо яму з нескінченно високими стінками, що відповідає металу з нескінченно великою роботою виходу (зрозуміло, в природі такого металу не існує).

Будемо вважати, що між відбиваючими площинами поля немає, тут частинка рухається вільно, а на кінцях ділянки $0 \leq x \leq l$ вона стикається з абсолютно твердими непроникними стінками.

Потенціальна енергія має в цьому випадку такий вигляд (рис 11.1): вона дорівнює нулю при $0 \leq x \leq l$ і обертається в нескінченність за межами ділянки l при $x < 0$ і $x > l$.

За класичними уявленнями в нескінченно глибокій одновимірній потенціальній ямі частинка буде переміщатися з постійною швидкістю від однієї стінки ями до іншої і назад, відскакуючи від стінок. Це рух можливий при будь-якій швидкості, тобто на величину швидкості і кінетичної енергії частинки ніяких обмежень не накладається, зокрема, ця енергія могла б бути нульовою і частинка в цьому випадку перебувала б в спокої. При цьому ймовірність знаходження частинки на її траєкторії скрізь однакова.

Дослідимо тепер поведінку квантової частинки в цих умовах. Оскільки хвильова функція ψ залежить тільки від однієї координати x , рівняння Шредінгера в разі одновимірної ями матиме вигляд:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\psi = 0. \quad (11.1)$$

В область нескінченного потенціалу - за межі потенціальної ями - частинка проникнути не може. Тому ймовірність виявити частинку, а отже і функція ψ , за межами ями дорівнює нулю.

Хвильова функція має бути безперервною - ймовірність знаходження частинки не може змінюватися стрибком від точки до точки. Тоді з умови неперервності слід, що ψ має бути рівною нулю і на межах ями, тобто що

$$\psi(0) = 0, \quad \psi(l) = 0. \quad (11.2)$$

Вирази (11.2) і визначають ті граничні умови, яким мають задовольняти рішення рівняння (11.1).

В області, де ψ не дорівнює тотожно нулю (всередині ями), рівняння (11.1) буде мати вигляд (у цій області $U = 0$):

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}E\psi = 0. \quad (11.3)$$

Ввівши позначення

$$\frac{2m}{\hbar^2}E = \omega^2, \quad (11.4)$$

отримаємо рівняння, відоме з теорії коливань:

$$\psi'' + \omega^2\psi = 0.$$

Рішення такого рівняння має вигляд

$$\psi(x) = A \sin(\omega x + \alpha). \quad (11.5)$$

Тут A і α - поки невідомі постійні. Для їх визначення використаємо спочатку першу граничну умову:

$$\psi(0) = A \sin \alpha = 0.$$

Це може бути або при $A = 0$, або при $\alpha = 0$. Варіант $A = 0$ не підходить, згідно з (11.5) це означало б, що $\psi(x) \equiv 0$, що означає відсутність частинки в ямі (ймовірність виявити частинку всюди дорівнює нулю). Отже, має бути рівною нулю α .

Тепер застосуємо другу з граничних умов:

$$\psi(l) = A \sin \omega l = 0.$$

Як вже було встановлено, $A \neq 0$. Отже, $\sin \omega l = 0$. Це можливо лише при деяких значеннях ω :

$$\omega l = \pm n\pi \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (11.6)$$

Значення $n = 0$ виключаємо, тому що при $n = 0$ хвильова функція звертається в нуль всюди, $\psi = A \sin 0 = 0$. Отже, $|\psi|^2 = 0$, так що частинки ніде немає, що не має

змісту.

З (11.6) випливає, що рішення рівняння (11.3) матимуть фізичний зміст тільки при значеннях енергії E , що задовольняють співвідношенню

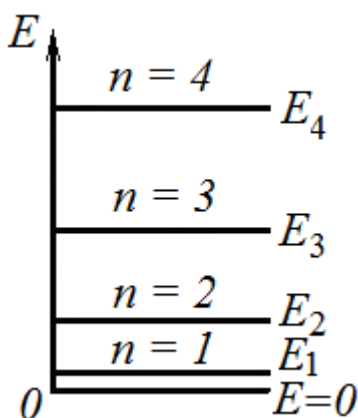


Рис. 11.2.

$$\omega^2 = \frac{2m}{\hbar^2} E_n = \frac{\pi^2}{l^2} n^2,$$

звідки випливає, що енергія E електрона в потенціальному «ящику» не може бути довільною. Вона приймає лише ряд дискретних власних значень E_n

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} n^2 \quad (n=1,2,3,\dots). \quad (11.7)$$

Фізичні величини, які можуть приймати лише певні дискретні значення, називаються *квантованими*. Формула (11.7) свідчить про **квантування енергії частинки в потенціальній ямі**.

Квантовані значення E_n називаються *рівнями енергії*, а числа n , що визначають енергетичні рівні частинки, називаються *квантовими числами*. Таким чином, частинка в потенціальній «ямі» може перебувати тільки на певному енергетичному рівні E_n . Іноді кажуть, що вона знаходиться в певному квантовому стані n .

Приклад 1. Покажемо, як можна інакше отримати умову квантування енергії (11.7). В основу міркувань знову покладемо той факт, що поза ями хвильова функція дорівнює нулю і на границях ями вона також дорівнює нулю.

Оскільки всередині ями $U = 0$, то рішення рівняння Шредінгера є суперпозицією плоских хвиль де Бройля, яка і буде описувати рух електрона в ямі. Так як на границях ями хвильова функція звертається в нуль, в ямі встановлюється синусоїдальна стояча хвиля. Ця хвиля подібна до стоячої хвилі на струні, яка закріплена на кінцях та коливається. Всередині ями на відріжку

довжиною l має укладатися ціле число півхвиль: $\frac{\lambda}{2} n = l$, де $n = 1, 2, 3, \dots$ - цілі числа. Звідси

$\lambda = \frac{2l}{n}$. Довжина хвилі де Бройля $\lambda = \frac{2\pi\hbar}{p}$. Тоді енергія електрона в потенціальній ямі

$$E = \frac{p^2}{2m} = \frac{\pi^2 \hbar^2 n^2}{2ml^2}.$$

На рис. 11.2 зображена схема енергетичних рівнів. З рисунка видно, що спектр дискретний і обмежений знизу. З формули (11.7) випливає, що *найменше значення енергії частинки при $n = 1$ не дорівнює нулю*. Це означає неможливість зупинки частинки, вона ніколи не припиняє свого руху.

У частинки, що рухається в потенціальній ямі за законами класичної механіки, енергія могла б приймати будь-які значення в залежності від наданого їй початкового імпульсу, зокрема енергія могла б бути нульовою і частинка в цьому випадку зупинилася би.

Різниця енергій двох сусідніх рівнів дорівнює

$$\Delta E_n = E_{n+1} - E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} (2n+1) \approx \frac{\pi^2 \hbar^2}{ml^2} n. \quad (11.8)$$

З формули (11.8) випливає, що різниця енергій істотно залежить від ширини ями l . Якщо l велике, то сусідні значення енергії в цьому спектрі будуть розміщені дуже близько одне від одного.

Приклад 2. Оцінимо відстань між сусідніми рівнями для різних значень маси частинки m і ширини ями l . Нехай газоподібний азот за кімнатної температури $T = 300$ К міститься в колбі діаметром $l = 10$ см. Маса молекули азоту

$$m = \frac{M}{N_A} = \frac{28 \cdot 10^{-3}}{6,02 \cdot 10^{23}} \approx 4,7 \cdot 10^{-26} \text{ кг}.$$

Оцінимо різницю енергії сусідніх рівнів молекули азоту. Згідно з (11.8)

$$\Delta E_n = \frac{3,14^2 \cdot 1,05^2 \cdot 10^{-68}}{4,7 \cdot 10^{-26} \cdot 0,1^2} n = 2,31 \cdot 10^{-40} n (\text{Дж}) = 1,44 \cdot 10^{-21} n (\text{eВ}).$$

Відстань між сусідніми рівнями мізерно мала.

Порівняємо отриманий результат з кінетичною енергією поступального руху молекул азоту

$$E = \frac{3}{2} kT = \frac{3}{2} \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300 = 6,21 \cdot 10^{-21} (\text{Дж})$$

Така енергія відповідає квантовим числам

$$n = \frac{l}{\pi \hbar} \sqrt{3kTm} \approx 7 \cdot 10^9.$$

Відстань між рівнями енергії ΔE_n настільки мала, а номер рівня настільки великий, що в цьому випадку спектр можна вважати практично безперервним, квантової дискретності можна впевнено знехтувати і користуватися класичними формулами.

Аналогічний результат виходить, якщо розглянути вільний електрон в металевому зразку такого ж, як діаметр колби в попередньому прикладі, розміру $l = 10$ см.

Вільні електрони в металі знаходяться в потенціальної ямі. Якщо вважати яму нескінченно глибокою, то розрахунок дає таке значення відстані між рівнями енергії

$$\Delta E_n \approx 10^{-35} n (\text{Дж}) = 6 \cdot 10^{-17} \text{ eВ}.$$

Енергетичні рівні розміщені так тісно, що спектр енергій електронів є практично безперервним.

Однак зовсім інший результат виходить для електрона, якщо область, в межах якої він рухається, буде порядку атомних розмірів ($\sim 10^{-10}$ м). В цьому випадку підстановка в формулу (11.8) числових значень дає

$$\Delta E_n \approx 10^{-17} n (\text{Дж}) = 60n (\text{eВ}).$$

При енергії електрона в атомі порядку десятка електронвольт дискретність енергетичних рівнів добре помітна.

Підставляючи дозволені значення кругової частоти (11.6) в вираз для хвильової функції, знайдемо

$$\psi_n(x) = A \sin \frac{\pi n x}{l}.$$

Значення коефіцієнта A визначимо з умови нормування функції $\psi(x)$. Імовірність того, що електрон знаходиться де-небудь в проміжку від 0 до l , тобто ймовірність достовірної події, дорівнює одиниці:

$$A^2 \int_0^l \sin^2 \frac{\pi n x}{l} dx = 1.$$

Використовуючи співвідношення $\sin^2 \alpha = (1 - \cos 2\alpha)/2$, обчислимо інтеграл і знайдемо, що $A = \sqrt{\frac{2}{l}}$.

Отже, хвильові функції частинки в одновимірній потенціальній ямі з нескінченно високими стінками мають вигляд

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi n x}{l}, \quad 0 < x < l, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (11.9)$$

На рис. 11.3, а зображені графіки функцій $\psi_n(x)$ при $n = 1, 2, 3, 4$.

При $n = 1$ (основний стан) в ямі укладається одна півхвиля, при $n = 2$ - ціла хвиля, при $n = 3$ - півтори хвилі і т.д.

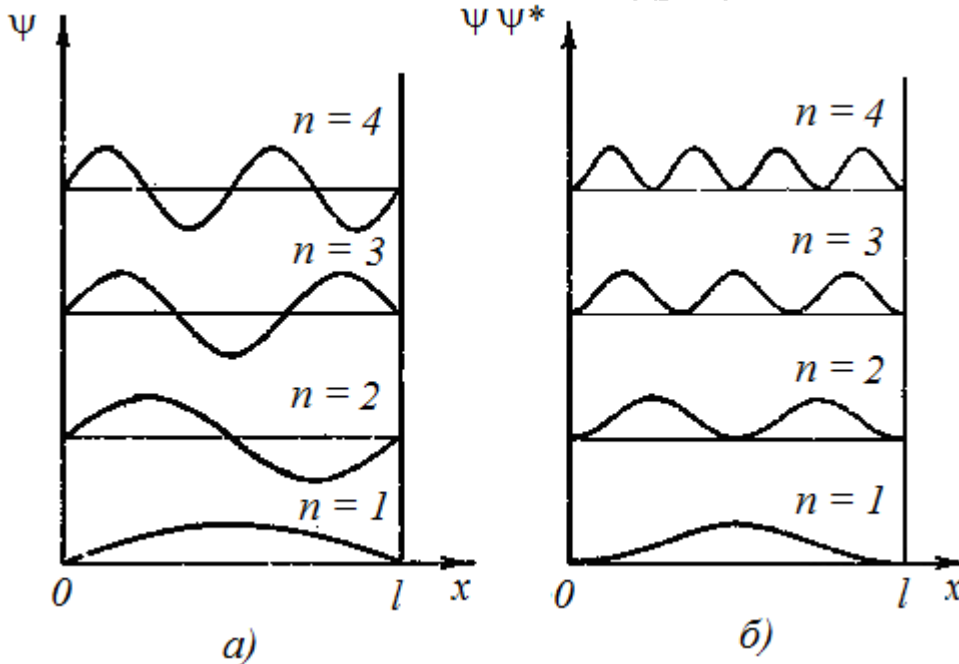


Рис. 11.3.

На рис. 11.3, б приведена густина ймовірності виявлення частинки на різних відстанях від стінок ями, що дорівнює $\psi\psi^*$.

Наприклад, в квантовому стані з $n = 2$ частинка однаково часто буває в лівій і правій половині ями, але при цьому ніколи не проходить через її середину. Така поведінка квантової частинки несумісна з уявленням про траєкторії.

З формул (11.7) і (11.8) видно, що при збільшенні квантового числа n , величина ΔE_n стає малою в порівнянні з E_n , тобто відбувається відносно зближення енергетичних рівнів.

Якщо число n дуже велике, можна говорити про практично безперервну послідовність рівнів і характерна особливість квантових процесів - дискретність - згладжується.

При великих квантових числах n квантування енергії дає результати, близькі до результатів класичного розгляду. У цьому знаходить своє вираження **принцип відповідності**, сформульований Н. Бором: *при великих квантових числах висновки і результати квантової механіки мають співвідноситись з класичними результатами.*

Як уже зазначалося, отримані рішення рівняння Шредінгера можна із застереженнями застосовувати до реальних рухів квантової частинки - наприклад, для опису руху електронів в металі. Досить грубим наближенням можна вважати задачу про рух електрона в атомі.

Як уже зазначалося, отримані рішення рівняння Шредінгера можна із застереженнями застосовувати до реальних рухів квантової частинки - наприклад, для опису руху електронів в металі. Досить грубим наближенням можна вважати задачу про рух електрона в атомі.

Приклад 1. Електрон в одновимірній прямокутній нескінченно глибокій ямі шириною $l = 200$ пм перебуває в збудженому стані ($n = 4$). Визначити: 1) мінімальну енергію електрона; 2) ймовірність перебування електрона в першій чверті ями.

Якщо мікрочастинка перебуває в одновимірній прямокутній потенційній ямі з нескінченно високими стінками, то її енергія не може бути довільною, а набуває лише певних дискретних значень (квантується). Квантовані значення енергії або рівні енергії визначаються формулою (11.7):

$$E_n = n^2 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} (n = 1, 2, 3, \dots),$$

де $m = 9,11 \cdot 10^{-31}$ кг – маса електрона, $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34}$ Дж·с – стала Планка. Число n (квантове число) визначає енергетичний рівень електрона. Мінімальну енергію електрон має в основному стані, для якого $n = 1$:

$$E_{min} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2}. \quad (П.11.1)$$

Обчислення дають

$$E_{min} = 1,5 \cdot 10^{-18} \text{ Дж} = 9,37 \text{ еВ}.$$

Імовірність знаходження електрона в інтервалі $x_1 < x < x_2$ дорівнює інтегралу від квадрата модуля хвильової функції

$$W = \int_{x_1}^{x_2} |\psi_n(x)|^2 dx, \quad (П.11.2)$$

де $\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi n}{l} x (n = 1, 2, 3, \dots)$ – нормована власна хвильова функція, яка відповідає даному стану. Збудженому стану $n = 4$ відповідає хвильова функція

$$\psi_4(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{4\pi}{l} x. \quad (П.11.3)$$

Згідно з умовою задачі межі інтегрування $x_1 = 0$ і $x_2 = l/4$. Тому, підставивши (П.11.3) в (П.11.2), отримаємо

$$W = \frac{2}{l} \int_0^{l/4} \sin^2 \frac{4\pi}{l} x dx.$$

Замінюючи $\sin^2(4\pi x/l) = \frac{1}{2}(1 - \cos 8\pi x/l)$, запишемо

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{l} \left(\int_0^{l/4} dx - \int_0^{l/4} \cos(8\pi x/l) dx \right) = \\ &= \frac{1}{l} \left(\frac{l}{4} - \frac{l}{8\pi} \sin\left(\frac{8\pi}{l} x\right) \Big|_0^{l/4} \right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{8\pi} (\sin 2\pi - \sin 0) = 0,25. \end{aligned}$$

Приклад 2. Хвильова функція основного стану електрона в атомі водню має вигляд

$$\psi(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_B^3}} e^{-r/a_B}. \text{ Тут } a_B = 52,9 \text{ пм} - \text{ так званий борівський радіус. Визначити ймовірність}$$

знаходження електрона всередині сферичного шару між сферами з радіусами a_B і $2 a_B$.

Імовірність перебування електрона в елементарному об'ємі dV визначається квадратом модуля хвильової функції

$$dW_r = |\psi(r)|^2 dV.$$

У центральній-симетричному полі основного стану атома водню хвильова функція електрона залежить тільки від відстані r між електроном і ядром. Тому елемент об'єму dV , являє со-

бою об'єм сферичного шару радіусом r і товщиною dr . Об'єм такого шару дорівнює $4\pi r^2 dr$ (площа поверхні, помножена на товщину). Тоді

$$dW_r = 4\pi r^2 |\psi(r)|^2 dr = \frac{4r^2}{a_B^3} e^{-2r/a_B} dr. \quad (\text{П.11.4})$$

Ймовірність виявити електрон в скінченному об'ємі

$$W = \int_V |\psi|^2 dV.$$

Спочатку визначимо ймовірність $W(R)$ перебування електрона всередині сфери довільного радіуса R , для чого інтегруємо ймовірність від 0 до R :

$$W(R) = 4\pi \int_0^R r^2 |\psi(r)|^2 dr = \frac{4}{a_B^3} \int_0^R r^2 e^{-2r/a_B} dr. \quad (\text{П.11.5})$$

Інтегрування можна виконати за частинами. В результаті досить громіздкого інтегрування отримаємо

$$W(R) = 1 - e^{-\frac{2R}{a_B}} \left(1 + 2\frac{R}{a_B} + 2\left(\frac{R}{a_B}\right)^2 \right). \quad (\text{П.11.6})$$

Тепер по черзі покладемо $R = a_B$ і $R = 2a_B$ та визначимо ймовірність виявити електрон всередині кожної з цих сфер:

$$W_1 = W(a_B) = 1 - 5/e^2 = 0,323,$$

$$W_2 = W(2a_B) = 1 - 13/e^4 = 0,762.$$

Тоді шукана ймовірність знайти електрон між цим двома сферами

$$W_2 - W_1 = 0,439.$$

§ 12. Гармонічний осцилятор

Гармонічний осцилятор в класичній механіці. Гармонічним осцилятором називають частинку, що здійснює одновимірний рух навколо положення рівноваги під дією сили, що повертає, яка прямо пропорційна (зі знаком мінус) зміщенню частинки від положення рівноваги – квазіпружної сили

$$F_x = -kx,$$

де $x(t)$ - відхилення від положення рівноваги, k - постійний коефіцієнт (в разі вантажу на пружині k - жорсткість пружини).

Відомими прикладами гармонічних осциляторів є незгасаючі математичний і фізичний маятники, вантаж на пружині, струм і напруга в ідеальному коливальному контурі, змінне електромагнітне поле.

Потенціальна енергія гармонічних коливань частинки описується виразом

$$U = \frac{kx^2}{2}. \quad (12.1)$$

Вона являє собою перший член розкладу в ряд за степенями x потенціальної енергії $U(x)$ при малих x . Коливання гармонічного осцилятора здійснюються з певною власною частотою, яка дорівнює $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, де m - маса частинки (див., наприклад, [11] §4). Виразивши у формулі (12.1) k через m і ω , отримаємо

$$U = \frac{m\omega^2 x^2}{2}. \quad (12.2)$$

На рис. 12.1 залежність (12.2) зображена графічно. Крива потенціальної енергії зображує потенціальну яму. Таким чином, задача про гармонічний осцилятор зводиться до задачі про рух частинки в параболічній потенціальній ямі.

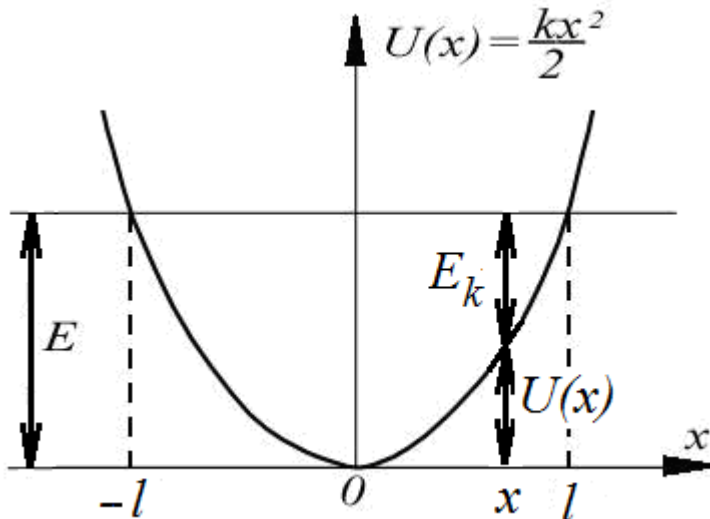


Рис. 12.1.

Якщо повну механічну енергію осцилятора, що дорівнює сумі кінетичної E_k і потенціальної $U(x)$ енергій, позначити через E , а точки повороту $-l$ і l , то в них повна енергія частинки дорівнює потенціальній $E = U(x)$. Частинка здійснює коливальний рух між стінками потенціальної ями, всередині відрізка $[-l, l]$. Повна енергія E залишається постійною, оскільки сили, що діють

на частинку, є консервативними. Повна механічна енергія E може приймати будь-які додатні значення, в тому числі і нуль, спектр її допустимих значень безперервний.

Гармонічний осцилятор у квантовій механіці є квантовий аналог простого гармонічного осцилятора. Коливання гармонічного осцилятора в мікросвіті є основною моделлю руху частинок в атомах, атомних ядрах, молекулах, твердих тілах. Наприклад, атоми в молекулі займають один відносно одного положення стійкої рівноваги. Якщо їх вивести з цього положення, то вони почнуть здійснювати гармонічні коливання.

Як і в розглянутому в § 11 випадку електрона в потенціальній ямі, рух квантового осцилятора є просторово обмеженим, при всіх енергіях мікрочастинка «замкнена» всередині ями, тому спектр її енергії дискретний.

Покажемо, як цей висновок впливає з рішення рівняння Шредінгера.

В одновимірному випадку оператор Лапласа $\Delta\psi = \frac{d^2\psi}{dx^2}$. Потенціальна енергія (12.2) має входити в рівняння Шредінгера. Тому рівняння Шредінгера для осцилятора записується у вигляді

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E - \frac{m\omega^2 x^2}{2} \right) \psi = 0, \quad (12.3)$$

де E -повна енергія осцилятора. Це так зване хвильове рівняння і спосіб його вирішення добре відомий в математиці, однак він виходить за рамки даного посібника. Тому ми зробимо інакше (див. [7]).

Застосуємо один із способів розв'язання диференціальних рівнянь - «вгадування» рішення, а потім перевірка, чи є воно виправдане. Запишемо шукану хвильову функцію у вигляді функції Гаусса

$$\psi(x) = e^{-ax^2}, \quad (12,4)$$

де a - поки невідома постійна. Щоб переконатися, чи є ця функція рішенням рівняння (12.3), знаходимо другу похідну ψ по x

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -2ae^{-ax^2} + 4a^2x^2e^{-ax^2}$$

і підставляємо в (12.3):

$$(-2a + 4a^2x^2)e^{-ax^2} = -\frac{2m}{\hbar^2}\left(E - \frac{m\omega^2x^2}{2}\right)e^{-ax^2}. \quad (12,5)$$

Після скорочення на e^{-ax^2} одержимо

$$-2a + 4a^2x^2 = -\frac{2mE}{\hbar^2} + \frac{m^2\omega^2}{\hbar^2}x^2.$$

Прирівняємо коефіцієнти при x^2 . тоді

$$4a^2 = \frac{m^2\omega^2}{\hbar^2}.$$

Звідки знаходиться невідома постійна a :

$$a = \frac{m\omega}{2\hbar}. \quad (12,6)$$

Прирівнюючи вільні члени рівняння по обидві сторони рівності (12.5), одержимо

$$-2a = -\frac{2mE}{\hbar^2}.$$

Звідси, підставляючи значення a з (12.6), маємо

$$E = \frac{\hbar^2 a}{m} = \frac{\hbar\omega}{2}. \quad (12,7)$$

Отримуємо, що обрана нами функція $\psi = e^{-ax^2}$ є рішенням тільки за умови

$$E = \frac{\hbar\omega}{2}.$$

Тоді вид цієї функції

$$\psi_1(x) = e^{-(m\omega/2\hbar)x^2}. \quad (12,8)$$

Аналогічно переконуємося, що рішенням наступного порядку рівняння (12.3) буде функція

$$\psi_2(x) = xe^{-(m\omega/2\hbar)x^2}, \quad (12,9)$$

за умови, що

$$E = \frac{3}{2} \hbar \omega. \quad (12.10)$$

Наступні більш високі рівні енергії осцилятора розташовані на однаковій відстані з інтервалом $\hbar\omega$. Формула для енергії n -го рівня

$$E_n = (n + \frac{1}{2}) \hbar \omega \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots) . \quad (12.11)$$

На рис. 12.1 наведений графік потенціальної енергії частинки $U(x)$ (парабола), дозволені рівні енергії для $n = 0, 1, 2$ і відповідний розподіл густини ймовірності $\psi\psi^* = |\psi|^2$.

Рух частинки в параболічній ямі багато в чому нагадує її рух в прямокутній ямі з нескінченно високими стінками (див. § 11). Енергія також приймає дискретні значення і, як і раніше, кожному значенню енергії E_n відповідає стояча хвиля ψ_n . Але тепер хвильові функції не мають синусоїдальної форми і не перетворюються в нуль на границях ями.

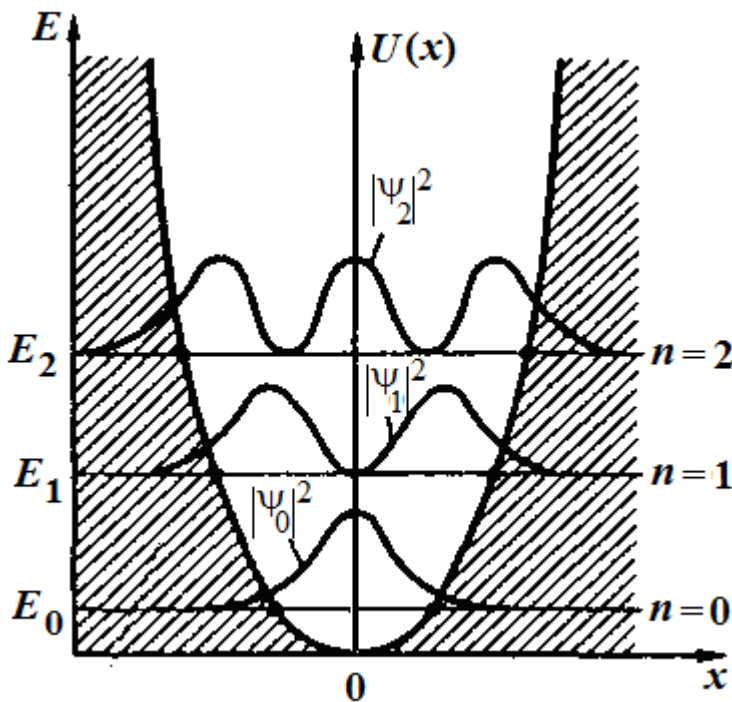


Рис. 12.2

Рівні енергії гармонічного осцилятора на відміну від випадку прямокутної потенціальної ями розміщені на однаковій енергетичній відстані $\Delta E = \hbar\omega$ один від одного (рис. 12.2).

Найменше можливе значення енергії квантового осцилятора $E_0 = \frac{1}{2} \hbar \omega$, як і для електрона в нескінченно глибокій прямокутній ямі, не дорівнює нулю. Це значення називається *нульовою енергією*.

Наявність нульової енергії обумовлена квантовими особливостями системи і пов'язана із співвідношенням невизначеностей. Якби енергія частинки дорівнювала нулю ($E = 0$ на дні ями),

то частинка перебувала б у стані рівноваги, і її імпульс і координата мали б одночасно певні значення ($x = 0, p_x = 0$). Невизначеності як координати, так і імпульсу при цьому були б нульовими ($\Delta x = \Delta p_x = 0$), що суперечить вимозі співвідношення невизначеностей. Отже, квантовий осцилятор, на відміну від класичного, не може залишатися в спокої.

Існування *нульової енергії* підтверджується експериментами по вивченню розсіювання світла кристалами при низьких температурах. Відповідно до класичної механіки найменша енергія осцилятора дорівнює нулю. На цій підставі вважалося, що за температури абсолютного нуля частинки в кристалічних решітках стануть нерухомими - «замерзнуть».

За сучасними уявленнями нульова енергія обумовлена так званими *нульовими коливаннями* частинок кристалічної решітки, однак ці коливання не є тепловими. Таким чином, і при абсолютному нулі коливання атомів в кристалічній решітці не припиняються.

Обчислення показують, що для гармонічного осцилятора можливі лише квантові переходи між сусідніми рівнями. При таких переходах квантове число n змінюється на одиницю:

$$\Delta n = \pm 1. \quad (12.12)$$

Ця умова називається *правилом відбору* (квантових чисел).

Через малість \hbar мінімальна енергія *макроскопічних осциляторів*, таких, як вантаж на пружині або маятник, занадто мала. При частотах коливання в десятки герц ця енергія становить близько 10^{-32} Дж і виявити її практично неможливо. На такі ж малі значення відрізняються один від одного сусідні рівні енергії класичного осцилятора. Тому енергію класичного осцилятора можна вважати безперервною і рівною нулю в положенні рівноваги.

Приклад 1. Пружинний маятник являє собою точкове тіло масою $m = 250$ г, прикріплене до пружини жорсткістю $k = 9,87$ Н/м. Амплітуда коливань $A = 1$ см. Вважаючи такий маятник гармонічним осцилятором, визначити енергію нульових коливань для нього. Якому збудженому енергетичному рівню n в квантовому розгляді відповідають ці коливання? Чи має сенс розглядати ці коливання з точки зору квантової механіки?

Визначимо частоту коливань $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{9,87}{0,25}} = 6,28(\text{с}^{-1})$

і повну механічну енергію маятника

$$E = \frac{kA^2}{2} = \frac{9,87 \cdot (0,01)^2}{2} = 4,94 \cdot 10^{-4} (\text{Дж}).$$

Енергія нульових коливань

$$E_0 = \frac{\hbar\omega}{2} = \frac{1,05 \cdot 10^{-34} \cdot 6,28}{2} \approx 3,3 \cdot 10^{-34} (\text{Дж})$$

в порівнянні з повною енергією маятника настільки мала, що її можна не враховувати, поклавши рівною нулю, що відповідає класичному гармонічному осцилятору. Про це свідчить і фантастично великий номер енергетичного рівня, який визначається з формули (12.11):

$$n = \frac{m\omega A^2}{2\hbar} - \frac{1}{2} \approx \frac{0,25 \cdot 6,28 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 1,05 \cdot 10^{-34}} = 7,5 \cdot 10^{29},$$

який підтверджує висновок про те, що в даному прикладі застосування квантової механіки не має сенсу. За великих квантових чисел n квантування енергії дає результати, близькі до результатів класичного розгляду.

Приклад 2. Вважаючи математичний маятник масою $m = 100$ г і довжиною $l = 0,5$ м гармонічним осцилятором, визначити амплітуду коливань A , відповідну енергії нульових коливань цього маятника.

Повна енергія гармонічного осцилятора $E = \frac{m\omega^2 A^2}{2}$, де в разі математичного маятника

$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$. Енергія нульових коливань $E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}$. Прирівнявши обидва вирази для енергії, знайдемо

$$A = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} = \sqrt{\frac{\hbar}{m} \sqrt{\frac{l}{g}}} = \sqrt{\frac{1,05 \cdot 10^{-34}}{0,1} \sqrt{\frac{0,5}{9,81}}} = 1,54 \cdot 10^{-17} \text{ (м)}.$$

Отримане значення амплітуди є настільки малим, що приходимо до висновку: нульові коливання осцилятора мають чисто квантову природу і не мають класичного аналога.

Контрольні питання

1. До яких висновків приводить рішення рівняння Шредінгера для мікрочастинки в «потенціальній ямі»?
2. Яка найменша енергія частинки в «потенціальній ямі» з нескінченно високими стінками?
3. Чому дорівнює різниця енергій між четвертим і другим енергетичними рівнями квантового осцилятора?
4. У чому відмінність поведінки класичної та квантової частинок з енергією $E < U$ при їх русі до прямокутного потенціального бар'єру кінцевої ширини?
5. Чому ми не помічаємо квантування енергії коливань звичайного вантажу на пружині?
6. Що таке нульові коливання квантового осцилятора?
7. Що таке ефект тунелювання? Чому він не спостерігається в повсякденному житті?
8. Якими властивостями мікрочастинок обумовлений тунельний ефект?

Глава 4. ЕЛЕМЕНТИ АТОМНОЇ ФІЗИКИ

§ 13. Теорія атома водню Н. Бора

Постулати Бора і їх експериментальне підтвердження. У 1911 р на підставі дослідів з розсіювання альфа частинок металевої фольгою Е. Резерфорд запропонував планетарну модель атома: в центрі атома знаходиться важке позитивно заряджене ядро атома дуже малих розмірів ($\sim 10^{-15}$ м), що містить більшу частину маси атома, навколо якого на замкнутих орбітах радіусом приблизно 10^{-10} м обертаються легкі електрони, причому кількість їх дорівнює порядковому номеру елемента.

Назва "планетарна" такої моделі атома відображає аналогію між атомом і Сонячною системою, в якій планети рухаються по деяким певним орбітам навколо масивного центра, що притягує - Сонця.

Однак з точки зору класичної фізики така модель атома була не в змозі пояснити закономірності в лінійчатих спектрах атомів і навіть самого факту усталеності атома.

Відповідно до законів класичної електродинаміки електрон, що обертається навколо ядра, буде випромінювати електромагнітні хвилі, як і будь-яка заряджена частинка, яка рухається прискорено. Частота цих хвиль при рівномірному обертанні електрона по колу повинна дорівнювати частоті обертання.

Але внаслідок безперервного випромінювання енергія електрона має поступово зменшуватися, а тому і має зменшуватися відстань електрона від ядра. Таким чином, випромінювання електрона давало б суцільний спектр, а електрон дуже швидко впав би на ядро. Обидва цих слідства класичної теорії суперечать дійсності.

У 1913 р датський фізик Н. Бор показав, що "врятувати" планетарну модель атома можна, вводячи в теорію атома ідеї квантування і виділяючи при цьому деякі орбіти, дозволені для руху електрона.

Бор сформулював такі два постулати:

1. *Електрон в атомі може рухатися тільки по певним стаціонарним орбітам, кожній з яких можна приписати певний номер $n = 1, 2, 3, \dots$. Електрон, що рухається на стаціонарній замкнутій орбіті, всупереч законам класичної електродинаміки, не випромінює.*

Дозволеними стаціонарними орбітами є лише ті, для яких момент імпульсу електрона дорівнює цілому кратному значенню сталої Планка \hbar .

$$mvr = n\hbar, \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (13.1)$$

де mvr - момент імпульсу електрона на орбіті, n - номер відповідної орбіти, $\hbar = h/2\pi$ - стала Планка. Формулу (13.1) називають *правилом квантування орбіт*.

2. *Випромінювання або поглинання кванта випромінювання відбувається при переході атома з одного стаціонарного стану в інший (рис. 13.1). При цьому*

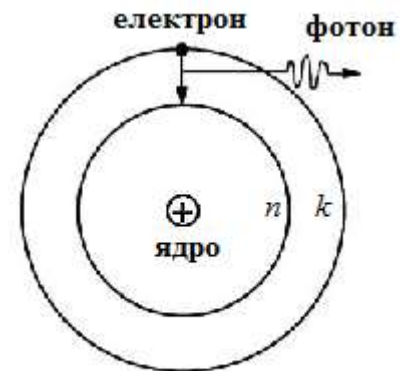


Рис. 13.1.

енергія $h\nu$ фотона, який випромінюється, дорівнює різниці енергій атома в двох стаціонарних станах:

$$h\nu_{nk} = E_k - E_n, \quad (k > n). \quad (13.2)$$

Можливий і зворотний процес, в якому атом переходить з квантового стану з меншою енергією в стан з більшою енергією. При цьому відбувається поглинання фотона з енергією, що дорівнює різниці енергій цих квантових станів. Інакше кажучи, атом випромінює або поглинає квант електромагнітної енергії внаслідок перескакування електрона з однієї стаціонарної орбіти на іншу.

Другий постулат Бора називають умовою частот, оскільки він визначає частоти випромінюваних або поглинутих фотонів.

Приклад 1. Показати, як з гіпотези де Бройля про наявність у електрона хвильових властивостей впливає умова квантування моменту імпульсу електрона в теорії Н. Бора атома водню.

У теорії Бора електрон рухається навколо ядра на круговій орбіті, тому момент імпульсу запишеться так: $L = pr$. Постулат Бора: стаціонарними орбітами є лише ті, для яких момент імпульсу L електрона дорівнює цілому кратному величині сталої Планка \hbar :

$$pr = n\hbar.$$

Перепишемо цей вираз як

$$2\pi r = n \frac{2\pi\hbar}{p}.$$

Довжина хвилі де Бройля електрона дорівнює

$$\lambda_B = \frac{h}{p} = \frac{2\pi\hbar}{p}.$$

Тоді перший постулат Бора (умова квантування) переписеться так:

$$2\pi r = n\lambda_B, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Це співвідношення стверджує, що стаціонарними є лише такі орбіти, на довжині яких укладається ціле число довжин хвиль де Бройля для електрона, який рухається на орбіті.

Постулати Бора були підтверджені експериментально. Одним з перших дослідів, які показали, що внутрішня енергія атома не може змінюватися безперервно, а приймає тільки певні дискретні значення, є експеримент, виконаний в 1913 р Дж.Франком і Г.Герцем. Основним елементом експериментальної установки (рис. 13.2, а) була трьохелектродна лампа, заповнена газом, наприклад, парами ртуті під тиском 1 мм рт. ст (≈ 130 Па).

Електрони, що вилітають з розжареного катода K за рахунок термоелектронної емісії, прискорювалися різницею потенціалів U , прикладеної між катодом і сіткою C , величина якої змінювалася за допомогою потенціометра і вимірювалася вольтметром V . Сітка C мала позитивний потенціал відносно катода K і грала роль прискорювального електрода.

Між сіткою C і анодом A прикладалася невелика гальмівна напруга ($\approx 0,5$ В), тому електрони, що пройшли крізь сітку з малими швидкостями, відкидалися назад.

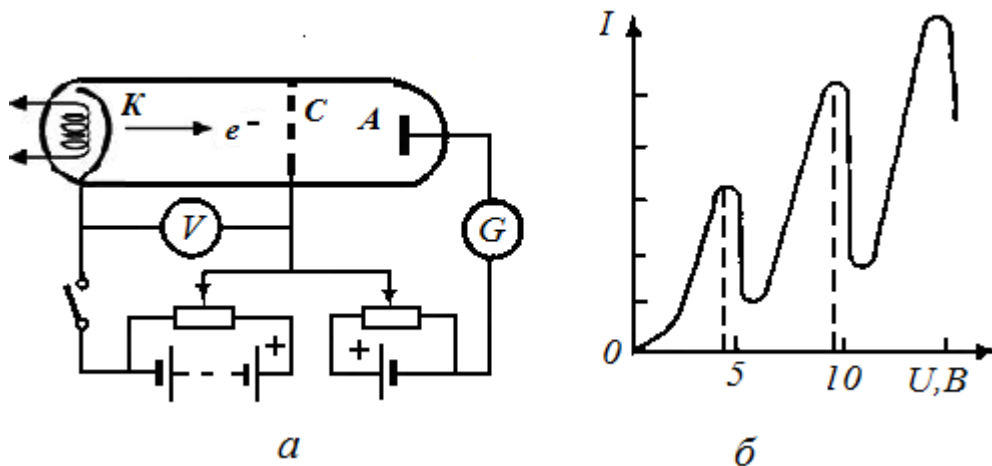


Рис. 13.2.

Частина електронів, що пролітають крізь сітку і здатних подолати гальмівне поле, потрапляла на анод, обумовлюючи струм I , який вимірювався гальванометром G .

Під час експерименту досліджувалась залежність сили струму I від прискорювальної напруги U між катодом і сіткою.

Рухаючись від катода до сітки, електрони зіштовхуються з атомами ртуті, які перебувають в основному енергетичному стані. Якщо енергія атома ртуті може приймати тільки певні дискретні значення, то характер зіткнень електрона із атомом буде залежати від значення кінетичної енергії електрона $\frac{mv^2}{2} = eU$.

Якщо електрон при зіткненні з атомом не зможе передати йому енергію, достатню для переведення атома на наступний енергетичний рівень, то зіткнення електрона з атомом в цьому випадку буде *пружним*.

Такі електрони будуть рухатися в газовому проміжку між катодом і сіткою практично без втрат енергії і, пролетівши сітку лампи, легко подолають слабе гальмівне поле між сіткою і анодом і забезпечать проходження струму в колі анода. Струм в колі анода з підвищенням напруги буде монотонно зростати.

Коли ж енергія електронів досягне значення 4,9 еВ, зіткнення їх з атомами ртуті набудуть характеру непружного удару. Певна частина енергії електрона буде передаватися атому на його збудження.

Атоми будуть переходити в інший стаціонарний стан, що характеризується більшою енергією. Це проявиться по раптовому спаду струму через гальванометр (рис. 13.2, б). Після таких непружних зіткнень енергетично "ослаблені" електрони вже не можуть подолати гальмівне поле і потрапити на анод. Отже, сила анодного струму повинна буде різко зменшитися.

Під час експерименту Франка і Герца сила струму, досягнувши мінімуму, знову починала зростати. Максимуми сили струму повторювалися при кратних 4,9 В значеннях U , рівних 9,8 В, 14,7 В і т.д.

При цих напругах електрони на шляху між катодом і сіткою зазнавали два або більше непружних зіткнень з атомами, віддаючи кожен раз по 4,9 еВ атому.

При цьому було встановлено також, що за прискорювальної напруги 4,9 В атоми ртуті починали випромінювати світло з довжиною хвилі $\lambda_1 = 253,7$ нм. Квант енергії такого світла дорівнює енергії, яку електрон передав атому ($h\nu_1 = hc/\lambda_1 = 4,9$ еВ).

Таким чином, було доведено, що атом або зовсім не поглинає енергію або поглинає її тільки в кількостях, рівних різниці енергій двох стаціонарних станів.

Зокрема, з представленого на рис. 13.2, б графіка слід, що перший збуджений стан атома ртуті відокремлений від основного стану енергетичним проміжком в 4,9 еВ.

Цим дослідом були підтверджені постулати Бора про існування стаціонарних енергетичних станів атомів і характер випромінювання і поглинання атомами енергії.

Спектральні закономірності. Як показує дослід, спектр атомарного водню, світіння якого збуджується в розрядній трубці за низького тиску, є лінійчастим і складається з серій - послідовностей спектральних ліній, що згущаються до деякої граничної довжини хвилі (рис. 13.3).



Рис. 13.3.

На рис. 13.3 показані три перші серії ліній. Серія Бальмера лежить у видимому діапазоні світла. Частоти ν і довжини хвиль λ випромінювання в дискретному лінійчастому спектрі атома водню описуються емпіричною формулою Бальмера - Рідберга

$$\nu = R_c \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2} \right), \quad \frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2} \right), \quad (13.3)$$

де n і $k > n$ - цілі числа, $R_c = 3,2898419 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$ і $R = 1,0973731 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$ - сталі Рідберга.

Цілі числа n і k називаються *головними квантовими числами*, причому $k = n + 1, n + 2, n + 3$ і т.д. Група ліній з однаковим n називається *серією*. Серії ліній водневого спектра такі: $n = 1$ - серія Лаймана, $n = 2$ - серія Бальмера, $n = 3$ - серія Пашена, $n = 4$ - серія Бреккета і т.д.

Приклад 2. Атом водню знаходиться у збудженому стані, який характеризується головним квантовим числом $n = 3$. Визначити довжини хвиль, що відповідають можливим переходам атома з випромінюванням фотонів. Які з цих хвиль лежать у видимому діапазоні?

Згідно з узагальненою формулою Бальмера-Рідберга

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right),$$

де $R = 10973731 \text{ м}^{-1}$ - стала Рідберга, m визначає номер рівня, на який відбувається перехід, а n - з якого здійснюється перехід. Тоді (див. рис. П. 13.1)

$$\frac{1}{\lambda_1} = R \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right), \quad \lambda_1 = \frac{4}{3} \frac{1}{R} = 1,21 \cdot 10^{-7} \text{ м.}$$

$$\frac{1}{\lambda_2} = R \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2} \right), \quad \lambda_2 = \frac{9}{8} \frac{1}{R} = 1,02 \cdot 10^{-7} \text{ м.}$$

$$\frac{1}{\lambda_3} = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right), \quad \lambda_3 = \frac{36}{5} \frac{1}{R} = 6,54 \cdot 10^{-7} \text{ м.}$$

Діапазон видимого світла має приблизні межі $(3,8 \div 7,8) \cdot 10^{-7} \text{ м}$. Отже, в видимому діапазоні лежить тільки λ_3 .

Застосування постулатів Бора дало можливість пояснити закономірності в спектрі випромінювання атома водню і розрахувати кругові електронні орбіти.

Теорія атома водню Н.Бора. Атом водню складається з позитивно зарядженого ядра і одного електрона (рис. 13.1), між якими діє сила електричного притягування.

Електрон обертається навколо ядра. За правилами квантування Н.Бора електрон в атомі може рухатися тільки на таких орбітах, для яких момент імпульсу електрона кратний $h/2\pi$, тобто виконується співвідношення (13.1):

$$mvr = n \frac{h}{2\pi}.$$

У рівнянні (13.1) дві невідомі величини - r і v , тому для визначення їх запишемо ще другий закон Ньютона для електрона: сила притягування електрона до ядра $\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ дорівнює добутку маси m електрона на його доцентрове прискорення $\frac{v^2}{r}$:

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (13.4)$$

Розв'язавши систему рівнянь (13.1) і (13.4), знайдемо для радіусів допустимих (стаціонарних) орбіт електрона в атомі водню і швидкості електрона наступні вирази:

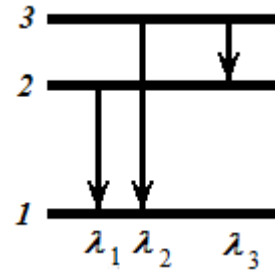


Рис. П.13.1

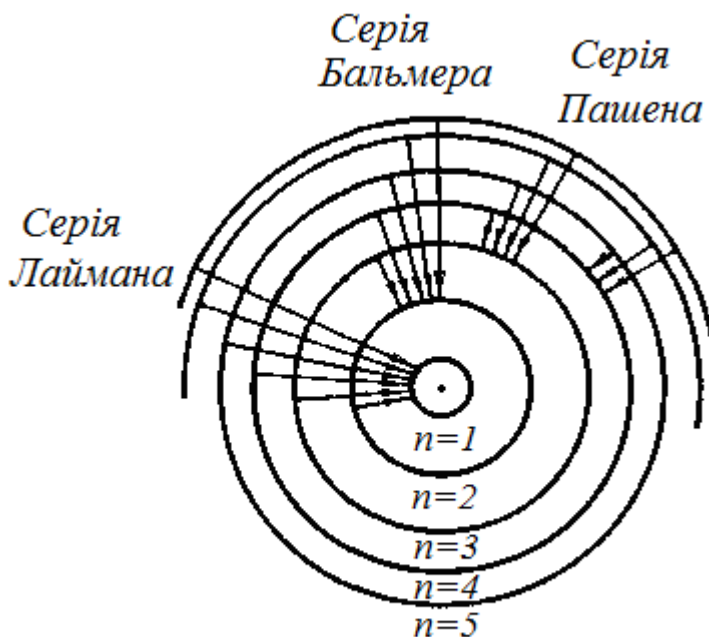


Рис. 13.4.

біт електрона в атомі водню і швидкості електрона наступні вирази:

$$r_n = \frac{\varepsilon_0 n^2 h^2}{\pi m e^2}, \quad (13.5)$$

$$v_n = \frac{e^2}{2\varepsilon_0 n h}. \quad (13.6)$$

Як бачимо, радіуси можливих орбіт пропорційні квадрату номера орбіти. Якщо підставити у вираз (13.5) $n = 1$, $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг, $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл, $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ Дж·с і зробити обчислення для першої орбіти електрона, то отримаємо такі результати: $r_1 = 0,529 \cdot 10^{-10}$ м, $v_1 = 2,18 \cdot 10^6$ м/с. На другій орбіті швидкість електрона дорівнює $v_2 = 1,094 \cdot 10^6$ м/с, на третій – $v_3 = 0,731 \cdot 10^6$ м/с і т.д.

Константа a_B

$$a_B = \frac{4\pi\varepsilon_0 \hbar^2}{m_0 e^2} = 0,529 \cdot 10^{-10} \text{ м}, \quad (13.7)$$

радіус першої стаціонарної орбіти електрона в атомі водню називається радіусом Бора.

Приклад 3. Визначити частоту f обертання електрона на четвертій орбіті атома водню в теорії Бора.

Радіуси дозволених орбіт r_n і швидкості v_n електрона на них даються формулами теорії Бора (13.5) і (13.6). Тоді частота

$$f = \frac{v_n}{2\pi r_n} = \frac{m_e e^4}{32\pi^3 \varepsilon_0^2 \hbar^3 n^3} = \frac{m_e e^4}{4\varepsilon_0^2 \hbar^3 n^3} = \frac{9,1 \cdot 10^{-31} (1,6)^4 \cdot 10^{-76}}{4 \cdot (8,85)^2 \cdot 10^{-24} \cdot (6,625)^3 \cdot 10^{-102} 4^3} = 1,02 \cdot 10^{14} \text{ Гц.}$$

Приклад 4. Визначити довжину хвилі де Бройля для електрона, що знаходиться в атомі водню на третій борівській орбіті.

Необхідну для вирішення задачі швидкість електрона можна визначити за формулою (13.6), зокрема, на третій орбіті $v_3 = 0,736 \cdot 10^6$ м/с.

$$\lambda = \frac{h}{mv_3} = \frac{6,62 \cdot 10^{-34}}{9,1 \cdot 10^{-31} 0,731 \cdot 10^6} \approx 10^{-9} \text{ м} = 1 \text{ нм}$$

Схематично кругові стаціонарні орбіти в атомі водню зображені на рис. 13.1. і 13.4.

Повна енергія електрона, що рухається на n -ій стаціонарній орбіті, складається з його кінетичної енергії

$$E_{kin} = \frac{mv_n^2}{2} = \frac{m e^4}{32\pi^2 \varepsilon_0^2 \hbar^2 n^2} \quad (13.8)$$

і потенціальної енергії кулонівської взаємодії електрона з ядром

$$U = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_n} = -\frac{m e^4}{16\pi^2 \varepsilon_0^2 \hbar^2 n^2}. \quad (13.9)$$

Тому, з урахуванням (13.8) і (13.9), отримуємо формулу квантування енергії електрона в атомі водню

$$E = E_{kin} + U = -\frac{me^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2} \cdot \frac{1}{n^2} = -\frac{13,6}{n^2} \text{эВ}. \quad (13.10)$$

Повна енергія електрона в атомі виявилася від'ємною, оскільки за визначенням, від'ємною є потенціальна енергія взаємодії електрона з ядром.

Енергія електрона на нескінченності покладається рівною нулю, а з наближенням до ядра вона зменшується. Зрозуміло, що кінетична енергія електрона на будь-якій стаціонарній орбіті чисельно має бути менше, ніж потенціальна енергія притягання електрона до ядра, інакше електрон полетів би за межі дії ядра.

З ростом номера орбіти повна енергія електрона в атомі зростає. При цьому номер орбіти n є квантовим числом в теорії Бора.

Приклад 5. Визначити мінімальну енергію атома водню за допомогою співвідношення невизначеностей.

Якщо електрон знаходиться в області розміром r , то невизначеність координати становить $\Delta r \sim r$, і згідно із співвідношенням невизначеностей розкид в імпульсах буде порядку $\Delta p \sim \frac{\hbar}{r}$. Як було показано раніше (див. § 7, приклад 1), при описі руху електрона законами класичної фізики величина невизначеності швидкості (а, отже, імпульсу) виходила порядку самої швидкості (імпульсу). Тобто $\Delta p \sim p$. Тоді зі співвідношення невизначеностей слід $p \sim \frac{\hbar}{r}$. Вира- зимо кінетичну енергію електрона і величину порядку її малості

$$E = \frac{p^2}{2m} \sim \frac{\hbar^2}{2m_e r^2}$$

Повна енергія електрона в атомі водню

$$E = E_{kin} + U = \frac{\hbar^2}{2m_e r^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (П.13.1)$$

З формули(П. 13.1) випливає, що чим ближче електрон до ядра, тим менше його потенціальна енергія. Але одночасно зростає його кінетична енергія ($\sim \frac{1}{r^2}$), причому швидше, ніж зменшується потенціальна ($\sim (-\frac{1}{r})$). Наближаючись до ядра, електрон починає рухатися настільки швидко, що впасти на ядро не може.

Він буде в середньому перебувати на такій відстані від ядра, при якій його повна енергія виявиться мінімальною. Цю відстань можна знайти за загальними правилами визначення мінімуму функції (П.13.1). Відстань, яка відповідає мінімуму енергії, виявляється рівною

$$r_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2} = a_B. \quad (П.13.2)$$

Вона збігається з радіусом a_B першої борівської орбіти (див. формулу (13.5)), який визначає розміри атома в незбудженому стані. Підставивши (П.13.2) в (П.13.1), знайдемо мінімальну енергію атома водню:

$$E_0 = -\frac{m_e e^4}{2\hbar^2 (4\pi\epsilon_0)^2} = -13,6 \text{эВ}. \quad (П.13.3)$$

На рис. 13.5 відповідно до формули (13.10) зображений енергетичний спектр електрона в атомі водню. Графічно можливі значення енергії атома зображуються у вигляді *схеми рівнів енергії* - горизонтальних прямих, проведених на відстанях, що відповідають різницям дозволених енергій.

В області додатних енергій енергетичний спектр вільного електрона суцільний. В області від'ємних значень повної енергії енергетичний спектр пов'язаного з атомом електрона стає дискретним. У стаціонарному стані електрон може перебувати на одному з дискретних енергетичних рівнів. Перехід електрона з одного рівня на інший на рисунку може бути зображений відповідною стрілкою, початок і кінець якої вказують енергетичні рівні, між якими відбувається перехід.

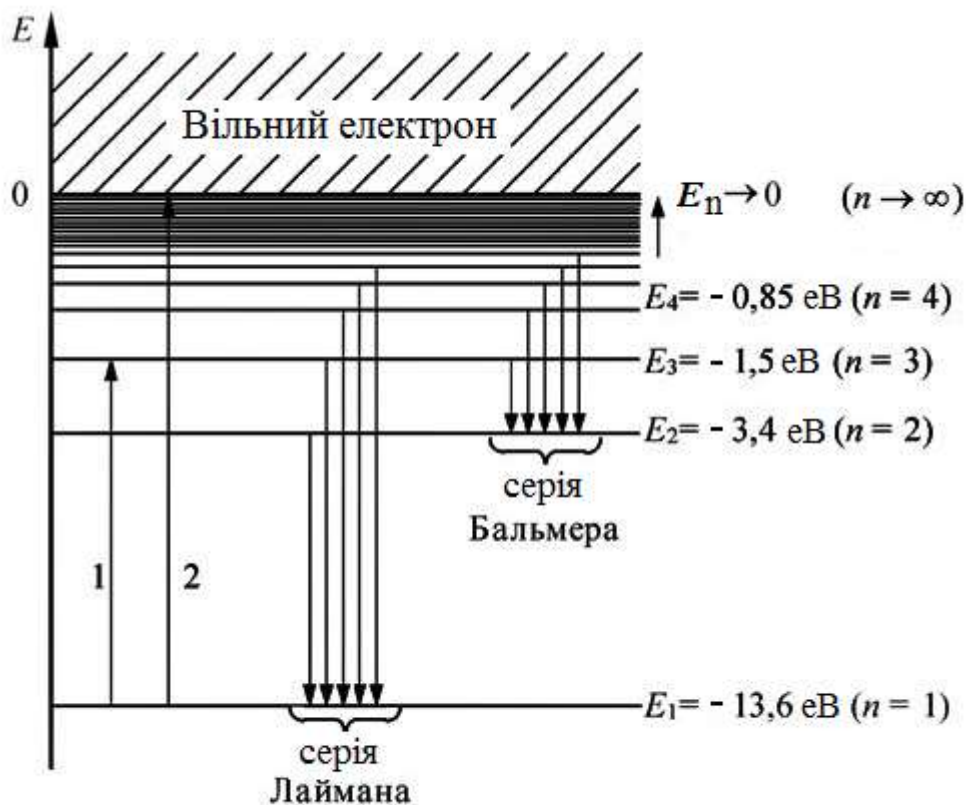


Рис. 13.5.

Приклад 6. Припускаючи, що в досліді Франка і Герца вакуумна трубка наповнена не парами ртуті, а розрідженим атомарним воднем, визначити, через які інтервали прискорювальної напруги U виникнуть максимуми на графіку залежності сили анодного струму від прискорювальної напруги.

З теорії Бора випливає, що енергія E_n атома водню в деякому стані може бути виражена у вигляді

$$E_n = -\frac{Rch}{n^2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad R = 1,0973731 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}.$$

Енергетичні рівні атома водню обернено пропорційні квадратам цілих чисел. В основному стані (при $n = 1$) енергія електрона становить - 13,53 еВ. У першому збудженому стані ($n = 2$), відповідно, - 13,53 / 4 = - 3,38 еВ (див. рис. 13.5). Різниця енергій електрона в цих двох станах дорівнює 10,15 еВ і дорівнює роботі, яку потрібно виконати, щоб перевести електрон з основного в перший збуджений стан. Цю величину називають першим *потенціалом збудження атома водню*. Тому прискорювальна напруга, відповідна переходу збудженого атома в перший

збуджений стан, дорівнює $U_1 = 10,15$ В. Перший максимум на кривій залежності струму від прискорювальної різниці потенціалів буде спостерігатися при цьому значенні U , наступні максимуми будуть чергуватися на такій самій відстані один від одного.

Зазвичай атом знаходиться в основному стані з найменшим значенням енергії, рівним E_1 . У цьому стані атома електрон рухається на першій стаціонарній орбіті, яка має мінімальний радіус, рівний a_B .

Якщо атому надати додаткову енергію, то він може перейти в збуджений стан (наприклад, перехід 1 на рис. 13.5). Електрон при цьому переходить на орбіту більшого радіусу. Збудження атомів може відбуватися різними способами, наприклад, зіткненням атомів газу в хаотичному тепловому русі, пропусканням через газ потоку високоенергетичних частинок (електронів, альфа-частинок і ін.) і, нарешті, поглинанням атомами випромінювання.

Якщо енергія, передана електрону, буде досить велика, то електрон може подолати силу притягання до ядра і відірватися від атома. Такий процес називають *іонізацією атома*. З рис. 13.5 видно, що мінімальна енергія, необхідна для іонізації атома водню (перехід 2), дорівнює

$$E_i = |E_1| = 13,6 \text{ эВ.}$$

Це значення добре узгоджується з експериментальними даними для енергії іонізації атома водню.

У збудженому стані атом довго перебувати не може. Як і будь-яка фізична система, атом прагне зайняти стан з найменшою енергією. Тому через час порядку 10^{-8} с збуджений атом мимовільно (спонтанно) переходить в стан з меншою енергією, випускаючи при переході квант енергії випромінювання. Такий процес триває до тих пір, поки атом не опиниться в основному стані.

Аналогічно до формули (13.10) виражається енергія електрона на k -й орбіті.

Частоту випромінювання при переході електрона з k -ої більш віддаленої орбіти на n -у ($k > n$) можна визначити, використовуючи другий постулат теорії Бора. З урахуванням (13.2) і формули квантування енергії (13.10) одержуємо вираз для частот випромінювання атома водню при різних переходах $k \rightarrow n$:

$$\nu = \frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^3} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2} \right) \dots \quad \dots(13.11)$$

де $k = (n + 1), (n + 2), (n + 3), \dots$

Формула (13.11) не тільки за структурою аналогічна узагальненій формулі Бальмера-Рідберга (13.3), але і постійна

$$R = \frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^3} \quad (13.12)$$

точно відповідає за величиною постійній Рідберга, знайденій з експериментів.

Не дивно тому, що теорія Бора атома водню, в основі якої лежить постулат квантування (13.1), в 1922 році була удостоєна Нобелівської премії з фізики.

Спроби Н.Бора узагальнити теорію і сформулювати постулати квантування для більш складних атомів не увінчалися успіхом.

З позиції сучасної фізики, атом є фізичною системою, яка, заздалегідь, не може бути описана класичною теорією, котра не враховує хвильових властивос-

тей електрона, що рухається в атомі. Теорія Бора штучно з'єднує класичну механіку з деякими квантовими принципами. З відкриттям хвильових властивостей електронів стало очевидно, що уявлення про електрон як частинку і його кругові орбіти в атомі не відповідають дійсності. Однак ними користуються, оскільки вони є наочними і в багатьох випадках призводять до результатів, які задовольняють практичні потреби.

§ 14. Теорія атома водню в квантовій механіці

Рівняння Шредінгера. За допомогою рівняння Шредінгера можна вирішити задачу про атом водню, а також воднеподібні атоми, наприклад, іони гелію He^+ , дворазово іонізованого літію Li^{++} і ін.

Розв'язання такої задачі зводиться до задачі про рух електрона в кулонівському полі ядра. Потенціальна енергія взаємодії електрона з ядром, що має (для загальності) заряд Ze :

$$U(r) = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad (14.1)$$

де r - відстань між електроном і ядром (для водню $Z = 1$). Потенціальна енергія від'ємна, тому що відраховується від нескінченно віддаленої точки, в якій досягає максимального значення.

Графік функції $U(r)$ зображений на рис. 14.1. Чим ближче електрон до ядра, тим менше його потенціальна енергія. Функція $U(r)$ необмежено убуває (зростає за абсолютним значенням) при зменшенні r , тобто при наближенні електрона до ядра. Значення $U(r)$ при $r \rightarrow \infty$ прийнято за нуль.

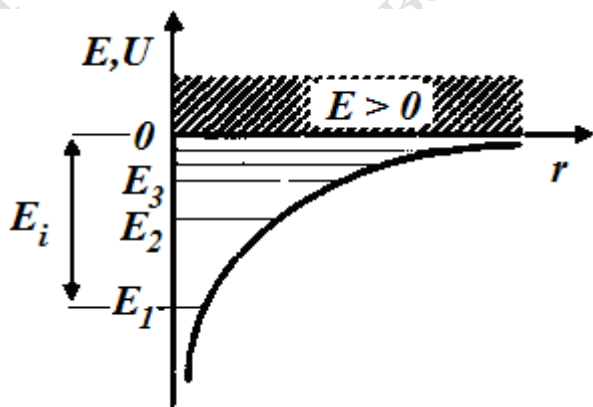


Рис.14.1.

Рух електрона в такому полі є еквівалентним руху в деякій гіперболічній потенціальній ямі.

За аналогією з задачею про рух частинки в потенціальній ямі прямокутної форми (див. § 11) можна очікувати, що спектр енергії електрона в атомі буде складатися з окремих енергетичних рівнів

E_1, E_2, E_3 і т.д., тобто буде дискретним.

Стан електрона в атомі водню описується хвильовою функцією ψ , яка є рішенням стаціонарного рівняння Шредінгера:

$$\Delta\psi + \frac{2m_e}{\hbar^2} \left(E + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \psi = 0, \quad (14.2)$$

де E - повна енергія електрона в атомі. Оскільки поле, в якому рухається електрон, є центрально - симетричним, то для вирішення рівняння Шредінгера використовують сферичну систему координат r, θ, ϕ .

Відповідно, і розв'язки рівняння, тобто функції ψ вийдуть в цих координатах.

Відзначимо, що задача про рух електрона в атомі водню - одна з точно розв'язуваних задач квантової механіки - вирішена аналітично. Для більш складних атомів розв'язання є настільки складним, що виконується тільки чисельними методами.

Незважаючи на простий вираз для потенціальної енергії, квантовомеханічна задача про рух електрона в атомі водню математично дуже складна. Не вдаючись в це рішення, яке виходить за рамки даного навчального посібника і приводиться в підручниках з квантової механіки, обмежимося розглядом деяких результатів, які з нього отримують.

Енергія. Рівняння Шредінгера має рішення, які задовольняють умову однозначності, обмеженості і безперервності хвильової функції ψ тільки для дискретного набору від'ємних значень енергії:

$$E_n = -\frac{1}{n^2} \frac{Z^2 m e^4}{8 h^2 \epsilon_0^2} = -\frac{Z^2}{n^2} R h, \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (14.3)$$

де $R = \frac{m e^4}{8 h^3 \epsilon_0^2}$ - стала Рідберга.

Для додатних значень енергії ($E > 0$) спектр є неперервним. Цей випадок відповідає електрону, що пролітає поблизу ядра і віддаляється на нескінченність. З рис. 14.1 видно, що тільки коли повна енергія $E < 0$, рух електрона є зв'язаним: він обмежений в просторі. Електрон знаходиться всередині гіперболічної «потенціальної ями».

Вирази для дозволених значень енергії атома (14.3) ті ж, що були отримані Бором (13.10). Однак в квантовій механіці дискретні значення енергії є наслідком самої теорії, вони слідуєть автоматично безпосередньо з рішень рівняння Шредінгера.

Нижній рівень енергії, який відповідає головному квантовому числу $n = 1$, E_1 - основний, всі інші ($E_n > E_1$) - збуджені (рис. 14.1). Підставивши в (14.3) значення констант і прийнявши $n = 1$, отримаємо значення енергії основного стану (тобто стану з найменшою енергією) водневого атома:

$$E = -2,18 \cdot 10^{-18} \text{ Дж} = -13,6 \text{ еВ}. \quad (14.4)$$

У міру зростання головного квантового числа n енергетичні рівні розміщуються тісніше і при $n = \infty$ $E_\infty = 0$.

Механічний і магнітний моменти атома. Просторове квантування. Квантові числа. Рівняння Шредінгера задовольняють власні функції

$$\psi_{nlm}(r, \theta, \phi), \quad (14.5)$$

які визначаються трьома квантовими числами: головним n , орбітальним l і магнітним m_l .

Головне квантове число n визначає енергетичні рівні електрона в атомі і може набувати довільні цілочислові значення, починаючи з одиниці: $n = 1, 2, 3, \dots$

У планетарній моделі атома електрон здійснює орбітальний рух навколо ядра і обертається навколо власної осі, подібно до планет сонячної системи (рис. 14.2). Було б грубою помилкою цю

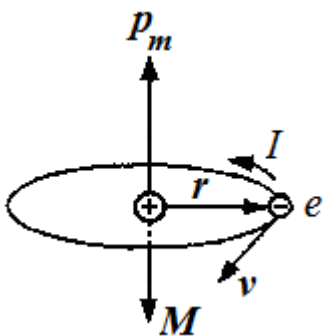


Рис. 14.2.

наочну класичну картину застосовувати до мікросвіту, проте термін «орбітальний рух» зберігся для опису руху електрона в цілому. Використання цього терміна зовсім не означає рух електрона на траєкторії. Орбітальний рух електрона описується хвильовою функцією.

Момент імпульсу електрона поділяють на два типи: орбітальний і спіновий. Зупинимося спочатку на орбітальному моменті.

Момент імпульсу характеризує обертальний (кутовий) рух. В класичній механіці момент імпульсу частинки, що обертається навколо нерухомої осі, виражається у вигляді векторного добутку радіус-вектора на вектор імпульсу частинки:

$$\mathbf{M} = [\mathbf{r}, m\mathbf{v}].$$

У квантовій механіці вектор \mathbf{M} не має певного напрямку і його не можна вважати класичним вектором. «Квантовий момент імпульсу» можна умовно уявити собі як вектор фіксованої довжини, спрямований під фіксованим кутом до осі квантування z , але який прецесує навколо цієї осі (рис. 14.3).

Вектор \mathbf{M} може лежати на будь-який з твірних конуса OAB з висотою $m\hbar$ і твірною $\sqrt{\hbar l(l+1)}$.

Квантування орбітального моменту імпульсу. Момент імпульсу, як і енергія частинки, що рухається в обмеженій області, має дискретний спектр, квантується. З рішень рівняння Шредінгера випливає, що модуль орбітального моменту імпульсу квантується за формулою

$$M_l = \hbar\sqrt{l(l+1)}, \quad (14.6)$$

де l - орбітальне (азимутальне) квантове число, яке при даному головному квантовому числі n набуває значення $l = 0, 1, 2, \dots, (n - 1)$, тобто всього n значень.

Якщо для електрона $l = 0$, то його стан називають s -станом. Стан електрона, який характеризується квантовим числом $l = 1$ називається p -станом, $l = 2$ - d -станом, $l = 3$ - f -станом і так далі.

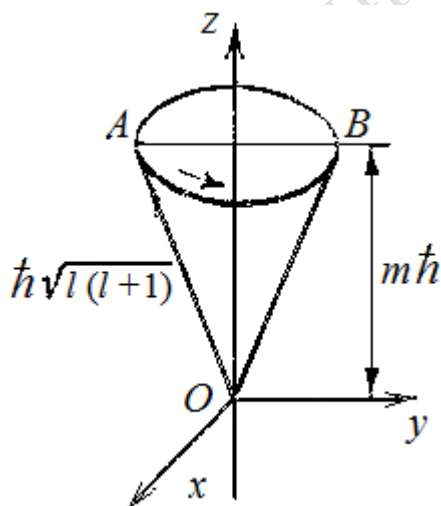


Рис. 14.3.

На рис 14.4, а наведено спектр значень модуля орбітального моменту імпульсу M_l . Зауважимо, що в теорії Бора стан атома з нульовим моментом імпульсу був неможливим, тому що орбіта електрона в основному стані атома водню являє собою коло і момент імпульсу не може бути рівним нулю.

Якщо уявити собі «квантовий вектор» моменту імпульсу як звичайний вектор, то при даній довжині цього вектора він може утворювати з виділеною віссю квантування z (наприклад, напрямком зовнішнього магнітного поля) тільки строго певні кути (рис. 14.5). Можливі лише такі орієнтації \mathbf{M}_l , при яких проекція

M_{lz} орбітального моменту імпульсу на вісь квантування z приймає значення

$$M_{lz} = \hbar m, \quad (14.7)$$

де m - ціле число, яке називається *магнітним квантовим числом*. Магнітне квантове число при даному l може набувати значення

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm l,$$

тобто всього $2l + 1$ значень, а l - орбітальне квантове число. Квантується не тільки абсолютна величина моменту імпульсу, але і його орієнтація.

При $m > 0$ проекція M_{lz} додатна, а при $m < 0$ - від'ємна. На рис. 14.5 наведені можливі орієнтації вектора M_l для електрона: в разі $l = 1$ довжина вектора дорівнює $\hbar\sqrt{2}$ та його проекції $0, \pm \hbar$. У разі $l = 2$ довжина вектора дорівнює $\hbar\sqrt{6}$ та його проекції $0, \pm \hbar, \pm 2\hbar$.

Ще раз відмітимо, що цей рисунок - всього лише спроба зобразити квантові властивості в класичних образах. Він правильно передає лише два факти: можливі значення моменту імпульсу M_l і можливі значення проекції M_{lz} .

Користуючись напівкласичною борівською моделлю, розглянемо рух електрона в атомі на стаціонарній круговій

орбіті (рис. 14.2). Нехай швидкість електрона на орбіті радіуса r дорівнює v . Електрон, який рухається на орбіті, еквівалентний круговому струму силою

$$I = ev = ev/2\pi r,$$

де e - абсолютне значення заряду електрона, v - частота його обертання на орбіті, v - лінійна швидкість. Орбітальний момент імпульсу електрона чисельно дорівнює

$$M_l = m_e v r.$$

Виключивши швидкість, отримаємо вираз для орбітального струму

$$I = eM_l/2m_e \pi r^2.$$

Тоді орбітальний магнітний момент, створюваний електронем, дорівнює

$$\mu = IS = I\pi r^2 = eM_l/2m_e.$$

Замінімо відповідно до правил квантування $M_l = \hbar\sqrt{l(l+1)}$, отримаємо вираз для *орбітального магнітного моменту*

$$\mu = \frac{e\hbar}{2m_e} \sqrt{l(l+1)}. \quad (14.8)$$

З формули (14.8) слідують такі висновки:

1. Природною одиницею магнітних моментів є так званий *магнетон Бора*

$$\mu_B = e\hbar/(2m_e) = 0,927 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/Тл}. \quad (14.9)$$

2. Проекція магнітного моменту на будь-яку вісь має бути цілою кратною магнетона Бора.

3. Між орбітальним магнітним моментом електрона і його механічним моментом імпульсу є наступне співвідношення

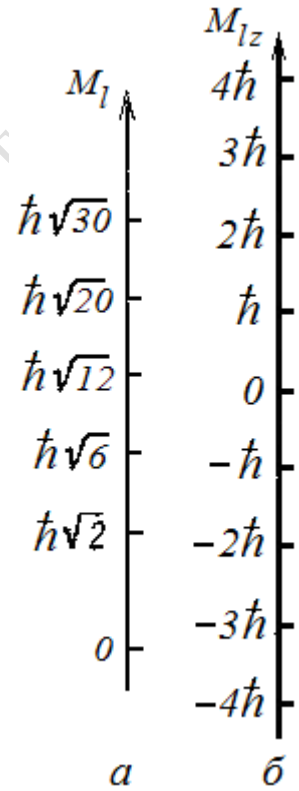


Рис. 14.4.

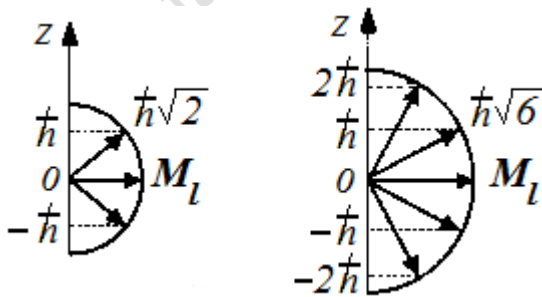


Рис. 14.5.

$$\mu = -\frac{e}{2m_e} M_l. \quad (14.10)$$

Знак мінус вказує на те, що магнітний і механічний моменти напрямлені протилежно. Оскільки магнітний і механічний моменти відрізняються лише постійним множником, то їх квантові властивості однакові.

Таким чином, з аналізу рішень рівняння Шредінгера для атома водню слід, що квантуванню підлягають енергія електрона в атомі, а також момент імпульсу орбітального руху електрона і його проекція, орбітальний магнітний момент і його проекція.

Спіновий момент імпульсу (спін). Спіном називають власний момент імпульсу електрона, що має квантову природу і не пов'язаний з його переміщенням як цілого. Спін (spin) - англійське слово, що означає «обертання, крутіння».

Спочатку спін уявляли собі як характеристику обертання електрона навколо власної осі (на зразок дзиги або добового обертання Землі). Однак чисельні оцінки давали лінійну швидкість обертання, більшу за швидкість світла, тому від такого наочного, але невірного тлумачення довелося відмовитися.

Зараз під **спіном** розуміють власний момент імпульсу електрона як вроджену квантову властивість.

Абсолютна величина спінового моменту імпульсу електрона M_s знаходиться за формулою

$$M_s = \sqrt{s(s+1)}\hbar,$$

де s - спінове квантове число.

Спінове квантове число s має тільки одне значення, рівне $1/2$. Тому єдино можливе числове значення спіну електрона дорівнює

$$M_s = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)}\hbar = \frac{\sqrt{3}}{2}\hbar. \quad (14.11)$$

Ще раз підкреслимо, що власний механічний момент електрона може мати єдине значення $M_s = \sqrt{3}\hbar/2$ і є такою ж фундаментальною характеристикою електрона, як його маса або заряд.

Дослідним шляхом було виявлено, що відбувається просторове квантування спіну електрона, і що існують дві можливих орієнтації спіну в зовнішньому магнітному полі.

Просторове квантування спіну означає, що проекція M_{sz} вектора спіну M_s на напрям зовнішнього магнітного поля визначається за формулою

$$M_{sz} = m_s\hbar = \pm\hbar/2, \quad (14.12)$$

де m_s - магнітне спінове число, яке відрізняється від спінового числа s тим, що може приймати два значення: $\pm 1/2$.

Повне число станів. Хоча енергія електрона і залежить від головного квантового числа n , але кожному значенню E_n (крім E_1) відповідає кілька власних функцій ψ_{nlm} , які відрізняються значеннями l і m . Отже, атом водню може мати одне і те ж значення енергії, але перебувати в декількох різних станах. Оскільки при даному n орбітальне квантове число l може змінюватися від 0 до $n - 1$, а кожному

значенню l відповідає $2l + 1$ різних значень m_l , то число N різних станів, які відповідають цьому n , дорівнює

$$N = \sum_{l=0}^{n-1} (2l + 1) = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1).$$

Вийшла арифметична прогресія. Використовуючи формулу суми членів арифметичної прогресії, отримаємо

$$N = \frac{1 + (2n - 1)}{2} n = n^2. \quad (14.13)$$

Стани з однаковою енергією називаються *виродженими*, а число станів з певним значенням енергії називають кратністю виродження відповідного енергетичного рівня.

Хвильові функції атома водню. Рівняння Шредінгера має рішення, які можуть бути виражені як добуток функцій трьох координат, тобто

$$\psi(r, \theta, \varphi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi) = \left[e^{-nr} r^l L_{nl}(r) \right] \left[P_{lm}(\cos\theta) \right] \left[A e^{im\varphi} \right] \quad (14.14)$$

де $L_{nl}(r)$ - так звані приєднані поліноми Лаггера і $P_{lm}(\cos\theta)$ - поліноми Лежандра.

Кожна допустима комбінація квантових чисел n, l, m визначає стан атома, і для кожного стану є своя власна функція ψ_{nlm} .

Як приклад наведемо найбільш просту хвильову функцію основного стану атома водню

$$\psi_{100} = \frac{1}{\sqrt{\pi a_B^3}} e^{-\frac{r}{a_B}}, \quad (14.15)$$

де $a_B = 0,529 \cdot 10^{-10}$ м є борівський радіус.

Приклад. Хвильова функція електрона в атомі водню, що знаходиться в основному стані, має вигляд

$$\psi_{100}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_B^3}} e^{-\frac{r}{a_B}}, \quad \text{де } a_B = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2} = 0,529 \cdot 10^{-10} \text{ м} - \text{борівський радіус.}$$

Визначити найбільш ймовірну відстань електрона r_B електрона від центра атома в цьому стані.

Ймовірність знайти електрон в інтервалі від r до $r + dr$ дорівнює добутку ймовірності $|\psi_{100}(r)|^2$ знайти електрон в одиниці об'єму на об'єм $dV = 4\pi r^2 dr$ шару між сферами з радіусами r і $r + dr$ (рис. П.14.1).

$$dW = |\psi_{100}(r)|^2 dV.$$

Тому ймовірність w виявлення електрона в інтервалі від r до $r + dr$, віднесена до величини інтервалу dr (густина ймовірності), дорівнює

$$w = \frac{dW}{dr} = \frac{4}{a_B^3} r^2 e^{-\frac{2r}{a_B}}.$$

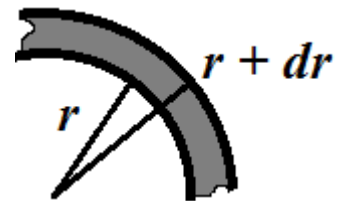


Рис. П.14.1

Графік густини ймовірності $w(r)$ знаходження електрона на відстані r від ядра для основного стану атома водню показаний на рис. П.14.2.

Максимум цього розподілу можна знайти з умови

$$\frac{dw}{dr} = 0.$$

$$\frac{dw}{dr} = \frac{4}{a_B^3} \left(2re^{-\frac{2r}{a_B}} + r^2 e^{-\frac{2r}{a_B}} \left(-\frac{2}{a_B}\right) \right) = 0.$$

$$\frac{8}{a_B^3} re^{-\frac{2r}{a_B}} \left(1 - \frac{r}{a_B} \right) = 0.$$

Корінь цього рівняння, що не рівний нулю, визначиться зі співвідно-

$$\text{шення } 1 - \frac{r_e}{a_B} = 0.$$

Остаточно $r_e = a_B$. Густина ймовірності максимальна на відстані, яка дорівнює радіусу першої борівської орбіти. Можна зробити висновок про те, що борівські орбіти - це сукупності точок, для яких ймовірності знаходження електронів максимальні.

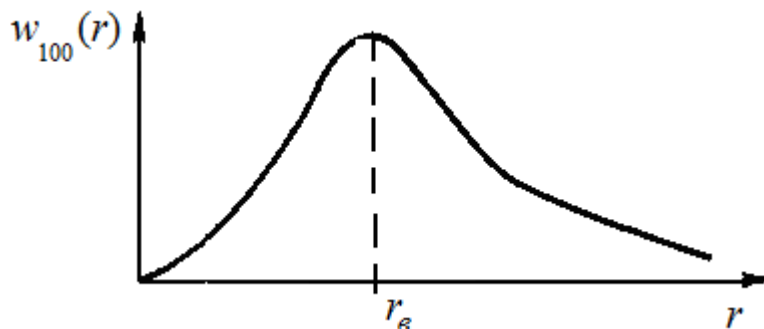


Рис. П.14.2.

Характер руху електрона в атомі по-різному інтерпретується в теорії Бора і в квантовій механіці. У теорії Бора вважалося, що електрон рухається на деякій орбіті. У квантовій механіці не можна говорити про рух електрона по якійсь траєкторії, фізичний зміст має тільки ймовірність знайти електрон в тому чи іншому місці.

Тому замість уявлення про рух електрона на певній орбіті вживається уявлення про стан руху електрона, який описується тією чи іншою хвильовою функцією, тобто кажуть, що електрон знаходиться в тому чи іншому *стані*.

Густина ймовірності виявлення електрона дається квадратом модуля хвильової функції. У загальному випадку розподіл густини ймовірності виявлення електрона $\psi^*\psi$ залежить від трьох координат r, θ, ϕ , як і від квантових чисел n, l, m . Кожний стан характеризується своїм відмінним від інших розподілом густини ймовірності.

Квантово-механічний розподіл густини ймовірності виявлення електрона в різних точках атома можна уявити наочно у вигляді деякого хмари, що оточує ядро атома. Кожний стаціонарний стан характеризується певним набором квантових чисел. Цьому стаціонарному стану відповідає своя *хмара густини ймовірності*, що має певну просторову конфігурацію. Одному і тому ж значенню головного квантового числа n , що визначає енергію атома E_n , відповідає при $n > 1$ кілька різних станів з однаковою енергією, що розрізняються видом цієї хмари (рис. 14.6). Знання хвильової функції дозволяє визначити ймовірність знаходження електрона в будь-якій точці простору.

У нижчому, або основному стані ($n = 1$) момент імпульсу дорівнює нулю ($l = 0$). Стан з нульовим моментом - *s*-стан - сферично симетричний: електрон з однаковою ймовірністю може бути виявлений в будь-якій точці, що знаходиться на даній відстані від ядра (рис. 14.6). Згідно ж теорії Бора, орбіта електрона в основ-

ному стані атома являє собою коло і момент імпульсу не може бути рівним нулю, тобто немає стану з $l = 0$.

В основному стані атома водню зі сферично-симетричною хмарою ймовірності виявити електрон на деякій відстані від ядра має максимум, коли ця відстань дорівнює радіусу борівської орбіти, хоча ніяких орбіт в атомі немає. На рис. 14.6 показані електронні хмари деяких станів атома водню, в тому числі показана їх структура - найбільш ймовірне місце електрона показано більшою густиною точок.

Саме так, у вигляді хмари густини ймовірності може бути представлений образ атома в квантовій теорії

Таким чином, фізичний зміст однієї з основних постійних мікросвіту - борівського радіуса - полягає в тому, що він дорівнює найбільш ймовірній відстані електрона від ядра в основному стані атома водню.

Для більших значень квантових чисел хвильові функції і відповідні ймовірності залежать від r і θ більш складним чином (рис. 14.6).

Іноді представляють масу і заряд електрона як би розподіленими в просторі навколо ядра. Густина маси і заряду в кожній точці пропорційні густині ймовірності для електрона перебувати в цій точці. Тому говорять про розподіл густини маси або заряду в електронній хмарі.

Така ж відмінність спостерігається і в інтерпретації квантових переходів. Перехід електрона з однієї орбіти на іншу в теорії Бора пов'язаний з уявленням про просторове переміщення електрона, перехід же електрона з одного стану в інший в квантовій механіці не пов'язаний з просторовим рухом електрона.

Квантові числа n , l , m дозволяють повністю описати спектр випромінювання атома водню, отриманий в теорії Бора. У квантовій механіці з'являються **правила відбору**, що обмежують число можливих переходів електронів в атомі, пов'язаних з випромінюванням і поглинанням світла. У квантовій механіці доводиться, що можуть здійснюватися тільки такі переходи, для яких зміна орбітального квантового числа Δl задовольняє умову

$$\Delta l = \pm 1.$$

Наявність такого правила відбору обумовлена тим, що електромагнітне випромінювання (фотон) відносить або вносить не тільки квант енергії, а й цілком визначений момент імпульсу, що змінює орбітальне квантове число для електрона завжди на одиницю.

На закінчення ще раз підкреслимо, що атом водню - це найпростіша реальна атомна система, для якої були отримані точні рішення рівнянь квантової механіки. Висновки теорії блискуче збігаються з результатами експериментів, чим підтверджують справедливність квантово-механічного підходу до вивчення явищ мікросвіту.

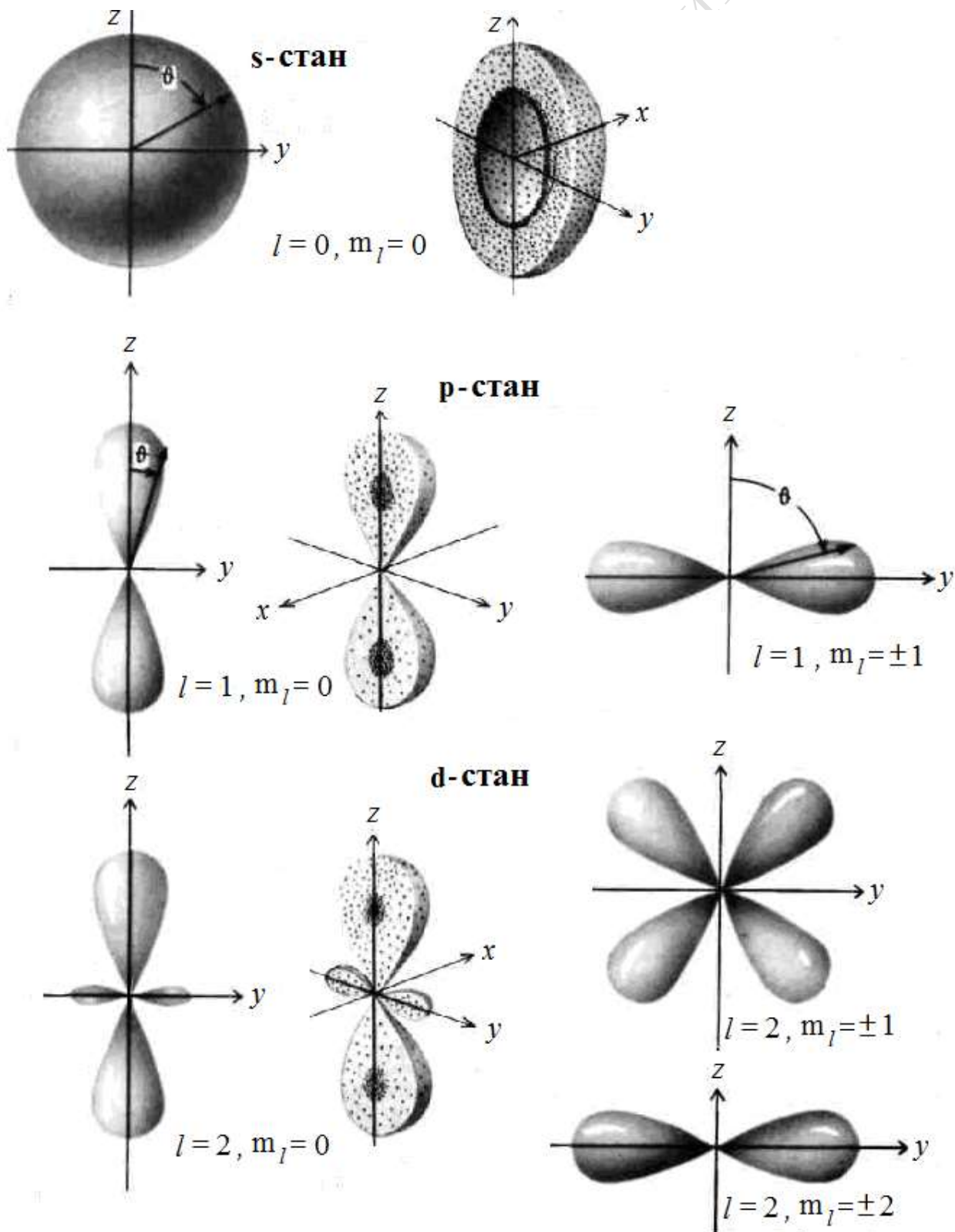


Рис. 14.6

§ 15. Принцип Паулі. Пояснення періодичної системи елементів

Якщо перейти від одноелектронного атома водню до багатоелектронних атомів, то можна очікувати, що всі електрони багатоелектронних атомів будуть прагнути перейти в енергетично найбільш стійкий стан, тобто зайняти найнижчий з усіх енергетичних рівнів.

Однак, як доводиться в квантовій механіці, існує *принцип виключення* або принцип *В. Паулі*, який забороняє «накопичення» електронів на найнижчому рівні.

Формулювання *принципу Паулі* таке: *в будь-якій квантовій системі, яка містить множини електронів (в атомі, молекулі, кристалі) не може бути двох електронів, що знаходяться в одному і тому ж квантовому стані, тобто не може існувати двох електронів, все квантові числа яких (головне n , орбітальне l , магнітне m_l і спінове m_s) дорівнюють одне одному.*

Тому якщо, наприклад, два електрона мають однакові головне квантове число n , орбітальне число l і магнітне m_l , то вони повинні мати протилежно орієнтовані спіни, тобто різні квантові числа m_s ($m_s = 1/2$, $m_s = -1/2$).

Принцип Паулі не має аналога в класичній фізиці. Він пов'язаний з *принципом тотожності* (принципом нерозрізненості однакових частинок). Всі електрони в атомах, молекулах або кристалах мають однакові заряди, маси і абсолютні величини спінів. Електрони нерозрізнені, тому, якщо в деякій системі поміняти місцями два електрона, то стан не зміниться, результат такого обміну ніяк не можна виявити експериментально.

Стан системи частинок в квантовій механіці характеризується хвильовою функцією. Отже, при перестановці електронів хвильова функція системи або залишиться без зміни, або змінить свій знак. Якщо побудувати хвильову функцію так, щоб вона змінювала знак при перестановці електронів (їх координат і спінів), тобто була б *антисиметричною*, то принцип Паулі виявиться врахованим. Дійсно, якщо допустити, що два електрона в системі знаходяться в однаковому стані, то при їх перестановці в силу нерозрізненості електронів хвильова функція залишиться тією ж, а в силу її антисиметрії - змінить знак. Тобто хвильова функція буде дорівнює самій собі з протилежним знаком, що може бути тільки для тотожних величин, рівних нулю. Таким чином, антисиметрія хвильової функції гарантує перетворення в нуль ймовірності тих станів, в яких є хоча б два електрона в однакових станах, що і відповідає принципу Паулі.

Скориставшись принципом Паулі, можна підрахувати максимальну кількість електронів, що знаходяться в стані, який визначається значенням головного квантового числа n . Раніше було показано (див. § 14), що даному n відповідає n^2 станів, які відрізняються значеннями l і m_l . Оскільки квантове число m_s може приймати тільки два значення: $\pm 1/2$, то в станах з даними значенням n може знаходитися в атомі не більше $2n^2$ електронів.

Принципу Паулі, крім електронів, підпорядковуються інші частинки, які мають спінове квантове число $s = 1/2$ (і напівцілий спін, рівний $\hbar/2$) - мюон, протон, нейтрон, нейтрино і ін. Цей клас частинок називається *ферміонами*. Другий клас

частинок (фотон, піон і ін.), у яких спінове квантове число s набуває цілих значень, називаються *бозонами*.

Квантова теорія пояснює походження *періодичного закону Д. І. Менделєєва*. Властивості того чи іншого елемента залежать від числа електронів в електронній оболонці атома і від її будови. Що стосується *хімічних властивостей* елемента, то вони визначаються *зовнішніми електронами* електронної оболонки.

У хімічних сполуках атоми різних елементів або віддають валентні електрони, або приєднують їх. Валентними називають електрони, які при зближенні атомів можуть змінити свій стан. Вони знаходяться тільки в зовнішніх оболонках атомів. Атоми з однаковим числом валентних електронів поведуться подібним чином, проявляючи не тільки близькі хімічні, але також оптичні, електричні та магнітні властивості.

Систематика заповнення електронних станів в атомах ґрунтується на наступних положеннях:

а) в основі систематики хімічних елементів лежить *заряд ядра*. Якщо заряд виражати через елементарні заряди e , то заряд ядра буде виражатися цілим числом Z . Число Z визначає номер хімічного елемента в періодичній системі. Заряд ядра чисельно дорівнює числу електронів в електронній оболонці атома даного елемента;

б) стан електронів в атомі визначається набором чотирьох квантових чисел: n, l, m, m_s .;

в) розподіл електронів в атомах за енергетичними станами має задовольняти принципу мінімуму потенціальної енергії: зі зростанням числа електронів кожен наступний електрон повинен зайняти якомога більш низький енергетичний стан;

г) заповнення електронами енергетичних станів в атомі має відбуватися відповідно до принципу Паулі - два електрона в одному і тому ж атомі повинні відрізнятися принаймні одним квантовим числом.

Сукупність електронів, що мають одне й те саме головне квантове число, утворює *оболонку* атома. Різні оболонки атома позначають великими латинськими літерами K, L, M, N, \dots

Оболонки поділяються на *підоболонки*, що відрізняються значенням квантового числа l . Підоболонки позначаються малими буквами латинського алфавіту, а саме, при $l = 0$ підоболонка s , при $l = 1$ підоболонка p , при $l = 2$ підоболонка d і т.д.

Розподіл електронів за одночастинними станами називається *електронною конфігурацією*. Отримувані при заповненні електронні конфігурації позначаються символами типу $1s^2 2s^2 2p^6 3s$. Тут цифри, які стоять над s і p в показнику справа, вказують число електронів, що знаходяться в групах станів $1s, 2s, 2p$ і $3s$.

Порядок заповнення електронами в атомах енергетичних станів в оболонках повинен відповідати послідовності розташування енергетичних рівнів: спочатку заповнюється оболонка з меншим значенням n і з найменшою потенціальною енергією, а потім стани з усе більш високою енергією, і тільки потім повинна заповнюватися електронами наступна оболонка. У середині даної оболонки спочатку заповнюються стани з $l = 0$, а потім стани з великими l , аж до $l = n - 1$.

Електронні стани для $n = 1, 2, 3$ показані в табл. 15.1

Розглянемо основні стани атомів, які утворюються в результаті послідовного заповнення електронних оболонок, починаючи з нижчої.

Таблиця 15.1

Оболонка	n	l	m_l	m_s	Електрон на конфігурація	Максимальне число станів в оболонці			
<i>K</i>	1	0	0	$+\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$	$1s^2$	2			
<i>L</i>	2	0	0	$+\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$	$2s^2$	8			
		1	-1	$+\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$	$2p^6$				
			0	$+\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$					
+1	$+\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$								
<i>M</i>	3	0	0	$+\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$	$3s^2$		18		
		1	-1	$+\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$	$3p^6$				
			0	$+\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$					
			+1	$+\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$					
		2	-2	$+\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$	$3d^{10}$				
			-1	$+\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$					
			0	$+\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$					
			+1	$+\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$					
					+2	$+\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$			
		і т.д.							

Нижча, або перша, оболонка складається всього з двох станів $1s$. Ця оболонка стає замкненою в атомі гелію He ($Z = 2$), електронною конфігурацією якого є $1s^2$. У другій оболонці є 8 станів, з яких 2 стани $2s$ і 6 станів $2p$. Заповнення другої оболонки закінчується на неоні Ne ($Z = 10$), який має електронну конфігурацію $1s^2 2s^2 2p^6$.

Третя оболонка містить 8 станів $3s$ і $3p$. Заповнення цієї оболонки завершується на аргоні Ar ($Z = 18$), який має електронну конфігурацію $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6$.

У ряді випадків порядок ходу квантових чисел не відповідає порядку заповнення атома електронами. Наприклад, у калію K ($Z = 19$) останній електрон надходить не на $3d$ -рівень, що є енергетично не вигідним, а на рівень $4s$. Електронна конфігурація атома калію має вигляд $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^1$.

Стани $3d$, що належать третьому M -шару, в яких у електрона порівняно великий орбітальний момент, разом з станами $4s$ і $4p$ утворюють четверту оболонку, яка містить 18 станів. Четверта оболонка заповнюється в криптоні Kr ($Z = 36$), у якого електронна конфігурація має вид $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6$.

Атомом із замкненою п'ятою оболонкою є ксенон Хе ($Z = 54$), а атомом із замкненою шостою оболонкою - радон Rn ($Z = 86$).

Всі атоми з замкненими оболонками утворюють інертні гази. Для вступу в хімічну реакцію необхідно, щоб хоча б один електрон зовнішньої оболонки атома змінив свій стан. Але якщо оболонка є замкненою, то через принцип Паулі цією зміною може бути тільки перехід електрона в сусідню, більш високу оболонку, для чого потрібна велика енергія. Якщо така енергія атому не надається, то в ньому не відбудеться змін, що і проявляється в його хімічній інертності.

Електронні структури всіх атомів можна знайти в довіднику з фізики.

§ 16. Оптичні квантові генератори (лазери)

Якщо атом має деяку певну енергією, то кажуть, що він знаходиться на відповідному енергетичному рівні. Набір можливих енергій утворює систему рівнів енергії даного атома.

Переходи атома з одного рівня на інший пов'язані зі зміною його енергії. При цьому переходи можуть бути випромінювальними, які супроводжуються випусканням або поглинанням електромагнітного випромінювання, і без випромінювання фотонів (релаксаційними), при яких окремі атоми отримують або втрачають енергію в результаті непружних зіткнень між собою, з електронами або з квантами поля коливань кристалічної решітки - фононами.

Нехай існує сукупність дуже великого числа атомів, які утворюють настільки сильно розріджений газ, що взаємодією між атомами можна знехтувати. Будемо для простоти вважати, що кожен атом може знаходитися тільки в двох станах: основному з енергією E_1 і збудженому з енергією E_2 .

Згідно з А. Ейнштейном можливі три типи випромінювальних переходів: спонтанне випромінювання, поглинання і вимушене (індуковане) випромінювання. Розглянемо ці процеси.

1. Поглинання світла. Нехай атом знаходиться на нижньому рівні 1 і нехай поблизу атома пролітає фотон з енергією $\varepsilon_{12} = E_2 - E_1$, тобто з частотою $\omega_{12} = \varepsilon_{12} / \hbar$ (вона називається резонансною). Атом може поглинути фотон і здійснити квантовий перехід з рівня E_1 на рівень E_2 . Такий процес схематично представлений на рис. 16.1. Горизонтальні лінії являють собою енергетичні рівні, хвиляста стрілка означає фотон, вертикальна стрілка зображує квантовий перехід атома з одного рівня на інший.

Такий вимушений перехід означає **поглинання світла** речовиною (іноді його називають вимушеним поглинанням).

2. Спонтанне випромінювання. Якщо атом перебуває в збудженому стані 2 , то він може через деякий проміжок часу **спонтанно**, без будь-яких зовнішніх впливів, перейти в стан з нижчою енергією (в нашому випадку в основний), віддаючи надлишкову енергію у вигляді електромагнітного випромінювання (випус-

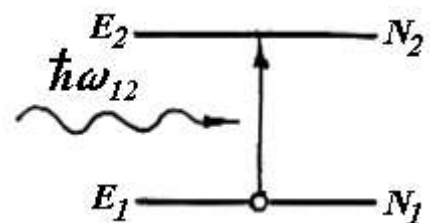


Рис. 16.1.

каючи фотон з енергією $\hbar\omega = E_2 - E_1$). Процес випускання фотона збудженим атомом без будь-яких зовнішніх впливів називається **спонтанним** (або **самовільним**) **випромінюванням** (рис. 16.2).

Спонтанне випромінювання має чисто квантову природу. Згідно з квантовою механікою атом не може перебувати в збудженому стані нескінченно довго.

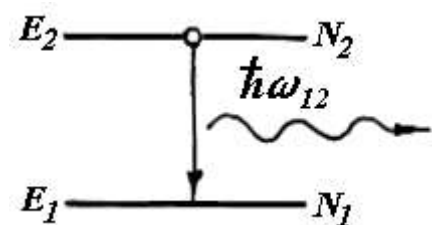


Рис. 16.2.

Але в який саме момент часу відбудеться перехід $E_2 \rightarrow E_1$, передбачити неможливо. Момент переходу є випадковим, випадковим є також напрямок польоту і поляризація фотона, який народжується при цьому.

Кванти світла, які народилися в результаті спонтанних переходів, мають однакову енергію, але ніяк не пов'язані між собою. Фази електромагнітних хвиль, відповідні їм, теж не пов'язані між собою. Тобто спонтанне випромінювання не є когерентним. Всі звичайні джерела світла (лампи розжарювання, світлодіодні і газорозрядні лампи) дають світло шляхом спонтанного випромінювання.

3. Вимушене (індуковане) випромінювання. А. Ейнштейн для пояснення термодинамічної рівноваги між речовиною і випромінюванням, яке випускається і поглинається нею, постулював, що крім поглинання і спонтанного випромінювання має існувати третій, якісно інший тип взаємодії.

Якщо атом перебуває на верхньому енергетичному рівні, то фотон, який пролітає з енергією $\varepsilon_{12} = E_2 - E_1$, може викликати (ініціювати) перехід $E_2 \rightarrow E_1$, тобто повернення атома на більш низький рівень. При цьому перехід $E_2 \rightarrow E_1$ супроводжується випусканням такого ж фотона (рис. 16.3)

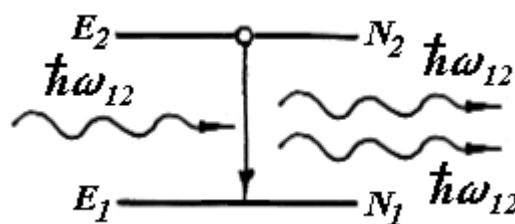


Рис. 16.3.

Такий перехід, який відбувається як результат дії зовнішнього випромінювання, називається **вимушеним**. Новий фотон, як і первинний, має частоту ω_{12} . Більш того, він має такий же напрямок імпульсу і таку ж поляризацію, тобто він є тотожним фотонам, які стимулювали цей процес. Отже, вимушене випромінювання є **когерентним** з тим, яке його змушує.

Якщо атом перебуває на рівні E_1 , то фотон з енергією $\varepsilon_{12} = E_2 - E_1$ спричиняє перехід $E_1 \rightarrow E_2$ (і при цьому знищується). Якщо ж атом знаходиться на рівні E_2 , то фотон спричиняє перехід $E_2 \rightarrow E_1$ (і при цьому народжується ще один фотон). Окремо доводиться, що фотон, який взаємодіє з атомом, з однаковою ймовірністю може або поглинатися, або індукувати випромінювання.

Які ж процеси будуть переважати? Якщо більше атомів знаходиться на нижньому рівні E_1 , ніж на верхньому E_2 , переважають процеси поглинання світла. Якщо ж, навпаки, на рівні E_1 знаходиться менше атомів, ніж на рівні E_2 , будуть переважати процеси вимушеного випромінювання світла.

Кількість атомів в кожному стані, або на кожному рівні енергії (що в даному випадку дорівнює N_1 і N_2) називають **заселеністю рівнів**.

У звичайних умовах, зокрема, в стані теплової рівноваги, заселеності енергетичних рівнів зменшуються зі збільшенням енергії рівнів. Розподіл заселеностей атомних рівнів підпорядковується закону Больцмана:

$$N_i = C \exp(-E_i/kT), \quad (16.1)$$

де N_i - кількість атомів в i -му квантовому стані, яке характеризується енергією E_i , C - константа, k - стала Больцмана, T - абсолютна температура. З формули видно, що більш високі енергетичні рівні мають меншу заселеність, ніж більш низькі рівні (в нашому прикладі $N_2 < N_1$). Це ілюструє схема на рис. 16.4, а.

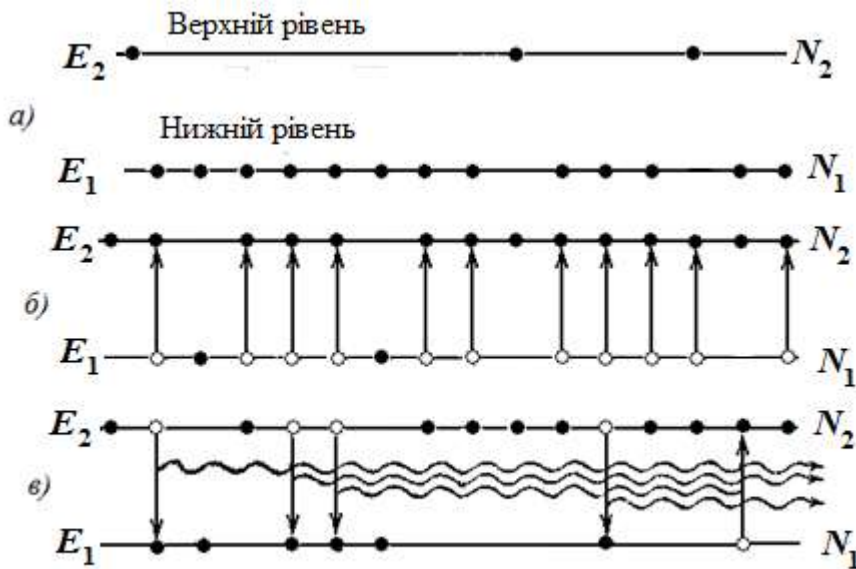


Рис. 16.4.

Тому звичайна речовина не посилює, а тільки поглинає енергію світлової хвилі, яка проходить крізь неї.

Щоб відбулося підсилення початкового потоку фотонів такими ж фотонами вимушеного випромінювання, необхідно досягти стану, при якому число N_2 атомів на більш високому енергетичному рівні E_2 було б більшим, ніж їх число N_1 на нижньому рівні E_1 :

необхідно, як кажуть, досягти *інверсної заселеності* енергетичного рівня E_2 збудженими атомами.

Оскільки ймовірності переходу атома, в який потрапляє фотон, вгору і вниз однакові, підсилення вимушеного випромінювання можливо тільки в тому випадку, коли верхній рівень буде більш заселений, ніж нижній.

Процес створення нерівноважного стану речовини (переведення системи в стан з інверсною заселеністю) називається **накачуванням** (рис. 16.4, б).

У середовищах з інверсними станами вимушене випромінювання може перевищити поглинання, внаслідок чого падаючий пучок світла при проходженні через ці середовища буде підсилюватись (ці середовища називаються **активними**).

Накачування можна здійснити оптичними, електричними і іншими засобами.

Відзначимо *оптичне накачування* - за рахунок світлової енергії спеціальних випромінювачів (газорозрядних імпульсних ламп). В результаті опромінення потужними джерелами світла теплова рівновага в речовині порушується.

Для газоподібних активних середовищ застосовують накачування з використанням *електричного розряду*. Якщо до кінців трубки з розрідженим газом прикласти напругу достатньої величини, в ній виникає газовий розряд. При зіткненні з електронами частина атомів іонізується, що підтримує розряд. Інша частина атомів при зіткненні збуджується, тобто переходить на більш високі рівні. Світін-

ня газового розряду пояснюється спонтанними переходами зі збуджених рівнів на нижні. За деяких умов в електричному розряді виникає інверсія заселеності.

Інверсію заселеності створюють також за допомогою електричного струму в напівпровідниках. Це так звана *інжекція носіїв заряду* в напівпровідниках, яка зводиться до пропускання струму через *p-n* перехід в прямому напрямі.

Так зване *теплове накачування* полягає в сильному нагріванні активного середовища з наступним швидким охолодженням.

Для створення інверсії використовують також *хімічні реакції*.

Сутність цих та інших методів накачування одна - до активного середовища підводяться різні види енергії - електрична, світлова, хімічна, тепла і т. п. Активне середовище потім випромінює цю енергію у вигляді когерентного випромінювання.

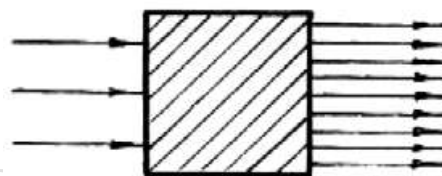


Рис. 16.5.

Припустимо, що інвертоване активне середовище виготовлене. Нехай в це середовище спрямований світловий пучок з резонансною частотою (рис. 16.5).

Проходячи через інвертоване активне середовище, світловий пучок може підсилюватись внаслідок переважання процесів вимушеного випромінювання над процесами поглинання (рис. 16.4, в). Енергія виводиться з активного середовища у вигляді додаткового світлового випромінювання. Первісне світло також присутнє у вихідному світловому потоці. Фактично відбувається підсилення інтенсивності падаючого світла. У цьому полягає принцип роботи оптичного квантового генератора (лазера).

Англійське слово "Laser" є аббревіатурою виразу "Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation", що означає "Підсилення світла за допомогою вимушеного випромінювання". Назва виражає суть дії лазера. Як бачимо, можливість підсилення і генерації світла на основі індукованого випромінювання зводиться до питання створення середовищ з інвертованою заселеністю рівнів енергії.

Після того, як створене інвертоване активне середовище, досить одного фотона, який випадково народився при спонтанних переходах між робочими рівнями, щоб в активному середовищі почала відбуватися безліч вимушених переходів. В результаті з'являється ціла лавина вторинних фотонів, зароджується лазерна генерація.

Однак фотони, що народжуються спонтанно, випромінюються в яких завгодно напрямках. У цих напрямках будуть поширюватися і лавини вторинних фотонів, і випромінювання не матиме когерентних властивостей. Тому в лазерах необхідний ще один елемент - *оптичний резонатор*. У найпростішому випадку оптичним резонато-

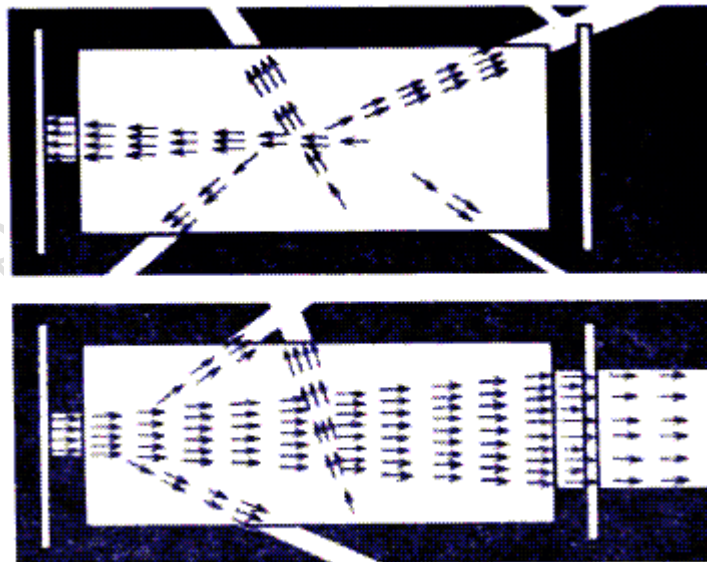


Рис. 16.6.

ром служать *два* плоских дзеркала, звернених одне до одного. Активне середовище розміщується між ними (рис. 16.6).

Якщо фотони рухаються уздовж осі резонатора, вони багаторазово відбиваються від дзеркал і, щоразу проходячи через активне середовище, спричиняють вимушене випромінювання вторинних фотонів. Ті, в свою чергу, спричиняють вимушене випромінювання і т. д. Так як фотони, що виникли при вимушеному випромінюванні, рухаються в тому ж напрямку, що і первинні, потік фотонів вздовж осі системи буде лавиноподібно наростати (рис. 16.6).

Оптичний резонатор здійснює так званий *позитивний зворотний зв'язок*, який полягає в тому, що частина випромінюваної світлової енергії залишається всередині робочої речовини, викликаючи вимушене випромінювання світла все новими збудженими атомами. Наслідком позитивного зворотного зв'язку є лавиноподібне зростання кількості фотонів. Ті ж фотони, які рухаються під кутом до осі резонатора, виходять з активного середовища через його бічну поверхню.

Одне з дзеркал резонатора робиться напівпрозорим (на рис. 16.6 - праве дзеркало), через нього випромінювання виводиться назовні, утворюючи лазерний промінь.

Оптичний резонатор, виконує й іншу функцію - формує монохроматичне випромінювання. Для того щоб випромінювання, яке виходить через напівпрозоре дзеркало, було когерентним, необхідно, щоб послідовні хвильові цуги, які складають його, були узгоджені між собою. Цуги, що відбилися від напівпрозорого дзеркала, проходять через резонатор туди і назад і знову повертаються до напівпрозорого дзеркала.

Утворена внаслідок цього різниця ходу має бути рівною цілому числу довжин хвиль

$$2L = n\lambda, \quad n = 1, 2, \dots$$

Тільки в цьому випадку випромінювання, яке виходить назовні, буде строго монохроматичним. Звідси випливає, що квантовий генератор може створювати монохроматичну хвилю не довільної частоти, а лише з дискретним набором частот ω_n , відповідних допустимим значенням довжини хвилі

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}.$$

Цей набір частот визначається формулою

$$\omega_n = \frac{2\pi c}{\lambda_n} = \frac{\pi c}{L} n. \quad (16.2)$$

Приклад 1. Як приклад, наведемо найбільш поширений газовий лазер - гелій-неоновий лазер. Активним середовищем в такому лазері є суміш інертних газів - гелію і неону, яка міститься в скляній трубці (рис. П.16.2). Тиск газової суміші приблизно 1 мм рт. ст.

Накачування здійснюється в процесі електричного газового розряду - стаціонарного тліючого розряду, який може збуджуватися в трубці постійним струмом за допомогою спеціального пристрою. Вільні електрони, які утворюються в газорозрядній плазмі, стикаються з атомами He і Ne і збуджують їх.

На рис. П.16.1 показана схема енергетичних рівнів атомів гелію і неону. До збудження атоми гелію і неону знаходилися на нижньому (основному) рівні.

Накачування, тобто перехід у збуджений стан, показане на схемі рівнів рис. П.16.1 штриховими стрілками.

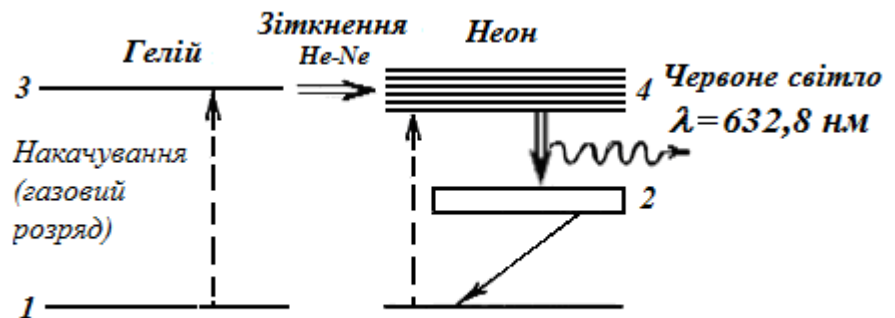


Рис. П.16.1.

Збуджені атоми гелію, стикаючись з незбудженими атомами неону, передають їм свою енергію (процес передачі енергії атомам неону вказаний горизонтальною стрілкою).

Такий процес можливий, оскільки збуджені стани атомів гелію і неону (в нашому прикладі E_3 і E_4) характеризуються майже однаковими значеннями енергії.

Внаслідок цих зіткнень атоми неону переходять на рівень E_4 , а атоми гелію - в основний стан.

Між станом 4 і станом 2 з меншою енергією виникає інверсія заселеності, оскільки стан 2 майже не заселений. Нарешті, перехід атомів неону зі стану 4 в стан 2 супроводжується випромінюванням з довжиною хвилі 632,8 нм, яке і утворює лазерний пучок.

Спустошення рівня 2 відбувається під дією зіткнень атомів Ne зі стінками газорозрядної трубки (показано косою стрілкою на рис. П.16.1). Для ефективного спустошення рівня 2 підбирають оптимальний діаметр трубки лазера. Він дорівнює 7 мм. На рис. П.16.2. показана трубка лазера, яка орієнтована уздовж осі OO резонатора, A - анод, K - катод, 1 - робочий капіляр трубки, 2 - дзеркала оптичного резонатора.

Особливістю гелій-неонового лазера є те, що нижній робочий рівень 2 розміщений досить високо і внаслідок цього має малу заселеність. В результаті гелій-неоновий лазер споживає дуже мало енергії - близько 50 Вт. Типовий діапазон потужностей випромінювання становить 10 мВт.

Незважаючи на низькі енергетичні характеристики, He - Ne лазер є найбільш поширеним газовим лазером. Це обумовлено його унікальними спектральними характеристиками. Він має виключно високу монохроматичність і стабільність випромінювання.

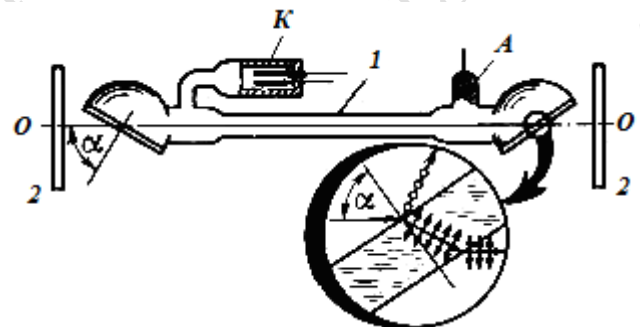


Рис. П.16.2.

Приклад 2. Поляризація лазерного випромінювання. Як відомо, поляризація характеризується орієнтацією вектора напруженості E електричного поля в електромагнітній хвилі.

Народжений в результаті спонтанного переходу квант може мати довільний напрям поляризації. Квант, який з'являється в результаті вимушених переходів, матиме ту ж поляризацію, що і той, який цей процес викликав.

Тому для отримання лінійно поляризованого випромінювання необхідно вводити в резонатор лазера певний елемент, який виділяє заданий напрямок поляризації.

У газових лазерах в якості такого елемента використовують пластинки, що обмежують об'єм активного середовища. Вони розміщені так, щоб перпендикуляр до пластинки утворював з віссю резонатора кут Брюстера (кут α на рис. П.16.2.). В цьому випадку відбитий і заломлений промені є повністю поляризованими (див., наприклад І.П.Гаркуша, В.П.Курінний. «Хвильова оптика», § 23)

На рис. П.16.2 стрілки показують, що коливання електричного вектора відбуваються в площині падіння, а точки позначають коливання в перпендикулярному напрямку. З розрядної трубки виходить випромінювання, поляризоване в площині падіння.

Визначною рисою лазерів є виняткова *здатність до концентрації світлової енергії*:

- *в спектрі* - дуже вузька спектральна лінія випромінювання, суворі мономатичність;
- *в часі* - можливість отримувати надкороткі (пікосекундні) імпульси світла;
- *в просторі* і за напрямком поширення (дуже мала кутова розбіжність в пучку) - можливість отримувати практично паралельний пучок, розбіжність якого визначається тільки дифракційними ефектами і тому дуже мала (розбіжність пучка $\sim 1''$), і сфокусувати все випромінювання в малій області з розмірами порядку довжини хвилі. Густина потужності лазерного випромінювання при цьому досягає величезної величини $10^3 - 10^7$ Вт/см² для лазерів безперервної дії і $10^4 - 10^{12}$ Вт/см² імпульсних лазерів.

Для порівняння наведемо густину потужності випромінювання на поверхні Сонця - 10^8 Вт/см².

Незвичайні властивості лазерного випромінювання знаходять в даній час широке застосування. Лазери використовують для обробки, різання і мікрозварювання твердих матеріалів, для надточних дистанційних вимірювань лінійних переміщень, при нівелювальних роботах, для найтонших медичних операцій, для отримання і дослідження високотемпературної плазми (лазерного керованого термоядерного синтезу), в комп'ютерній техніці, для цілей зв'язку і багато чого іншого.

Приклад 3. Типи лазерів. Існує велика кількість типів лазерів. Лазери працюють в дуже широкому діапазоні хвиль як в безперервному, так і в імпульсному режимах. Активні середовища і фізичні явища, які застосовують для їхнього збудження, теж різноманітні. Можна класифікувати лазери за типом активного середовища і способам накачування.

1. *Твердотільні лазери.* Зазвичай це імпульсні лазери. Активне середовище в них являє собою діелектричний кристал або скло з домішкою спеціальних іонів, які грають роль активних центрів. У цих лазерах використовується оптичне накачування. Приклади: лазери на рубіні ($\lambda = 0,6943$ мкм), ітрій - алюмінієвому гранаті (Nd: YAG) з неодимом ($\lambda = 1,064$ мкм), склі з неодимом ($\lambda = 1,06$ мкм). Пікова потужність досягає ТВт.

2. *Газорозрядні лазери.* Зазвичай це лазери безперервної дії. Активне середовище - газ під тиском 1 - 10 мм рт. ст. Збуджуються самостійним електричним розрядом. Розрізняють газорозрядні лазери за типами активних центрів - іонів, вільних атомів, вільних молекул. В іонних лазерах ($\lambda \sim 0,3 - 1$ мкм) застосовують дуговий розряд, в лазерах на атомних переходах ($\lambda \sim 0,4 - 100$ мкм) і молекулярних лазерах ($\lambda \sim 1 - 50$ мкм) - тліючий.

Приклади: гелій - неоновий (He - Ne) лазер ($\lambda = 3,39; 1,15; 0,6328$ мкм - червона область видимого спектру); аргонний (Ar) лазер ($\lambda = 0,488$ мкм, блакитна лінія, $\lambda = 0,515$ мкм, зелена

лінія); У техніці широко використовується CO_2 - лазер з потужністю порядку кВт ($\lambda = 10,6$ мкм, ІК - діапазон).

3. *Напівпровідникові лазери.* Активне середовище - два напівпровідника різного типу (p - n - перехід), або чисті бездомішкові напівпровідники. У цих лазерах використовуються переходи не між рівнями окремих атомів або молекул, а між дозволеними енергетичними зонами кристалів. Накачування оптичне, електронним пучком або інжекцією носіїв заряду - електронів і дірок. Використання різних напівпровідників дозволяє отримати випромінювання у видимому і інфрачервоному діапазонах на довжинах хвиль від 0,7 до 1,6 мкм. Приклади: інжекційний лазер на арсеніді галію GaAs, сульфіді кадмію CdS.

4. *Електроіонізаційні лазери.* Газові CO_2 - лазери з підвищеним тиском в них. Накачування здійснюється швидкими електронами, для отримання яких використовують іонізуюче випромінювання в поєднанні з зовнішнім електричним полем.

5. *Газодинамічні лазери.* Активне середовище - газові суміші з молекул CO_2 , C_2N_2 , CO , N_2 , O_2 , H_2 та ін. Інверсія створюється нагріванням газової суміші (горіння, вибух) до температур приблизно 1000 - 2000 К з наступним швидким охолодженням за рахунок адіабатного розширення газу при виході його з вузької щілини або сопла. Генерують в інфрачервоному діапазоні, потужність досягає 100 кВт в безперервному режимі.

6. *Рідинні лазери.* В якості активного середовища використовують розчини органічних барвників або спеціальні рідини, активовані іонами рідкісноземельних елементів - тербію Tb, європію Eu, самарію Sm.. Накачування оптичне, підбором барвника можна отримати генерацію на будь-якій довжині хвилі від ІЧ - до УФ - діапазону ($\lambda \sim 0,3 - 1,3$ мкм).

7. *Інші типи* - хімічні, ексимерні, лазери на вільних електронах, фотодисоційні, плазмові, рентгенівські лазери з ядерним накачуванням і ін.

Контрольні питання

1. Який дослід довів дискретність значень енергії атомів ртуті?
2. Чому в планетарній моделі атома гравітаційна сила притягання електронів до ядра ніякої ролі не грає?
3. Поясніть, у чому постулати Бора суперечать класичній механіці і електродинаміці.
4. Які значення можуть набувати радіуси електронних орбіт і енергія електрона в атомі водню в теорії Бора?
5. Як можна пояснити зв'язок правила квантування з гіпотезою де Бройля про хвильові властивості електрона.
6. Яка приблизно швидкість електрона на першій від ядра борівській орбіті в порівнянні зі швидкістю світла?
7. Як за допомогою постулатів Бора пояснюється лінійчатий спектр атома?
8. Який зміст мають числа n і m в узагальненій формулі Бальмера?
9. Які спектральні лінії можуть виникнути при переході атома водню зі стану з $n = 4$.
10. Якими квантовими числами описується стан електрона в атомі? Який фізичний зміст цих чисел і які значення вони можуть приймати?
11. Які правила квантування моменту імпульсу і проєкції моменту на виділену вісь?
12. Від яких квантових чисел залежить енергія атома?
13. Якому правилу відбору підпорядковується орбітальне квантове число l ?

14. Сформулюйте принцип Паулі і поясніть, яким чином він використовується для пояснення періодичності хімічних властивостей різних елементів.
15. Яке число електронів в атомі утворює замкнуту оболонку з квантовим числом $n = 1, 2, 3, 4, 5$?
16. Який фізичний зміст має вираз "електронна хмара"?
17. Чим відрізняються спонтанне і вимушене випромінювання?
18. Чому необхідно створення інверсної заселеності рівнів для роботи лазера?
19. Чим обумовлена когерентність світла, що випускається при вимушеному випромінюванні?
20. Поясніть, яким чином завдяки дзеркальному резонатору в лазері здійснюється позитивний зворотний зв'язок.
21. Яка роль дзеркал резонатора в формуванні когерентного випромінювання лазера?

Рекомендована література

1. Кучерук І. М., Горбачук І.Т. Загальний курс фізики. У 3 т. Т.3: Оптика. Квантова фізика. – К.: «Техніка», 2006, – 518 с.
2. Савельев І.В. Курс фізики. В 3-х т. Т.3: Квантова оптика. Атомна фізика. Фізика твердого тіла. Фізика атомного ядра і елементарних частинок. – М.: «Наука», 1989, – 304 с.
3. Детлаф А.А., Яворський Б.М. Курс фізики. – М. «Высш. шк.», 1989, – 609 с.
4. Бутиков Е. И., Кондратьев А. С, Уздин В. М. Фізика: Учеб. пособие: В 3 кн. Кн.3. Структура і властивості речовини. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004 — 336 с.
5. Вихман Э. Квантовая физика. Берклиевский курс физики, т.4. Перевод с англ. изд.2-е. М. «Наука», 1976.- 387 с.
6. Сивухин Д.В. Общий курс физики. – Атомная и ядерная физика М.: «Наука», 1986.– - Ч.1. Атомная физика, 416 с.
7. Оррир Дж. Фізика. в 2 т. М. 1981. т.2. 288с.
8. Калашников Н.П., Смондырев М.А. Основы физики. В 2 т. Т. 2. М. Дрофа, 2004, 431 с.
9. Белонучкин В.Е., Зайкин Д.А., Ципенюк Ю.М. Основы физики в 2 т. Т.2. Квантовая и статистическая физика. М.: Физматлит, 2001. – 504 с.
10. Матвеев А.Н. Атомная физика. Учебное пособие для студентов вузов. — М.: Высшая школа, 1989. — 439 с
11. Гаркуша І.П., Куринної В.П. Фізика. Ч.4. Колебания и волны Учебное пособие: – Д. Национальный горный университет, 2015. – 90 с. – (Библиотека иностранного студента).
12. Гаркуша І.П., Куринної В.П. Фізика. Ч. 5. Волновая оптика. Учебное пособие: – Д. Национальный горный университет, 2015. – 58 с. – (Библиотека иностранного студента).
13. Гаркуша І.П. Элементы физики полупроводников: Учеб пособие: – Д.: Национальный горный университет, 2012.– 74 с. – (Библиотека иностранного студента).
14. Астахов А.В., Широков ЮМ. Курс фізики: В 3 т. Т. 3: Квантовая физика. М.: Наука, 1983.
15. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Вып. 8, 9. Квантовая механика / Пер. с англ. Г.И. Копылова; Под ред. Я.А. Смородинского. М.: Мир, 1978.
16. Чертов А.Г. Воробьев А.А. Задачник по физике. – М.: «Физмат лит», 2005 – 640 с.
17. Гаркуша І.П., Горбачук І.Т., Куринний В.П. та ін. Загальний курс фізики: Збірник задач – К.: «Техніка», 2004,– 560 с.
18. Физический энциклопедический словарь. М.: Сов. энциклопедия, 1984.